

Travail présenté à
M. Thoeniq & M. Eyquem

Analyse économique : macroéconomie

**Comment la modélisation VAR a permis de rendre la
macroéconométrie plus efficace pour modéliser les effets
des politiques économiques ?**

Par
Guillaume Pavé

Université de Lausanne
13 Janvier 2019

Table des matières

<i>Table des matières.....</i>	<i>- 1 -</i>
1 INTRODUCTION	- 2 -
2 DES ORIGINES DE MACROECONOMETRIE A SON AGE D'OR.....	- 3 -
2.1 DE LA NAISSANCE AUX ANNEES 70.....	- 3 -
2.2 APRES LES ANNEES 70	- 6 -
2.2.1 Critique de Lucas.....	- 6 -
2.2.2 Critique de Sims.....	- 7 -
3 PRESENTATION D'UN OUTIL D'ECONOMETRIE : LE PROCESSUS VAR	- 8 -
3.1 REPRESENTATION D'UN PROCESSUS VAR.....	- 8 -
3.1.1 Introduction.....	- 8 -
3.1.2 La représentation générale.....	- 8 -
3.2 ESTIMATION DES PARAMETRES	- 11 -
3.2.1 Les méthodes d'estimations possibles	- 11 -
3.2.2 Détermination du nombre de retards	- 11 -
3.3 LA DYNAMIQUE D'UN VAR.....	- 12 -
3.3.1 Analyse et orthogonalisation d'un choc	- 12 -
3.3.2 Décomposition de la variance	- 15 -
3.4 FORCES ET FAIBLESSES DU VAR.....	- 15 -
4 CAS PRATIQUE	- 16 -
4.1 ÉTUDE DE LA STATIONNARITE DES SERIES TEMPORELLES	- 17 -
4.1.1 Étude des graphiques	- 17 -
4.1.2 Test de Dickey-Fuller : tester les suppositions faites à partir des graphiques.....	- 18 -
4.2 MODELISATION DU VAR	- 20 -
4.2.1 Choix du nombre de retards optimal.....	- 20 -
4.2.2 Estimation du VAR.....	- 20 -
4.2.3 Étude de la stationnarité du VAR.....	- 21 -
4.3 ANALYSE DE LA DYNAMIQUE DU VAR.....	- 21 -
4.3.1 Choix de l'ordre des variables, justifications économiques.....	- 21 -
4.3.2 Étude des fonctions de réponses impulsionnelles.....	- 21 -
4.3.3 Analyse décomposition de la variance	- 22 -
4.4 CONCLUSION.....	- 23 -
5 CONCLUSION.....	- 23 -
6 BIBLIOGRAPHIE	- 24 -

1 Introduction

On peut définir l'économétrie comme étant la mesure des phénomènes économiques. L'économétrie constitue une branche de la science économique qui fait appel conjointement à la théorie économique, aux statistiques et aux mathématiques. Son objectif est d'analyser et de vérifier, c'est à dire tester les phénomènes et les théories économiques.

Ainsi, l'économétrie est née en 1929 lors d'une période noire de l'économie « La Grande Dépression » : l'un des plus grands krachs boursiers de l'histoire. Avec les modèles économiques existants, il fut impossible de prévoir l'écclatement de cette bulle boursière.

C'est ainsi que les pays et les économistes ont travaillé afin de trouver un moyen de faire des prévisions économiques qui soient beaucoup plus précises que les modèles existants. C'est ainsi qu'en assemblant l'étude de l'économie, des mathématiques et des statistiques, ils sont parvenus à la création d'une nouvelle branche de l'économie : **l'économétrie**.

Les pères fondateurs de cette discipline sont **Ragnar Frisch, Charles Roos et Irving Fischer** lors de la création de la « Econometrics Society » en 1930. En 1933, Frisch donnera la définition suivante de l'économétrie :

« L'économétrie n'est pas du tout la même chose que la statistique économique. Elle ne doit pas non plus être identifiée à ce que l'on appelle la théorie économique générale, bien qu'une partie considérable de cette théorie ait un caractère résolument quantitatif. L'économétrie ne doit pas être non plus considérée comme synonyme de l'application des mathématiques à l'économie. L'expérience a montré que chacun de ces trois points de vue, celui des statistiques, celui de la théorie économique et celui des mathématiques, est une condition nécessaire, mais non suffisante en elle-même, à une compréhension réelle des relations quantitatives dans la vie économique. C'est l'unification des trois qui est puissante. Et c'est cette unification qui constitue l'économétrie ».

La réalisation de l'unification de ces trois disciplines va être facilitée par le fort progrès technique que l'humanité a connu au cours du XXe siècle : développement de grandes bases de données et de l'outil informatique.

L'économétrie, à travers notamment les modèles macroéconométriques, est caractérisée par un contenu beaucoup plus opérationnel que théorique qui sera très important pour les économistes et les décideurs politiques. Ces modèles macroéconométriques décrivant l'activité économique d'un pays, par exemple, vont être utilisés comme instrument de simulation et donc comme une aide à la décision de politiques.

L'économétrie est également dans un domaine aussi très important de notre économie : **la finance**. Son utilisation a connu un franc succès dans le domaine financier car il a permis de mieux appréhender la dynamique des marchés financiers par les agents du domaine.

Au cours du XXe siècle, nous avons pu voir une explosion des travaux aux contenus économétriques. Cela montre la place grandissante de l'économétrie dans l'étude macro et micro-économique de notre société. D'après une étude publiée en 2006 par les économistes **Kim, Morse et Zingales**, au début des années 1970, seulement 11% des articles les plus cités étaient empiriques alors qu'à la fin des années 1990, ce pourcentage finira par augmenter jusqu'à 60%. Cet essor de l'économétrie s'est construit en parallèle de la création de nombreuses revues à ce sujet : *Econometrica, Journal of Applied Econometrics...*

Le succès de cette « nouvelle » branche de l'économie se voit par le nombre d'économètres ayant reçu le prix Nobel d'économie : Robert Engle & Clive Granger (2003), Christopher Sims (2011).

Ainsi, il est juste de dire qu'aujourd'hui l'économétrie constitue une discipline à part entière ainsi qu'une branche fondamentale de l'économie.

Dans ce projet, nous allons voir dans un premier temps comment l'économétrie a évolué depuis sa naissance jusqu'à nos jours à travers deux périodes marquantes pour la discipline : le XXe siècle et le début du XXIe siècle.

Ensuite, dans la seconde partie, nous verrons un outil économétrique initié par Christopher Sims (Nobélisé en 2011) et très apprécié par la communauté économique pour l'étude des théories économiques : le **VAR (vecteur autorégressif)**. L'étude de cet outil se fera tout d'abord par son explication. De plus, nous verrons comment il est possible d'estimer un VAR et d'analyser le modèle. Pour terminer, nous discuterons de ses limites et des extensions possibles de ce dernier afin de répondre à ses faiblesses grâce notamment au modèle SVAR.

Dans la dernière partie de ce projet, nous estimerons un VAR à 2 variables (PIB réel et taux d'intérêt à court terme Suisse) afin d'analyser la réponse du PIB Suisse à un choc sur le taux d'intérêt.

2 Des Origines de Macroéconométrie à son âge d'OR

2.1 De la Naissance aux Années 70

Comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons considérer que la « vraie » naissance de l'économétrie fut lors de la fondation de la « Econometrics Society » par Frisch et Fischer en 1930, plus précisément le 29 décembre à Cleveland. Leur objectif est de « favoriser les études à caractère quantitatif qui tendent à rapprocher le point de vue théorique du point de vue empirique dans l'exploration des problèmes économiques ». En 1933, un groupe de recherche consacré à l'économétrie, la **Cowles Commission** créa également la revue « *Econometrica* » dont le rédacteur en chef fut Ragnar Frisch. Cette revue deviendra le principal véhicule de la pensée économétrique et est d'ailleurs la 2^e revue la plus lue dans le classement des revues économiques. C'est de plus, par cette revue que les grands changements de pensées économétriques vont apparaître, notamment la critique de Sims avec son article « **Macroeconomics and reality** ».

C'est par ailleurs dans cette revue que Frisch va définir les objectifs de l'économétrie :

« Son principal objectif devrait être de promouvoir les études qui visent à l'unification des approches quantitatives théoriques et empiriques des problèmes économiques et qui sont mues par une pensée constructive et rigoureuse similaire à celle qui domine dans les sciences naturelles »

La première présentation d'un modèle économétrique fut présentée par Jan Tinbergen en 1935 lors d'un meeting à la Econometrics Society. A la suite de cela, il sera embauché par L'ONU, anciennement la Société des Nations pour tester son modèle très innovant pour l'époque.

Durant les années 30, la Cowles Commission étudia directement les phénomènes et combina des mesures statistiques directes et des études formalisées de l'économétrie. Cependant, après ces premières recherches, le groupe de recherche va prendre une nouvelle direction. Il va se diriger vers quatre nouveaux principes :

1. Des théories qui prennent la forme d'équations simultanées
2. Introduction de termes aléatoires dans les équations qui reflètent l'influence de causes irrégulières multiples.

3. Les données sont mises sous la forme de séries temporelles.
4. Beaucoup de données publiées sont agrégées.

On peut ainsi dire qu'avant les années 1930, la théorie des probabilités est quasi-inutilisée. C'est en 1944, avec son article « The Probability Approach in Econometrics » dans lequel **Trygve Haavelmo** défend que les modèles économiques doivent être probabiliste afin d'être cohérent avec les données.

John Maynard Keynes, précurseur de la macroéconomie avec son ouvrage « La théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie » fut une des personnes les plus influentes de l'évolution de l'économétrie dans les années 1950. Suite à la grande Dépression de 1930, le désarroi s'était emparé des décideurs politiques et économiques, qui ne parvenaient pas à prévoir l'évolution de la conjoncture économique. Par conséquent, la sortie de cette crise ne fut pas une mince affaire. Une des solutions proposées par les économistes de l'époque fut une *déflation salariale*, une proposition qui fut sévèrement critiquée par Keynes. Selon lui, le facteur qui expliqua le fort taux de chômage de l'époque est *l'insuffisance de demande agrégée*, c'est à dire qu'une forte partie du revenu des ménages fuyait le circuit de la consommation.

Par ailleurs, son ouvrage révolutionnaire a créé une forte polémique dans la communauté économique, créant ainsi deux groupes d'économistes : **les classiques et les keynésiens**.

Parmi les keynésiens, trois économistes se sont illustrés en proposant une décomposition de la théorie de Keynes grâce aux mathématiques : **Harrod, Meade et Hicks**. Ce sera le modèle IS-LM de Hicks qui sera massivement adopté par les économistes. Il deviendra le « modèle standard » de la macroéconomie qui est enseigné lors d'études économiques et servira également de base pour les modèles dynamiques. Il marquera le début des modèles à équations simultanées en économétrie afin d'expliquer des phénomènes économiques.

Modèle IS-LM :

$$IS : Y = C(Y, T) + I(r) + G + NX(Y)$$

$$LM: \frac{M}{P} = L(Y, r)$$

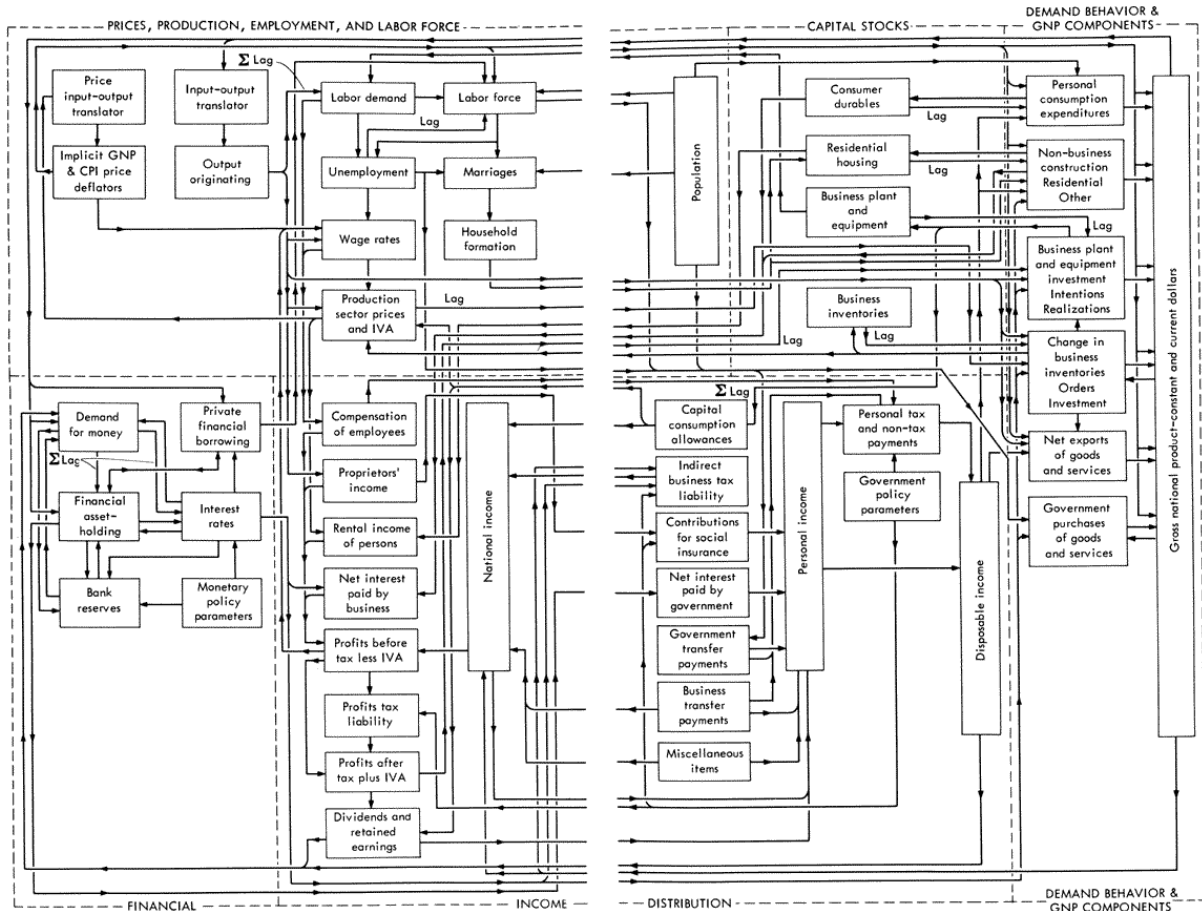
A ses débuts, ce modèle subit une sévère critique d'un économiste de renom : **Lawrence Klein**. Selon lui, le modèle IS-LM est trop statique pour représenter le dynamisme des phénomènes économiques. Ainsi, Klein se donna comme objectif de créer un modèle économétrique dynamique illustrant les pensées présentes dans l'ouvrage de Keynes. Selon lui, les concepts illustrés dans la « *Théorie Générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* » invitaient à une application empirique. En 1952, avec l'aide de Goldberger, Klein publia le livre « *An Econometric Model of the United States* ». Dans cet ouvrage, il fait la présentation d'un modèle économétrique dynamique dont l'objectif est de fournir des prévisions mais également de permettre la simulation des effets de diverses politiques économiques. Le modèle fut finalement lancé en 1955 à l'université du Michigan.

Modèle de Klein-Goldberger :

1. The Consumption equation :
 - $C_t = a_0 + a_1(W_1 + W_2 + T_W)_t + a_2(P - S_P - T_P)_t + a_3(A - T_A)_t + a_4C_{t-1} + a_5(L_1)_{t-1} + a_6(N_P)_t + u_{1,t}$
2. The Investment equation :
 - $I_t = \beta_0 + \beta_1(P + A + D - T_P - T_A)_t + \beta_2(P + A + D - T_P - T_A)_{t-1} + \beta_3(i_L)_{t-1} + \beta_4K_{t-1} + \beta_5(L_2)_{t-1} + u_{2,t}$
3. The Corporate Savings Equation :
 - $(SP)_t = \gamma_0 + \gamma_1(P_C - T_C)_t + \gamma_2(P_C - T_C - S_P)_{t-1} + \gamma_3B_{t-1} + u_{3,t}$
4. The Relation Between Corporate Profits and Nonwage Non-farm Income:
 - $(P_C)_t = \delta_0 + \delta_1P_t + \delta_2P_{t-1} + u_{2,t}$
5. The Depreciation Equation :
 - $D_t = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{K_t + K_{t-1}}{2} + \varepsilon_3(Y + T + D - W_2)_t + u_{5,t}$
6. The Demand For Labor Equation:
 - $(W_1)_t = \zeta_0 + \zeta_1(Y + T + D - W_2)_t + \zeta_2(Y + T + D - W_2)_{t-1} + \zeta_3t + u_{6,t}$
7. The Production Equation :
 - $(Y + T + D - W_2)_t = \eta_0 + \eta_1[h(N_W - N_G) + N_E + N_F]_t + \eta_2 \frac{K_t + K_{t-1}}{2} + \eta_3t + u_{7,t}$
8. The Labor Market Adjustment Equation:
 - $w_t - w_{t-1} = \theta_0 + \theta_1(N - N_W - N_E - N_F)_t + \theta_2(p_{t-1} - p_{t-2}) + \theta_3t + u_{8,t}$
9. The Import Demand Equation :
 - $(F_I)_t = \iota_0 + \iota_1 \left[(W_1 + W_2 + P + A - T_W - T_P - T_A) \frac{p}{p_I} \right]_t + \iota_2(F_I)_{t-1} + u_{9,t}$
10. The Agricultural Income Determination Equation (à revoir):
 - $\left(A \frac{p}{p_A} \right)_t = \kappa_0 + \kappa_1 \left[(W_1 + W_2 + P - S_P - T_W - T_P) \frac{p}{p_A} \right]_t + \kappa_2 \left[(W_1 + W_2 + P - S_P - T_W - T_P) \frac{p}{p_A} \right]_{t-1} + \kappa_3 \left(\frac{p}{p_A} \right)_t + \kappa_4(F_A)_t + u_{10,t}$
11. The relation Between Agricultural and Nonagricultural Prices:
 - $(p_A)_t = \lambda_0 + \lambda_1p_t + \lambda_2(p_A)_t + u_{11,t}$
12. The Household Liquidity Preference Equation:
 - $(L_1)_t - \mu_1(W_1 + W_2 + P + A - T_W - T_P - S_P - T_A)_t = \mu_0[(i_L)_t - i_L^0]^{\mu_2} u_{12,t}$
13. The Business Liquidity Preference Equation:
 - $(L_2)_t - v_1(W_1)_t = v_0 + v_2(p_t - p_{t-1}) + v_3(L_2)_{t-1} + u_{13,t}$
14. The relation Between Short and Long Term Interest Rates:
 - $(i_L)_t = \xi_0 + \xi_1(i_S)_{t-3} + \xi_2(i_S)_{t-5} + u_{14,t}$
15. The Money Market Adjustment Equation:
 - $\frac{(i_S)_t - (i_S)_{t-1}}{(i_S)_{t-1}} = o_0 + o_1R_t + u_{15,t}$
16. Definitions and Accounting Identities :
 - $C_t + I_t + G_t + (F_E)_t + (F_I)_t = Y_t + T_t + D_t$
 - $(W_1)_t + (W_2)_t + P_t + A_t = Y_t$
 - $h_t \frac{W_t}{p_t} (N_W)_t = (W_1)_t + (W_2)_t$
 - $K_t - K_{t-1} = I_t - D_t$
 - $B_t - B_{t-1} = (S_P)_t$

A la fin des années 1960, Klein deviendra le leader du projet « Brookings-SSRC » initié par la Brookings Institution, un de plus anciens « *think tanks* » spécialisé dans la recherche et la formation dans le domaine des sciences sociales tel que l'économie, l'économie mondiale ou encore le développement. L'objectif de ce projet fut la construction d'un modèle économétrique permettant la prédiction du développement de l'économie américaine à court terme. Grâce à l'évolution de la technologie, notamment de la puissance de calcul informatique, ce modèle sera très impressionnant pour l'époque puisque la dernière version du modèle comprendra environ 300 équations. Ce grand nombre d'équations permettra de représenter les différentes relations entre les agrégats économiques et les comportements des agents. Ainsi, le modèle Brookings servira à modéliser *mathématiquement* les relations suivantes :

Flow diagram of Brookings-SSRC Econometric model



2.2 Après les années 70

Suite à la crise pétrolière des années 1970 et sa stagflation (forte inflation accompagnée d'un fort taux de chômage : une dynamique contraire à la courbe de Phillips très utilisée à cette époque), ces premiers modèles économétriques vont subir de sévères critiques, en particulier par deux économistes nobelistes : **Robert Lucas & Christopher Sims**.

2.2.1 Critique de Lucas

Lucas, comme la plupart des économistes de l'époque, a commencé par travailler dans la macro-économie keynésienne. Cependant, il en deviendra insatisfait. Selon lui, elle prend très peu en compte la micro-économie, ce qui entraîne des distorsions entre les modèles utilisés et la réalité.

Selon Lucas, les politiques monétaires et budgétaires n'agissent pas seulement sur l'économie mais aussi sur les anticipations des agents.

Les modèles macroéconomiques existants pouvaient être utiles pour faire des prévisions économiques mais en aucun cas pour prévoir les effets d'un changement de politique économique (politique budgétaire *expansionniste* ou politique monétaire *restrictive*).

Il formula toutes ses pensées dans un travail intitulé « *Econometric policy evaluation : A critique* » en 1976.

Pour lui, Keynes a davantage aidé l'expansion du socialisme dans le monde que la science économique. Ainsi, on peut voir que la critique de Lucas est vraiment virulente par rapport aux pensées de l'époque. C'est d'ailleurs elle qui va conduire au développement des outils

économétriques que les économistes utilisent encore aujourd'hui comme le DSGE. Ces outils sont dérivés des suggestions faites par Lucas lors de son article. Selon lui, il est plus vraisemblable d'utiliser des **modèles structurels** : des modèles dans lesquels on considère que les agents agissent rationnellement et ainsi adaptent leur comportement en fonction de leur environnement.

2.2.2 Critique de Sims

Cette Fin du XXe siècle sera également marquée par un autre économiste & économètre : **Christopher Sims**. Avec son compère Thomas Sargent, il obtient le prix Nobel d'économie en 2011 pour ses travaux empiriques sur les causes et effets de la macroéconomie. Il est possible de résumer toutes ses pensées et ses travaux par l'une de ses phrases pleine de sens pour tout économiste : « *Méfiez-vous des a priori théoriques. Laissez parler les données* ». Ces « a priori théoriques » des modèles macroéconomiques d'inspiration keynésienne sont les limites de ces premiers modèles économétriques. Dans « *Macroeconomics and reality* » publié en 1980 dans « *Econometrica* », Sims formula une virulente critique de ces modèles. Selon lui, ils souffrent de nombreuses insuffisances qui expliquent pourquoi ils leur furent impossible de prévoir cette période de Stagflation lors de la crise pétrolière. Il est possible de résumer ces insuffisances en 3 grandes parties :

1. Une restriction *a priori* trop forte sur les paramètres, sans aucune justification statistique, par rapport à ce que la théorie prédit : *l'exogénéité de certaines variables est postulée sans être formellement testée* (ex : politique budgétaire, politique monétaire)
2. Une absence de tests sur la structure causale (par exemple, *test de Granger*), c'est à dire que le choix des formes fonctionnelles (restrictions, exclusion de variables, structure de retards) relève de décisions arbitraires, donc de décisions qui n'ont pas été testées à l'aide de données.
3. Un traitement inadéquat des anticipations rejoignant ainsi la critique de Lucas sur ce point.

Dans « *Macroeconomics and reality* », Sims suggère d'utiliser un outil statistique non contraint et dynamique : le modèle vectoriel autorégressif (**VAR**) comme alternative aux modèles macroéconométriques de l'époque.

Cet article ainsi que l'outil proposé par Sims résonnent encore à l'heure d'aujourd'hui dans la communauté économique (académique et privée) avec de nombreuses extensions et développement de ce dernier. Sims fait partie des grands noms de l'étude économétrique de notre économie.

Avec ces deux critiques cités précédemment, les modèles macroéconométriques vont migrer vers des modèles utilisant des séries temporelles. Cela va permettre de mieux refléter les anticipations rationnelles des agents : ce qui s'est passé va compter pour le futur.

Pour modéliser ces relations, de nombreux outils statistiques et mathématiques vont être utilisés comme par exemple les retards, les estimations statistiques (l'estimateur des moindres carrés...), des tests de stationnarités (test de Dickey-fuller, test KPSS...) et les analyses statistiques (l'analyse de la variance du modèle estimé...).

3 Présentation d'un outil d'économétrie : le processus VAR

3.1 Représentation d'un processus VAR

3.1.1 Introduction

Dans le reste du projet, nous travaillerons avec l'outil statistique préconisé par Christopher Sims : le VAR. Comme vu auparavant, son utilisation par le nobelliste a permis de faire de la prévision économique ainsi que l'analyse d'effets de changements de politiques. Cette approche a totalement perturbé les habitudes de l'époque en termes de modélisation économétrique.

Ainsi, dans un premier temps, nous verrons comment un VAR peut être représenté. Dans un second temps, nous verrons comment nous pouvons faire son estimation et pour finir, nous analyserons la dynamique de cet outil statistique.

Avant de pouvoir estimer un VAR, il faut d'abord savoir à quoi ressemble ce processus statistique. Comme vu auparavant, un VAR est un **Vecteur Auto-régressif** donc il s'agit d'un vecteur de plusieurs *modèles Auto-régressifs (AR)*. Ces deux outils statistiques vont être estimés à travers des *séries temporelles*, c'est à dire une suite de valeurs numériques mesurant l'évolution d'une quantité au cours du temps. En évaluant les valeurs passées de la série temporelle, le VAR et l'AR ont pour but de prévoir le comportement futur des variables.

3.1.2 La représentation générale

La formule générale d'un AR(p) où p est le nombre de retards s'écrit comme ceci :

$$y_t = a_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \dots + b_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Avec ce modèle AR, nous expliquons la valeur de y_t à travers ses valeurs passées. Un processus autorégressif va expliquer la variable à travers les valeurs passées de cette variable et non avec l'aide d'autres variables explicatives comme par exemple x_t . Ainsi, p (le nombre de retards) va déterminer le nombre de période passées que l'on va mettre dans notre modèle afin de déterminer la variable voulue. Par exemple, si $p = 3$, l'explication de y_t se fera à l'aide de y_{t-1} , y_{t-2} et y_{t-3} .

L'objectif d'un VAR sera de capter des interdépendances à travers différentes séries temporelles (y_t et x_t) et donc de trouver la part d'explication d'une variable endogène sur les autres variables endogènes.

Si nous supposons un VAR d'ordre $p = 5$ pour expliquer deux variables endogènes y_t et x_t , nous aurons l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 + \sum_{i=1}^5 \phi_{i11} y_{t-i} + \sum_{i=1}^5 \phi_{i12} x_{t-i} + d_1 x_t + \epsilon_{yt} \\ x_t &= a_1 + \sum_{i=1}^5 \phi_{i21} x_{t-i} + \sum_{i=1}^5 \phi_{i22} y_{t-i} + d_2 y_t + \epsilon_{xt} \end{aligned}$$

Les variables y_t et x_t sont considérées comme des séries stationnaires, c'est à dire que ce sont les valeurs des variables ne comportant ni tendance ni saisonnalité et donc fluctuant autour d'une moyenne constante. Cette hypothèse est peu vraisemblable pour des variables économiques. Cependant, nous supposons que ces deux variables soient stationnaires pour simplifier la description du modèle. Lors de l'utilisation de séries temporelles, il faudra bien évidemment tenir compte des tendances et des effets de saisonnalités des variables grâce à des tests comme celui de Dickey-fuller (simple ou augmenté) ou le test KPSS afin de détecter ces dernières et de les incorporer dans le modèle afin de le corriger.

Dans ce Var d'ordre 5, nous avons également des perturbations ε_{yt} et ε_{xt} qui sont des bruits blancs, c'est à dire respectant les conditions suivantes :

1. $E[\varepsilon_t] = 0$, chaque terme d'erreur a une espérance égale à zéro
2. $E[\varepsilon_t \varepsilon'_t] = \Sigma$ Où Σ est la matrice variance covariance du terme d'erreur ($k \times k$)
3. $E[\varepsilon_t \varepsilon'_{t-k}] = 0, \forall k \neq 0$ Cela signifie que chaque terme d'erreur d'une période est indépendant des termes d'erreurs des autres périodes

En regardant ce processus VAR à 5 retards et 2 variables, nous pouvons constater qu'il y a un grand nombre de paramètres à estimer : 24 paramètres dans le cas présent. Cela peut déjà poser des problèmes de perte de degré de liberté pour notre modèle et par conséquent introduire des biais dans l'estimation et réduire la précision de l'outil statistique.

Après cet exemple, nous pouvons maintenant généraliser la représentation d'un VAR à k variables et p décalages sous forme matricielle :

$$Y_t = A_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + v_t$$

Avec :

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \vdots \\ y_{p,t} \end{bmatrix}, \phi_i = \begin{pmatrix} \phi_{i11} & \dots & \phi_{i1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1ki} & \dots & \phi_{pki} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ \vdots \\ a_k^0 \end{bmatrix}, v_t = \begin{bmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \\ \vdots \\ v_{k,t} \end{bmatrix}$$

Si on étudie l'équation ci-dessus, on peut voir que chaque variable endogène est expliquée par ses propres valeurs passées mais également les valeurs passées des autres variables endogènes.

Le nombre de variables k de notre modèle VAR sera déterminé par la question économique que l'on souhaite résoudre.

- Si nous souhaitons répondre à une question économique plutôt de type « monétaire » (par exemple : Comment la baisse des taux intérêts en suisse va-t-elle influencer la production helvétique ?), nous pourrions choisir trois variables : Production, indice des prix et le taux d'intérêt réel de la Suisse
- Si on désire plutôt répondre à une question « fiscale » (par exemple, comment la nouvelle taxe sur les carburants va-t-elle influencer le PIB du pays ?), nous pourrions choisir : PIB, dépenses gouvernementales et taxes.

Pour simplifier l'écriture du VAR, il est possible d'utiliser un opérateur retard noté L , afin de réécrire toutes les valeurs passées en fonction de la valeur de Y au temps t :

$$Y_{t-1} = LY_t$$

Et donc on a également : $Y_{t-2} = LY_{t-1} = L(LY_t) = L^2Y_t$

Nous pouvons itérer récursivement cette équation jusqu'à la valeur de Y au temps $t-p$ où p est le nombre de retard :

$$Y_{t-p} = L^p Y_t$$

Par conséquent, il est possible de réécrire l'équation (1) comme ceci :

$$(I - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = A_0 + v_t$$

$$\phi(L) Y_t = A_0 + v_t$$

Avec I la matrice identité, L l'opérateur retard, $\phi(L) = I - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i$

Afin de savoir si notre modèle VAR est stationnaire, il faudra analyser son espérance, sa variance et également la covariance de Y à l'aide de deux périodes différentes t et $t-k$.

Ainsi, le VAR sera stationnaire s'il remplit les conditions suivantes :

- $E(Y_t) = \mu, \forall t$: la moyenne est constante et indépendante du temps;
- $Var(Y_t) < \infty$, la variance est finie et indépendante du temps
- $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = \Gamma_k, \forall t$: la covariance est indépendante du temps;

Pour remplir ces conditions de stabilité, il faut que les racines (en valeurs absolues) soient à l'extérieur du cercle unité du plan complexe du polynôme défini par $\det(\phi(L)) = 0$.

On peut voir que ce modèle est bel et bien dynamique car chaque variable endogène est influencée par ses propres valeurs passées mais également par les autres valeurs passées des autres variables endogènes.

Il s'agit également d'un modèle non contraint : aucune contrainte *a priori* d'exclusion de variables dans les différentes équations du système. Les seules contraintes sont le nombre de retards p et le nombre de variables retenues. Cependant, ces deux contraintes ne sont pas problématiques puisque le nombre de retards choisi ne peut s'effectuer que sur la base de critères de statistiques (critères d'information tels que celui de Akaike ou de Schwartz) et le choix des variables incluses dans le modèle répond à la question économique que l'on souhaite se poser.

On voit bien que cet outil statistique pourra comporter un très grand nombre d'équations. Cependant, il faudra faire attention car le nombre de paramètres à estimer va également augmenter avec le nombre d'équations. La taille du modèle sera conditionnée par le nombre de retards choisis ainsi que par le nombre de variables incluses dans le modèle. Par conséquent, il faudra faire un arbitrage entre un nombre suffisant de degré de liberté et une estimation de la réalité économique de bonne qualité.

3.2 Estimation des Paramètres

3.2.1 Les méthodes d'estimations possibles

Comme vu auparavant, les paramètres d'un VAR ne peuvent être estimés que pour des séries temporelles *stationnaires* (sans tendance et sans saisonnalité). De nombreux tests de stationnarités existent comme par exemple le *test de Dickey-Fuller* (simple ou augmenté) ou le test KPSS. Ainsi, avant d'estimer les paramètres du modèle, il faudra faire l'étude des caractéristiques des séries. Elles seront stationnalisées soit *par différence* dans le cas d'une tendance stochastique (**persistance des chocs**) soit par *ajout d'une composante tendance* à la spécification VAR dans le cas d'une tendance déterministe (**non-persistance des chocs**). Il va être également possible d'ajouter à la spécification du VAR des variables binaires afin de corriger un mouvement saisonnier ou une période anormale.

Après avoir réglé le problème de stationnarité des séries temporelles utilisées, nous pouvons procéder à l'estimation du modèle VAR.

Il est possible d'estimer chacune des équations composant le VAR par la *méthode des moindres carrés (MCO/OLS)*, indépendamment les unes des autres. Il sera également possible de faire cette estimation des paramètres par le *maximum de vraisemblance*.

Notre modèle VAR(p) estimé s'écrira :

$$Y_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 Y_{t-1} + \hat{A}_2 Y_{t-2} + \dots + \hat{A}_p Y_{t-p} + e$$

Avec e : vecteur de dimension $(k,1)$ des résidus d'estimation $e_{1t}, e_{2t}, \dots, e_{kt}$.

Et où \hat{A}_k : l'estimateur de ϕ_k

Également, on va noter Σ_e la matrice variance-covariance estimée des résidus du modèle.

3.2.2 Détermination du nombre de retards

Afin de connaître le nombre de paramètres à estimer par MCO, il faudra au préalable déterminer le nombre de décalages ou de retards de notre modèle. Comme vu auparavant, ce nombre de retards est très important. Pour procéder à la détermination optimale du nombre de retards du modèle, la plupart des économètres utilisent les critères d'information de **Akaike** (AIC) et de **Schwarz** (SC). La procédure de sélection de l'ordre de la représentation consiste à estimer tous les modèles VAR pour un ordre allant de 0 à h (où h étant le retard maximum admissible par la théorie économique ou par les données disponibles).

L'économètre choisira le nombre de retards p qui minimisent AIC et SC qui sont définis par :

$$AIC(p) = \ln[\det \Sigma_e] + 2 \frac{k^2 p}{T}$$
$$SC(p) = \ln[\det \Sigma_e] + 2 \frac{k^2 p \ln(T)}{T}$$

Où T : le nombre d'observations, k : le nombre de variables dans le système et Σ_e : matrice variance-covariance des résidus du modèle.

3.3 La Dynamique d'un VAR

Sims suggéra d'utiliser les VARs pour répondre aux insuffisances des modèles macroéconométriques de l'époque en matière d'analyse des effets des politiques économiques. Cette analyse se fait à travers des simulations de chocs aléatoires et l'analyse de leur impact sur les variables endogènes. Cependant, cette analyse s'effectue en postulant la constance de l'environnement économique, c'est à dire que l'on laisse les facteurs influençant l'économie constants.

Afin de pouvoir mesurer l'impact sur les valeurs présentes d'une variation des chocs (ou innovations) v_t , nous devons mettre notre VAR(p) sous sa représentation VMA (∞).

Soit la représentation VAR(p) stationnaire :

$$Y_t = A_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Sa représentation VMA (∞) est donnée à l'aide du théorème de Wold par :

$$Y_t = \mu + v_t + M_1 v_{t-1} + M_2 v_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i v_{t-i}$$

Avec :

- $\mu = (I - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)^{-1} \times A_0$
- $M_i = \sum_{j=1}^{\min(p,i)} \phi_j M_{i-j}, i = 1, 2, \dots \text{ et } M_0 = I$
- $v_t = \phi(L)^{-1} \varepsilon_t$

Sous cette forme, la matrice M apparaît comme un « multiplicateur d'impact », c'est à dire que c'est grâce à cette matrice qu'un choc se répercute tout le long du processus. Une variation à un instant t donné de v_t affecte toutes les valeurs suivantes de Y_t , l'effet d'un choc est donc permanent et va en s'amortissant au cours du temps

3.3.1 Analyse et orthogonalisation d'un choc

L'analyse d'un choc consiste à mesurer l'impact de la variation d'une innovation sur les variables.

Afin d'illustrer ces propos, nous allons prendre un exemple avec des valeurs simulées suivant une loi normale (valeurs estimées en R avec le code source : *VAR exemple.R*). Voici l'exemple utilisé pour l'explication :

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 12,296 - 0,19399 \times y_{1t-1} - 0,07489 \times y_{2t-1} + e_{1t} \\ y_{2t} &= 4,464 + 0,37304 \times y_{1t-1} - 0,09454 \times y_{2t-1} + e_{2t} \end{aligned}$$

Une variation à un moment donné de e_{1t} a une conséquence immédiate sur $y_{1,t}$ puis sur $y_{2,t+1}$ et $y_{1,t+1}$. Par exemple, s'il se produit en t un choc sur e_{1t} égal à 1, nous avons l'impact suivant :

$$\text{En } t: \begin{bmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A la période $t + 1$:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{1t+1} \\ \Delta y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,19399 & -0,07489 \\ 0,37304 & -0,09454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,19399 & -0,07489 \\ 0,37304 & -0,09454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,19399 \\ 0,37304 \end{bmatrix}$$

A période $t + 2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta y_{1t+2} \\ \Delta y_{2t+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,19399 & -0,07489 \\ 0,37304 & -0,09454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{1t+1} \\ \Delta y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,19399 & -0,07489 \\ 0,37304 & -0,09454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,19399 \\ 0,37304 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,00970 \\ -0,10763 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les différentes valeurs calculées constituent la « *fonction de réponse fonctionnelle* ». Cette fonction va illustrer l'impact du choc sur les variables endogènes et comme nous avons estimé un VAR stationnaire, la réponse au choc e_{1t} va diminuer au fur à mesure du temps.

Pour finir cette présentation du VAR, il nous reste à faire la présentation des réponses fonctionnelles impulsives. Leur but est d'analyser l'effet d'un choc sur les variables endogène.

Si nous reprenons notre variable Y_t représentée sous sa forme VMA (∞) :

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i v_{t-i}$$

Si nous souhaitons connaître la réponse de Y à la période $t+h$ d'un choc v à la période t , il nous suffira de dériver notre variable à la période souhaitée Y_{t+h} par rapport à notre choc v_t à la période t . Alors nous obtenons :

$$\frac{\partial Y_{t+h}}{\partial v_t} = M_i$$

Ainsi, on voit que la réponse de Y à la période $t+h$ d'un choc v à la période t sera M_i .

Dans notre exemple nous avons supposé que les résidus e_{1t} et e_{2t} sont indépendants entre eux. Or, cette hypothèse est rarement vérifiée. Nous avons montré précédemment qu'il peut exister une corrélation entre v_{1t} et v_{2t} , et cette corrélation peut être mesurée à l'aide des résidus d'estimation : $\rho_{e_1 e_2} = \frac{Cov(e_1, e_2)}{\sigma_{e_1} \times \sigma_{e_2}}$

Cependant, ce coefficient nous renseigne sur la liaison contemporaine mais en aucun cas sur le sens de causalité entre les deux résidus. C'est pour cela que nous devons faire une hypothèse supplémentaire concernant la relation entre les erreurs. Par exemple, nous allons supposer, d'après une réflexion économique, qu'une variation des taux d'intérêts à court terme (y_{2t}) a un impact sur le PIB (y_{1t}). Un choc sur y_{1t} n'a donc pas d'impact contemporain sur y_{2t} , en revanche un choc sur y_{2t} a un impact contemporain (mesuré grâce au coefficient de corrélation entre les résidus) sur y_{1t} .

Dans notre exemple, le coefficient de corrélation est égal à -16,484. Ainsi en faisant l'hypothèse que $\sigma_{e_1} \approx \sigma_{e_2}$, un choc aléatoire de 1 sur y_{2t} se traduit par une baisse de 16,484.

Tableau 1 – Analyse des chocs sur les variables y_{1t} et y_{2t}

```
> irf(VAR(data_var_ex, p = 1))
```

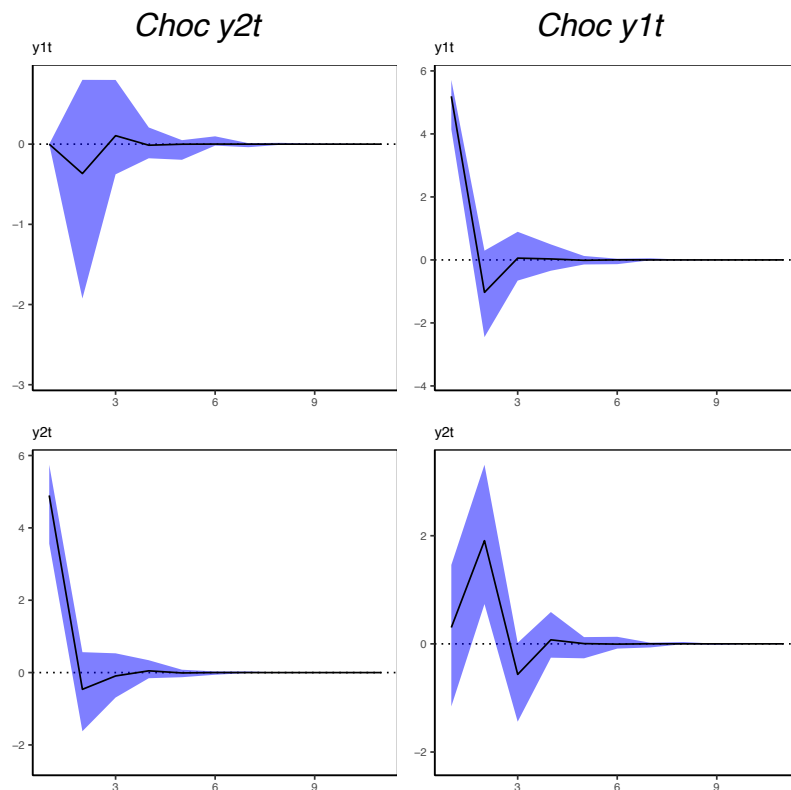
Impulse response coefficients			y_{2t}		y_{1t}		y_{2t}	
y_{1t}								
	y_{1t}	y_{2t}						
[1,]	5.193701e+00	3.028714e-01	[1,]	0.000000e+00	4.895646e+00			
[2,]	-1.030212e+00	1.908822e+00	[2,]	-3.666533e-01	-4.628301e-01			
[3,]	5.689235e-02	-5.647680e-01	[3,]	1.057903e-01	-9.302063e-02			
[4,]	3.126102e-02	7.461576e-02	[4,]	-1.355565e-02	4.825806e-02			
[5,]	-1.165259e-02	4.607488e-03	[5,]	-9.845604e-04	-9.619068e-03			
[6,]	1.915420e-03	-4.782466e-03	[6,]	9.114034e-04	5.420983e-04			
[7,]	-1.339640e-05	1.166658e-03	[7,]	-2.174034e-04	2.887400e-04			
[8,]	-8.477659e-05	-1.152922e-04	[8,]	2.054935e-05	-1.083973e-04			
[9,]	2.508051e-05	-2.072540e-05	[9,]	4.131899e-06	1.791350e-05			
[10,]	-3.313177e-06	1.131538e-05	[10,]	-2.143159e-06	-1.521651e-07			
[11,]	-2.047267e-07	-2.305692e-06	[11,]	4.271485e-07	-7.850973e-07			

On voit donc que le choix du sens de l'impact est très important et conditionne les valeurs obtenues lors de l'analyse des chocs. On peut également observer que l'effet d'une innovation s'estompe au cours du temps : C'est la caractéristique d'un VAR *stationnaire*.

Le choix du sens de l'impact est par conséquent très important et conditionnera les valeurs obtenues pour les fonctions de réponses impulsionnelles.

Le Graphique 1 présente les deux fonctions de réponses impulsionnelles suite à un choc de y_{2t} et enfin suite à un choc de y_{1t} .

Graphique 1 – Fonctions de réponses impulsionnelles



3.3.2 Décomposition de la variance

La décomposition de la variance de l'erreur de prévision a pour objectif de calculer pour chacune des innovations sa contribution à la variance de l'erreur. Par une technique mathématique comme la décomposition de Choleski, on peut écrire la variance de l'erreur de prévision à un horizon h en fonction de la variance de l'erreur attribuée à chacune des variables. Pour cela, il suffit de rapporter chacune de ces variances à la variance totale pour obtenir sa part d'explication dans la variance totale.

Si nous reprenons notre modèle VAR à deux variables y_{1t} et y_{2t} , on sait que la variance de l'erreur de prévision pour y_{t+h} peut s'écrire :

Les interprétations qui découlent de ces résultats va être très importantes :

- si un choc sur ε_{1t} n'affecte pas la variance de ε_{2t} quel que soit l'horizon de prévision h , alors y_{2t} peut être considéré comme exogène car y_{2t} évolue indépendamment de ε_{1t}
- A l'inverse, si un choc sur ε_{1t} affecte très fortement la variance de ε_{2t} alors, y_{2t} est considéré comme endogène

Les interprétations ci-dessus sont très intéressantes afin d'analyser notre modèle mais se produisent très rarement dans la réalité. En général, les démonstrations faites précédemment vont surtout permettre d'indiquer la contribution de chacune des variables à la variance de l'erreur.

3.4 Forces et Faiblesses du VAR

Afin de conclure cette partie, nous avons vu que le VAR, comparé aux équations simultanées (base de macroéconométrie jusqu'aux années 1970) a l'avantage de saisir la variation des paramètres du modèle au cours du temps. Cela permet ainsi de restituer plus précisément la dynamique du système, et donc, de mieux interpréter les politiques économiques : ajustement et adaptation suite à un choc qui touche l'environnement socioéconomique.

Cependant, le VAR possèdera certaines limites selon certains économètres. Ces derniers trouvent cet outil comme un modèle a-théorique, c'est à dire dépourvu de tout fondement économique. Et par conséquent, cela conduirait à biaiser la politique économique. Ainsi, la modélisation VAR reposera sur des hypothèses d'identification des équations qui n'auront aucun sens théorique constituant la plus grande faiblesse de ce modèle. Cela conduire au développement d'une des extensions du VAR : le VAR dit « structurel » ou le SVAR. Cette « extension » va être la solution à ce problème de non-fondement théorique. Les chocs ne seront plus aléatoires ou non identifiés : leur origine sera connue

Voici la forme matricielle d'un SVAR à 2 variables :

$$BY_t = A_0 + \sum_{i=1}^5 \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Avec :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ d_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_t = \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i11} & \phi_{i12} \\ \phi_{i21} & \phi_{i22} \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{bmatrix}$$

Afin d'obtenir ce SVAR sous sa forme réduite, il nous suffira de multiplier par B^{-1} de chaque côté de l'équation :

$$B^{-1}BY_T = B^{-1}A_0 + B^{-1} \sum_{i=1}^5 \phi_i Y_{t-i} + B^{-1}\varepsilon_t$$

$$Y_t = C + B^{-1} \sum_{i=1}^5 \phi_i Y_{t-i} + v_t$$

Avec $C = B^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{a_1-d_1a_2}{1-d_1d_2} \\ \frac{a_2-d_2a_1}{1-d_1d_2} \end{bmatrix}$, $v_t = \begin{bmatrix} v_{y_t} \\ v_{x_t} \end{bmatrix} = B^{-1}\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{y_t}-d_1\varepsilon_{x_t}}{1-d_1d_2} \\ \frac{\varepsilon_{x_t}-d_2\varepsilon_{y_t}}{1-d_1d_2} \end{bmatrix}$

On aura des erreurs v_{y_t} et v_{x_t} sont des fonctions linéaires des innovations ε_{y_t} et ε_{x_t} . Comme ε_{y_t} et ε_{x_t} sont des bruits blancs, par des démonstrations mathématiques, on peut également dire que v_{y_t} et v_{x_t} seront des bruits blancs. Par conséquent, on aura les résultats suivants :

$$E(v_{x_t}) = 0, E(v_{x_t}v_{x_{t-i}}) = 0 \text{ et } E(v_{y_t}) = 0, E(v_{y_t}v_{y_{t-i}}) = 0$$

Donc, les erreurs ont une espérance nulle et sont non corrélées.

Afin de pouvoir estimer cette matrice B et estimer le SVAR, il faudra procéder à des méthodes statistiques telle que la décomposition de *Choleski* ou utiliser les restrictions à long-terme de *Blanchard et Quah* ou à court terme nécessitant une recherche, une explication plus approfondie et une très bonne maîtrise des méthodes d'estimation de VAR. Ainsi, l'estimation du cas pratique sera seulement l'estimation d'un VAR nécessitant l'acquisition de connaissances afin d'utiliser le logiciel statistique Rstudio et de connaître toutes les étapes nécessaires à l'estimation.

4 Cas pratique

Dans cette dernière partie, nous modéliserons un processus VAR à 2 variables (PIB réel & taux d'intérêt à court terme) en suivant les étapes d'explications faites auparavant. Suite à cette estimation, nous pourrions voir l'effet d'un choc du taux d'intérêt grâce aux fonctions de réponses. Par conséquent, nous analyserons la réponse du PIB réel. Suite à cela, nous pourrions voir si notre analyse empirique correspond à la théorie économique : est-ce qu'un choc positif sur le taux d'intérêt à court de terme va provoquer une baisse du PIB ?

Pour la modélisation du VAR, les données ont été obtenues dans la base de données de l'Eurostat pour le PIB réel et dans celle de la BNS pour le taux d'intérêt à court terme. J'ai décidé de choisir le taux d'intérêt de référence overnight : le SARON. D'après le SIX Exchange, il s'agit du point de départ pour la courbe des taux. Ce sont des données trimestrielles allant du premier trimestre 2008 au deuxième trimestre 2018. J'ai choisi cette plage de données afin d'avoir assez pour la précision du VAR mais pas trop pour éviter de devoir utiliser des méthodes de stationnarisation de données trop complexes.

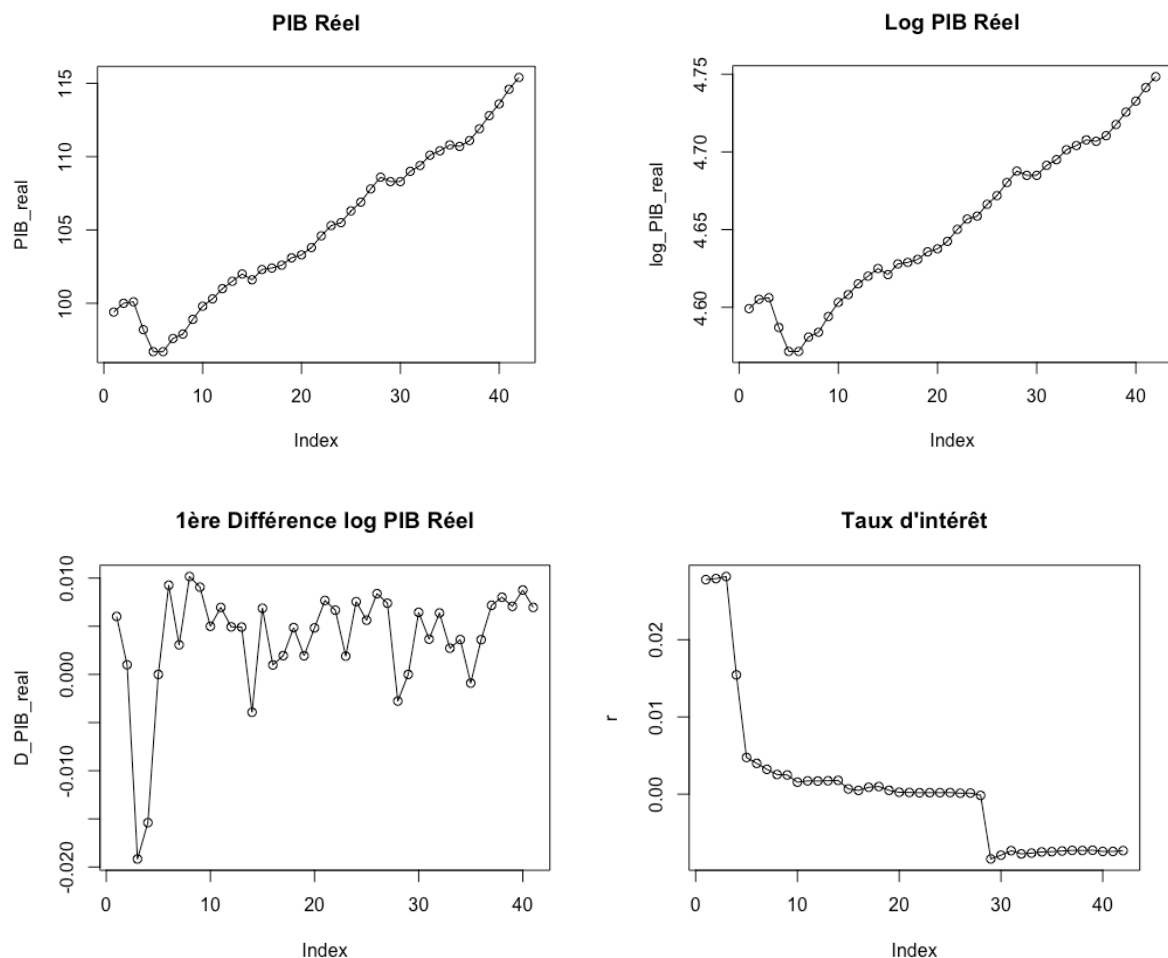
4.1 Étude de la stationnarité des séries temporelles

Pour faire la modélisation de notre VAR à 2 variables, nous allons procéder par la même structure que la présentation faite de l'outil ci-dessus.

Ainsi, pour commencer l'estimation du VAR, il faut s'assurer que les deux séries temporelles sélectionnées soient *stationnaires*.

4.1.1 Étude des graphiques

Pour vérifier cette stationnarité, nous pouvons tout d'abord analyser les graphiques de ces séries.



Les séries du Pib réel et de son logarithme ne semblent pas stationnaires. C'est pour cela que j'ai effectué les 1^{ères} différences des logarithmes du PIB réel Suisse afin de stationnariser les données. Ainsi en analysant le graphe de cette transformation, il semblerait que la moyenne et la variance semblent constantes.

Pour les données du taux d'intérêt, il est plus ambiguë de savoir si elles sont stationnaires ou non. Nous verrons cela lors du test de stationnarité de Dickey-Fuller.

4.1.2 Test de Dickey-Fuller : tester les suppositions faites à partir des graphiques

Maintenant, nous allons faire un test de Dickey-Fuller afin de s'assurer que nos suppositions précédentes soient bonnes et nous éclairer au sujet de la stationnarité du taux d'intérêt.

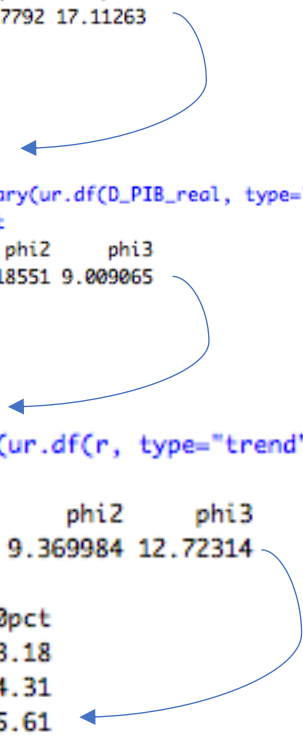
Ainsi, nous exécuterons ce test sur le logarithme du PIB réel et sur les 1^{ères} différences des logarithmes du PIB réel. Ensuite nous le ferons également sur les données du taux d'intérêt.

Cependant, pour tester la stationnarité nous utilisons un test de Dickey-Fuller qui est un test de stationnarité dont l'hypothèse H_0 sera que la série temporelle est *non-stationnaire*.

La procédure du test : on part du modèle le plus général (modèle 3 avec tendance et constante). On y teste la racine unitaire puis on vérifie par un test approprié que le modèle retenu est le bon. Si le modèle n'est pas bon (on rejette H_0), on recommence avec un modèle plus contraint (modèle 2 avec constante mais sans tendance), puis avec le modèle 1 (sans constance et sans tendance).

Modèle 3 :


```
> T_log_PIB_t <- summary(ur.df(log_PIB_real, type="trend", selectlags = "AIC"))
> T_log_PIB_t@teststat
      tau3      phi2      phi3
statistic -5.487394 13.7792 17.11263
> T_log_PIB_t@cval
      1pct  5pct 10pct
tau3 -4.15 -3.50 -3.18
phi2  7.02  5.13  4.31
phi3  9.31  6.73  5.61
|
> T_D_log_PIB_t <- summary(ur.df(D_PIB_real, type="trend", selectlags = "AIC"))
> T_D_log_PIB_t@teststat
      tau3      phi2      phi3
statistic -4.243844 6.018551 9.009065
> T_D_log_PIB_t@cval
      1pct  5pct 10pct
tau3 -4.15 -3.50 -3.18
phi2  7.02  5.13  4.31
phi3  9.31  6.73  5.61
|
> T_r_t <- summary(ur.df(r, type="trend", selectlags = "AIC"))
> T_r_t@teststat
      tau3      phi2      phi3
statistic -4.64619 9.369984 12.72314
> T_r_t@cval
      1pct  5pct 10pct
tau3 -4.15 -3.50 -3.18
phi2  7.02  5.13  4.31
phi3  9.31  6.73  5.61
|
```



On rejette l'hypothèse nulle à 5% que nos séries possèdent une tendance. On n'est donc pas dans le bon modèle.

Modèle 2 :

```
> T_log_PIB_d <- summary(ur.df(log_PIB_real, type="drift", selectlags = "AIC"))
> T_log_PIB_d@teststat
              tau2      phi1
statistic 0.6403529 2.099447
> T_log_PIB_d@cval
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.58 -2.93 -2.60
phi1  7.06  4.86  3.94
> T_D_log_PIB_d <- summary(ur.df(D_PIB_real, type="drift", selectlags = "AIC"))
> T_D_log_PIB_d@teststat
              tau2      phi1
statistic -3.850421 7.430855
> T_D_log_PIB_d@cval
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.58 -2.93 -2.60
phi1  7.06  4.86  3.94
> T_r_d <- summary(ur.df(r, type="drift", selectlags = "AIC"))
> T_r_d@teststat
              tau2      phi1
statistic -4.116108 9.640359
> T_r_d@cval
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.58 -2.93 -2.60
phi1  7.06  4.86  3.94
```



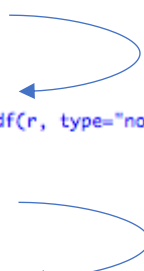
Au seuil de 5 %, on peut voir que l'on ne rejette pas l'hypothèse H_0 que la série des logarithmes du PIB réel possède une constante donc qu'il s'agit d'une série non-stationnaire. Cette série serait donc *stationnaire avec la constante*.

Cela explique pourquoi j'ai effectué les 1^{ères} différences et l'on peut voir que la série des 1^{ères} différences rejette l'hypothèse H_0 à 5% Tout comme la série du taux d'intérêt.

Donc pour les 1^{ères} différences du logarithme du PIB réel et les données du taux d'intérêt, nous ne sommes pas dans le bon modèle.

Modèle 1 :

```
> T_D_log_PIB_n <- summary(ur.df(D_PIB_real, type="none", selectlags = "AIC"))
> T_D_log_PIB_n@teststat
              tau1
statistic -2.888547
> T_D_log_PIB_n@cval
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.62 -1.95 -1.61
> T_r_n <- summary(ur.df(r, type="none", selectlags = "AIC"))
> T_r_n@teststat
              tau1
statistic -3.937694
> T_r_n@cval
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.62 -1.95 -1.61
```



On peut voir qu'au seuil de 5%, on rejette l'hypothèse H_0 de racine unitaire et donc que ces deux séries sont bel et bien stationnaires.

C'est donc avec ces deux séries que nous pourrons faire l'estimation de notre VAR pour l'économie Suisse.

4.2 Modélisation du VAR

4.2.1 Choix du nombre de retards optimal

```
> VARselect(data_var, lag.max = 5)
$selection
AIC(n)  HQ(n)  SC(n)  FPE(n)
  1      1      1      1

$criteria
      1      2      3      4      5
AIC(n) -2.453705e+01 -2.445753e+01 -2.429258e+01 -2.413474e+01 -2.398354e+01
HQ(n)   -2.444496e+01 -2.430404e+01 -2.407769e+01 -2.385845e+01 -2.364586e+01
SC(n)   -2.427582e+01 -2.402215e+01 -2.368305e+01 -2.335105e+01 -2.302570e+01
FPE(n)  2.208024e-11  2.397030e-11  2.843630e-11  3.365561e-11  3.982512e-11
```

Afin de modéliser notre VAR, nous allons choisir le modèle qui minimise les critères d'informations.

On peut voir que le nombre retards optimal est de 1 car avec le nombre de retards, nous minimisons tous les critères d'observations. Donc par conséquent, pour l'estimation de notre VAR, nous utiliserons **un retard**.

4.2.2 Estimation du VAR

L'estimation de notre VAR à 2 variables et à 1 retard est donnée par :

```
> VAR <- VAR(data_var, p = 1)
> VAR

VAR Estimation Results:
=====

Estimated coefficients for equation D_PIB_real:
=====
Call:
D_PIB_real = D_PIB_real.l1 + r.l1 + const

D_PIB_real.l1      r.l1      const
  0.201714928  -0.353687911  0.003179969

Estimated coefficients for equation r:
=====
Call:
r = D_PIB_real.l1 + r.l1 + const

D_PIB_real.l1      r.l1      const
  0.369909419   0.962150250 -0.002173327
```

Sous forme matricielle, cela donne :

$$\begin{bmatrix} \Delta \log Y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003180 \\ -0,002173 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,20171 & -0,35369 \\ 0,36990 & 0,9622 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \log Y_{t-1} \\ r_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\Delta \log Y_t} \\ \varepsilon_{r_t} \end{bmatrix}$$

4.2.3 Étude de la stationnarité du VAR

```
> roots(VAR)
[1] 0.6991204 0.4647448
```

Nous pouvons voir que le VAR estimé a ses Racines à l'intérieur du disque unité et par conséquent ce modèle est bien *stationnaire*.

4.3 Analyse de la dynamique du VAR

4.3.1 Choix de l'ordre des variables, justifications économiques

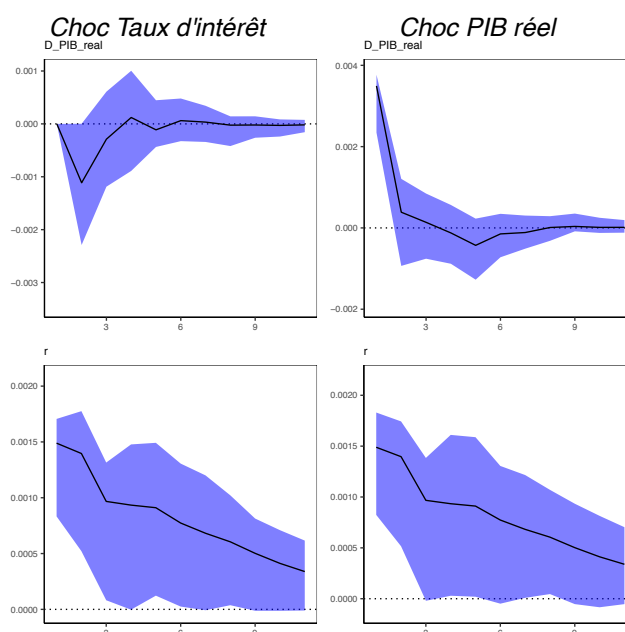
Afin de pouvoir calculer les *fonctions de réponses impulsionnelles (IRF)*, il faut déterminer l'ordre des variables dans notre VAR estimé. Cet ordre de variables va influencer les réponses face au choc sur une variable.

Pour déterminer cet ordre, nous utiliserons la théorie économique ainsi que le temps d'appréciation des politiques économiques par l'économie des Banques centrales.

Ainsi, j'ai décidé de mettre le PIB en premier car le PIB va directement influencer le taux d'intérêt. Si nous prenons le cas des États-Unis, nous avons vu en cours que l'économie américaine est en situation de « surchauffe » donc face à cela la FED a décidé d'augmenter les taux d'intérêts. Donc une augmentation du PIB impactera le taux d'intérêt quasi-instantanément.

Plaçons-nous dans le cas d'un choc positif sur les taux d'intérêts suite à un changement de politique par une Banque Centrale. Avant que tous les agents de l'économie prennent en compte ce changement de politique, il risque de se passer plusieurs trimestres et donc l'effet du taux d'intérêt sur le PIB n'est pas instantané.

4.3.2 Étude des fonctions de réponses impulsionnelles



Commentaires :

Lors de l'interprétation de ces fonctions de réponses impulsionnelles, il faudra porter attention à la façon d'interpréter les réponses des variables. Afin de stationnariser les données du PIB réel suisse, nous avons pris le logarithme ainsi que les 1^{ère}s différences. Ainsi, nous n'interpréterons pas une variation du PIB réel mais une variation du taux de croissance du PIB réel.

Ces fonctions nous permettent de confronter les données empiriques de la Suisse à la théorie économique entre le taux d'intérêt et le PIB. En analysant les réponses du taux de croissance du PIB réel et du taux d'intérêt suite à un choc du taux d'intérêt, nous pouvons voir que les données réagissent comme la théorie l'avait prédit. Ainsi, un choc positif sur le taux d'intérêt va forcément faire augmenter le taux d'intérêt mais va également réduire le PIB réel en provoquant un taux de croissance négatif de ce dernier.

4.3.3 Analyse décomposition de la variance

```
> fevd(VAR)
$D_PIB_real
      D_PIB_real      r
[1,] 1.00000000 0.00000000
[2,] 0.9842156 0.01578444
[3,] 0.9638981 0.03610193
[4,] 0.9498298 0.05017018
[5,] 0.9420071 0.05799285
[6,] 0.9379639 0.06203605
[7,] 0.9359251 0.06407491
[8,] 0.9349073 0.06509269
[9,] 0.9344022 0.06559784
[10,] 0.9341525 0.06584755

$r
      D_PIB_real      r
[1,] 0.0002314091 0.9997686
[2,] 0.3542577180 0.6457423
[3,] 0.4918364316 0.5081636
[4,] 0.5499019704 0.4500980
[5,] 0.5771539966 0.4228460
[6,] 0.5905963548 0.4094036
[7,] 0.5973470865 0.4026529
[8,] 0.6007466857 0.3992533
[9,] 0.6024526808 0.3975473
[10,] 0.6033042091 0.3966958
```

Commentaires :

- A la période 1, on peut voir que la variance de l'erreur de prévision du taux de croissance PIB est due à 100% à ses propres innovations et 0% à celles du taux d'intérêts
 - On peut également voir qu'à la période 10, environ 93% de la variance du PIB réel provient du choc lui-même et seulement 7% provient des innovations du taux d'intérêt.
- A la période 1, l'analyse de la décomposition de la variance nous montre que la variance du taux d'intérêt est quasiment due uniquement à ses propres innovations
 - Cependant, on peut voir qu'au cours du temps la variance du taux d'intérêt provient de plus en plus des innovations du taux de croissance du PIB, Jusqu'à atteindre un ratio de 60% due aux innovations du taux de croissance du PIB et 40% due à ses propres innovations.

Cela nous permet de dire que les variations du taux d'intérêt à court terme sur le long terme sont fortement dues aux variations du taux de croissance du PIB et donc l'évolution de ce dernier.

4.4 Conclusion

Cette estimation de VAR pour l'économie suisse nous a permis de pouvoir connaître l'effet que pourrait avoir une politique monétaire restrictive de la part de la BNS. Elle nous a permis également de confronter les données empiriques à la théorie économique et voir que dans le cas du pays helvétique, il est probable que la réalité corresponde à la théorie économique.

Cependant, il ne faut absolument pas tirer des conclusions définitives avec le modèle qui vient d'être estimé car il s'agit d'une modélisation relativement simple. De plus, il est fort probable que notre modèle soit biaisé par des biais de cointégration qu'il faudrait corriger avec un VEC (Vector Error Correction) mais qui nécessiterait de plus amples connaissances.

Ainsi, le VAR estimé est une bonne première approche pour l'analyse de données empiriques mais il ne suffit pas pour faire une interprétation parfaitement correcte des données.

5 CONCLUSION

Ce projet nous a tout d'abord montré l'évolution de la Macroéconométrie au cours du temps. Cette analyse de données économiques empiriques fut fortement influencée par les théories élaborées par certains économistes.

De plus, nous avons pu voir comment on peut modéliser un processus VAR et ainsi pouvoir analyser la dynamique suite à un choc lié à une politique économique.

Et pour terminer, nous avons appliqué une modélisation VAR à la Suisse. Cela nous a permis de pouvoir analyser l'impact que va avoir un choc de taux d'intérêt à court terme sur le PIB réel. Nous avons pu confronter les résultats obtenus à la théorie économique afin de voir la réalité correspond à la théorie. La conclusion fut que cela correspondait.

En revanche, ce résultat est à considérer avec précaution puisque nous avons estimé seulement un VAR et par conséquent, il est fort probable que les erreurs de prévision des deux variables soient corrélées. Il est également probable que des biais se soient incorporés dans l'estimation. Afin de rendre le modèle plus précis, il serait intéressant de procéder à l'estimation d'un SVAR ou d'un VEC s'il y a des problèmes de cointégration entre nos deux variables.

6 Bibliographie

- **BIAU O. & GIRARD E. (2004)** « *Politique Budgétaire et dynamique économique en France : l'approche VAR structurel* », *Économie & prévision*, n°169-171, 2005-3-5. pp. 1-23.
- **BLANCHARD O. & PEROTTI R. (2002)** “an empirical characterization of the dynamic effects of changes in government spending and taxes on output”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 117, No. 4, pp. 1329-1368
- **BLANCHARD O. & QUAH D. (1989)** « *The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances* », *American Economic Review*, vol 79, no. 4, p. 655-673
- **BLANCHARD O. (2009)** “*The State of Macro*”, *Annual Review of Economics*
- **BOURBONNAIS R.** « *Économétrie* », 9e éd., ch. 9 & 10
- **DE VROEY M. & MALGRANGE P.** « *Klein et l'émergence de la Modélisation Macroéconomique* », *Economie et Statistiques* N°451-453
- **DE VROEY M. & MALGRANGE P. (2006)** « *La théorie et la modélisation macroéconomiques, d'hier à aujourd'hui* » PSE Working Papers n°2006-33.
- **DOZ C. & MALGRANGE P. (2012)** « *Modèles VAR et prévisions à court terme*, *Économie & prévision*, n°106, 1992-5. , *Développements récents de la macro-économie*. pp. 109-122;
- **FEVE P. (2005)** « *La Modélisation Macro-Économétrique Dynamique* », *Banque de France*
- **FEVE P. & COLLARD F.** « *Modèles VAR ou DSGE : que choisir ?* », *Économie & prévision*, n°183-184, 2008-2-3. pp. 153-174
- **GUITTON HENRY.** , “Klein (L.G.), Goldberger (A.S.) – *An Econometric Model of the United States, 1929-1952.*”, *Revue économique*, volume 7, n°6, 1956. pp. 1043-1044
- **HAAVELMO T. (1944)** “The probability approach”, *Econometrica*, Vol. 12, Supplement, pp. iii-vi+1-115
- **LEBLOND S. (2003)** “*Guide de présentation des travaux en sciences économiques* », *Université de Montréal*
- **LUCAS R.E Jr (1976)** “*Econometric Policy Evaluation: a critique*”, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, vol. 1, issue 1, 19-46
- **LUCAS R.E Jr & T.J. SARGENT (1979)** « *After Keynesian Macroeconomics* », *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Quarterly Review*
- **KLEIN L.R. & GOLDBERGER A.S.** “*An Econometric Model of United States 1929-1952*”, *North -Holland Publishing Company Amsterdam*, ch. 2
- **PFAFF B.** “*VAR, SVAR and SVEC Models: Implementation Within R package vars*”
- **SIMS C.A. (1980)** “*Macroeconomics and Reality*”, *Econometrica* vol.48, , no.1, P. 1-48
- **SIMS C.A. (1989)** “*Models and their uses*”, *Institute For Empirical Macroeconomics and University of Minnesota*
- **SIMS C.A. (1988)** “*projecting Policy effects with statistical models*”, *University of Minnesota*
- **SIMS C.A. (1972)** “*Money, Income and Causality*”
- **STOCK J.H. & WATSON M.W (2001)** “*Vector Autoregressions*”
- **WIKIPEDIA** “*Vecteur Autoregressif (VAR).*”, *l'encyclopédie libre*. 7 sept. 2018, 16:05 UTC. 7 sept. 2018, 16:05

[http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Vecteur_Autoregressif_\(VAR\)&oldid=152010961](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Vecteur_Autoregressif_(VAR)&oldid=152010961)

- **WIKIPEDIA**, *Wikipedia contributors*. (2018, December 10). "Vector autoregression". In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 09:11, January 10, 2019, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Vector_autoregression&oldid=872953211
- **WIKIPEDIA**, *Wikipedia contributors*. (2018, December 27). Christopher A. Sims. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 19:51, January 10, 2019, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Christopher_A._Sims&oldid=875503959
- **WIKIPEDIA**, "Bruit blanc." *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. 11 déc. 2018, 17:08 UTC. 11 déc. 2018, 17:08
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Bruit_blanc&oldid=154710436
- **WIKIPEDIA**, *Wikipedia contributors*. (2018, May 16). Dickey–Fuller test. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 19:56, January 10, 2019, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dickey%E2%80%93Fuller_test&oldid=841572866