Máster en Técnicas Estadísticas | **Doctorado en Estadística e Investigación Operativa**

Redes y Planificación
Trabajo tema 1

Guillermo Portela Vázquez

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

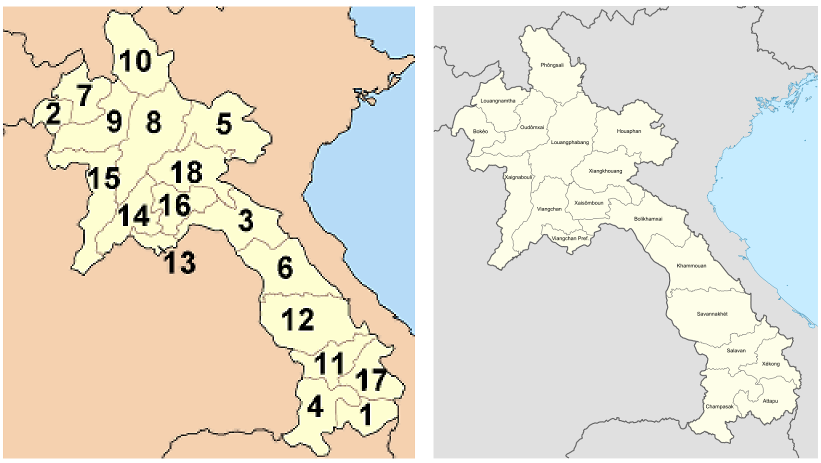
Índice general

1.1. introducción

Voy a hacer el trabajo intentando simular como se plantearía construir de cero una red de energía eléctrica en el país asiático de Laos. A la hora de considerar precios, fuente de energía y otros aspectos tomaré ciertas licencias u holguras que de no tomar complicaría demasiado el trabajo. Laos se trata de un pequeño país sin costa con una población ligeramente superior a la de Cataluña y que tiene una forma de Gobierno de partido único, el Partido Popular Revolucionario de Laos. Dicho partido lleva gobernando el país desde el año 1975 y se puede considerar, a grandes rasgos, un sucesor en el territorio del partido comunista de Indochina. Para más información general acerca del país consultar [1]

1.1.1. Distribución territorial

Aunque las fuentes que he encontrado no son tan consistentes en este aspecto como me gustaría. A grandes rasgos, El país se encuentra dividido en 17 provincias y la prefectura de la capital (la región nº 13 en 1.1.1(a), a mayores de la prefectura de Vientián una de las provincias tiene también dicho nombre). Hasta el año 2006 las provincias se distribuían como en 1.1.1(a). Después de dicho año se cambió ligeramente la distribución de las provincias creando nuevas conexiones fronterizas entre ellas (por ejemplo ahora la 15 y la 2 son limítrofes, mientras que la 14 y la 18 ya no hacen frontera entre ellas).



(a) Distribución previa a 2006. (b) Distribución posterior a 2006.

Sin embargo en se indica que la provincia de Xaisômboun (la número 16) se disolvió entre 2006 y 2013. Por complicaciones a la hora de calcular distancias (y para no extender demasiado el trabajo) Voy a considerar como una única región al conjunto de la provincia de Vientián, la prefectura de Vientián Y la provincia de Xaisômboun. Se tratan de las provincias marcadas en 1.1.1 con 13, 14 y 16. Esta decisión a la hora de realizar estudios es tomada también por ejemplo en [5].

1.1.2. Objetivo y simplificaciones tomadas

Voy a suponer que la primera red eléctrica en construirse en el país fue una que unía las "capitales" de provincia y que dicha red se construyó siguiendo la distribución posterior al año 2006 y haciendo la consideración de juntar las 3 regiones mencionadas en el apartado anterior. Es decir el grafo para el que voy a buscar el árbol de expansión a coste mínimo es el que tiene las provincias como nodos y los arcos serán las conexiones entre aquellas provincias que tengan frontera en común.

Para los valores de las distancias entre capitales voy a usar la tabla que se encuentra en la página 32 del documento [3]. Ese documento está en francés pese a que pertenezca a una universidad estadounidense. Esto se debe a que Laos fue colonia francesa y aún se usa a día de hoy el francés en Laos a algunos niveles administrativos. Como curiosidad se puede ver en varios márgenes del documento fechas anteriores al fin de la guerra de Vietnam (1975) en la que Laos estaba fuertemente involucrada, supongo que por ello Estados Unidos tendría interés en esos documentos. Cómo se puede ver en esa tabla de distancias no hay datos para ciudades de las provincias de Vientian ni de Xaisômboun, es por ello que decido juntarlas a la prefectura de Vientian. Otras provincias para las que no hay datos en esa tabla son las de Oudômxai y Xékong. Para ellas tomaré la distancia del trayecto en coche que marca google maps, esto no es muy descabellado pues los tendidos eléctricos suelen colocarse en el margen de las carreteras, por este método voy a tener que aproximar 8 distancias. En el documento [3] hay algunas poblaciones, como Seno, que forman parte de una provincia sin ser su capital (en concreto Seno es parte de la provincia de Savannakhet) Obviamente esos datos tampoco serán utilizados.
Para el cálculo del coste voy a suponer linealidad respecto a las distancias (por ejemplo si un tramo entre dos capitales del tendido es el doble de largo que otro tramo su costo también será el doble) esto vendría a significar que se están ignorando los gastos burocráticos y, en menor medida, los gastos en mano de obra. Tal vez ayude pensar que lo que se está calculando es el gasto en cobre necesario para colocar la red. En la imagen 1.1.2 tomada de google maps cerca de Savannakhét se puede apreciar que hay cerca de 24 líneas de tendido eléctrico en paralelo al lado de la carretera. Por ello voy a tomar como coste entre capitales 24 veces la distancia entre ellas. Cómo no se en que año se construyo he decidido "crear" la unidad de medida PCKCAC (siglas de Precio de Cien Kilómetros de Cobre en el Año

de Construcción) .

Figura 1.1: Tendido eléctrico en las afueras de la segunda ciudad más poblada de Laos. Visto en maps

1.1.3. Decidiendo donde colocar la fuente

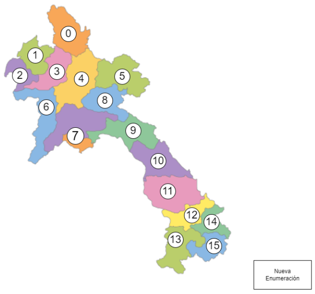
A la hora de decidir cual de las provincias es la fuente he decidido hacer la mayor de las simplificaciones. En la segunda página del artículo [2] se puede ver que en el norte tiene un gran poder hidroeléctrico. Por ello, voy a tomar como fuente la provincia más al norte del país. En las imágenes 1.1.1 me estoy refiriendo a la provincia 10 o Phôngsali. Unas páginas más adelante en el mismo documento [2] se puede ver que realmente las fuentes de energía están más dispersas por el país.

1.2. Construyendo el Grafo

Vamos a querer hacer una enumeración como en 1.1.1 (a) pero poniendo el nodo 0 en la fuente y el resto de nodos de 1 a 15 de una forma cómoda. También voy a recolocar los nodos de una forma más “cuadriculada” para que sea más cómodo trabajar en el grafo. Todo este proceso se puede ver en 1.2

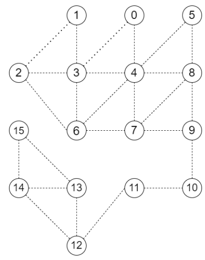
1.2.1. Colocando costes

Como ya se dijo, la mayor parte de las distancias se toman de [3]. Aún así necesito aproximar 8 distancias más. 5 de la provincia de Oudômxai (que corresponden con las 5



(a) Nueva enumeración

(b) Obtención del grafo



(c) grafo cómodo

conexiones del nodo 3 en el nuevo grafo) y 3 de la provincia de xékong (que corresponden con las 3 conexiones del nodo 14 en el nuevo grafo) Buscadas en google maps esas distancias se pueden ver en las siguientes tablas

En km	Oudômxai (muang xay)
Phôngsali	235
Louangnamtha	111
Bokèo	308
Xaignabouli	297
Louangphabang	193

En km	Xékong
Salavan	92.3
Champasak	167
Attapu	73.5

Juntando esas 8 distancias y las del documento mencionado podemos finalmente crear el grafo con los costes de los posibles nodos a construir (Recordar que los costes son 24 veces las distancias y estan medidos en PCKCAC, precio de 100km de cobre).

1.3. Eligiendo el algoritmo.

Tenemos que decidir qué algoritmo usar para encontrar el árbol de coste mínimo y distribuir los pagos. Como no curso teoría de juegos prefiero no usar ninguno de los métodos que hacen uso de esa rama. Por lo que, para decidir como repartir costes, tengo que decidir entre el algoritmo de Prim y el algoritmo de Kruskal. Pese a que no entiendo mucho de política creo que ninguno de los dos métodos encaja fácilmente dentro del sistema de gobierno de Laos ni del partido que gobierna el país, pues ambos métodos penalizan vivir en un nodo "aislado" así que simplemente seguiré el algoritmo de Kruskal que es el que personalmente más me gusta de los dos (tal y como indiqué en el correo que se pidió en clase). Procedemos entonces a encontrar el árbol siguiendo ese algoritmo siguiendo la

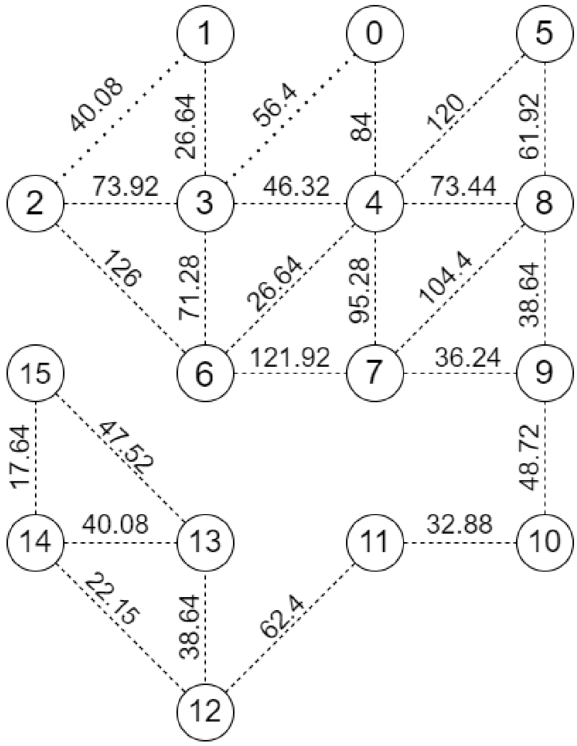


Figura 1.2: Grafo con los costes

notación expuesta en clase.

1.4. Obtención del árbol Y reparto de costes

De inicio tenemos:

$$\begin{aligned} A = &\{(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(2,3),(2,6),(3,4),(3,6),(4,5)\} \\ &\bigcup\{(4,6),(4,7),(4,8)\,(5,8)\,(6,7),(7,8),(7,9),(8,9),(9,10)\} \\ &\bigcup\{(10,11),(11,12),(12,13),(12,14),(13,14),(13,15),(14,15)\} \end{aligned}$$

$$\text{y } g^0 = \emptyset \quad PCC\left(N_0, g^0\right) = \{S_0, S_1, \ldots, S_15\}$$

Vamos con los pasos

1.4.1. Paso 1.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 17.64 \text{ con } (i,j) = (14,15)$$

$$\left(i^1, j^1\right) = (14,15) \quad g^1 = \{(14,15)\}$$

$$A = \{(0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (2,3), (2,6), (3,4), (3,6), (4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,6), (4,7), (4,8)\,(5,8)\,(6,7), (7,8), (7,9), (8,9), (9,10)\}$$
$$\bigcup \{(10,11), (11,12), (12,13), (12,14), (13,14), (13,15)\}$$

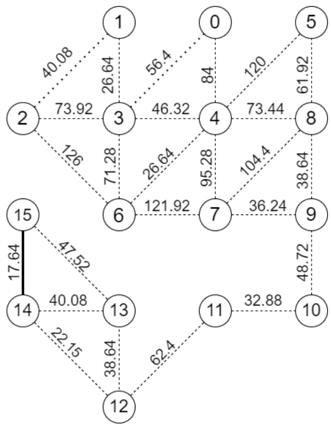


Figura 1.3: Paso1

Para el pago, ninguno de los agentes conectados estaba conectado a la red y por tanto $\varrho_{14}\left(i^1, j^1\right) = \frac{1}{2} = \varrho_{15}\left(i^1, j^1\right)$ y por tanto cada uno paga 11,075. $PCC(N_0, g^1) = \{\{0\}, \ldots, \{13\}\,\{14,15\}\}$

1.4.2. Paso 2.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 22.15 \text{ con } (i,j) = (14,12)$$

$$g^1 \cup \{(14,12)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^2, j^2\right) = (14,12)$$

$$g^2 = \{(14,15), (14,12)\}$$

$$A = \{(0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (2,3), (2,6), (3,4), (3,6), (4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,6), (4,7), (4,8)\,(5,8)\,(6,7), (7,8), (7,9), (8,9), (9,10)\}$$
$$\bigcup \{(10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (13,15)\}$$

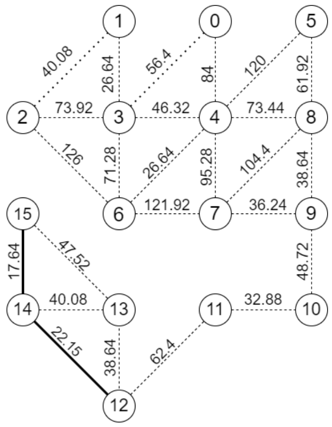


Figura 1.4: Paso2

Para el pago, se conecta $S_{14} = \{\{14\}\{15\}\}$ a $S_{12} = \{\{12\}\}$ $\varrho_{14}\left(i^2, j^2\right) = \dfrac{1}{6} = \varrho_{15}\left(i^2, j^2\right)$ y $\varrho_{12}\left(i^2, j^2\right) = \dfrac{2}{3}$ por tanto los agentes en $\{\{14\}\{15\}\}$ pagan 3,69 cada uno mientras que el agente en $\{\{12\}\}$ paga 14,77

1.4.3. Paso 3.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 26.64 \text{ con } (i,j) = (1,3) \text{ o } (i,j) = (4,6) \text{ escojo } (1,3)$$

$$g^2 \cup \{(1,3)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^3, j^3\right) = (1,3)$$

$$g^3 = \{(14,15), (14,12), (1,3)\}$$

$$\begin{gathered} A = \{(0,3), (0,4), (1,2), (2,3), (2,6), (3,4), (3,6), (4,5)\} \\ \bigcup \{(4,6), (4,7), (4,8)\,(5,8)\,(6,7), (7,8), (7,9), (8,9), (9,10)\} \\ \bigcup \{(10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (13,15)\} \end{gathered}$$

Para el pago, ninguno de los agentes conectados estaba conectado a la red y estaban aislados de cualquier otro agente por tanto $\varrho_1\left(i^3, j^3\right) = \dfrac{1}{2} = \varrho_3\left(i^3, j^3\right)$ y por tanto cada uno paga 13,32.

1.4.4. Paso 4.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 26.64 \text{ con } (i,j) = (4,6)$$

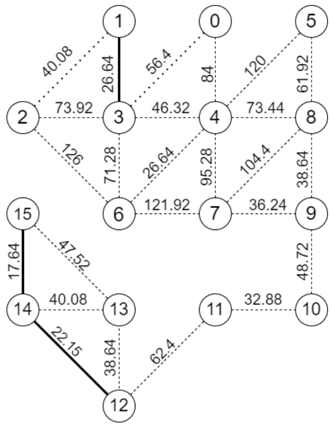


Figura 1.5: Paso3

$$g^3 \cup \{(4,6)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^4, j^4\right) = (4,6)$$

$$g^4 = \{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6)\}$$

$$\begin{aligned} A = \{&(0,3),(0,4),(1,2),(2,3),(2,6),(3,4),(3,6),(4,5)\} \\ \bigcup \{&(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(7,9),(8,9),(9,10)\} \\ \bigcup \{&(10,11),(11,12),(12,13),(13,14),(13,15)\} \end{aligned}$$

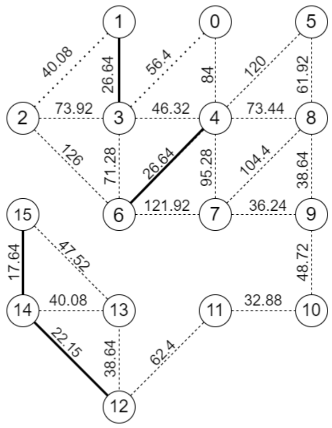


Figura 1.6: Paso4

Para el pago, ninguno de los agentes conectados estaba conectado a la red y estaban aislados de cualquier otro agente por tanto $\varrho_4\left(i^4, j^4\right) = \frac{1}{2} = \varrho_6\left(i^4, j^4\right)$ y por tanto cada uno paga 13,32.

1.4.5. Paso 5.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 32.88 \text{ con } (i,j) = (10,11)$$

$$g^4 \cup \{(10,11)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^5, j^5\right) = (10,11)$$

$$g^5 = \{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6),(10,11)\}$$

$$A = \{(0,3),(0,4),(1,2),(2,3),(2,6),(3,4),(3,6),(4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(7,9),(8,9),(9,10)\}$$
$$\bigcup \{(11,12),(12,13),(13,14),(13,15)\}$$

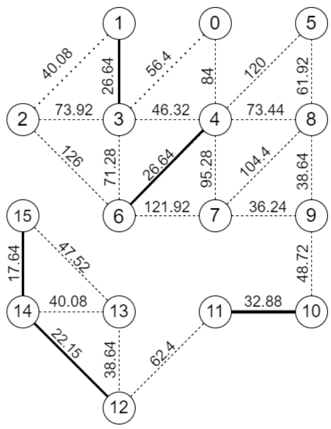


Figura 1.7: Paso5

Para el pago, ninguno de los agentes conectados estaba conectado a la red y estaban aislados de cualquier otro agente por tanto $\varrho_{10}\left(i^5, j^5\right) = \dfrac{1}{2} = \varrho_{11}\left(i^5, j^5\right)$ y por tanto cada uno paga 16,44.

1.4.6. Paso 6.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 36.24 \text{ con } (i,j) = (7,9)$$

$$g^5 \cup \{(7,9)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^6, j^6\right) = (7,9)$$

$$g^6 = \{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6),(10,11),(7,9)\}$$

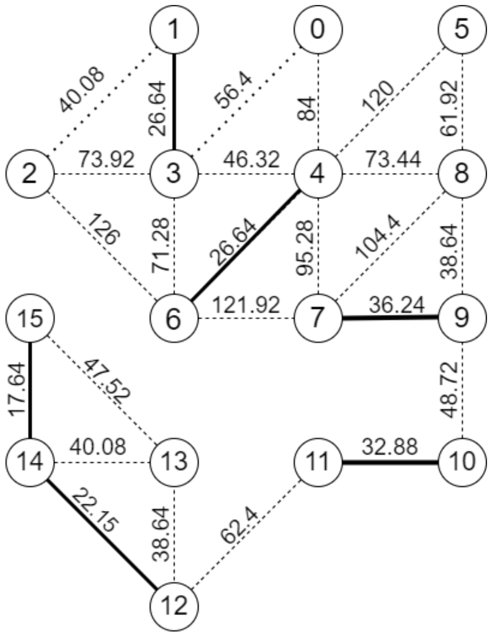


Figura 1.8: Paso6

$$
\begin{aligned}
A = \{&(0,3),(0,4),(1,2),(2,3),(2,6),(3,4),(3,6),(4,5)\}\\
&\bigcup\{(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(8,9),(9,10)\}\\
&\bigcup\{(11,12),(12,13),(13,14),(13,15)\}
\end{aligned}
$$

Para el pago, ninguno de los agentes conectados estaba conectado a la red y estaban aislados de cualquier otro agente por tanto $\varrho_7\left(i^6,j^6\right)=\dfrac{1}{2}=\varrho_9\left(i^6,j^6\right)$ y por tanto cada uno paga 18,12.

1.4.7. Paso 7.

$$\min_{(i,j)\in A}\ \{c_{kl}\}=38.64 \text{ con } (i,j)=(8,9) \text{ o } (i,j)=(12,13) \,\text{escojo}\,(8,9)$$

$$g^6\cup\{(8,9)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^7,j^7\right)=(8,9)$$

$$g^7=\{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6),(10,11),(7,9),(8,9)\}$$

$$
\begin{aligned}
A = \{&(0,3),(0,4),(1,2),(2,3),(2,6),(3,4),(3,6),(4,5)\}\\
&\bigcup\{(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(9,10)\}\\
&\bigcup\{(11,12),(12,13),(13,14),(13,15)\}
\end{aligned}
$$

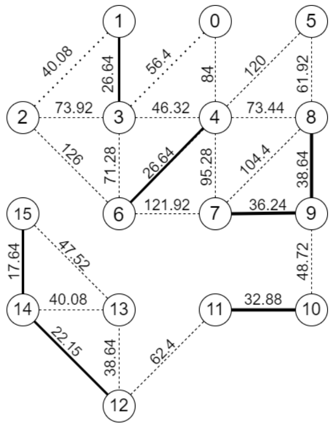


Figura 1.9: Paso7

Para el pago, se conecta $S_k = \{\{7\}\{9\}\}$ a $S_l = \{\{8\}\}$ $\varrho_7\left(i^7, j^7\right) = \dfrac{1}{6} = \varrho_9\left(i^7, j^7\right)$ y $\varrho_{12}\left(i^7, j^7\right) = \dfrac{2}{3}$ por tanto los agentes en $\{\{7\}\{9\}\}$ pagan 6,44 cada uno mientras que el agente en $\{\{8\}\}$ paga 25,76.

1.4.8. Paso 8.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 38.64 \text{ con } (i,j) = (12,13)$$

$$g^7 \cup \{(12,13)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^8, j^8\right) = (12,13)$$

$$g^8 = \{(14,15), (14,12), (1,3), (4,6), (10,11), (7,9), (8,9), (12,13)\}$$

$$\begin{gathered} A = \{(0,3), (0,4), (1,2), (2,3), (2,6), (3,4), (3,6), (4,5)\} \\ \bigcup \{(4,7), (4,8), (5,8), (6,7), (7,8), (9,10)\} \\ \bigcup \{(11,12), (13,14), (13,15)\} \end{gathered}$$

Vamos con el pago. Sea $S_k = \{\{12\}, \{14\}, \{15\}, \} \Rightarrow \left|S_k\right| = 3$ y por otra parte $S_l = \{\{13\}\} \Rightarrow \left|S_l\right| = 1$. Tenemos entonces que

$$\varrho_i\left(i^8, j^8\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{12} & \text{si } i \in S_k \\ \\ \dfrac{3}{4} & \text{si } i \in S_l \end{cases} \tag{1.1}$$

Por tanto los agentes 12, 14 y 15 pagan 3,22 cada uno mientras que el agente 13 paga 28,98

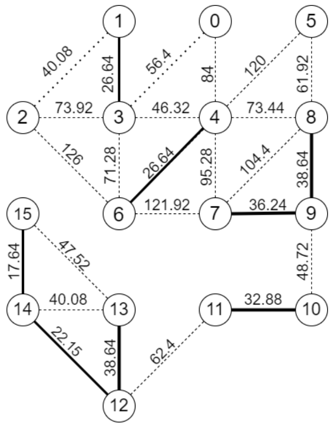


Figura 1.10: Paso8

1.4.9. Paso 9.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 40.08 \text{ con } (i,j) = (13,14) \text{ o } (i,j) = (1,2) \text{ escojo } (13,14)$$

$$g^8 \cup \{(13,14)\} \text{ tiene un ciclo. Lo cual implica}$$

$$A = \{(0,3), (0,4), (1,2), (2,3), (2,6), (3,4), (3,6), (4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,7), (4,8), (5,8), (6,7), (7,8), (9,10), (11,12), (13,15)\}$$

Volvemos al inicio del paso.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 40.08 \text{ con } (i,j) = (1,2)$$

$$g^8 \cup \{(1,2)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^9, j^9\right) = (1,2)$$

$$g^9 = \{(14,15), (14,12), (1,3), (4,6), (10,11), (7,9), (8,9), (12,13), (1,2)\}$$

$$A = \{(0,3), (0,4), (2,3), (2,6), (3,4), (3,6), (4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,7), (4,8), (5,8), (6,7), (7,8), (9,10), (11,12), (13,15)\}$$

Para el pago, se conecta $S_k = \{\{1\}\{3\}\}$ a $S_l = \{\{2\}\}$ $\varrho_1\left(i^9, j^9\right) = \dfrac{1}{6} = \varrho_3\left(i^9, j^9\right)$ y

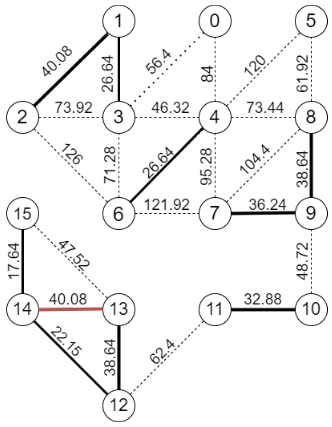


Figura 1.11: Paso9

$\varrho_2\left(i^9, j^9\right) = \dfrac{2}{3}$ por tanto los agentes en $\{\{1\}\{3\}\}$ pagan 6,68 cada uno mientras que el agente en $\{\{8\}\}$ paga 26,72.

1.4.10. Paso 10.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 46.32 \text{ con } (i,j) = (3,4)$$

$$g^9 \cup \{(3,4)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^{10}, j^{10}\right) = (3,4)$$

$$g^{10} = \{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6),(10,11),(7,9),(8,9),(12,13),(1,2),(3,4)\}$$

$$A = \{(0,3),(0,4),(2,3),(2,6),(3,6),(4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(9,10),(11,12),(13,15)\}$$

Vamos con el pago. Sea $S_k = \{\{1\},\{2\},\{3\},\} \Rightarrow \left|S_k\right| = 3$ y por otra parte $S_l = \{\{4\},\{6\}\} \Rightarrow \left|S_l\right| = 2$. Tenemos entonces que

$$\varrho_i\left(i^{10}, j^{10}\right) = \begin{cases} \dfrac{|S_l|}{|S_k \cup S_l|}\dfrac{1}{|S_k|} = \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15} & \text{si } i \in S_k \\ \\ \dfrac{|S_k|}{|S_l \cup S_k|}\dfrac{1}{|S_l|} = \dfrac{3}{5}\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10} & \text{si } i \in S_l \end{cases} \tag{1.2}$$

Por tanto los agentes 1, 2 y 3 pagan 6.176 cada uno mientras que los agentes 4 y 6 pagan 13.896

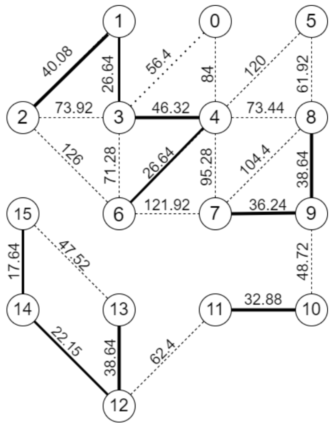


Figura 1.12: Paso10

1.4.11. Paso 11.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 47.52 \text{ con } (i,j) = (13,15)$$

$$g^{10} \cup \{(13,14)\} \text{ tiene un ciclos, lo cual implica:}$$

$$A = \{(0,3),(0,4),(2,3),(2,6),(3,6),(4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(9,10),(11,12)\}$$

Volvemos al inicio del paso.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 48.72 \text{ con } (i,j) = (9,10)$$

$$g^{10} \cup \{(9,10)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^{11}, j^{11}\right) = (9,10)$$

$$g^1 1 = \{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6),(10,11),(7,9),(8,9),(12,13),(1,2),(3,4),(9,10)\}$$

$$A = \{(0,3),(0,4),(2,3),(2,6),(3,6),(4,5)\}$$
$$\bigcup \{(4,7),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8),(11,12)\}$$

Vamos con el pago. Sea $S_k = \{\{7\},\{8\},\{9\},\} \Rightarrow \left|S_k\right| = 3$ y por otra parte $S_l = \{\{10\},\{11\}\} \Rightarrow \left|S_l\right| = 2$. Tenemos entonces que

$$\varrho_i\left(i^{11}, j^{11}\right) = \begin{cases} \dfrac{|S_l|}{|S_k \cup S_l|}\dfrac{1}{|S_k|} = \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15} & \text{si } i \in S_k \\ \\ \dfrac{|S_k|}{|S_l \cup S_k|}\dfrac{1}{|S_l|} = \dfrac{3}{5}\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10} & \text{si } i \in S_l \end{cases} \tag{1.3}$$

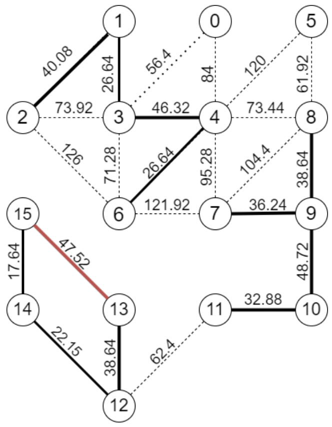


Figura 1.13: Paso11

Por tanto los agentes 7, 8 y 9 pagan 6.496 cada uno mientras que los agentes 10 y 11 pagan 14.616.

1.4.12. Paso 12.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 56.4 \text{ con } (i,j) = (0,3)$$

$$g^{11} \cup \{(0,3)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^{12}, j^{12}\right) = (0,3)$$

$$g^{12} = \{(14,15), (14,12), (1,3), (4,6), (10,11), (7,9), (8,9), (12,13)\} \\ \bigcup \{(1,2), (3,4), (9,10), (0,3)\}$$

$$A = \{(0,4), (2,3), (2,6), (3,6), (4,5), (4,7), (4,8), (5,8), (6,7), (7,8), (11,12)\}$$

Para los pagos esta vez entra en juego que se ha conectado la fuente. Por lo que el cálculo es más sencillo. $S_k = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}\} \Rightarrow \|S_k\| = 5$ y $\varrho_i \left(i^{12}, j^{12}\right) = \frac{1}{\|S_k\|} = \frac{1}{5}$ para $i \in S_k$ Por tanto los agentes 1, 2, 3, 4 y 6 pagan 11,28 cada uno.

1.4.13. Paso 13.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 61.92 \text{ con } (i,j) = (5,8)$$

$$g^{12} \cup \{(5,8)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^{13}, j^{13}\right) = (5,8)$$

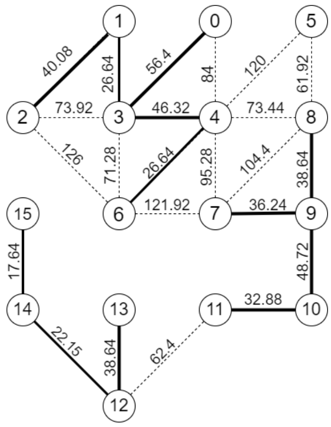


Figura 1.14: Paso12

$$g^{13} = \{(14,15),(14,12),(1,3),(4,6),(10,11),(7,9),(8,9),(12,13)\}$$
$$\bigcup\{(1,2),(3,4),(9,10),(0,3),(5,8)\}$$

$$A = \{(0,4),(2,3),(2,6),(3,6),(4,5),(4,7),(4,8),(6,7),(7,8),(11,12)\}$$

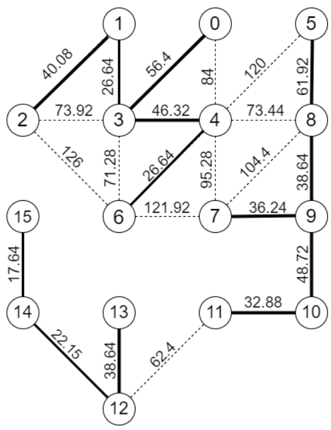


Figura 1.15: Paso13

Vamos con el pago. Sea $S_k = \{\{7\},\{8\},\{9\},\{10\},\{11\}\} \Rightarrow \Big|S_k\Big| = 5$ y por otra parte sea $S_l = \{\{5\}\} \Rightarrow \left|S_l\right| = 1$. Tenemos entonces que

$$\varrho_i\left(i^{13}, j^{13}\right) = \begin{cases} \dfrac{|S_l|}{|S_k \cup S_l|}\dfrac{1}{|S_k|} = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{30} & \text{si } i \in S_k \\ \\ \dfrac{|S_k|}{|S_l \cup S_k|}\dfrac{1}{|S_l|} = \dfrac{5}{6}\dfrac{1}{1} = \dfrac{5}{6} & \text{si } i \in S_l \end{cases} \tag{1.4}$$

De esta forma los agentes 7, 8, 9, 10 y 11 pagan 2.064 cada uno mientras que el agente 5 paga 51.6.

1.4.14. Paso 14.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 62.4 \text{ con } (i,j) = (11,12)$$

$$g^{13} \cup \{(11,12)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^{14}, j^{14}\right) = (11,12)$$

$$g^{14} = \{(14,15), (14,12), (1,3), (4,6), (10,11), (7,9), (8,9), (12,13)\}$$
$$\bigcup \{(1,2), (3,4), (9,10), (0,3), (5,8), (11,12)\}$$

$$A = \{(0,4), (2,3), (2,6), (3,6), (4,5), (4,7), (4,8), (6,7), (7,8)\}$$

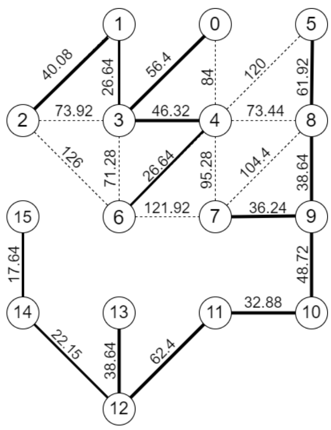


Figura 1.16: Paso14

Vamos con el pago. Sea $S_k = \{\{5\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}\} \Rightarrow \left|S_k\right| = 6$ y por otra parte sea $S_l = \{\{12\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}\} \Rightarrow \left|S_l\right| = 4$. Tenemos entonces que

$$\varrho_i\left(i^{14}, j^{14}\right) = \begin{cases} \dfrac{|S_l|}{|S_k \cup S_l|}\dfrac{1}{|S_k|} = \dfrac{4}{10}\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{15} & \text{si } i \in S_k \\ \\ \dfrac{|S_k|}{|S_l \cup S_k|}\dfrac{1}{|S_l|} = \dfrac{6}{10}\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20} & \text{si } i \in S_l \end{cases} \tag{1.5}$$

De esta forma los agentes 5, 7, 8, 9, 10, y pagan 4.16 cada uno mientras que los agentes 12, 13, 14 y 15 pagan 9.36 cada uno.

1.4.15. Paso 15 y último.

$$\min_{(i,j)\in A} \{c_{kl}\} = 73.44 \text{ con } (i,j) = (4,8)$$

$$g^{14} \cup \{(11,12)\} \text{ sin ciclos } \Rightarrow \left(i^{15}, j^{15}\right) = (4,8)$$

$$g^{15} = \{(14,15), (14,12), (1,3), (4,6), (10,11), (7,9), (8,9), (12,13)\}$$
$$\bigcup \{(1,2), (3,4), (9,10), (0,3), (5,8), (11,12), (4,8)\}$$

$$A = \{(0,4), (2,3), (2,6), (3,6), (4,5), (4,7), (6,7), (7,8)\}$$

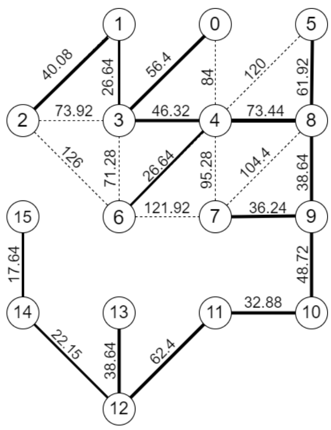


Figura 1.17: Paso15

Hemos alcanzado ya un árbol a coste mínimo: g^{15}. Con coste 628.75.

Para el pago vuelve a ocurrir algo parecido a lo que pasó en el paso 12. Sólo una de las componentes conexas que se unen al construir el arco $(4,8)$ no está conectada ya la fuente y esa componente está conformada por 10 agentes por lo que $\varrho_i\left(i^{15}, j^{15}\right) = \dfrac{1}{10}$ para $i \in \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ Por tanto los agentes 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 pagan 7.344 . La siguiente tabla muestra lo que tiene que pagar cada agente en total y que proporción del coste total ha tenido que pagar:

Agente	Paga	Proporción
1	37.456	0.0596
2	44.176	0.0703
3	37.456	0.0596
4	38.496	0.0612
5	63.104	0.1004
6	38.496	0.0612
7	44.624	0.071
8	45.824	0.0729
9	44.624	0.071
10	44.624	0.071
11	44.624	0.071
12	34.694	0.0552
13	45.684	0.0727
14	34.959	0.0556
15	34.959	0.0556

Al principio del trabajo, en 1.1.3 comenté que una de las licencias más grandes que me permití al hacer el trabajo fue donde colocar la fuente. Podría considerarse más sensato colocarla en la capital pues parece que tiene una energía hidroeléctrica más grande. Sin embargo una de las fortalezas del algoritmo de Kruskal es que a la hora de construir el árbol no influye cual de los nodos es la fuente. Eso solo influye en el reparto de pagos de cada agente. Por tanto si quisiera colocar la fuente en Vientian (la capital) y se aceptan las mismas decisiones por empates que tomé yo, sólo habría que recalcular cuando paga cada agente.
A continuación incluyo un gif mostrando el proceso de creación del arbol:

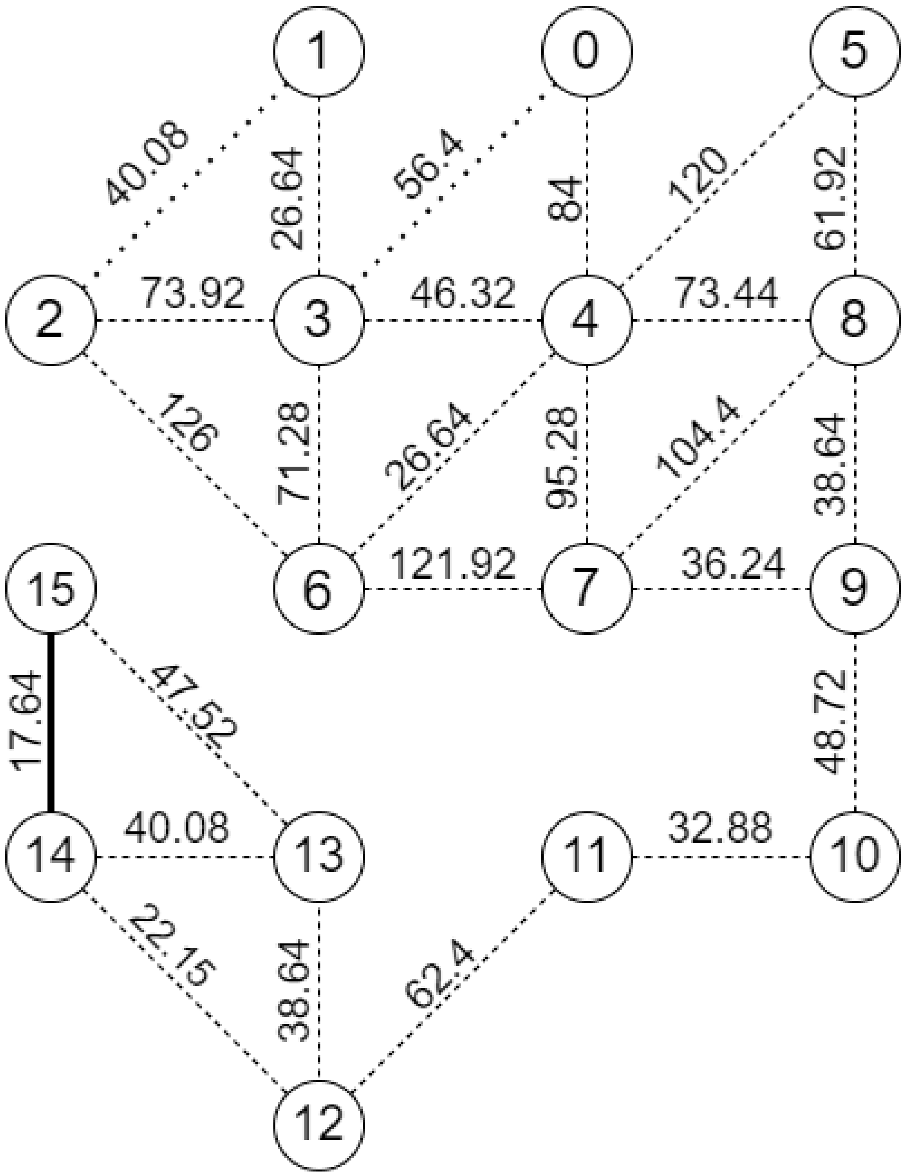


Figura 1.18: Proceso completo

Bibliografía

[1] Laos. wikipedia, la enciclopedia libre.
https://es.wikipedia.org/wiki/Laos

[2] The Study on Power Network System Master Plan in Lao People's Democratic Republic. JICA, TEPCO, NIPPON KOEI y TEPSCO
https://greatermekong.org/g/sites/default/files/Attachment%209%20.LAO%20Master%20Plan.pdf

[3] Maps of Laos. Bibliotecas de la universidad de Wisconsin-Madison
https://search.library.wisc.edu/digital/AMV6KWPRNVLIAV8J

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fasset.library.wisc.edu%2F1711.dl%2F3U4Z5IMX3HQDB85%2FE%2Ffile-bc486.pdf%3Fdl&psig=AOvVaw3KZv8_e2oLC6Tt6Op6Miiy&ust=1711718111874000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBIQjRxqGAoTCJjznIKFl4UDFQAAAAAdAAAAABCGAg

[4] Provinces of Laos. Wikipedia, la enciclopedia libre.
https://en.wikipedia.org/wiki/Provinces_of_Laos

[5] The geogrphic map of 3 study sites in Laos. Researchgate
https://www.researchgate.net/figure/The-geographic-map-of-3-study-sites-in-Laos-Vienti
fig5_281324163