

# Pràctica III: Modelització de l'hipotètic desenvolupament d'un sistema depredador-presa en un planeta que orbita tres estrelles.

Iñaki Erregue (1496166), Pol Guijosa (1492878), Guillermo Abad (1497619)

21 de novembre del 2019, Bellaterra

## Resum

Tatooine, un planeta que orbita dues estrelles producte de la imaginació de George Lucas, es queda curt al costat del problema que resolldrem mitjançant la modelització que es mostrarà en aquest informe. Plantegem l'estudi de l'evolució d'un sistema depredador-presa en un planeta que orbita tres estrelles. Ens permetrà comprovar que la dinàmica d'interacció entre aquests cossos condicionarà el desenvolupament del sistema.

## 1 Motivació, introducció i plantejament

Analitzant el problema, observem que consta de dues parts. La primera és independent i es basa en resoldre el problema d' $N$ -cossos, en el nostre cas 4. A la segona part, s'ha de resoldre un sistema depredador-presa dependent de l'apartat anterior. Aquesta dependència es posa de manifest amb la temperatura del planeta, la qual depèn de la distància a les estrelles.

### 1.1 N-Cossos

Partim de l'equació que regeix la dinàmica d'interacció gravitatoria entre  $N$  cossos:

$$\frac{d^2 \vec{q}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_j (\vec{q}_j - \vec{q}_i)}{|\vec{q}_j - \vec{q}_i|^3} \quad , \quad (1.1)$$

on  $\vec{q}_i$  és el vector posició del cos  $i$ ,  $G$  és la constant de gravitació universal i  $m_j$  la massa del cos  $j$ . Realitzem els següents canvis de variable per adimensionalitzar:

$$t' = t/T, \quad \vec{q}'_i = \vec{q}_i/d, \quad m'_j = m_j/m_0 \quad , \quad (1.2)$$

on  $T$ ,  $m_0$ ,  $d$  són el període orbital, la massa de l'objecte atractor, i el radi orbital de l'objecte atret d'un sistema binari que interacciona gravitatòriament i que, per tant, compleix la tercera llei de Kepler, per exemple, la Terra i el Sol. Emprant la tercera llei de Kepler<sup>1</sup>, obtenim l'EDO per a l'acceleració del planeta adimensionalitzada:

$$\frac{d^2 \vec{q}'_i}{dt'^2} = \sum_{j \neq i}^N 4\pi^2 m'_j \frac{(\vec{q}'_j - \vec{q}'_i)}{|\vec{q}'_j - \vec{q}'_i|^3} \quad . \quad (1.3)$$

Per poder analitzar l'error comès i veure com de bona és la nostra solució emprarem la conservació de l'energia, la qual ens diu que l'energia de tot sistema aïllat es conserva. En el nostre cas tenim:

$$E = \sum_i (K_i + U_i) = \sum_i \left( \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_j \left( \frac{G m_i m_j}{|\vec{q}_j - \vec{q}_i|} \right) \right) = cte \quad , \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Formulació de Newton per a la tercera llei de Kepler:  $\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0}$ .

on  $v_i^2 = \frac{dq_i}{dt}^2$ . Normalitzant això veiem que amb els paràmetres normalitzats tenim:

$$E' = \sum_i (K'_i + U'_i) = \sum_i \left( \frac{m'_i v_i'^2}{2} + \sum_j \left( \frac{4\pi^2 m'_i m'_j}{|\vec{q}_j' - \vec{q}_i'|} \right) \right) = cte' \quad , \quad (1.5)$$

equació que haurem d'utilitzar per veure l'error de la simulació.

En el nostre cas estudiarem la interacció de 4 cosos: 3 estrelles d'una massa semblant i un planeta de massa 100 cops inferior. Veurem com es desenvolupa un sistema depredador presa en aquest sistema. També estudiarem altres configuracions amb una distribució de masses, posicions i velocitats, diferents.

## 1.2 Depredador-Presa

A continuació anunciem les aproximacions que farem servir durant la modelització. En primer lloc, en l'apartat anterior considerem els cosos com a masses puntuals, per això al planeta sempre és de dia, ja que aquest no té superfície. Seguidament, assumim que al planeta no hi ha albedo i que no té cap satèl·lit.

Siguin  $x$  i  $y$  el nombre depreses i depredadors, obtenim el següent sistema d'EDO's acoblades:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha\sigma_1\sqrt{\pi}\exp\left[\left(\frac{T_{\text{planeta}}-T_{10}}{\sigma_1}\right)^2\right]x^2 - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -\beta\sigma_2\sqrt{\pi}\exp\left[\left(\frac{T_{\text{planeta}}-T_{20}}{\sigma_2}\right)^2\right]y + dxy \end{cases} \quad (1.6)$$

Notem que per a les preses s'ha considerat un model de creixement logístic, que té en compte la manca de recursos quan la població creix significativament. La constant  $a$  representa la taxa de creixement de les preses,  $b$  l'èxit en la caça del depredador i  $d$  quant alimenta a un depredador caçar una presa. Pel que fa  $\alpha$  i  $\beta$ , són dues constants que regularan l'amplitud de la dependència amb de la temperatura del planeta. S'ha escollit en ambdós casos una dependència del tipus gaussià que disminueix el creixement d'ambdues espècies quan la temperatura del planeta s'allunya de la temperatura idònea per al desenvolupament vital de cadascuna d'elles  $T_{i0}$ . Finalment,  $\sigma_i$  representa l'amplada de confort a temperatures diferents de la idònea. Emprant la llei d'Stefan-Boltzmann, hem aproximat la temperatura del planeta com:

$$T = \frac{\omega}{\sqrt{d(t)}} \quad , \quad (1.7)$$

on  $\omega$  és una constant i  $d(t)$  és la distància mitja del planeta a les tres estrelles en cada instant de temps.

Realitzant els següents canvis de variables per adimensionalitzar el sistema d'equacions:  $t' = ta$ ,  $x' = xb/a$  i  $y' = yb/a$ , acabem obtenint el següent sistema d'EDO's acoblades:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt'} = x' - k_{1n}(x')^2 - x'y' \\ \frac{dy'}{dt'} = k_{2n}x'y' - k_{3n}y' \end{cases} \quad (1.8)$$

on

$$k_{1n} = \left( \frac{\alpha\sigma_1\sqrt{\pi}}{b} \right) \exp\left[\left(\frac{\frac{\omega}{\sqrt{d(t)}} - T_{10}}{\sigma_1}\right)^2\right], \quad k_{2n} = d/b, \quad k_{3n} = \left( \frac{\beta\sigma_2\sqrt{\pi}}{a} \right) \exp\left[\left(\frac{\frac{\omega}{\sqrt{d(t)}} - T_{20}}{\sigma_2}\right)^2\right]. \quad (1.9)$$

## 2 Solució Numèrica

Tant per solucionar el problema dels cossos com el del sistema depredador-presa, fem servir el mètode numèric de Runge-Kutta(4)<sup>2</sup>.

### 2.1 N Body Problem

Per solucionar el model de l'NBody, vam començar emprant-lo per 2 cossos en 3 dimensions, obtenint resultats prou bons i que semblaven correctes, però en aplicar aquest mètode a més cossos ens vam adonar que el mètode emprat era incorrecte i que donàvem més pes a algunes partícules que a altres, com podem observar a continuació:<sup>3</sup>

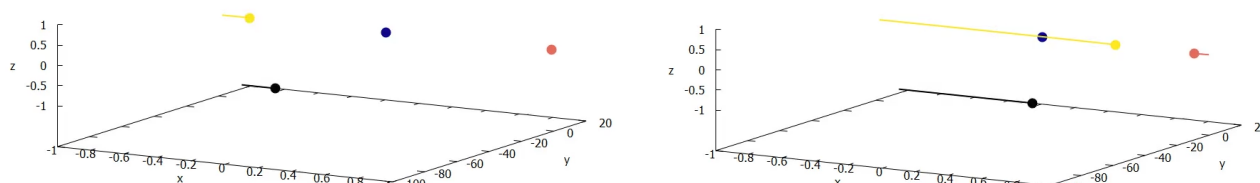


Figura 2.1: Trajectòries amb els efectes de la gravetat amb diferent pes per a cada partícula.

Això ho vam poder solucionar obtenint un model el qual era prou fiable, però que divergia en algunes ocasions quan dos planetes es superposaven i es quedaven enganxats, o la seva distància era ínfima però no es quedaven enganxats doncs el diferencial de temps no era prou petit perquè es produís aquest fet sinó que sortien disparats en sentits oposats fent que s'allunyessin per sempre. Això a la realitat òbviament no passa, doncs els planetes i les estrelles tenen una superfície que delimita la força màxima que produeix la seva gravetat, no és el cas dels forats negres, on sí passa el primer quan algun cos travessa l'horitzó d'events i passa a formar part del propi forat negre. Això mateix és el que impedeix la segona possibilitat de que surtin disparats, doncs quan algun cos s'aproxima tant a un altre no es pot tenir la suficient velocitat per escapar ja que gràcies a Einstein sabem que tenim una velocitat màxima a la qual es poden moure les partícules. D'aquí podem extreure unes quantes millores per fer en el model que posteriorment anunciarem però que no farem doncs cauen fora dels propòsits d'aquests treball. El que sí que vam fer és aplicar una èpsilon als denominadors per tal que no divergís la solució obtenint el nostre model final.

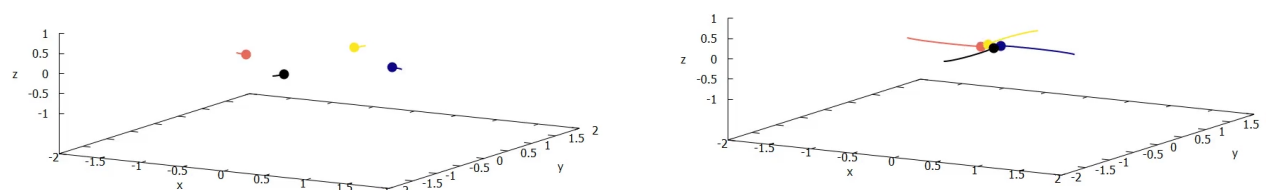


Figura 2.2: Trajectòries amb els efectes de la gravetat amb igual pes per a totes les partícules.

El següent pas ha estat avaluar la conservació de l'energia, d'on hem obtingut que no es conserva l'energia del nostre sistema emprant l'equació (1.5). Però això podria ser degut a que no està ben normalitzat i és incorrecte el seu ús. Així que hem representat l'energia cinètica i la potencial en funció del temps, per veure el seu comportament i entendre què està passant. Quan fem això obtenim:

<sup>2</sup><http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/numerico/diferencial/diferencial.html>

<sup>3</sup>Totes les imatges han sigut extretes dels .gif que s'han adjuntat.

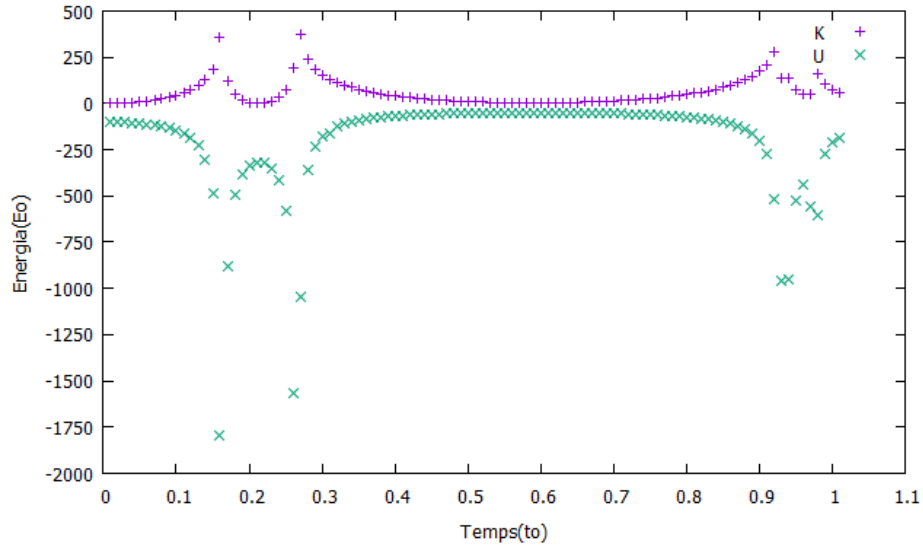


Figura 2.3: Representació de l'energia cinètica i de la potencial en funció del temps.

En observar això veiem com l'energia cinètica i la potencial es comporten de manera molt similar: quan la potencial augmenta la cinètica baixa i de mateixa forma quan la cinètica augmenta la potencial baixa a excepció d'un factor negatiu, donant-nos a entendre que potser està malament el mètode emprat en l'equació (1.5) com havíem plantejat i l'energia realment sí que es conserva.

Ara passarem a veure dos sistemes, per finalment estudiar el que aplicarem en el sistema depredador presa. El primer que veurem és un sistema molt simètric sense coordenades  $z$  molt bonic i ordenat on partim de les posicions normalitzades inicials  $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{r}_2 = (-1, 0, 0)$ ,  $\vec{r}_3 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{r}_4 = (0, 0, 1)$  amb la mateixa massa tots 4 cosos  $m = 1$  i velocitats normalitzades  $\vec{v}_{r_1} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_2} = (0, -1, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_3} = (-1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_4} = (1, 0, 0)$ , el qual forma una espècie de flor de la forma:

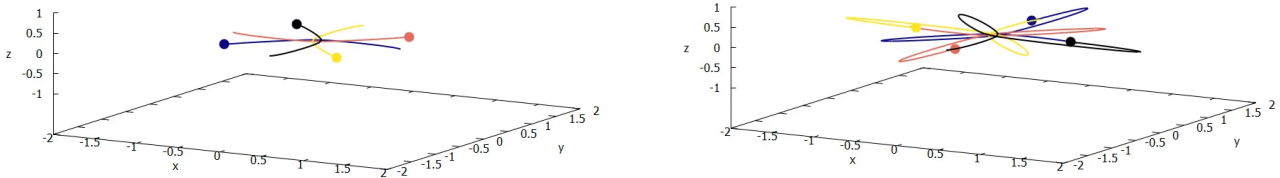


Figura 2.4: Representació de la trajectòria “Flor”.

El següent que veurem es un sistema gens ordenat i molt caòtic amb les posicions normalitzades inicials  $\vec{r}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{r}_2 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{r}_3 = (-1, 1, 0)$ ,  $\vec{r}_4 = (0, 1, 1)$  amb la mateixa massa tots 4 cosos  $m = 1$  i velocitats normalitzades  $\vec{v}_{r_1} = (0, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_2} = (0, -1, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_3} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_4} = (0, 0, 0)$ , el que ens genera les trajectòries següents:

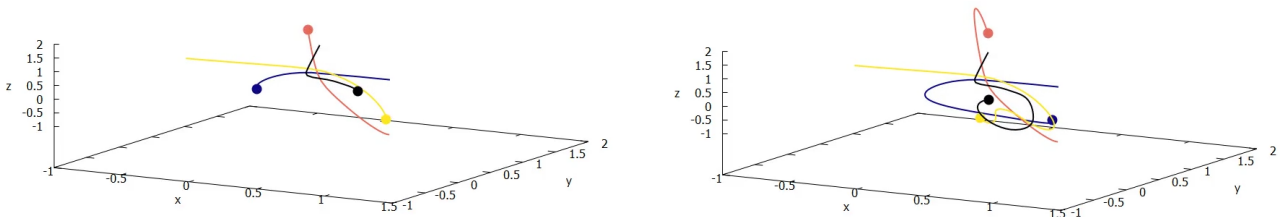


Figura 2.5: Representació de la trajectòria “Caos”.

Observant aquests dos models veiem que volem un model el qual no sigui ni massa ordenat ni massa caòtic, però el més important de tot és que volem un model amb el centre de masses en repòs per a poder estudiar-lo adientment i representar-lo bé. Al final hem treballat amb aquest sistema, el qual té unes posicions normalitzades inicials  $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$ ,  $\vec{r}_2 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{r}_3 = (-1, 0, 0)$ ,  $\vec{r}_4 = (0, 1, 0)$  amb la mateixa massa els tres primers cossos  $m = 1$  i el quart amb una massa 100 cops més petita i velocitats normalitzades  $\vec{v}_{r_1} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_2} = (-1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_3} = (0, -1, 0)$ ,  $\vec{v}_{r_4} = (0, 0, 0)$ , obtenint:

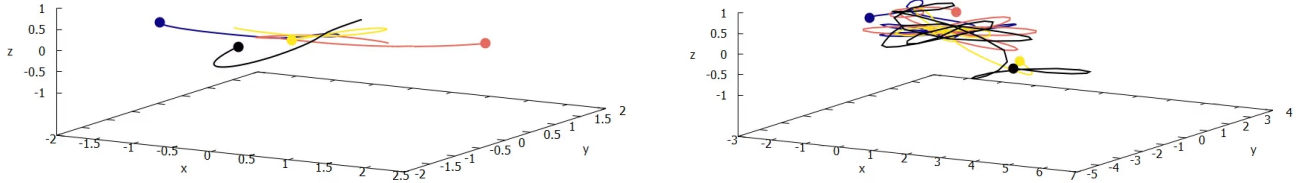


Figura 2.6: Representació de la trajectòria “Candidat a estudi”.

El qual hem estudiat per un temps més prolongat que els casos anteriors veient que no divergeix almenys en un temps curt.

## 2.2 Depredador Presa

En solucionar el problema de la dinàmica dels cossos amb les condicions inicials que hem especificat anteriorment, hem solucionat el sistema d'equacions diferencials de la interacció biològica pels paràmetres  $\alpha = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ,  $\beta = 5.6 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$ ,  $a = 1.0 \text{s}^{-1}$ ,  $b = 0.4 (\text{Ns})^{-1}$ ,  $d = 0.8 \text{s}^{-1}$ ,  $\sigma_1 = 25\text{K}$ ,  $\sigma_2 = 20\text{K}$ ,  $T_{10} = T_{20} = 40\text{K}$ , el període orbital de la Terra (1 any) i el radi orbital de la Terra<sup>4</sup> per 62 iteracions temporals dels cossos amb 10 talls per cada iteració temporal obtenint els següents resultats desnormalitzats i desadimensionalitzats (N és la unitat nombre d'éssers vius):

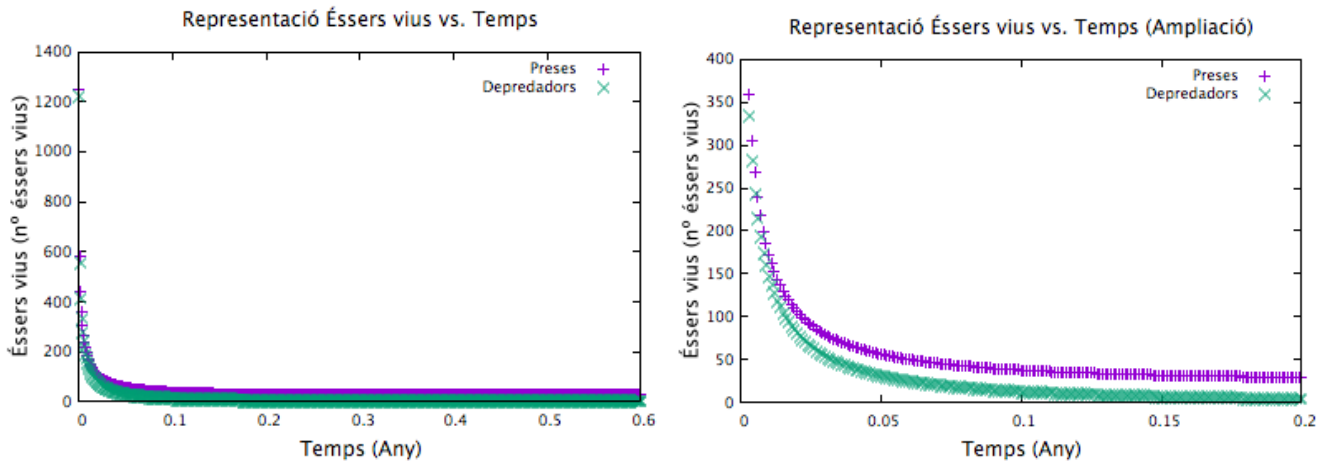


Figura 2.7: Representació del nombre d'éssers vius en funció del temps.

Notem com el nombre de depredadors i de preses decau ràpidament al principi degut als paràmetres que hem decidit imposar. A més, en l'ampliació podem veure com el nombre de preses mai és el mateix que el de depredadors. La curvatura de les representacions és diferent, per tant, i podem veure com a partir dels 0.2 anys aproximadament, el nombre de depredadors i de preses s'estabilitzen.

Amb els mateixos paràmetres anteriors i els mateixos talls, podem fer també la representació del nombre de depredadors en funció del nombre de preses:

<sup>4</sup><https://es.wikipedia.org/wiki/Tierra>

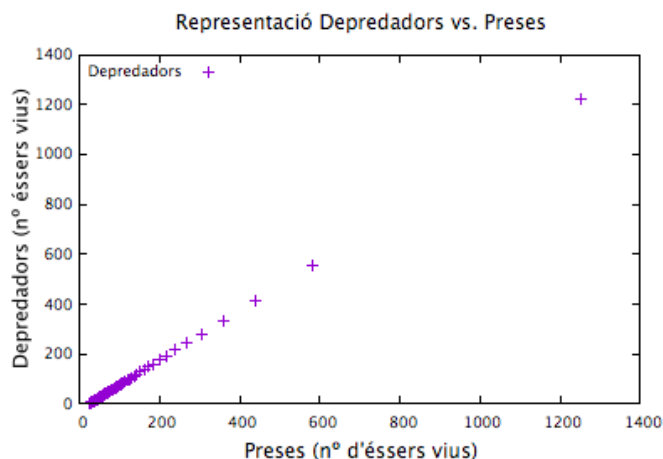


Figura 2.8: Representació del nombre de depredadors en funció del nombre de preses.

Tal com podem notar, no es tracta d'una espiral ni cap el·lipse o figura amb curvatura. Es tracta d'una relació lineal. Això és degut als paràmetres i a la dependència amb la temperatura del planeta que hem imposat. Conseqüentment, podem assegurar que hi ha una relació que ens permetria extrapolar el nombre de depredadors en funció del de preses en aquest cas.

### 3 Millora del model

Pel que fa al problema dels N-bodies, es podria deixar de considerar els cossos com a partícules puntuals i considerar cossos amb volums. A més, es podrien tenir en compte efectes relativistes i les velocitats es comportarien seguint la relativitat especial o la general.

Pel que fa a la part del depredador presa, podríem també passar a considerar la secció per la qual estan escalfant el planeta cada estrella i amb quin angle ho fan o posicionar la població en diferents parts de la superfície d'aquest, tenint així diferents temperatures i fins i tots climes totalment diferents a una part del planeta que en el altre. Una altra de les millores que podríem fer per millorar el model seria deixar d'assumir que el planeta en què estudiem la interacció biològica no té albedo. Això aproximaria el model del planeta al d'un amb nuvolositat o, fins i tot, pols. Similarment, podríem deixar de considerar l'emissivitat del planeta de valor 1.

També una millora podria consistir en considerar que tant els depredadors com les preses noten els canvis de gravetat, cosa que no hem considerat en el nostre model, considerant com hem fet amb la temperatura, que les preses i els depredadors tenen una forma física òptima quan el planeta té una gravetat determinada (diferents valors per uns i per altres).

Per últim es podria millorar el model afegint al terme que limita el creixement de les preses o un factor de limitació territorial i es podria fer també amb els depredadors per exemple afegint un terme de hibernació quan fa massa fred.

### 4 Conclusions

És complicat que es pugui mantenir estable una interacció biològica com la d'un sistema depredador-presa en un planeta que orbiti tres estrelles. És possible que existeixin alguns paràmetres pel sistema depredador-presa tals que aquest es mantingui estable durant una quantitat de temps, però dependrà de com de caòtica sigui la dinàmica del cossos en sí. La dinàmica dels cossos condiciona directament la possibilitat d'estabilitat d'un sistema com el que hem plantejat, per tant, fent que en molts sistemes no sigui possible que es desenvolupi establement aquest. Com bé expliquen en el llibre que ens hem basat és impossible sobreviure en unes condicions tan extremes. Per això en el llibre l'espècie que viu allà ha desenvolupat una forma de deshidratar-se per conservar els seus cossos en magatzems per sobreviure en èpoques dolentes i poder tornar a hidratar-se (reviure) en les èpoques bones.