

1 Contexte et problème de Cauchy

De nombreux domaines, qu'ils soient physiques, économiques ou financiers, peuvent être appréhendés à travers des équations d'évolution qui se révèlent être d'une sensibilité extrême aux conditions initiales. La théorie du chaos, telle une énigme fascinante, se penche sur la complexité de leur comportement. Parmi les exemples emblématiques de tels systèmes, on compte l'évolution capricieuse des conditions météorologiques, le ballet incessant du climat, le déploiement mystérieux de l'univers, ou encore la danse frénétique des marchés boursiers, des cours de l'or, de l'énergie ou des populations humaines. La moindre variation dans l'état initial engendre des destins divergents, propageant ainsi l'incertitude dans nos prévisions à long terme, les rendant souvent laborieuses, voire impossibles. Cette réalité se reflète dans notre quotidien, où même les prévisions météorologiques ne parviennent à saisir que l'éphémère, se limitant à quelques jours à peine. Ce phénomène, illustré par l'image métaphorique du battement d'aile du papillon, s'est insinué dans notre langage commun, évoquant la délicatesse et l'imprévisibilité inhérentes à ces systèmes.

Dans ce projet, nous nous proposons d'explorer ce phénomène à travers l'exemple emblématique du pendule double. Son mouvement, régi par les équations newtoniennes, révèle une sensibilité exacerbée aux infimes variations de son état initial, projetant ainsi des trajectoires distinctes dans un chaos émerveillé. Pour plus de détails sur ce sujet, vous pouvez consulter les références ci-dessous :

- N.B. Tufillaro, D. Abbott, and M. Reilly. An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos. Addison-Wesley, 1992.
- J. Gleick. Chaos : Making a New Science. Viking Press, 1987.
- E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2), 130-141, 1963.
- S.H. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. CRC Press, 2015.

2 Modélisation physique du pendule double

Le pendule double est un système dynamique évoluant dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 . Il se compose de deux pendules rigides, le premier ayant une longueur l_1 et une masse m_1 , auquel est attaché un second pendule rigide de longueur l_2 et de masse m_2 (figure 1).

Les positions des masses m_1 et m_2 peuvent être décrites par les angles θ_1 et θ_2 , qui déterminent les coordonnées $r_1 = (x_1, y_1)$ et $r_2 = (x_2, y_2)$ respectivement, via les relations :

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin(\theta_1), \\ y_1 = -l_1 \cos(\theta_1) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), \\ y_2 = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2). \end{cases}$$

1. En utilisant le principe fondamentale de la mécanique, montrer que le système composé du pendule

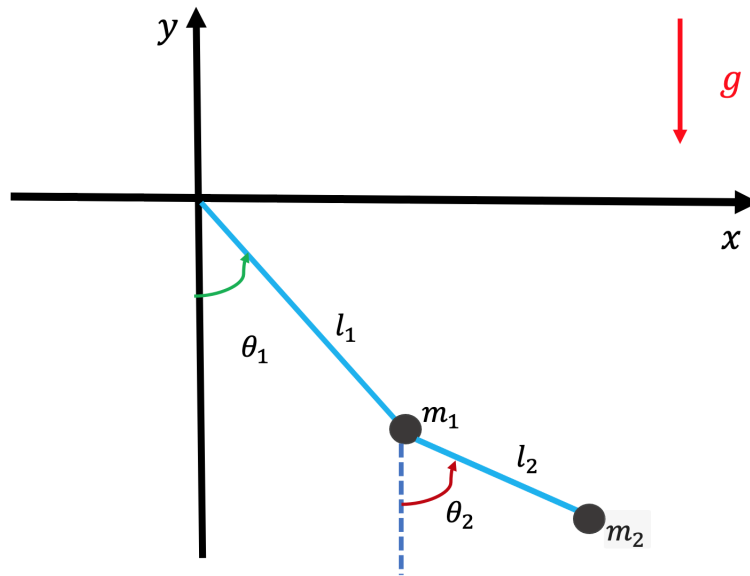


FIGURE 1 – Configuration d'un pendule double.

double est régi par les équations d'évolution ci-dessous

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1\theta_1'' + m_2l_2\theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2(\theta_2')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin(\theta_1) = 0, \\ l_1\theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2\theta_2'' - l_1(\theta_1')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) = 0. \end{cases}$$

Considérant l'influence du champ gravitationnel de valeur g , le mouvement du pendule dépend fortement de sa position initiale. Ainsi, les angles θ_1 et θ_2 (et donc les coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2)) évoluent dans le temps. Considérons par exemple $\theta_i' = \frac{d\theta_i}{dt}$ et définissons

$$y(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \end{pmatrix},$$

et sa dérivée à l'instant t ,

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_1''(t) \\ y_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \\ \theta_1''(t) \\ \theta_2''(t) \end{pmatrix}.$$

Pour avoir une idée du mouvement résultant de cette expérience, vous pouvez consulter les liens ci-dessous :

— <https://www.youtube.com/watch?v=pEjZd-AvPco>

— <https://www.youtube.com/watch?v=d0Z8wLLPNE0>

qui montrent le mouvement du double pendule pour des masses $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, des longueurs $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$ et des conditions initiales $y_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$. On considère les équations du mouvement associée aux conditions initiales $y(0) = y_0$, et on cherche à résoudre sur l'intervalle $I = [0; T]$.

- Présenter ce problème sous la forme d'un problème de Cauchy $Y'(t) = F(Y(t))$. Indiquer quel $Y(t)$ poser, quelle fonction F , en précisant domaines de départ et d'arrivée.

Ici, on considère que le pendule est relâché sans vitesse initiale lorsque les deux masses sont alignées le long de l'axe horizontal. Pour étudier la sensibilité du mouvement par rapport aux conditions initiales y_0 , il est nécessaire de résoudre le problème Cauchy trouvé en question 1 afin de trouver la solution $y(t)$. Cependant, ce problème n'admet pas de solution analytique, et il est donc indispensable de recourir à des méthodes numériques telles que Euler, Runge-Kutta d'ordre 4.

Dans la suite du projet, nous examinerons les deux méthodes numériques, tandis que dans la section 4, nous analyserons le comportement du système face à différentes conditions initiales.

3 Analyse numérique des équations différentielles ordinaires couplées

Pour $T > 0$ donné, nous cherchons une approximation numérique de $y(t)$ solution du problème de Cauchy associé au système du pendule double sur l'intervalle $[0, T]$. Notons $\tilde{y}(t)$ une fonction qui approche au mieux possible la solution $y(t)$ en $N + 1$ instants de temps $t_n \in [0, T]$. On suppose que les instants sont uniformément répartis sur $[0, T]$ avec un pas temporel $h = \frac{T-0}{N}$ et les instants définis par $t_0 = 0, t_{n+1} = t_n + h, \quad 0 \leq n \leq N - 1$ et $t_N = T$.

3.1 Méthode Euler explicite

Il s'agit ici d'appliquer la méthode d'Euler explicite pour donner une solution approchée de $y(t)$ dans le cas du pendule double. Pour ce faire, on écrit le développement de Taylor de $y(t_{n+1})$ autour de t_n pour $n = 0, \dots, N$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \mathcal{O}(h^2) = y(t_n) + hf(y(t_n)) + \mathcal{O}(h^2).$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à h , la fonction

$$\tilde{y}(t_{n+1}) := \tilde{y}(t_n) + hf(\tilde{y}(t_n)), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

est une approximation de $y(t_{n+1})$ à l'ordre h près. L'algorithme d'Euler explicite consiste ainsi à calculer ces approximations $\tilde{y}(t_{n+1})$ en considérant la condition initiale $\tilde{y}(0) = y(0)$.

1. Implémenter une fonction $F(Y, l_1, l_2, m_1, m_2)$ qui, étant donné le vecteur Y , retourne le vecteur $F(Y)$ pour des masses m_1, m_2 et des longueurs de tige l_1, l_2 données (Il est recommandé d'exprimer les vecteurs sous la forme **array** de la librairie **numpy** et pas sous forme de listes).
2. Implémenter une méthode **method Euler**(Y, h, l_1, l_2, m_1, m_2) qui, partant de l'approximation de Y_t à un certain instant t , renvoie l'approximation $Y_t + hF(Y_t)$ à l'instant $t + h$ suivant (Il est recommandé d'exprimer les vecteurs sous la forme **array** de la librairie **numpy** et pas sous forme des listes).
3. En partant de Y_0 comme condition initiale, faire une boucle sur tous les temps qui permet d'obtenir l'approximation $\tilde{Y}(t_n)$ pour les différents instants $n = 0, \dots, N$. Stocker la trajectoire (i.e. l'ensemble des approximations Y_t pour tous les instants t_n) dans une liste.
4. Tracer la trajectoire de 0 à $T = 2$ s en utilisant les données ci-dessous :

$$\begin{cases} m_1 = m_2 &= 1 \text{ kg}, \\ l_1 = l_2 &= 1 \text{ m}, \\ Y_0 &= \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right)^T, \\ N &= 10^3. \end{cases}$$

5. Afin de visualiser et sauvegarder les résultats via la commande **plt.savefig**, vous pouvez implémenter
 - une fonction **anglePlot** qui trace les valeurs de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ en fonction du temps pour $t = t_n, n = 0, \dots, N$.
 - une fonction **angulVelocityPlot** pour $\dot{\theta}_1(t)$ et $\dot{\theta}_2(t)$. Sauver la figure avec le nom 'angularVelocityEvolution.pdf'.
 - une fonction **trajectoryPlot** représentant graphiquement la trajectoires $(x_i(t), y_i(t))$ des masses m_i pour tout $t = t_n, n = 0, \dots, N$. Indication : pour s'assurer que votre programme fonctionne correctement, vous pouvez comparer les trajectoires avec celle montrée dans cette vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=pEjZd-AvPco>.
6. Dans ce projet, il est possible de prouver que l'énergie totale du pendule est conservée au cours du mouvement. On rappelle que l'énergie mécanique, constante au cours du temps, est donnée la formule suivante :

$$E_T(t) = E_c(t) + E_p(t)$$

où $E_c(t)$ et $E_p(t)$ sont respectivement les énergies cinétiques et potentielles à déterminer en fonction de $(m_1, m_2, \theta_1, \theta_2)$. Pour illustrer cette propriété, nous vous proposons d'implémenter les fonctions suivantes :

- Déterminer la valeur de E_c et E_p et montrer que l'énergie totale est constante.
- **energyCompute** qui calcule l'énergie E_T avec un vecteur initial $Y(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix}$.
- **energyEvolution** qui représente $E_T(t)$ en fonction du temps.
- Tracer l'évolution de E_T pour les instants t_n de $[0, T = 1 \text{ s}]$ en utilisant les données ci-dessous :

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}, \\ l_1 = l_2 = 1 \text{ m}, \\ Y_0 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 0, 0\right)^T, \\ N = 10^3. \end{cases}$$

Que peut-on dire sur la conservation d'énergie ? Que peut-on en conclure sur l'approximation de la méthode d'Euler explicite ?

7. En utilisant le cours, implementer la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour ce problème de Cauchy.
 - Reproduire la trajectoire de 0 à $T = 2 \text{ s}$ pour les mêmes données de la question 4. Commenter ce resultat.
 - Comparer les trajectoires avec celle montrée dans la précédente vidéo.

3.2 Méthode de Verlet

Il s'agit d'une méthode numérique introduite par Loup Verlet, un physicien français pionnier des modèles numériques de la dynamique moléculaire afin de simuler le mouvement des particules. Plutôt que de calculer les trajectoires en intégrant les équations du mouvement à chaque instant, le schéma de Verlet exploite une approche itérative. À partir de positions et de vitesses initiales, il utilise des approximations pour déterminer les positions ultérieures des particules à des instants successifs. En comparant

les positions calculées avec les vitesses à ces instants, il ajuste les valeurs pour maintenir la conservation de l'énergie totale du système. Cette méthode offre ainsi un compromis entre précision et efficacité computationnelle dans la simulation des systèmes dynamiques.

Supposons que la fonction $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est définie pour tout $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in \mathbb{R}^4$ comme suit

$$F(Y) := (y_3, y_4, s_1(Y), s_2(Y))^T$$

où

$$\begin{aligned} s_1(Y) &= \frac{-m_2 l_1 y_3^2 \sin(y_1 - y_2) \cos(y_1 - y_2) + g m_2 \sin(y_2) \cos(y_1 - y_2)}{l_1(m_1 + m_2) - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_2)} \\ &\quad - \frac{m_2 l_2 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) + g(m_1 + m_2) \sin(y_1)}{l_1(m_1 + m_2) - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_2)}, \\ s_2(Y) &= \frac{m_2 l_2 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) \cos(y_1 - y_2) + g(m_1 + m_2) \sin(y_1) \cos(y_1 - y_2)}{l_2(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos^2(y_1 - y_2)} \\ &\quad + \frac{(m_1 + m_2) l_1 y_3^2 \sin(y_1 - y_2) - g(m_1 + m_2) \sin(y_2)}{l_2(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos^2(y_1 - y_2)}. \end{aligned}$$

En partant d'une approximation $\bar{y}(t_n)$ au temps t_n , nous construisons $\bar{y}(t_{n+1})$ à l'instant t_{n+1} . D'abord, nous construisons

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1(t_{n+1}) \\ \bar{y}_2(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1(t_n) \\ \bar{y}_2(t_n) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \bar{y}_3(t_n) \\ \bar{y}_4(t_n) \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} s_1(\bar{y}(t_n)) \\ s_2(\bar{y}(t_n)) \end{pmatrix}$$

et introduisons le vecteur intermédiaire $w(t_n) = (\bar{y}_1(t_{n+1}), \bar{y}_2(t_{n+1}), \bar{y}_3(t_n), \bar{y}_4(t_n))^T$. Ensuite, nous déterminons

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_3(t_{n+1}) \\ \bar{y}_4(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_3(t_n) \\ \bar{y}_4(t_n) \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} s_1(w(t_n)) \\ s_2(w(t_n)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(\bar{y}(t_n)) \\ s_2(\bar{y}(t_n)) \end{pmatrix} \right].$$

Nous pouvons démontrer facilement que l'erreur globale de cette méthode est $O(h^2)$. Elle est donc plus précise que celle d'Euler mais moins que la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. Pour illustrer cette comparaison, nous vous suggérons de répondre aux questions ci-dessous :

1. Implémenter **VerletMethod**(Y, h, l_1, l_2, m_1, m_2).
2. Vérifier que l'implémentation est correcte en calculant la trajectoire avec les conditions initiales de la question 4 de la section précédente. Vérifiez que toutes les routines de visualisation mises en œuvre précédemment fonctionnent également avec le schéma de Verlet. Si ce n'est pas le cas, harmonisez le code pour les rendre suffisamment génériques
3. Comparer les trois méthodes en traçant l'évolution des trajectoires de 0 à $T = 2s$ sur la même figure. Commenter le résultat.

4 Mouvement chaotique et sensibilité par rapport aux conditions initiales

Nous étudions à présent la sensibilité de la trajectoire par rapport à des petits changements de la condition initiale. Il sera utile d'observer le comportement des solutions dans l'espace des phases (θ, θ') .

1. Implementer une fonction **PhaseSpacePlot** pour représenter la vitesse angulaire θ'_i en fonction de l'angle θ_i pour $i = 1, 2$. Autrement dit, tracer les courbes \mathcal{C}_i dans le plan \mathbb{R}^2 définies par

$$\mathcal{C}_i = \{(\theta_i(t), \theta'_i(t)) : t \in [0, T]\}, \quad i = 1, 2.$$

2. Dans le régime de petites oscillations, lorsque le pendule est initialisé avec $Y_0 = (0, 0, 0, 0)^T$, il demeure statique, représentant ainsi une position stable d'équilibre. Désormais, explorons son comportement lorsqu'il est mis dans une position très proche de cette position initiale.
 - Calculer la trajectoire de 0 à $T = 20$ s pour les données ci-dessous

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}, \\ l_1 = l_2 = 1 \text{ m}, \\ Y_0 = (10^{-8}, \sqrt{2} \cdot 10^{-8}, 0, 0)^T, \\ N = 10^3. \end{cases}$$

A partir des graphiques $t : [0, T] \mapsto (t, \theta_i(t))$, commenter l'évolution de θ_i et θ'_i en fonction du temps. Quelle est la forme des courbes \mathcal{C}_i ?

- Modifions légèrement les conditions initiales et examinons les solutions avec les données ci-dessous :

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}, \\ l_1 = l_2 = 1 \text{ m}, \\ Y_0 = (10^{-8}, 10^{-8}, 0, 0)^T, \\ N = 10^3. \end{cases}$$

Quel est le comportement des solutions dans cette situation ? Quelles variations observe-t-on par rapport à la précédente configuration ? Quelles conclusions pouvons-nous tirer sur la sensibilité du système aux conditions initiales ?

3. Pour illustrer l'évolution du système dynamique vers un mouvement chaotique, on considère les données

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}, \\ l_1 = l_2 = 1 \text{ m}, \\ y_0 = (\alpha, \alpha, 0, 0)^T, \\ P = 10^3. \end{cases}$$

- Effectuez le calcul des trajectoires pour $\alpha \in \{10^{-9}, 10^{-7}, 0.005, 0.05, 1, 1.2, 1.5, 1.7, 1.9, 2\}$.
- Quelles observations pouvons-nous faire concernant les évolutions de θ_i et θ'_i , ainsi que les courbes \mathcal{C}_i ?
- En examinant les structures des courbes \mathcal{C}_i , pourquoi pouvons-nous conclure qu'il y a une transition vers un mouvement chaotique lorsque α augmente ?