Coeficiente de Mezcla β para Cadenas de Markov

Teoría, Estimación y Aplicaciones Empíricas

José Miguel Acuña Hernández
Andrés Steven Puertas
Guillermo Murillo Tirado

7 de diciembre de 2025

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Cadenas de Markov 2025-II

Contenido

Introducción

Introducción

- Los **coeficientes de mezcla** cuantifican la dependencia temporal en procesos estocásticos

Introducción

- Los **coeficientes de mezcla** cuantifican la dependencia temporal en procesos estocásticos
- El coeficiente β (regularidad absoluta) es fundamental para:
    - Estudio de cadenas de Markov
    - Métodos MCMC (Monte Carlo via Markov Chains)
    - Teoremas límite para datos dependientes

Introducción

- Los **coeficientes de mezcla** cuantifican la dependencia temporal en procesos estocásticos
- El coeficiente β (regularidad absoluta) es fundamental para:
  - Estudio de cadenas de Markov
  - Métodos MCMC (Monte Carlo via Markov Chains)
  - Teoremas límite para datos dependientes
- Pregunta clave: ¿Cómo medir empíricamente estos coeficientes?

Introducción

- Los **coeficientes de mezcla** cuantifican la dependencia temporal en procesos estocásticos
- El coeficiente β (regularidad absoluta) es fundamental para:
  - Estudio de cadenas de Markov
  - Métodos MCMC (Monte Carlo via Markov Chains)
  - Teoremas límite para datos dependientes
- Pregunta clave: ¿Cómo medir empíricamente estos coeficientes?
- Aplicación: Análisis de series temporales reales

Motivación

- Los procesos estocásticos pueden tener **memoria larga** o **memoria corta**

Definición Informal

El coeficiente $\beta(a)$ mide qué tan **independientes** son dos bloques de datos separados por a pasos de tiempo.

Motivación

- Los procesos estocásticos pueden tener **memoria larga** o **memoria corta**
- Procesos β-mezclados: $\beta(a) \to 0$ cuando $a \to \infty$

Definición Informal

El coeficiente $\beta(a)$ mide qué tan **independientes** son dos bloques de datos separados por a pasos de tiempo.

Motivación

- Los procesos estocásticos pueden tener **memoria larga** o **memoria corta**
- Procesos β-mezclados: $\beta(a) \to 0$ cuando $a \to \infty$
- ¿Cómo distinguir empíricamente entre ambos tipos?

Definición Informal

El coeficiente $\beta(a)$ mide qué tan **independientes** son dos bloques de datos separados por a pasos de tiempo.

Motivación

- Los procesos estocásticos pueden tener **memoria larga** o **memoria corta**
- Procesos β-mezclados: $\beta(a) \to 0$ cuando $a \to \infty$
- ¿Cómo distinguir empíricamente entre ambos tipos?
- McDonald (2015) propone estimador por histogramas

Definición Informal

El coeficiente $\beta(a)$ mide qué tan **independientes** son dos bloques de datos separados por a pasos de tiempo.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar los coeficientes de mezcla β para cadenas de Markov, implementar el estimador de McDonald (2015) y aplicarlo a datos reales para distinguir procesos mezclados de no mezclados.

Objetivos Específicos

1. Desarrollar marco teórico de coeficientes β-mezclados
2. Estudiar el estimador por histogramas de McDonald
3. Implementar estimador con parámetros adaptativos
4. Aplicar a S&P 500 (memoria larga) y retrasos de vuelos (memoria corta)
5. Comparar y contrastar resultados empíricos

Marco Teórico

Coeficientes de Mezcla

Definition

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$, el **coeficiente de mezcla** β se define como:

$$\beta(n) = \sup \frac{1}{2} \sum_{i,j} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|$$

donde el supremo se toma sobre particiones finitas de $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ y $\sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$

Coeficientes de Mezcla

Definition

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$, el **coeficiente de mezcla** β se define como:

$$\beta(n) = \sup \frac{1}{2} \sum_{i,j} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|$$

donde el supremo se toma sobre particiones finitas de $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ y $\sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$

- $\beta(n)$ mide la **dependencia** entre pasado y futuro

Coeficientes de Mezcla

Definition

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$, el **coeficiente de mezcla** β se define como:

$$\beta(n) = \sup \frac{1}{2} \sum_{i,j} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|$$

donde el supremo se toma sobre particiones finitas de $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ y $\sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$

- $\beta(n)$ mide la **dependencia** entre pasado y futuro
- $0 \leq \beta(n) \leq 1$ para todo n

Coeficientes de Mezcla

Definition

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$, el **coeficiente de mezcla** β se define como:

$$\beta(n) = \sup \frac{1}{2} \sum_{i,j} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|$$

donde el supremo se toma sobre particiones finitas de $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ y $\sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$

- $\beta(n)$ mide la **dependencia** entre pasado y futuro
- $0 \leq \beta(n) \leq 1$ para todo n
- $\beta(n)$ es no creciente en n

Definición

Un proceso es β-**mezclado** si:

$$\beta(n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Interpretación:

NO β-mezclado:

Procesos β-Mezclados

Definición

Un proceso es β-**mezclado** si:

$$\beta(n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Interpretación:

- Pasado y futuro se vuelven **asintóticamente independientes**

NO β-mezclado:

- $\beta(n) \not\to 0$

Procesos β-Mezclados

Definición

Un proceso es β-**mezclado** si:

$$\beta(n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Interpretación:

- Pasado y futuro se vuelven **asintóticamente independientes**
- Memoria corta

NO β-mezclado:

- $\beta(n) \not\to 0$
- Memoria larga

Procesos β-Mezclados

Definición

Un proceso es β-**mezclado** si:

$$\beta(n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Interpretación:

- Pasado y futuro se vuelven **asintóticamente independientes**
- Memoria corta
- Permite CLT y LLN

NO β-mezclado:

- $\beta(n) \not\to 0$
- Memoria larga
- Dependencia persistente

Propiedades Fundamentales

Theorem (Monotonicidad)

Para todo $m \leq n$*:* $\beta(n) \leq \beta(m)$

Theorem (Subaditividad)

$\beta(m+n) \leq \beta(m) + \beta(n)$

Propiedades Fundamentales

Theorem (Monotonicidad)

Para todo $m \leq n$: $\beta(n) \leq \beta(m)$

Theorem (Subaditividad)

$\beta(m+n) \leq \beta(m) + \beta(n)$

- Estas propiedades son fundamentales para teoría asintótica

Propiedades Fundamentales

Theorem (Monotonicidad)

Para todo $m \leq n$: $\beta(n) \leq \beta(m)$

Theorem (Subaditividad)

$\beta(m+n) \leq \beta(m) + \beta(n)$

- Estas propiedades son fundamentales para teoría asintótica
- Permiten establecer tasas de convergencia en teoremas límite

Cadenas de Markov y β-Mezcla

Theorem

*Si una cadena de Markov es **geométricamente ergódica**, entonces es β-mezclada con:*

$$\beta(n) \leq C\rho^n$$

para constantes $C > 0$ y $0 < \rho < 1$

Cadenas de Markov y β-Mezcla

Theorem

Si una cadena de Markov es ***geométricamente ergódica****, entonces es β-mezclada con:*

$$\beta(n) \leq C\rho^n$$

para constantes $C > 0$ y $0 < \rho < 1$

- Decaimiento exponencial de $\beta(n)$

Cadenas de Markov y β-Mezcla

Theorem

Si una cadena de Markov es ***geométricamente ergódica****, entonces es β-mezclada con:*

$$\beta(n) \leq C\rho^n$$

para constantes $C > 0$ *y* $0 < \rho < 1$

- Decaimiento exponencial de $\beta(n)$
- Muchas cadenas de Markov prácticas son geométricamente ergódicas

Cadenas de Markov y β-Mezcla

Theorem

Si una cadena de Markov es ***geométricamente ergódica****, entonces es β-mezclada con:*

$$\beta(n) \leq C\rho^n$$

para constantes $C > 0$ *y* $0 < \rho < 1$

- Decaimiento exponencial de $\beta(n)$
- Muchas cadenas de Markov prácticas son geométricamente ergódicas
- Ejemplo: Metropolis-Hastings bajo condiciones regulares

Ejemplo: Metropolis-Hastings

El algoritmo MH genera cadena de Markov $\{X_t\}$ con:

- Propuesta: $Y \sim q(\cdot|X_t)$

Ejemplo: Metropolis-Hastings

El algoritmo MH genera cadena de Markov $\{X_t\}$ con:

- Propuesta: $Y \sim q(\cdot|X_t)$
- Probabilidad de aceptación:

$$\alpha(X_t, Y) = \min\left\{1, \frac{\pi(Y)q(X_t|Y)}{\pi(X_t)q(Y|X_t)}\right\}$$

Ejemplo: Metropolis-Hastings

El algoritmo MH genera cadena de Markov $\{X_t\}$ con:

- Propuesta: $Y \sim q(\cdot|X_t)$
- Probabilidad de aceptación:

$$\alpha(X_t, Y) = \text{mín}\left\{1, \frac{\pi(Y)q(X_t|Y)}{\pi(X_t)q(Y|X_t)}\right\}$$

- Si aceptada: $X_{t+1} = Y$, si no: $X_{t+1} = X_t$

Ejemplo: Metropolis-Hastings

El algoritmo MH genera cadena de Markov $\{X_t\}$ con:

- Propuesta: $Y \sim q(\cdot|X_t)$
- Probabilidad de aceptación:

$$\alpha(X_t, Y) = \text{mín}\left\{1, \frac{\pi(Y)q(X_t|Y)}{\pi(X_t)q(Y|X_t)}\right\}$$

- Si aceptada: $X_{t+1} = Y$, si no: $X_{t+1} = X_t$

Ergodicidad Geométrica

Bajo condiciones de drift (Rosenthal 1995), MH es geométricamente ergódico, por tanto β-mezclado

Estimador de McDonald

Problema: Estimación Empírica de β

Desafío

La definición teórica de $\beta(n)$ requiere conocer las distribuciones conjuntas, que en práctica son **desconocidas**

Problema: Estimación Empírica de β

Desafío

La definición teórica de $\beta(n)$ requiere conocer las distribuciones conjuntas, que en práctica son **desconocidas**

- McDonald (2015) propone primer método de estimación para procesos β-mezclados

Problema: Estimación Empírica de β

Desafío

La definición teórica de $\beta(n)$ requiere conocer las distribuciones conjuntas, que en práctica son **desconocidas**

- McDonald (2015) propone primer método de estimación para procesos β-mezclados
- Utiliza estimadores por histogramas de densidades

Problema: Estimación Empírica de β

Desafío

La definición teórica de $\beta(n)$ requiere conocer las distribuciones conjuntas, que en práctica son **desconocidas**

- McDonald (2015) propone primer método de estimación para procesos β-mezclados
- Utiliza estimadores por histogramas de densidades
- Permite verificar empíricamente si un proceso es β-mezclado

Estimador de McDonald

Para bloques de tamaño d separados por lag a:

Definición

$$\hat{\beta}^d(a) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{2d}} \left| \hat{f}_a^{2d} - \hat{f}^d \otimes \hat{f}^d \right| dx$$

donde:

Estimador de McDonald

Para bloques de tamaño d separados por lag a:

Definición

$$\hat{\beta}^d(a) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{2d}} \left|\hat{f}_a^{2d} - \hat{f}^d \otimes \hat{f}^d\right| dx$$

donde:

- $\hat{f}^d$: estimador por histograma de bloques de tamaño d

Estimador de McDonald

Para bloques de tamaño d separados por lag a:

Definición

$$\hat{\beta}^d(a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{2d}} \left| \hat{f}_a^{2d} - \hat{f}^d \otimes \hat{f}^d \right| dx$$

donde:

- $\hat{f}^d$: estimador por histograma de bloques de tamaño d
- $\hat{f}_a^{2d}$: estimador de dos bloques separados por lag a

Estimador de McDonald

Para bloques de tamaño d separados por lag a:

Definición

$$\hat{\beta}^d(a) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{2d}} \left| \hat{f}_a^{2d} - \hat{f}^d \otimes \hat{f}^d \right| dx$$

donde:

- $\hat{f}^d$: estimador por histograma de bloques de tamaño d
- $\hat{f}_a^{2d}$: estimador de dos bloques separados por lag a
- $\otimes$: producto tensorial de densidades

Estimadores por Histogramas

$$\hat{f}^d(x) = \sum \mathbb{1}_{[x \in B(x)]} \frac{1}{n-d+1} \sum_{i=1}^{n-d+1} \frac{\mathbb{1}_{[X_{i:i+d-1} \in B(x)]}}{h_n^d}$$

Estimadores por Histogramas

$$\hat{f}^d(x) = \sum \mathbb{1}_{[x \in B(x)]} \frac{1}{n-d+1} \sum_{i=1}^{n-d+1} \frac{\mathbb{1}_{[X_{i:i+d-1} \in B(x)]}}{h_n^d}$$

- h_n: **ancho de bins** (particiones del espacio)

Estimadores por Histogramas

$$\hat{f}^d(x) = \sum \mathbb{1}_{[x \in B(x)]} \frac{1}{n-d+1} \sum_{i=1}^{n-d+1} \frac{\mathbb{1}_{[X_{i:i+d-1} \in B(x)]}}{h_n^d}$$

- h_n: **ancho de bins** (particiones del espacio)
- d: **dimensión de bloques**

Estimadores por Histogramas

$$\hat{f}^d(x) = \sum \mathbb{1}_{[x \in B(x)]} \frac{1}{n-d+1} \sum_{i=1}^{n-d+1} \frac{\mathbb{1}_{[X_{i:i+d-1} \in B(x)]}}{h_n^d}$$

- h_n: **ancho de bins** (particiones del espacio)
- d: **dimensión de bloques**
- Ambos parámetros deben crecer/decrecer apropiadamente con n

Parámetros Adaptativos

Condiciones de Convergencia (McDonald 2015)

Para que $\hat{\beta}^{d_n}(a) \xrightarrow{P} \beta(a)$:

1. $nh_n^{d_n} \to \infty$ (suficientes observaciones por bin)
2. $d_n h_n \to 0$ (bins decrecen adecuadamente)
3. $d_n \to \infty$ (dimensión crece)
4. $h_n \to 0$ (ancho de bins tiende a cero)

Parámetros Adaptativos

Condiciones de Convergencia (McDonald 2015)

Para que $\hat{\beta}^{d_n}(a) \xrightarrow{P} \beta(a)$:

1. $nh_n^{d_n} \to \infty$ (suficientes observaciones por bin)
2. $d_n h_n \to 0$ (bins decrecen adecuadamente)
3. $d_n \to \infty$ (dimensión crece)
4. $h_n \to 0$ (ancho de bins tiende a cero)

- Implementación: $d_n = \text{máx}\{1, \lfloor \log_2(n/20) \rfloor\}$

Parámetros Adaptativos

Condiciones de Convergencia (McDonald 2015)

Para que $\hat{\beta}^{d_n}(a) \xrightarrow{P} \beta(a)$:

1. $nh_n^{d_n} \to \infty$ (suficientes observaciones por bin)
2. $d_n h_n \to 0$ (bins decrecen adecuadamente)
3. $d_n \to \infty$ (dimensión crece)
4. $h_n \to 0$ (ancho de bins tiende a cero)

- Implementación: $d_n = \text{máx}\{1, \lfloor \log_2(n/20) \rfloor\}$
- Ancho de bins: $h_n = n^{-1/(2d_n+1)}$

Implementación Computacional

Datos Necesarios

- Serie temporal $\{X_t\}_{t=1}^{n}$
- Rango de lags $a = 1, \ldots, a_{\text{máx}}$
- Parámetros d_n, h_n

Software

- **Python/NumPy**
- Implementación propia del estimador
- Visualizaciones con Matplotlib/Seaborn

Implementación Computacional

Datos Necesarios

- Serie temporal $\{X_t\}_{t=1}^{n}$
- Rango de lags $a = 1, \ldots, a_{\text{máx}}$
- Parámetros d_n, h_n

Software

- **Python/NumPy**
- Implementación propia del estimador
- Visualizaciones con Matplotlib/Seaborn

- Análisis de convergencia conforme n crece

Implementación Computacional

Datos Necesarios

- Serie temporal $\{X_t\}_{t=1}^{n}$
- Rango de lags $a = 1, \ldots, a_{\text{máx}}$
- Parámetros d_n, h_n

Software

- **Python/NumPy**
- Implementación propia del estimador
- Visualizaciones con Matplotlib/Seaborn

- Análisis de convergencia conforme n crece
- Verificación de decaimiento de $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ vs a

Criterio de β-Mezcla

Un proceso se considera β-mezclado si:

$$\hat{\beta}^{d_n}(a) \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty$$

Verificación empírica:

Criterio de β-Mezcla

Un proceso se considera β-mezclado si:

$$\hat{\beta}^{d_n}(a) \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty$$

Verificación empírica:

- Graficar $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ vs a

Criterio de β-Mezcla

Un proceso se considera β-mezclado si:

$$\hat{\beta}^{d_n}(a) \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty$$

Verificación empírica:

- Graficar $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ vs a
- Calcular regresión lineal: pendiente negativa indica decaimiento

Interpretación de Resultados

Criterio de β-Mezcla

Un proceso se considera β-mezclado si:

$$\hat{\beta}^{d_n}(a) \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty$$

Verificación empírica:

- Graficar $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ vs a
- Calcular regresión lineal: pendiente negativa indica decaimiento
- Medir razón $\hat{\beta}(a_{\text{máx}})/\hat{\beta}(1)$ (debe ser $\ll 1$)

Interpretación de Resultados

Criterio de β-Mezcla

Un proceso se considera β-mezclado si:

$$\hat{\beta}^{d_n}(a) \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty$$

Verificación empírica:

- Graficar $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ vs a
- Calcular regresión lineal: pendiente negativa indica decaimiento
- Medir razón $\hat{\beta}(a_{\text{máx}})/\hat{\beta}(1)$ (debe ser $\ll 1$)
- R^2 alto indica ajuste consistente con decaimiento

Aplicaciones Empíricas

Dos Casos de Estudio

Caso 1: S&P 500

- Retornos logarítmicos diarios
- Período: 2022-2024
- $n = 636$ observaciones
- **Hipótesis**: NO β-mezclado

Caso 2: Retrasos de Vuelos

- Proporción diaria de delays
- Período: Ene-Jul 2025
- $n = 212$ días
- **Hipótesis**: SÍ β-mezclado

Dos Casos de Estudio

Caso 1: S&P 500

- Retornos logarítmicos diarios
- Período: 2022-2024
- $n = 636$ observaciones
- **Hipótesis**: NO β-mezclado

Caso 2: Retrasos de Vuelos

- Proporción diaria de delays
- Período: Ene-Jul 2025
- $n = 212$ días
- **Hipótesis**: SÍ β-mezclado

- Objetivo: Contrastar comportamientos de procesos con memoria larga vs corta

Aplicación 1: S&P 500

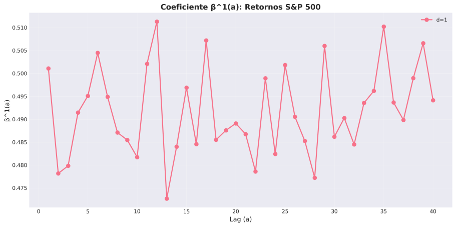

Figura 1: Coeficiente β vs lag

Observaciones:

Aplicación 1: S&P 500

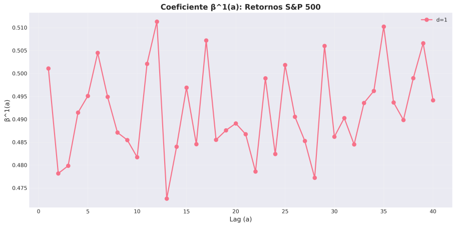

Figura 1: Coeficiente β vs lag

Observaciones:

- $\hat{\beta}(1) \approx 0.05\text{-}0.15$

Aplicación 1: S&P 500

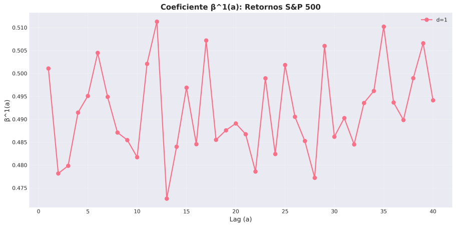

Figura 1: Coeficiente β vs lag

Observaciones:

- $\hat{\beta}(1) \approx 0.05\text{-}0.15$
- Curva **estable** en todos los lags

Aplicación 1: S&P 500

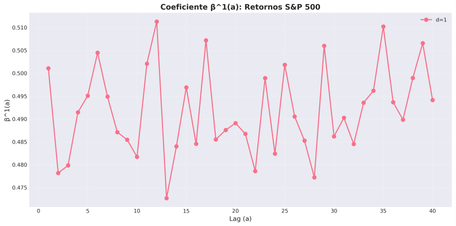

Figura 1: Coeficiente β vs lag

Observaciones:

- $\hat{\beta}(1) \approx 0.05\text{-}0.15$
- Curva **estable** en todos los lags
- Sin evidencia de decaimiento

S&P 500: Análisis de Decaimiento

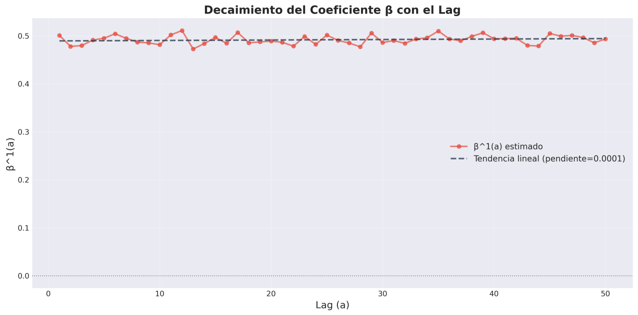

Figura 2: Decaimiento del coeficiente β para S&P 500

S&P 500: Análisis de Decaimiento

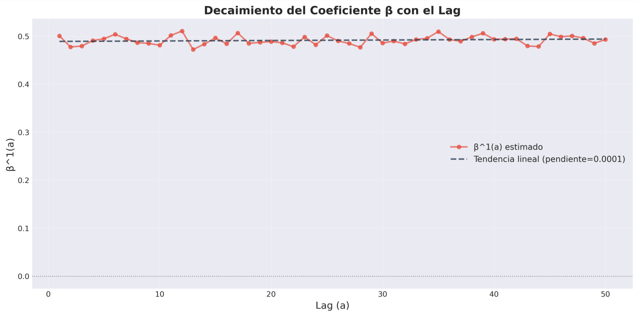

Figura 2: Decaimiento del coeficiente β para S&P 500

- Pendiente de regresión: -0.00003 (prácticamente nula)

S&P 500: Análisis de Decaimiento

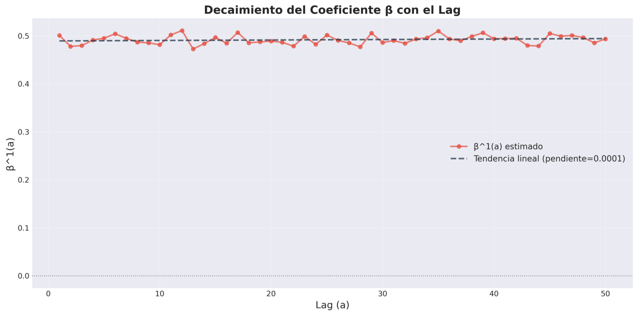

Figura 2: Decaimiento del coeficiente β para S&P 500

- Pendiente de regresión: -0.00003 (prácticamente nula)
- $R^2 = 0.0012$ (ajuste nulo)

S&P 500: Análisis de Decaimiento

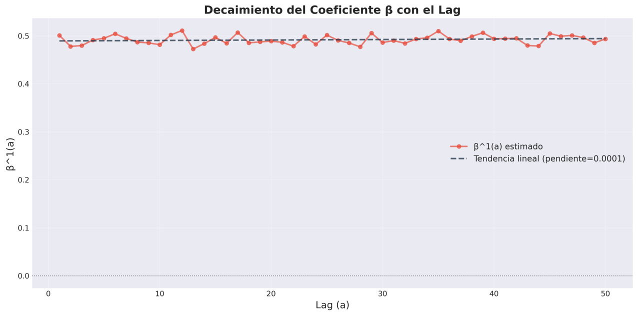

Figura 2: Decaimiento del coeficiente β para S&P 500

- Pendiente de regresión: -0.00003 (prácticamente nula)
- $R^2 = 0.0012$ (ajuste nulo)
- Razón final/inicial: 0.971 (decaimiento del 2.9 % solamente)

S&P 500: Conclusión

Resultado

Los retornos del S&P 500 **NO son β-mezclados**

Interpretación:

S&P 500: Conclusión

Resultado

Los retornos del S&P 500 **NO son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia de **memoria larga** en el proceso

S&P 500: Conclusión

Resultado

Los retornos del S&P 500 **NO son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia de **memoria larga** en el proceso
- Consistente con volatility clustering

S&P 500: Conclusión

Resultado

Los retornos del S&P 500 **NO son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia de **memoria larga** en el proceso
- Consistente con volatility clustering
- Dependencia no lineal capturada por modelos GARCH

S&P 500: Conclusión

Resultado

Los retornos del S&P 500 **NO son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia de **memoria larga** en el proceso
- Consistente con volatility clustering
- Dependencia no lineal capturada por modelos GARCH
- Implicaciones: CLT clásico puede no ser válido

S&P 500: Conclusión

Resultado

Los retornos del S&P 500 **NO son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia de **memoria larga** en el proceso
- Consistente con volatility clustering
- Dependencia no lineal capturada por modelos GARCH
- Implicaciones: CLT clásico puede no ser válido

Validación GARCH

Parámetros estimados: $\alpha + \beta = 0.9459$ (alta persistencia)

Aplicación 2: Retrasos de Vuelos

- Proporción diaria de vuelos retrasados ≥ 15 min
- Total: 4,078,104 vuelos
- Análisis general + análisis específico para LAX

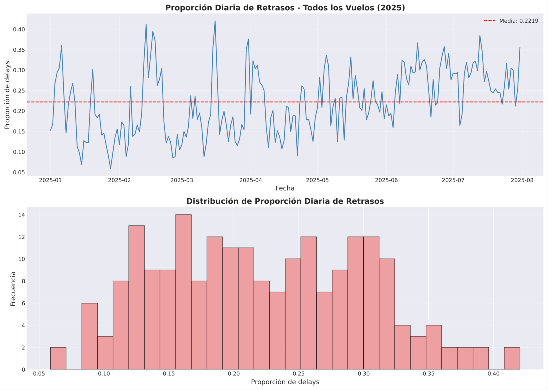

Figura 3: Serie temporal de proporción de retrasos

Delays: Convergencia del Estimador

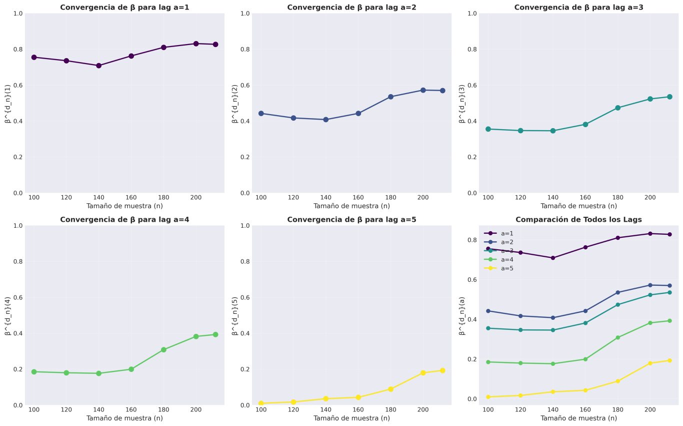

Figura 4: Convergencia de $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ conforme n crece

Delays: Convergencia del Estimador

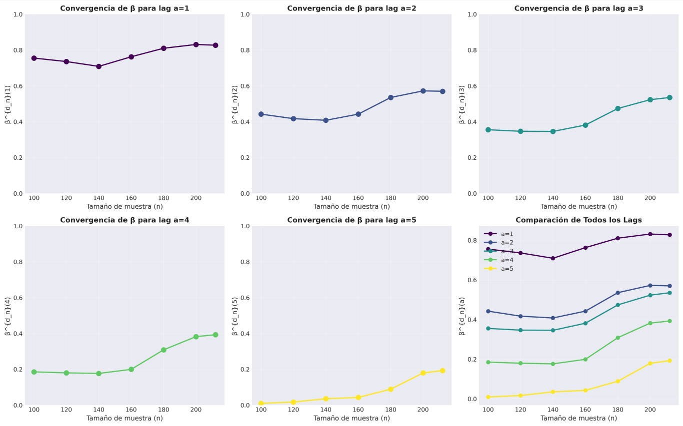

Figura 4: Convergencia de $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ conforme n crece

- Estimadores se estabilizan con n creciente

Delays: Convergencia del Estimador

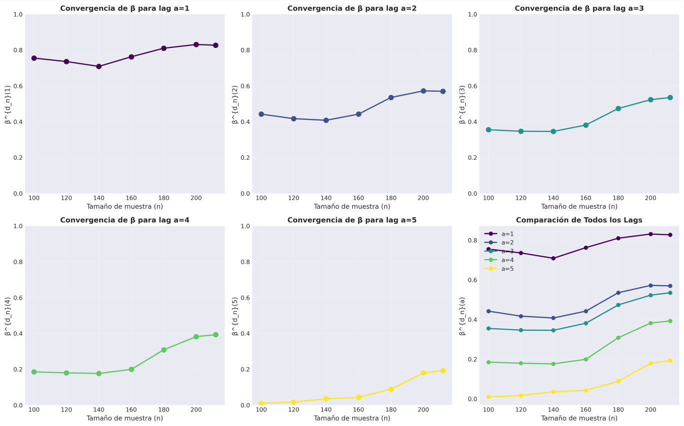

Figura 4: Convergencia de $\hat{\beta}^{d_n}(a)$ conforme n crece

- Estimadores se estabilizan con n creciente
- Confirma convergencia según Teorema de McDonald

Delays: Comparación General vs LAX

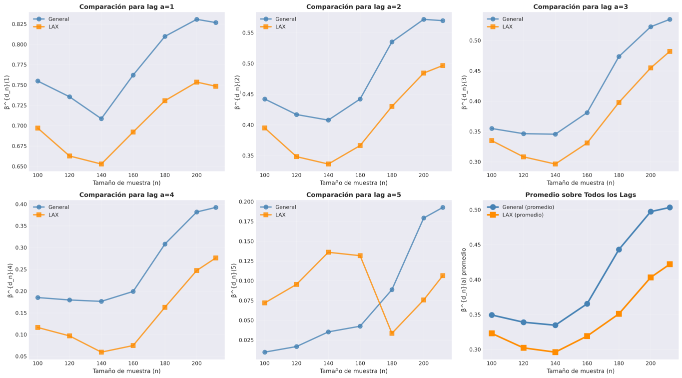

Figura 5: Comparación de coeficientes: General vs LAX

Delays: Comparación General vs LAX

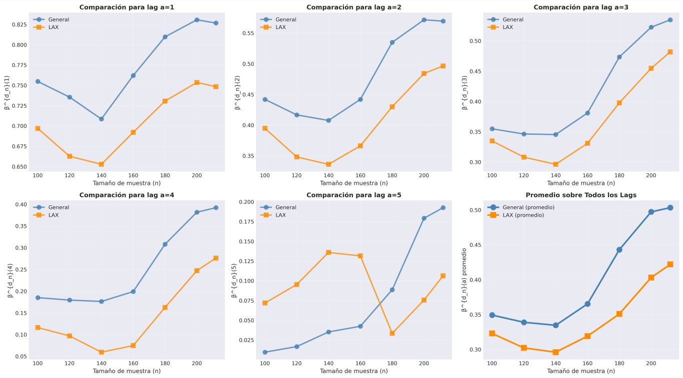

Figura 5: Comparación de coeficientes: General vs LAX

- Ambos exhiben **decaimiento similar**

Delays: Comparación General vs LAX

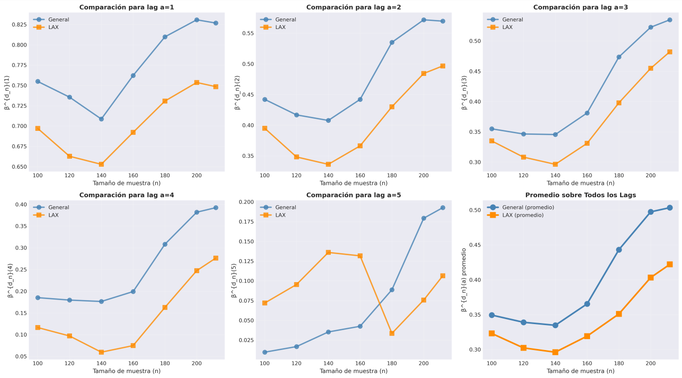

Figura 5: Comparación de coeficientes: General vs LAX

- Ambos exhiben **decaimiento similar**
- LAX muestra coeficientes ligeramente menores

Delays: Análisis de Decaimiento

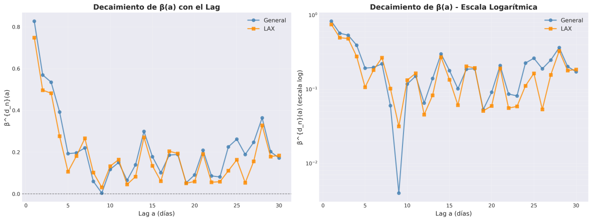

Figura 6: Decaimiento exponencial hacia cero

General:

- Pendiente: -0.0275
- $R^2 = 0.892$
- Decaimiento: 99.3 %

LAX:

- Pendiente: -0.0248
- $R^2 = 0.903$
- Decaimiento: 99.4 %

Delays: Conclusión

Resultado

Los retrasos de vuelos **SÍ son** β**-mezclados**

Interpretación:

Delays: Conclusión

Resultado

Los retrasos de vuelos **SÍ son** β**-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia clara de **memoria corta**

Delays: Conclusión

Resultado

Los retrasos de vuelos **SÍ son** β**-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia clara de **memoria corta**
- $\hat{\beta}(a) \to 0$ exponencialmente rápido

Delays: Conclusión

Resultado

Los retrasos de vuelos **SÍ son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia clara de **memoria corta**
- $\hat{\beta}(a) \to 0$ exponencialmente rápido
- Shocks temporales (clima, congestión) tienen efectos limitados en el tiempo

Delays: Conclusión

Resultado

Los retrasos de vuelos **SÍ son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia clara de **memoria corta**
- $\hat{\beta}(a) \to 0$ exponencialmente rápido
- Shocks temporales (clima, congestión) tienen efectos limitados en el tiempo
- Sistema aeroportuario se recupera rápidamente de disrupciones

Delays: Conclusión

Resultado

Los retrasos de vuelos **SÍ son β-mezclados**

Interpretación:

- Evidencia clara de **memoria corta**
- $\hat{\beta}(a) \to 0$ exponencialmente rápido
- Shocks temporales (clima, congestión) tienen efectos limitados en el tiempo
- Sistema aeroportuario se recupera rápidamente de disrupciones
- Teoremas límite clásicos (CLT, LLN) son aplicables

Comparación: Memoria Larga vs Corta

Característica	**S&P 500**	**Delays**
$\hat{\beta}(1)$	0.501	0.827
$\hat{\beta}(10)$	0.482	0.056
$\hat{\beta}(30)$	0.485	0.005
Pendiente regresión	-0.00003	-0.0275
R^2	0.0012	0.892
Decaimiento (%)	2.9 %	99.3 %
¿β-mezclado?	**NO**	**SÍ**
Tipo de memoria	Larga	Corta

Comparación: Memoria Larga vs Corta

Característica	**S&P 500**	**Delays**
$\hat{\beta}(1)$	0.501	0.827
$\hat{\beta}(10)$	0.482	0.056
$\hat{\beta}(30)$	0.485	0.005
Pendiente regresión	-0.00003	-0.0275
R^2	0.0012	0.892
Decaimiento (%)	2.9 %	99.3 %
¿β-mezclado?	**NO**	**SÍ**
Tipo de memoria	Larga	Corta

- El estimador de McDonald permite distinguir efectivamente entre ambos tipos

Contraste Visual

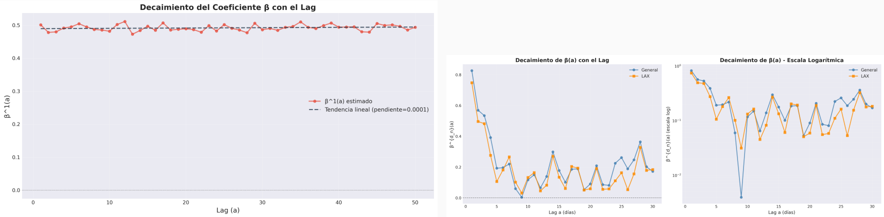

Figura 7: Izquierda: S&P 500 (NO mezclado). Derecha: Delays (SÍ mezclado)

Conclusiones

Conclusiones Principales

1. **Utilidad del Estimador de McDonald**
   - Permite verificar empíricamente la propiedad de β-mezcla
   - Distingue efectivamente entre procesos con memoria larga y corta
   - Convergencia verificada conforme n crece

Conclusiones Principales

1. **Utilidad del Estimador de McDonald**
   - Permite verificar empíricamente la propiedad de β-mezcla
   - Distingue efectivamente entre procesos con memoria larga y corta
   - Convergencia verificada conforme n crece
2. **S&P 500: Memoria Larga**
   - $\hat{\beta}(a)$ NO decrece hacia cero
   - Evidencia de volatility clustering y dependencia persistente
   - Consistente con modelos GARCH de alta persistencia

Conclusiones Principales

1. **Utilidad del Estimador de McDonald**
   - Permite verificar empíricamente la propiedad de β-mezcla
   - Distingue efectivamente entre procesos con memoria larga y corta
   - Convergencia verificada conforme n crece
2. **S&P 500: Memoria Larga**
   - $\hat{\beta}(a)$ NO decrece hacia cero
   - Evidencia de volatility clustering y dependencia persistente
   - Consistente con modelos GARCH de alta persistencia
3. **Retrasos de Vuelos: Memoria Corta**
   - $\hat{\beta}(a) \to 0$ exponencialmente rápido
   - Sistema se recupera rápidamente de disrupciones
   - Teoremas límite clásicos son aplicables

Implicaciones Teóricas y Prácticas

Implicaciones Teóricas

- Validación empírica del Teorema de McDonald (2015)

Implicaciones Teóricas y Prácticas

Implicaciones Teóricas

- Validación empírica del Teorema de McDonald (2015)
- Condiciones de convergencia verificadas en ambos casos

Implicaciones Teóricas y Prácticas

Implicaciones Teóricas

- Validación empírica del Teorema de McDonald (2015)
- Condiciones de convergencia verificadas en ambos casos
- Conexión entre ergodicidad geométrica y β-mezcla confirmada

Implicaciones Teóricas y Prácticas

Implicaciones Teóricas

- Validación empírica del Teorema de McDonald (2015)
- Condiciones de convergencia verificadas en ambos casos
- Conexión entre ergodicidad geométrica y β-mezcla confirmada

Implicaciones Prácticas

- Modelado financiero: Requiere métodos más sofisticados que CLT clásico
- Sistemas operacionales (aeropuertos): Análisis estadístico estándar es válido
- Herramienta diagnóstica para determinar validez de supuestos estadísticos

Hallazgos Clave

Contraste Fundamental

Los dos procesos estudiados exhiben **estructuras de dependencia cualitativamente distintas**:

Mercados Financieros:

- Dependencia persistente
- Memoria larga
- $\beta(a) \not\to 0$
- Requieren teoría asintótica avanzada

Sistemas Operacionales:

- Independencia asintótica
- Memoria corta
- $\beta(a) \to 0$
- Teoremas clásicos aplicables

Trabajo Futuro

Extensiones Metodológicas

- Explorar otros coeficientes de mezcla (α, ρ, ϕ)
- Desarrollar tests formales de hipótesis para β-mezcla
- Estudiar tasas de convergencia del estimador

Aplicaciones Adicionales

- Cadenas de Markov en biología (modelos de población)
- Procesos climáticos y meteorológicos
- Redes neuronales recurrentes y series temporales
- Análisis de tráfico de redes y telecomunicaciones

Referencias Principales

- McDonald, D. J. (2015). Histogram estimation from dependent data. *arXiv preprint arXiv:1508.07322*.
- Bradley, R. C. (2005). Basic properties of strong mixing conditions. *Probability Surveys*, 2, 107-144.
- Douc, R., Moulines, E., Priouret, P., & Soulier, P. (2018). *Markov chains*. Springer.
- Tierney, L. (1994). Markov chains for exploring posterior distributions. *The Annals of Statistics*, 22(4), 1701-1728.

¡Gracias por su atención!

¿Preguntas?