Probabilidad y Estadística Matemática

Morfín Chávez Guillermo

1.

Una socióloga se interesa en la eficacia de un curso de entrenamiento, diseñado para lograr que más conductores utilicen los cinturones de seguridad en los automóviles.

- ¿Qué hipótesis pone a prueba si comete un error tipo I al concluir de manera errónea que el curso de entrenamiento no es eficaz?

Planteamos la siguiente hipótesis nula como la realizada por la sociologa:

H_0 : El curso es eficaz ya que los conductores usan más el cinturón de seguridad.

De modo que el error de tipo I para esta hipótesis sería rechazar H_0, i.e. concluir que el entrenamiento no es efectivo cuando en realidad si lo es, por lo que, en efecto, la hipótesis que se pone a prueba es H_0

- ¿Qué hipótesis pone a prueba si comete un error tipo II al concluir de forma errónea que el curso de entrenamiento es eficaz?

Siguiendo el mismo razonamiento que antes, planteamos la misma hipotesis nula:

H_0 : El curso es eficaz ya que los conductores usan más el cinturón de seguridad.

De modo que el error de tipo II para esta hipótesis sería no rechazar H_0, i.e. concluir que el entrenamiento es eficaz cuando en realidad esto es falso, por lo que, en efecto, la hipótesis que se pone a prueba es H_0, al igual que en el caso anterior.

2.

Un investigador ha preparado un nivel de dosis de la droga que según él, inducirá al sueño en 80 % de las personas que sufren de insomnio. Después de examinar la dosis, se piensa que lo dicho por él respecto a la efectividad de la dosis es exagerado. En un intento por refutar lo que él asegura, se administró la dosis prescrita a 20 personas que padecen de insomnio y se observó que el número de individuos a quienes la dosis indujo al sueño es x. Se desea probar la hipótesis $H_0 : p = 0.8$ contra la alternativa $H_1 : p < 0.8$. Considere la prueba con región de rechazo $\{x : x < 12\}$

- Que significa el error tipo I y el error tipo II en éste contexto.

En primera instancia, el error de tipo I significaría rechazar que la dosis prescrita induce el sueño en el 80 % de las personas que sufren insomnio en favor de que el porcentaje de efectividad es menor al 80 % aun cuando, en efecto, su eficacia sea del 80 %. (Ya que se pudo haber observado que menos de 12 personas, de las 20 en la muestra, fueron inducidas al sueño mediante la dosis).

Mientras que el error de tipo II significaría no rechazar la aseveración del investigador de que la dosis prescrita induce el sueño en el 80 % de los casos de insomnio, cuando la realidad es que su grado de efectividad es menor al 80 %. (esto podría darse si se observa que 12 o más personas del las 20 en la muestra, fueron inducidas al sueño mediante la dosis).

- Calcular la probabilidad del error tipo I

$$\alpha = P(X < 12 \mid p = 0.8) = \sum_{k=0}^{11} \binom{20}{k} (0.8)^k (0.2)^{20-k} = 0.009981786$$

En código:

```
> pbinom(11,20,0.8)
[1] 0.009981786
```

- Interpreta el error tipo II para $p = 0.7$

$$\beta = P(X \geq 12 \mid p = 0.7) = 1 - \sum_{k=0}^{11} \binom{20}{k} (0.7)^k (0.3)^{20-k} = 0.886668537$$

En código:

```
> 1-pbinom(11,20,0.7)
[1] 0.8866685
```

Esto nos dice que es altamente probable que la dosis inducirá el sueño a 12 o más personas, aunque su eficacia sea estrictamente menor al 80 % (i.e. del 70 %).

- Establezca una región de rechazo con $\alpha = 0.1$

Proponemos que nuestro estadístico sea $T \sim Bin(20, 0.8)$ de modo que para $\alpha = 0.1$ tenemos el cuantil:

```
> qbinom(0.1,20,0.8)
[1] 14
#Al_calcular_la_probabilidad_de_que_T_sea_menor_a_14
pbinom(14,20,0.8) #no_alpha
pbinom(13,20,0.8) #alpha
[1] 0.08669251
```

De modo que resulta pertinente tomar $\mathrm{C} = \{t : t < 14\}$ como región de rechazo.

- Suponga que $x = 13$. ¿Qué puedes concluir para la región de rechazo establecida?

Para la región critica establecida por el problema: Dado que $x = 13 \notin \{x : x < 12\}$ no rechazamos H_0; de modo que la prueba no es estadísticamente significativa. Es muy probable haber cometido un error de tipo II, de modo que lo recomendable sería realizar la pruba de nuevo con una muestra más grande.
Para la región de rechazo de nivel de significancia $\alpha = 0.1$: Dado que $t = 13 \in C = \{t : t < 14\}$ Rechazamos H_0 en virtud de H_1, esto es, en esencia, debido a que tenemos evidencia suficiente en los datos a un nivel de significancia del 10 %.

3.

Bajo condiciones normales, el número promedio de llamadas personales que llegan a un conmutador en una compañía fue de 7.2 por hora. El gerente envió una carta a todos sus empleados pidiéndoles que el número de llamadas personales disminuyera.

- Considere $\alpha = 0.05$, 100 periodos de una hora y desarrolle una metodología de prueba de hipótesis para verificar si el número de llamadas disminuyó.

Considérese la siguiente hipótesis nula e hipótesis alternativa:

$$H_0 : \mu = 7.2$$
$$H_1 : \mu < 7.2$$

Además sabemos que el nivel de significancia es $\alpha = 0.05$. Notamos también que el número de periodos es 100, de modo que usamos la prueba de hipótesis para muestras grandes de una media:

$$T = \frac{\bar{X} - 7.2}{\sqrt{S_n^2/n}}$$

Y para la región de rechazo, dado que: $\mu < 7.2 \Rightarrow T_\alpha < -z_\alpha$ es la región de rechazo.

```
> qnorm(1-0.05)
[1] 1.644854
```

Por lo tanto $T < -1.644854$

- Durante periodos de 1 horas, los números de llamadas personales fueron: 1 4 5 5 6 8 5 8 10 11 8 5 8 13 11 4 11 7 14 7 4 10 6 5 3 8 6 5 6 7 4 8 10 7 13 10 8 8 5 5 8 3 7 7 8 12 5 5 7 5 6 10 9 9 8 13 5 10 7 7 4 5 8 7 8 6 12 9 8 6 6 5 6 3 7 6 6 8 9 9 6 7 11 11 7 8 7 7 10 6 5 6 6 4 7 4 11 6 5 7. ¿Que concluyé?

```
x=c(1,4,5,5,6,8,5,8,10,11,8,5,8,13,11,4,11,7,14,7,4,10,6,5,3,8,6,5,6,7,4,8,
10,7,13,10,8,8,5,5,8,3,7,7,8,12,5,5,7,5,6,10,9,9,8,13,5,10,7,7,4,5,8,7,8,6,
12,9,8,6,6,5,6,3,7,6,6,8,9,9,6,7,11,11,7,8,7,7,10,6,5,6,6,4,7,4,11,6,5,7)
>mu=mean(x)
>S=sum((x-mu)^2)/(100)
>T=(mu-7.2)/(sqrt(S/100))
>T
[1] -0.03998753
```

Dado que $-0.03998753 \notin \{T : T < -1.64485\}$ se concluye que no es posible rechazar H_0, entonces es factible que el gerente asevere que el número de llamadas personales, en promedio, se mantuvo igual o, en su defecto, fue mayor.