

Treball Astrofísica: Interacció gravitatòria de sistemes estel·lars múltiples.

Guillermo Abad López (1497619)

25 de Juny del 2020, Bellaterra

Resum

Tatooine, un planeta que orbita dues estrelles producte de la imaginació de George Lucas, es queda curt al costat del problema que resoldré en aquest treball. Plantegem l'estudi de l'evolució gravitacional de sistemes estel·lars múltiples amb diferents masses i condicions inicials, mitjançant la resolució d'un problema d' N -cossos amb el mètode numèric de Runge-Kutta(4)¹.

1 Plantejament del problema

Partim de l'equació que regeix la dinàmica d'interacció gravitatòria entre N cossos:

$$\frac{d^2 \vec{q}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_j (\vec{q}_j - \vec{q}_i)}{|\vec{q}_j - \vec{q}_i|^3} \quad , \quad (1.1)$$

on \vec{q}_i és el vector posició del cos i , G és la constant de gravitació universal i m_j la massa del cos j . Realitzem els següents canvis de variable per adimensionalitzar:

$$t' = t/T, \quad \vec{q}_i' = \vec{q}_i/d, \quad m_j' = m_j/m_0 \quad , \quad (1.2)$$

on T , m_0 , d són el període orbital, la massa de l'objecte atractor, i el radi orbital de l'objecte atret d'un sistema binari que interacciona gravitatòriament i que, per tant, compleix la tercera llei de Kepler, per exemple, la Terra i el Sol. Emprant la tercera llei de Kepler², obtenim l'EDO per a l'acceleració del planeta adimensionalitzada:

$$\frac{d^2 \vec{q}_i'}{dt'^2} = \sum_{j \neq i}^N 4\pi^2 m_j' \frac{(\vec{q}_j' - \vec{q}_i')}{|\vec{q}_j' - \vec{q}_i'|^3} \quad . \quad (1.3)$$

Per poder analitzar l'error comès i veure com de bona és la nostra solució emprarem la conservació de l'energia, la qual ens diu que l'energia de tot sistema aïllat es conserva. En el nostre cas tenim:

$$E = \sum_i (K_i + U_i) = \sum_i \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_j \left(\frac{G m_i m_j}{|\vec{q}_j - \vec{q}_i|} \right) \right) = cte \quad , \quad (1.4)$$

on $v_i^2 = \frac{d\vec{q}_i}{dt}^2$. Normalitzant això veiem que amb els paràmetres normalitzats tenim:

$$E' = \sum_i (K_i' + U_i') = \sum_i \left(\frac{m_i' v_i'^2}{2} + \sum_j \left(\frac{4\pi^2 m_i' m_j'}{|\vec{q}_j' - \vec{q}_i'|} \right) \right) = cte' \quad , \quad (1.5)$$

equació que haurem d'utilitzar per veure l'error de la simulació.

¹<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/numerico/diferencial/diferencial.html>

²Formulació de Newton per a la tercera llei de Kepler: $\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0}$.

2 Solució Numèrica

El codi emprat es una adaptació de un codi que vaig programar farà 1 any, adaptat per el estudi de aquests sistemes estel·lars múltiples, a continuació comento alguns problemes que vaig tenir en programar-lo i alguns que he tingut en adaptar-lo, i com he solucionat aquests.

El primer problema surt en considerar els cossos puntuals, el que feia que dos cosos es poguessin sobreposar fent que la força gravitatòria divergís. Per a que la simulació no divergís quan dos estrelles es superposaven, doncs si passava això o bé es quedaven enganxades les dues, o sortien disparades en sentits oposats fent que s'allunyessin per sempre. Això a la realitat òbviament no passa, doncs les estrelles tenen una superfície que delimita la força màxima que produeix la seva gravetat amb una col·lisió, no és el cas dels forats negres, on sí passa el primer quan algun cos travessa l'horitzó d'events i passa a formar part del propi forat negre, la segona no passa ni als forats negres, doncs ve donada per un problema de mallat temporal de la simulació que es fa molt notòria quan la força divergeix. Per solucionar això he aplicat una èpsilon als denominadors de la equació (1.3) donant una distancia mínima a la que es poden apropar les estrelles, per tal que no divergís la solució obtenint el nostre model final:

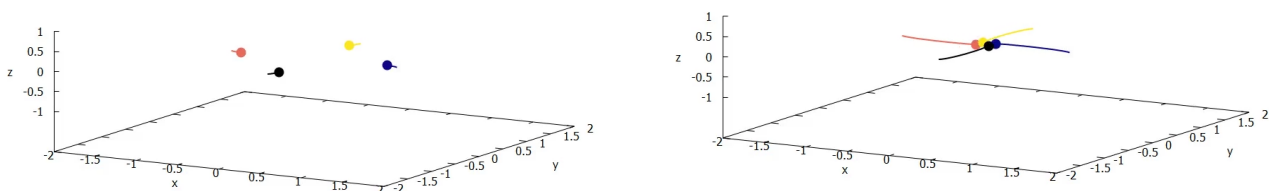


Figura 2.1: Trajectòries amb els efectes de la gravetat amb igual pes per a tots els cossos.

El següent pas ha estat avaluar la conservació de l'energia, d'on hem obtingut que no es conserva l'energia del nostre sistema emprant l'equació (1.5). Però això podria ser degut a que no està ben normalitzat i és incorrecte el seu ús. Així que hem representat l'energia cinètica i la potencial en funció del temps, per veure el seu comportament i entendre què està passant. Quan fem això obtenim:

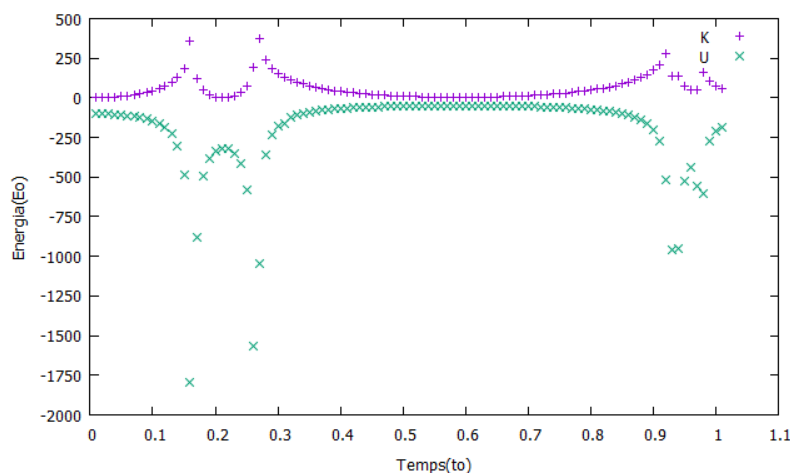


Figura 2.2: Representació de l'energia cinètica i de la potencial en funció del temps.

En observar això veiem com l'energia cinètica i la potencial es comporten de manera molt similar: quan la potencial augmenta la cinètica baixa i de mateixa forma quan la cinètica augmenta, la potencial baixa a excepció d'un factor negatiu, sempre mantenint-se simètricament a excepció d'aquest factor respecte un eix quiet, donant-nos a entendre que l'energia realment sí que es conserva però dec tenir un factor constant equivocant en el codi que no sóc capaç de trobar.

3 Anàlisi dels diversos sistemes estel·lars múltiples

És complicat trobar unes condicions d'estabilitat exactes a causa de la normalització i el malla numèric de la simulació, així que la majoria de temps treballarem amb simulacions que semblen totalment estables, però per temps molt grans poden arribar a divergir, però això no és cap problema doncs son temps prou llargs que ens donen marge per estudiar el comportament i fer les analogies pertanyents amb tranquil·litat, com veurem a continuació.

Començarem estudiant els casos tractats a classe i intentant simular-los el millor possible per mes tard passar sistemes més estrany i inusuals, dignes de pel·lícules i llibres de ciència-ficció, com pot ser "El problema de los tres cuerpos" un gran llibre que en part em va inspirar a fer aquesta simulació en el seu dia.

3.1 Doble òptica

En aquest cas mostrarem dues estrelles d'igual massa que estan molt separades, però que estan alineades respecte a l'observador donant la sensació falsa que és un sistema estel·lar binari:

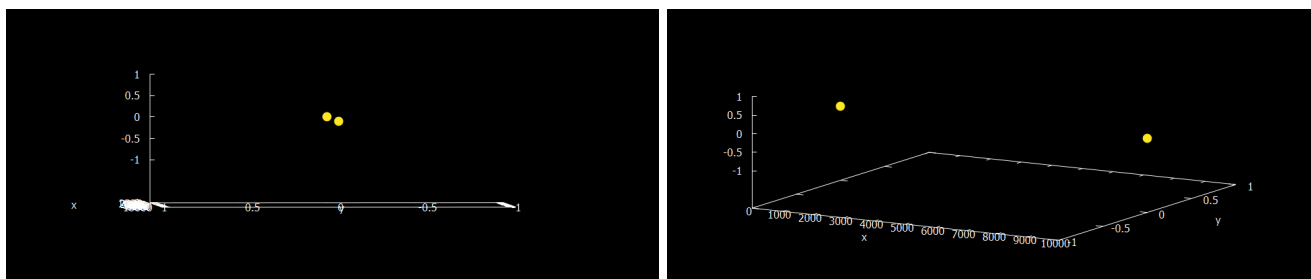


Figura 3.1: Representació de un sistema estel·lar doble òptic des de dos punts de vista.

on observem a l'esquerra que semblen estar molt a prop, però en realitat com s'aprecia en l'eix x de la segona foto estan molt separades i no tenen interacció gravitatòria, com podem veure en els següents frames de l'animació:

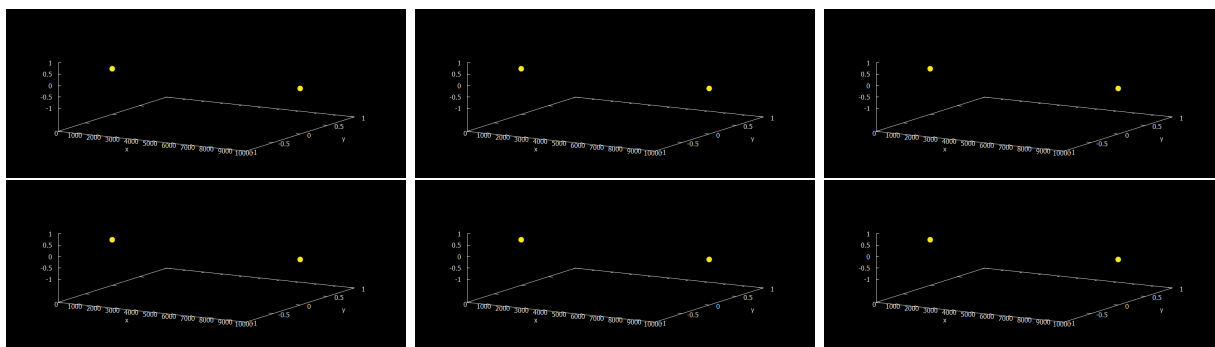


Figura 3.2: Representació de un sistema estel·lar doble òptic amb el temps.

Les condicions inicials per aquest cas han sigut:

- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$
- $m_2 = 1$; $\vec{r}_2 = (10000, 0, 0)$; $\vec{v}_2 = (0, 0, 0)$

3.2 Binària Visual

En aquest cas observem un sistema en el qual podem distingir clarament dos cossos, concretament veurem el cas d'un cos deu cops més massiu que l'altre:

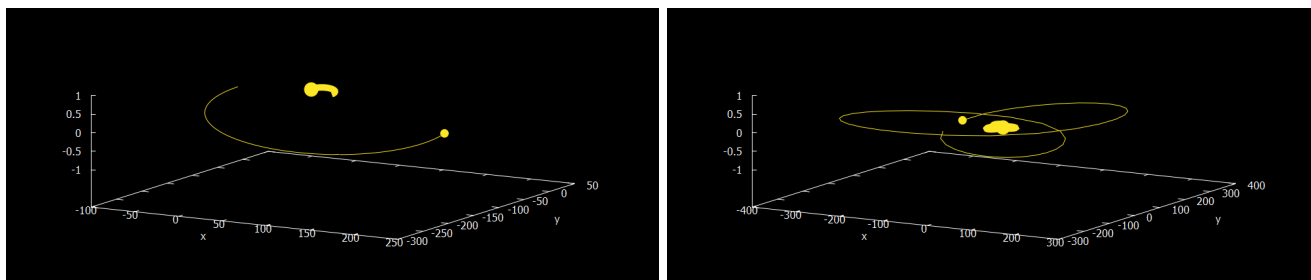


Figura 3.3: Representació de la trajectòria de un sistema estel·lar binari visual des de dos punts de vista diferents.

on observem a l'esquerra l'inici des de aprop i a la dreta una etapa més avançada des d'una perspectiva una mica més llunyana. En aquest cas el sistema orbita de forma peculiar sense seguir dues el·lipses ben definides que siguin trivialment resolubles, a continuació podem veure com avança aquest sistema amb una animació també:

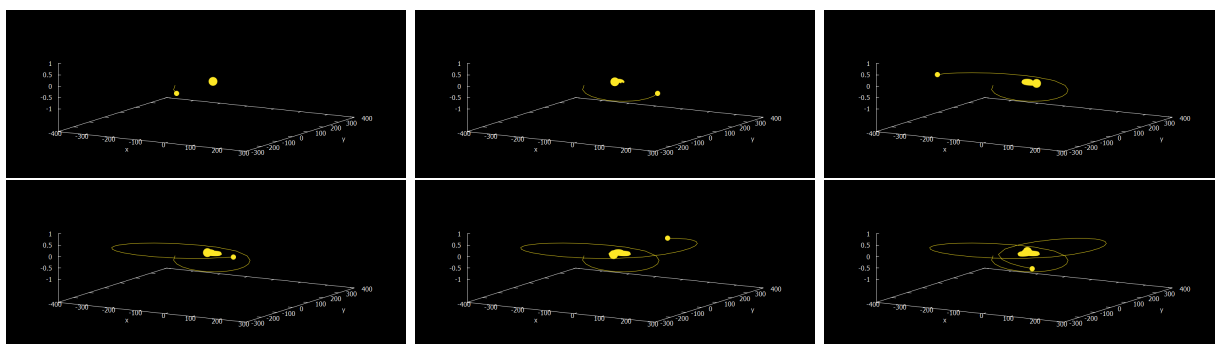


Figura 3.4: Representació de un sistema estel·lar binari visual amb el temps.

Les condicions inicials per aquest cas han sigut:

- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$
- $m_2 = 0.1$; $\vec{r}_1 = (-100, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, -10, 0)$

3.3 Binaria eclipsant

Observant el mateix cas anterior, però tenint el pla de la òrbita dels dos cossos paral·lel amb l'eix de l'observador obtenim un sistema estel·lar eclipsant, on anem veient més o menys lluminositat en funció del temps, ja que es tapen entre si les estrelles:

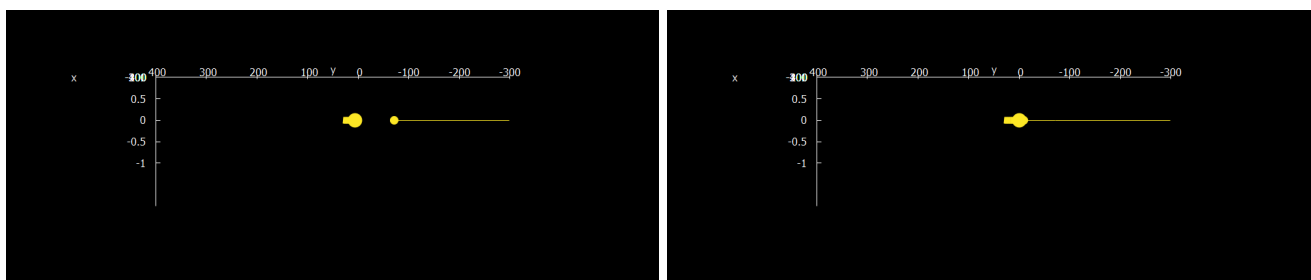


Figura 3.5: Representació de la trajectòria de un sistema estel·lar binari eclipsant en la màxima lluminositat i entrant en un mínim respectivament.

on observem a l'esquerra un cas de màxima lluminositat en no estar cap estrella tapada, i a la dreta una cas pròxim a un mínim de lluminositat en estar quasi completament una estrella sobre l'altre. En

concret la petita esta passant per davant com podem veure de la Figura 3.4.

Per tant en la primera foto estarem en la marca esquerra de la Figura 3.6 i en la segona foto estarem en un dels dos mínims possibles diferents en funció de la lluminositat de les dues estrelles:

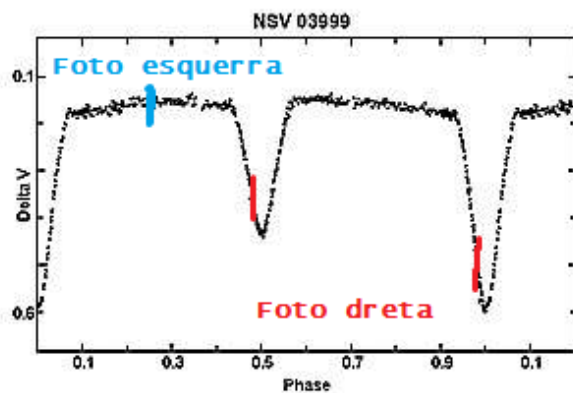


Figura 3.6: Representació de la lluminositat de un sistema estel·lar eclipsant.

doncs es clar que si esta tapada la estrella de major lluminositat tindrem un mínim mes pronunciat que si esta tapada l'estrella menys lluminosa.

Les condicions inicials per aquest cas han sigut les mateixes que en el apartat anterior.

3.4 Binaria Astromètrica

En aquest cas veurem un sol cos amb una oscil·lació en la seva posició que ens indica que realment ha d'haver-hi un altre cos afectant-lo gravitatòriament però que no som capaços d'observar:

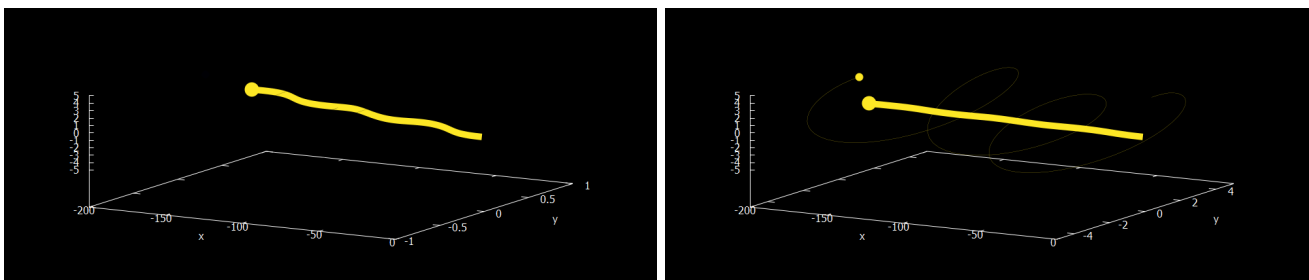


Figura 3.7: Representació de la trajectòria de un sistema estel·lar binari astromètric mostrant el cos visible només i mostrant ambos cosos respectivament.

on en la imatge esquerra es mostra el que som capaços d'observar i en la imatge dreta es mostra el que realment esta passant.

Les condicions inicials per aquest cas han sigut les següents:

- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (-15, 0, 0)$
- $m_2 = 0.01$; $\vec{r}_1 = (0, 0, 5)$; $\vec{v}_1 = (-15, 5, 0)$

3.5 Binaria espectroscòpica

En aquest cas m'he esmerat més i he anat a buscar una estabilitat molt alta fent moltíssimes proves amb diferents velocitats i masses inicials que conservessin el CM en repòs per a una més fàcil observació, aconseguint una òrbita bastant impecable, en el qual, quan una estrella es mou cap a una direcció l'altre s'està movent en sentit contrari, tenint així uns corriments cap al vermell i cap al blau ben distingibles:

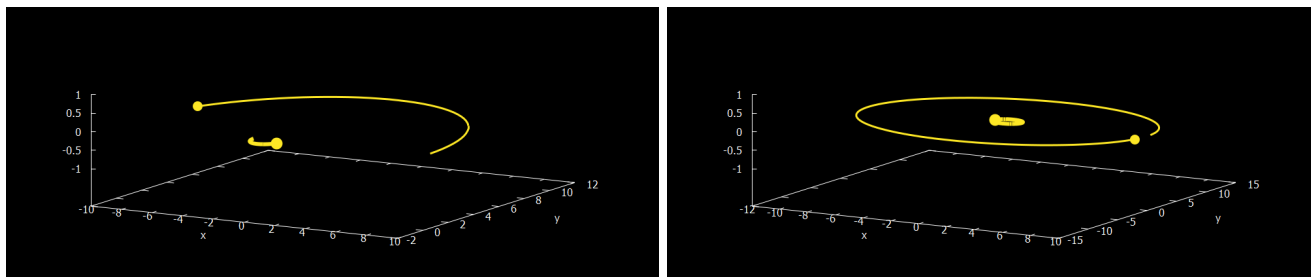


Figura 3.8: Representació de la trajectòria de un sistema estel·lar binari espectral al mig i al final del Període.

on en cada moment del període tindrem uns corriments Doppler diferents donats per la següent figura:

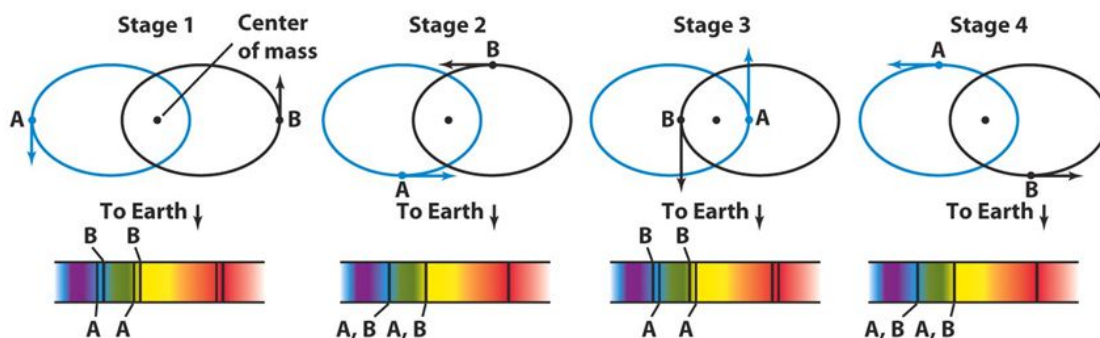


Figura 3.9: Corriments del espectre energètic dels sistemes estel·lars binaris espectroscòpics causats per l'efecte Doppler.

Òbviament si tinguéssim aquest sistema rotant en un pla paral·lel a l'eix de visió de l'observador tindríem llavors un sistema espectroscòpic eclipsant del qual podríem resoldre les estrelles amb la funció de massa i relació massa-lluminositat.

Si en canvi el sistema estigues aproximadament perpendicular a l'eix de visió de l'observador deixaríem de tenir els corriments Doppler doncs no es mourien cap a nosaltres o allunyant-se de nosaltres, però llavors el podríem resoldre també trivialment emprant les lleis de Kepler que s'empren per binàries visuals.

3.6 Exemples mes diversos:

Ara passarem a simular sistemes amb més cossos i en alguns casos més caòtics.

3.7 Cos massiu amb tres cossos lleugers orbitant-lo

Començarem simulant un sistema d'una estrella massiva a la qual donen voltes unes altres tres estrelles lleugeres a mesura que tot el sistema baixa per l'eix z:

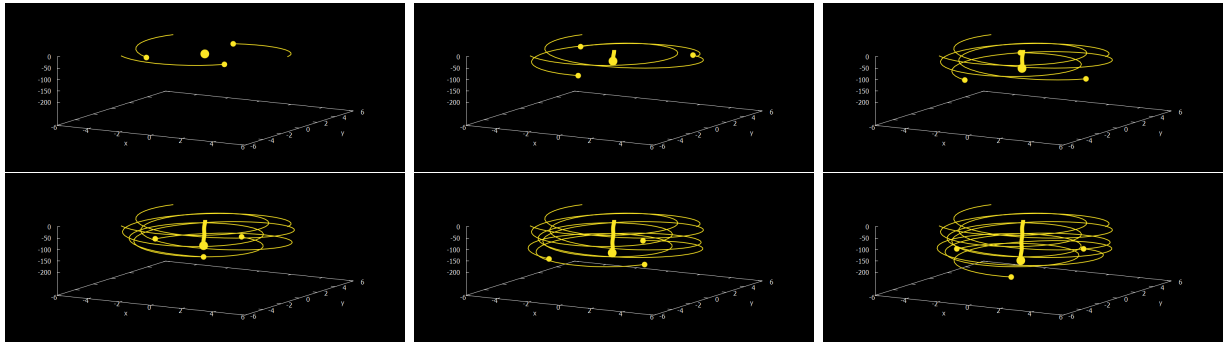


Figura 3.10: Representació de un sistema estel·lar amb un cos massiu i tres cossos lleugers orbitant-lo.

Les condicions inicials per aquest cas han sigut:

- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, 0, -15)$
- $m_2 = 0.01$; $\vec{r}_1 = (5, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, 5, -15)$
- $m_1 = 0.01$; $\vec{r}_1 = (-3.536, 3.536, 0)$; $\vec{v}_1 = (-3.536, -3.536, -15)$
- $m_2 = 0.01$; $\vec{r}_1 = (-3.536, -3.536, 0)$; $\vec{v}_1 = (3.536, -3.536, -15)$

3.8 Moll estel·lar

El següent es un cas molt similar, però amb els cossos amb la mateixa massa i col·locats en quadrat inicialment:

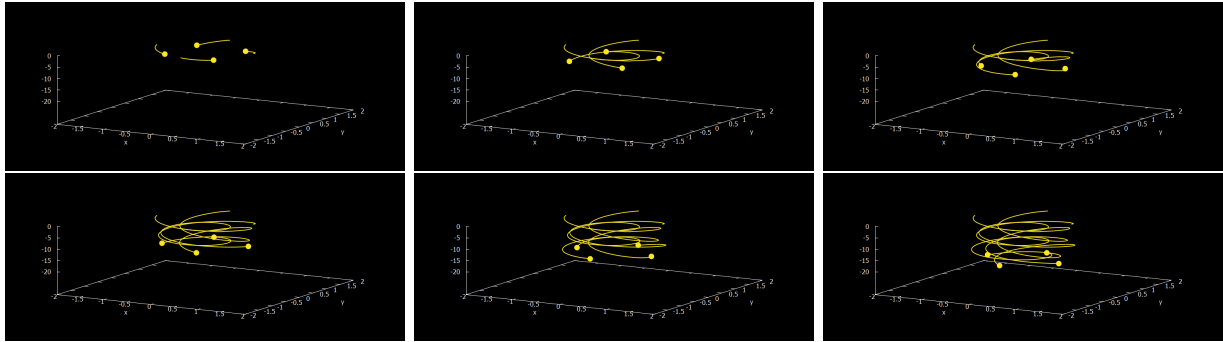


Figura 3.11: Representació de un sistema estel·lar amb quatre cossos massius orbitant-se.

aquest cop el període orbital és molt inferior al ser tot masses grans, no es pot apreciar però l'animació està a una velocitat x10 respecte a l'anterior. Les condicions inicials per aquest cas han sigut:

- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, 5, -15)$
- $m_2 = 1$; $\vec{r}_1 = (0, 1, 0)$; $\vec{v}_1 = (-5, 0, -15)$
- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (-1, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, -5, -15)$
- $m_2 = 1$; $\vec{r}_1 = (0, -1, 0)$; $\vec{v}_1 = (5, 0, -15)$

3.9 Caos

El següent és quatre cossos amb la mateixa massa i unes coordenades obtingudes posant 1's i 0's manualment de forma aleatòria:

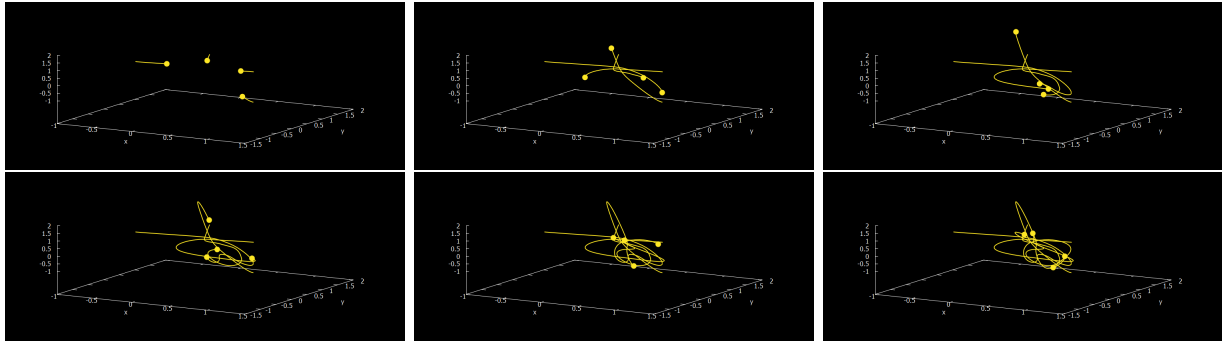


Figura 3.12: Representació de un sistema estel·lar amb quatre cossos caòtics.

Les condicions inicials aleatòries emprades han sigut:

- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$
- $m_2 = 1$; $\vec{r}_1 = (1, 0, -1)$; $\vec{v}_1 = (0, -1, 0)$
- $m_1 = 1$; $\vec{r}_1 = (-1, 1, 0)$; $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$
- $m_2 = 1$; $\vec{r}_1 = (0, 1, 1)$; $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$

3.10 Gran col·lisió

Per últim estudiarem un sistema de deu i vint cossos col·lionant amb coordenades totalment aleatòries donades per una funció `rand()`, obtenint:

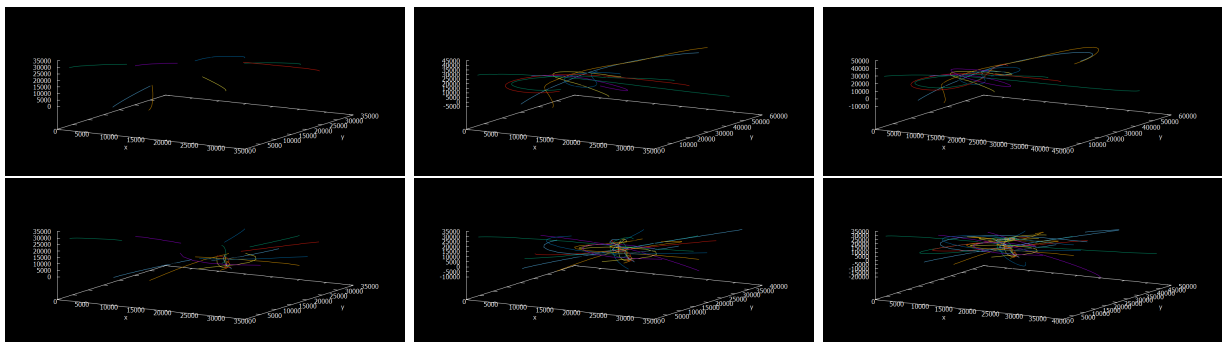


Figura 3.13: Representació de la col·lisió de deu i vint cossos alhora.

on tenim la representació per 10 cossos en la fila de a dalt i la de 20 cossos en la fila de abaix.

4 Millora del model

Una forma assequible de millorar la modelització del problema de N-cossos, es podria deixar de considerar els cossos com a partícules puntuals i considerar cossos amb volums. A més, es podrien tenir en compte efectes relativistes o inclòs pèrdues d'energia en el temps en forma de radiació.

5 Conclusions

El primer que concloem i més important, diria que és la facilitat i dificultat de la resolució de sistemes estables o sistemes caòtics. Això ho hem anat veient molt clar en el cas de l'apartat de la "Binaria espectroscòpica", que era un sistema molt estable que ens donava facilitats per resoldre'l en qualsevol orientació respecte a l'observador, mentre que els sistemes més caòtics de l'apartat de "Exemples mes diversos" serien molt complicats de resoldre per qualsevol orientació respecte a l'observador.

El segon fet que vull remarcar és com en la vida real no ens trobem casos tan caòtics com els que hem estudiat aquí, això segurament degut a la llarga vida de l'univers que ha anat ordenant en un mateix pla de rotació la majoria de cossos que giren junts a partir d'incomptables col·lisions i col·lapses de cossos galàctics en el transcurs del temps.

Per últim dir que com bé expliquen en el llibre en què em vaig basar per fer la simulació (avís spoiler!, si tens intenció de llegir-lo no és tan important aquesta part per la meva avaluació, només és una petita reflexió), seria poc probable sobreviure en un planeta amb un sistema estel·lar múltiple on no estiguessin totes les estrelles ben juntes en el centre, doncs en apropar-se més unes estrelles o allunyar-se es donarien unes condicions tan extremes al planeta que seria impossible la supervivència en la seva superfície. Per això en el llibre l'espècie que viu allà ha desenvolupat una forma d'hibernació deshidratant el seu cos fins a l'extrem en què els poden conservar en magatzems per sobreviure en èpoques dolentes mentre uns pocs escollits esperen a una època bona per tornar a hidratar als habitants del planeta.

6 Annexos

6.1 Codi en llenguatge C emprat per la simulació

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <string.h>

double f(double rj, double ri, double rj_bad1,doube ri_bad1,doube rj_bad2, doube ri_bad2, double mj){
    const double pi = 4.0 * atan(1.0); //Pi
    double resultf;
    resultf = 4*pi*pi*((rj-ri)*mj/(0.000001+pow((rj-ri)*(rj-ri)+(rj_bad1-ri_bad1)*(rj_bad1-ri_bad1)+
    (rj_bad2-ri_bad2)*(rj_bad2-ri_bad2),(3/2))))); //falta fotre els +1/2ki també  $\frac{1}{2}$  al
    denominador fent el sumatori en comptes de fent-ho així  $\frac{1}{2}$ 
    return resultf;
}

double U(double rj, double ri, double rj_bad1,doube ri_bad1,doube rj_bad2, doube ri_bad2, double mj,
double mi){
    const double pi = 4.0 * atan(1.0); //Pi
    double resultf;
    resultf =4*pi*pi*mi*mj/(0.001+pow((rj-ri)*(rj-ri)+(rj_bad1-ri_bad1)*(rj_bad1-ri_bad1)+
    (rj_bad2-ri_bad2)*(rj_bad2-ri_bad2),0.5)); //falta fotre els +1/2ki també  $\frac{1}{2}$  al denominador
    fent el sumatori en comptes de fent-ho així  $\frac{1}{2}$ 
    return resultf;
}

int main(){

//Definim les variables
int N = 4; //number of bodies
int T = 1300;
int D = 3; //number of dimensions

int n[N];
double m[N];
int t;
int d[D];

double dt = 0.01;
double dx = 0.01;
double R[N][D];
double VR[N][D];
double K1[N][D];
double L1[N][D];
double K2[N][D];
double L2[N][D];
double K3[N][D];
double L3[N][D];
double K4[N][D];
double L4[N][D];

//Imposem condicions inicials:

FLOR:
    R[0][0]=1;
    R[0][1]=0;
    R[0][2]=0;
    m[0]=1;
```

```

    R[1][0]=-1;
    R[1][1]=0;
    R[1][2]=0;
m[1]=1;

    R[2][0]=0;
    R[2][1]=1;
    R[2][2]=0;
m[2]=1;

    R[3][0]=0;
    R[3][1]=-1;
    R[3][2]=0;
m[3]=1;

    VR[0][0]=0;
    VR[0][1]=1;
    VR[0][2]=0;

    VR[1][0]=0;
    VR[1][1]=-1;
    VR[1][2]=0;

    VR[2][0]=-1;
    VR[2][1]=0;
    VR[2][2]=0;

    VR[3][0]=1;
    VR[3][1]=0;
    VR[3][2]=0;

//CCII Energies
double Ectotali=0;
double Ec[N];
for (int i=0; i<N;i++){
Ec[i]=0.5*m[i]*(pow(VR[i][0],2)+pow(VR[i][1],2)+pow(VR[i][2],2));
}
for (int l=0; l<N;l++){
Ectotali=Ectotali+Ec[l];
}
printf("Energia cinetica inicial=%lf\n",Ectotali);

double Eptotali=0;
double Epi[N];
for (int k=0; k<N;k++){
double Epib=0;
n[0]=k;
for (int i=1;i<N;i++){
n[i]=(n[0]+i)%N;
Epib=Epib-0.5*U(R[n[i]][0],R[n[0]][0],R[n[i]][1],R[n[0]][1],R[n[i]][2],R[n[0]][2],m[n[i]],
m[n[0]]);
}
Epi[k]=Epib;
}
for (int l=0; l<N;l++){
Eptotali=Eptotali+Epi[l];
}
printf("Energia potencial total=%lf\n",Eptotali);

```

```

//printeamos las condiciones de contorno
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){
char buffer0[80]={0};
sprintf(buffer0,"animacion_cuerpo%d.txt",n[0]);
FILE * fpointer0 = fopen (buffer0,"w");
fprintf(fpointer0,"%lf %lf %lf i\n", R[n[0]][0], R[n[0]][1], R[n[0]][2]);
}

//EMPIEZA LO CHULO
for (t=1;t<T;t++){ //Avanzamos el tiempo
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){
for (d[0]=0;d[0]<D;d[0]++){

for (int i=1; i<N;i++){
n[i]=(n[0]+i)%N;
}

for (int i=1; i<D;i++){
d[i]=(d[0]+i)%D;
}

double g=0.0;
for (int i=1; i<N;i++){
g=g+f(R[n[i]][d[0]],R[n[0]][d[0]],R[n[i]][d[1]],R[n[0]][d[1]],R[n[i]][d[2]],
R[n[0]][d[2]],m[n[i]]);
}

K1[n[0]][d[0]]=dt*VR[n[0]][d[0]];
L1[n[0]][d[0]]=dt*g;
}
}
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){ //aquí ciclamos todas las K
for (d[0]=0;d[0]<D;d[0]++){

for (int i=1; i<N;i++){
n[i]=(n[0]+i)%N;
}

for (int i=1; i<D;i++){
d[i]=(d[0]+i)%D;
}

double g=0.0;
for (int i=1; i<N;i++){
g=g+f(R[n[i]][d[0]]+K1[n[i]][d[0]]/2, R[n[0]][d[0]]+K1[n[0]][d[0]]/2,
R[n[i]][d[1]]+K1[n[i]][d[1]]/2, R[n[0]][d[1]]+K1[n[0]][d[1]]/2,
R[n[i]][d[2]]+K1[n[i]][d[2]]/2, R[n[0]][d[2]]+K1[n[0]][d[2]]/2, m[n[i]]);
}

K2[n[0]][d[0]]=dt*(VR[n[0]][d[0]]+L1[n[0]][d[0]]/2);
L2[n[0]][d[0]]=dt*g; //falta veure com afegim el K1/2 al modul del denominador y no
nomes adalt
}
}
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){ //aquí ciclamos todas las K

```

```

for (d[0]=0;d[0]<D;d[0]++){

for (int i=1; i<N;i++){
n[i]=(n[0]+i)%N;
}

for (int i=1; i<D;i++){
d[i]=(d[0]+i)%D;
}

double g=0.0;
for (int i=1; i<N;i++){
g=g+f(R[n[i]][d[0]]+K2[n[i]][d[0]]/2, R[n[0]][d[0]]+K2[n[0]][d[0]]/2,
R[n[i]][d[1]]+K2[n[i]][d[1]]/2, R[n[0]][d[1]]+K2[n[0]][d[1]]/2,
R[n[i]][d[2]]+K2[n[i]][d[2]]/2, R[n[0]][d[2]]+K2[n[0]][d[2]]/2, m[n[i]]);
}

K3[n[0]][d[0]]=dt*(VR[n[0]][d[0]]+L2[n[0]][d[0]]/2);
L3[n[0]][d[0]]=dt*g;
}
}
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){ //aquí ciclamos todas las K
for (d[0]=0;d[0]<D;d[0]++){

for (int i=1; i<N;i++){
n[i]=(n[0]+i)%N;
}

for (int i=1; i<D;i++){
d[i]=(d[0]+i)%D;
}

double g=0.0;
for (int i=1; i<N;i++){
g=g+f(R[n[i]][d[0]]+K3[n[i]][d[0]], R[n[0]][d[0]]+K3[n[0]][d[0]],
R[n[i]][d[1]]+K3[n[i]][d[1]], R[n[0]][d[1]]+K3[n[0]][d[1]],
R[n[i]][d[2]]+K3[n[i]][d[2]], R[n[0]][d[2]]+K3[n[0]][d[2]], m[n[i]]);
}

K4[n[0]][d[0]]=dt*(VR[n[0]][d[0]]+L3[n[0]][d[0]]);
L4[n[0]][d[0]]=dt*g;
}
}
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){
for (d[0]=0;d[0]<D;d[0]++){
R[n[0]][d[0]]=R[n[0]][d[0]]+(K1[n[0]][d[0]]+2*K2[n[0]][d[0]]+2*K3[n[0]][d[0]]+
K4[n[0]][d[0]])/6;
VR[n[0]][d[0]]=VR[n[0]][d[0]]+(L1[n[0]][d[0]]+2*L2[n[0]][d[0]]+2*L3[n[0]][d[0]]+
L4[n[0]][d[0]])/6;
}
}

//Aquí  $i_{\frac{1}{2}}$  se printean los datos de animación  $i_{\frac{1}{2}}n$  para cada t
int salto = 10;
double tc= t % salto; //PUEDES CAMBIAR CADA CUANTOS T IMPRIMES!!!!
if (tc==0){
for (n[0]=0;n[0]<N;n[0]++){

```

```

char buffer[80]={0};
sprintf(buffer,"animacion_cuerpo%d.txt",n[0]);
    FILE * fpointer = fopen (buffer,"a");
    fprintf(fpointer,"%lf %lf %lf i\n", R[n[0]][0], R[n[0]][1], R[n[0]][2]);
}

}

//Energia conservada
double Ectotal=0;
double Ec[N];
for (int i=0; i<N;i++){
Ec[i]=0.5*m[i]*(pow(VR[i][0],2)+pow(VR[i][1],2)+pow(VR[i][2],2));
}
for (int l=0; l<N;l++){
Ectotal=Ectotal+Ec[l];
}

double Eptotal=0;
double Ep[N];
for (int k=0; k<N;k++){
double Epb=0;
n[0]=k;
for (int i=1;i<N;i++){
n[i]=(n[0]+i)%N;
Epb=Epb-0.5*U(R[n[i]][0],R[n[0]][0],R[n[i]][1],R[n[0]][1],R[n[i]][2],R[n[0]][2],m[n[i]],
m[n[0]]);
//printf("%lf %d %d\n",Epb,i,k);
//printf("%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf\n \n",R[n[i]][0],R[n[0]][0],R[n[i]][1],R[n[0]][1],
R[n[i]][2],R[n[0]][2],m[n[i]],m[n[0]]);
}
Ep[k]=Epb;
}
for (int l=0; l<N;l++){
Eptotal=Eptotal+Ep[l];
}

double Etotal=(Eptotal+Ectotal);
printf("En t=%d Ec=%lf, Ep=%lf, Et=%lf\n\n",t,Ectotal,Eptotal,Etotal);
}
return 0;
}

```

6.2 Exemple del codi emprat per el plot dels sistemes en el programari gnuplot

```

reset

set terminal pngcairo background rgb 'black'
set xlabel 'ylabel' tc rgb 'white'
set ylabel 'xlabel' tc rgb 'white'
set border lc rgb 'white'
set key tc rgb 'white'

# png
set terminal pngcairo size 1000,420

# color definitions
set style line 1 lc rgb '#fde725' lt 1 lw 10 pt 7 ps 2 # --- blue
set style line 2 lc rgb '#fde725' lt 1 lw 1 pt 7 ps 2 # --- red
set style line 3 lc rgb '#fde725' lt 1 lw 2 pt 7 ps 2 # --- yellow
set style line 4 lc rgb '#000004' lt 1 lw 2 pt 7 ps 2 # --- black

set parametric
unset key

set xrange [-400:300]
set yrange [-300:400]
#set zrange [-1.0:2.0]

set xlabel "x"
set ylabel "y"
set zlabel "z"
system('mkdir -p png')

n=0
do for [ii=1:126] {
    n=n+1
    set output sprintf('png/gif%03.0f.png',n)
    splot 'animacion_cuerpo0.txt' every ::1::ii w l ls 1, \
        'animacion_cuerpo0.txt' every ::ii::ii w p ls 1, \
    'animacion_cuerpo1.txt' every ::1::ii w l ls 2, \
        'animacion_cuerpo1.txt' every ::ii::ii w p ls 2, \
        'animacion_cuerpo2.txt' every ::1::ii w l ls 3, \
        'animacion_cuerpo2.txt' every ::ii::ii w p ls 3, \
    'animacion_cuerpo3.txt' every ::1::ii w l ls 4, \
        'animacion_cuerpo3.txt' every ::ii::ii w p ls 4
}

```