



**Área académica de ingeniería en Computadores**

**I semestre 2022**

**CE3102 - Análisis Numérico para Ingeniería**

**Tarea 2 - Parte 3: Solución de problemas de caída libre por medio de la  
pseudo Inversa**

**Profesor:**

Juan Pablo Soto Quirós

**Realizado por:**

José Julián Camacho Hernández - 2019201459

Juan Pablo Carrillo Salazar - 2019380111

José Leonardo Guillén Fernández - 2019031688

Fabián Ramírez Arrieta - 2018099536

**Mayo, 2022, Costa Rica**

# Índice

Índice	2
Introducción	3
Problema a resolver	4
Análisis matemático	5
Bibliografía	8

# Introducción

A continuación se hará el estudio de un problema de la vida real y como se puede resolver a partir del cálculo de la pseudoinversa de una matriz y el método de mínimo cuadrados.

El problema a analizar corresponde al estudio del fenómeno físico de caída libre de un objeto. Este fenómeno corresponde a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, el cual con el uso de las ecuaciones físicas conocidas y datos experimentales, se obtendrá una aproximación del valor de la gravedad del planeta tierra para luego hacer la comparación con el valor teórico conocido.

## Problema a resolver

Un caso de estudio interesante a analizar cuando se estudian los fenómenos físicos es la caída libre. Físicamente este fenómeno entra en los movimientos rectilíneos uniformemente acelerados (m.r.u.a.) [1]. Este tipo de movimientos se estudian por medio de la siguiente fórmula:

$$d = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

Para entender mejor la ecuación es necesario definir cada uno de los valores en la fórmula. Con respecto a  $d$  y  $d_0$  se refieren a la distancia del cuerpo en estudio.  $d$  es la posición del cuerpo en un momento  $t$  del tiempo. Mientras que  $d_0$  la posición inicial del cuerpo. Tanto se deben utilizar en metros según el Sistema internacional (S.I.).

$v_0$  se define como la velocidad inicial del cuerpo. Se debe seguir con las unidades del S.I, en este caso es metros/segundos.  $a$  se define como la aceleración del cuerpo. Esta debe ser constante y distinta a cero. Sus unidades son *metros/segundos<sup>2</sup>*.

Finalmente la variable  $t$  se refiere al tiempo en segundos. Generalmente la ecuación se utiliza para aproximar la posición del cuerpo con respecto al tiempo. De modo  $d(t)$ .

Esta fórmula se debe modificar a la hora de estudiar la caída libre, debido que la posición inicial se toma igual a cero. Además que la aceleración sería el valor de la gravedad del planeta. Sin embargo, se debe realizar un sistema de referencia para manejar los signos del sistema. El cual se observa en la figura 1.

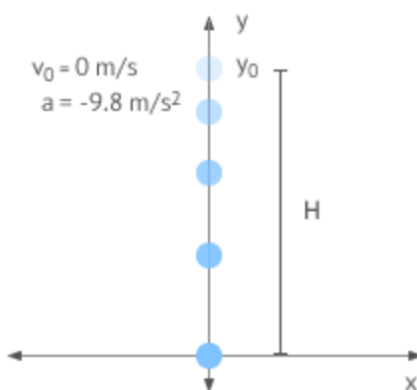


Figura 1. Sistema de referencia

Con este sistema de referencia el valor de la gravedad se debe colocar negativa ya que provoca que el cuerpo se mueva hacia los valores negativos del eje Y. Provocando que la fórmula a utilizar quede de la siguiente forma:

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

## Análisis matemático

A partir de la fórmula 2, se procederá a hacer un análisis a partir de los datos recolectados por el usuario *lorenzor* en el foro Hive Blog [2] en un experimento de caída libre. Este usuario obtuvo los siguientes resultados:

<b><i>d(m)</i></b>	<b><i>t<sub>1</sub>(s)</i></b>	<b><i>t<sub>2</sub>(s)</i></b>	<b><i>t<sub>3</sub>(s)</i></b>	<b><i>t<sub>4</sub>(s)</i></b>	<b><i>t<sub>p</sub>(s)</i></b>
0,85	0,415	0,415	0,418	0,414	0,416
0,80	0,403	0,402	0,405	0,402	0,403
0,75	0,390	0,390	0,392	0,389	0,390
0,70	0,377	0,376	0,379	0,376	0,377
0,65	0,363	0,363	0,365	0,362	0,363
0,60	0,349	0,349	0,351	0,348	0,349
0,55	0,334	0,334	0,336	0,333	0,334
0,50	0,319	0,318	0,320	0,318	0,319
0,45	0,302	0,302	0,304	0,302	0,302
0,35	0,267	0,266	0,268	0,266	0,267
0,30	0,247	0,246	0,248	0,246	0,247
0,25	0,225	0,225	0,226	0,225	0,225
0,20	0,202	0,201	0,203	0,201	0,202
0,15	0,175	0,174	0,175	0,174	0,175
0,10	0,142	0,142	0,143	0,142	0,143
0,05	0,101	0,101	0,101	0,101	0,101
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabla 1. Tabla de resultados experimentales

Para efectos de nuestro análisis se utilizará solamente la columna de altura y el tiempo promedio.

La idea del experimento de este informe es por medio de los valores experimentales conseguir el valor de la gravedad del planeta tierra, la cual teóricamente corresponde a  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

Para lograr esto, se utilizará el método de mínimos cuadrados [3]. Para esto se debe conseguir primeramente la matriz A. La cual a partir de los datos experimentales se obtiene lo siguiente:

1.0000	0.4160	0.1731
1.0000	0.4030	0.1624
1.0000	0.3900	0.1521
1.0000	0.3770	0.1421
1.0000	0.3630	0.1318
1.0000	0.3490	0.1218
1.0000	0.3340	0.1116
1.0000	0.3190	0.1018
1.0000	0.3020	0.0912
1.0000	0.2670	0.0713
1.0000	0.2470	0.0610
1.0000	0.2250	0.0506
1.0000	0.2020	0.0408
1.0000	0.1750	0.0306
1.0000	0.1430	0.0204
1.0000	0.1010	0.0102
1.0000	0.0000	0.0000

Tabla 2. Matriz A

En este caso la primera columna solamente posee 1, la segunda corresponde a la columna de los tiempos promedio de la tabla 1. Mientras que la última columna corresponde al cuadrado de los tiempos, según dicta el método de mínimos cuadrados. [3]

Por otro lado, se necesita el vector con las alturas utilizadas durante el experimento, dando como resultado el siguiente vector, al cual llamaremos B:

0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00

Tabla 3. Vector B.

El primer paso para conseguir el valor de la gravedad a partir de los datos experimentales es calcular la pseudo inversa, la cual da como resultado la siguiente matriz:

0.1047	0.0685	0.0361	0.0075	-0.0191	-0.0414	-0.0604	-0.0744	-0.0842	-0.0843	-0.0720	-0.0483	-0.0120	0.0456	0.1349	0.2866	0.8121
-2.0563	-1.4830	-0.9552	-0.4731	-0.0049	0.4104	0.7967	1.1223	1.4180	1.7811	1.8402	1.7806	1.5787	1.1596	0.4081	-0.9974	-6.3258
5.9114	4.5329	3.2538	2.0742	0.9150	-0.1289	-1.1194	-1.9775	-2.7899	-3.9272	-4.2535	-4.3406	-4.1271	-3.4794	-2.1564	0.4945	11.1180

Tabla 4. Pseudoinversa de A.

Además, a partir de la ecuación 2, con ayuda de la pseudoinversa de A y el vector B se puede obtener una la ecuación de una parábola que aproxime de una manera adecuada el comportamiento del cuerpo en experimentación. Esta parábola se obtiene de la multiplicación de la pseudoinversa de A y el vector B. Obteniendo como resultado la siguiente matriz de resultados.

-0.0003
-0.0001
4.927

Tabla 5. Resultados

Es decir, la ecuación de la parábola corresponde a la siguiente ecuación cuadrática:

$$y(t) = -0.0003 - 0.0001t + 4.927t^2$$

Y como el valor de la gravedad es el valor que acompaña al  $t^2$  y según la ecuación 2 está dividido entre un medio, para obtener el valor de la gravedad solamente se debe multiplicar por 2 el valor 4.927 obtenido anteriormente.

$$g = 4.927 * 2 = 9.8539 \text{ m/s}^2$$

Considerando que el valor teórico de la gravedad es  $9.8 \text{ m/s}^2$  obtenemos un valor muy similar dentro del margen de error esperado, por lo que podemos confirmar que el método planteado es correcto.

# Bibliografía

- [1]. José L. Fernández. (2019). Ecuaciones Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A.). 30 de Abril de 2022, de Fisicalab Sitio web: [Enlace](#).
- [2]. Iorenzor. (2020). Caída libre. Obtención del valor de la gravedad. 30 de abril de 2022, de Hive Blog Sitio web: [Enlace](#).
- [3]. D'Alessio Torres, Vincenzo Jesús. (28 de abril de 2021). Mínimos cuadrados. 30 de abril de 2022, de Lifeder. Sitio web: [Enlace](#).