

Sistemes caòtics: Pèndol compost amb oscil·lador harmònic

Sara del Pozo Ortiz, 1498507
Martí Lorente Quintana, 1444955
Joan Vila Gonzalez, 1534086
Sandra Matutano Sánchez, 1531005

Universitat Autònoma de Barcelona, 2022



Resum

En aquesta pràctica, simularem el moviment d'un sistema compost d'un pèndol clàssic, que té a més una segona massa enganxada a la primera mitjançant una molla, sent així una variació del coneut pèndol compost. Utilitzarem la formulació Newtoniana de la mecànica clàssica, en coordenades cartesianes, ja que la formulació Lagrangiana presenta certes dificultats (així com certs avantatges) que exposarem al final de l'informe. L'objectiu és avaluar la precisió del mètode numèric de Runge-Kutta 4 analitzant la conservació de l'energia mecànica del sistema.

Tot el codi emprat a aquesta pràctica està disponible a [aquest enllaç](#), així com en un document adjunt a aquest article.

Índex

1	Introducció i fonaments teòrics	1
2	Resolució Numèrica	2
3	Conclusions i propostes de millora	3

1 Introducció i fonaments teòrics

En termes formals, existeixen diverses definicions del que és un sistema caòtic, algunes més estrictes i altres menys. Una de les més utilitzades és la definició de Devaney, que estableix que: Sigui un sistema descrit per una sèrie de paràmetres $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en un espai vectorial X , i definit per una equació d'evolució $f(d^i\vec{x}/dt^i, t) = 0$, es diu que és un sistema caòtic si:

- És sensible a les condicions inicials: Donat un conjunt de condicions inicials, $\vec{x}(0)$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix algun $\vec{y}(0)$ tal que $|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)| < \varepsilon$ i $|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)| \geq e^{at}|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)|$ per a algun $a > 0$. En paraules, això vol dir que a prop de qualsevol punt inicial hi ha un altre punt inicial que s'allunyarà de forma exponencial (o superior) d'aquest.
- És topològicament transitiu: Sigui $A(0)$ un subconjunt obert d' X , i $A(t)$ el conjunt format per les evolucions temporals de tots els seus elements, per a tot subconjunt obert $B \subset X$ existeix algun t_0 tal que $A(t_0) \cap B \neq \emptyset$. Això vol dir que qualsevol conjunt punts a l'espai d'estats, per petit que sigui, terminarà recorrent tots els estats possibles en algun moment.
- Té òrbites periòdiques denses: per a tot punt $\vec{x} \in X$ i per a tot $\varepsilon > 0$ ha d'haver algun punt \vec{y} tal que $|\vec{x} - \vec{y}| < \varepsilon$ que pertany a una òrbita periòdica. Aquesta última condició s'imposa generalment com una mínima predictibilitat del sistema.

En certs casos algunes de les condicions poden implicar automàticament les altres, de forma que no sempre s'inclouen totes a la definició.

A la figura següent es mostra el diagrama de forces del sistema a estudiar:

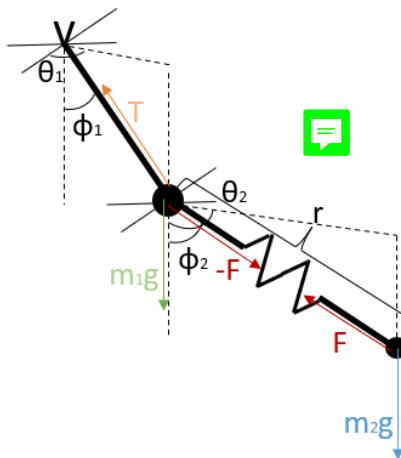


Figura 1: Diagrama de forces del pèndol amb oscil·lador harmònic

La longitud de la barra rígida es L , mentre que la longitud natural de la molla és l .

Per la condició de lligadura, la component radial de la força que actua sobre m_1 ha de ser la força centrípeta, $-m_1 \frac{|\vec{r}_1|^2}{L} \hat{r}_1$. La component tangencial, en canvi, ha de ser la component tangencial de la suma de $m_1 \vec{g} - \vec{F}$, $(m_1 \vec{g} - \vec{F})_{||} = (m_1 \vec{g} - \vec{F}) - [(m_1 \vec{g} - \vec{F}) \cdot \hat{r}_1] \hat{r}_1$:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \underbrace{k \left(1 - \frac{l}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \left[\vec{r}_2 - \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}{L^2} \vec{r}_1 \right]}_{\vec{F}_{||}} - \underbrace{m_1 g \left(\hat{z} - \frac{\hat{z} \cdot \vec{r}_1}{L^2} \vec{r}_1 \right)}_{m\vec{g}_{||}} - \underbrace{\frac{m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2}{L^2} \vec{r}_1}_{\text{força centrípeta}} \quad (1)$$

En el cas de la massa 2 el càlcul és més senzill, ja que no està sotmesa a cap lligam:

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{F} = -k \left(1 - \frac{l}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - m_2 g \hat{z} \quad (2)$$

Dividint (1) per m_1 i (2) per m_2 , i definint els següents paràmetres adimensionals:

$$\tilde{r}_1 = \vec{r}_1/L; \quad \tilde{r}_2 = \vec{r}_2/L; \quad \tilde{t} = t\sqrt{g/L}; \quad \alpha = l/L; \quad \chi = m_1/m_2; \quad \gamma = \frac{kL}{m_1 g}$$

Obtenim les equacions del moviment:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{r}}_1 = \gamma \left(1 - \frac{\alpha}{|\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1|} \right) [\tilde{r}_2 - (\tilde{r}_2 \cdot \tilde{r}_1)\tilde{r}_1] + (\hat{z} \cdot \tilde{r}_1)\tilde{r}_1 - \hat{z} - |\dot{\tilde{r}}_1|^2 \tilde{r}_1 \equiv \tilde{f}_1 \\ \ddot{\tilde{r}}_2 = -\chi \gamma \left(1 - \frac{\alpha}{|\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1|} \right) - \hat{z} \equiv \tilde{f}_2 \end{cases}$$

Per fer servir els mètodes de Runge-Kutta, reduïm el nostre sistema d'equacions diferencials d'ordre 2 a ordre 1. Definint $\tilde{q} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ i $\tilde{w} = \dot{\tilde{q}} = (\dot{\tilde{r}}_1, \dot{\tilde{r}}_2)$, queda:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \tilde{w} \\ \dot{\tilde{w}} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \equiv \tilde{f} \end{cases}$$

D'altra banda l'energia mecànica del sistema la podem expressar com:

$$\tilde{E} = \frac{E}{m_1 g L} = \frac{\tilde{v}_1^2}{2} + \tilde{z}_1 + \frac{1}{\chi} \left(\frac{\tilde{v}_2^2}{2} + \tilde{z}_2 \right) + \frac{\gamma}{2} (\tilde{r} - \alpha)^2$$

2 Resolució Numèrica

Amb les propietats del sistema $\alpha = 0.5$, $\gamma = 5$ i $\chi = 10$, s'ha escollit de forma arbitrària un conjunt de condicions inicials, definides per $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.2\text{rad}$, $\phi_2 = 0.2\text{rad}$, $\tilde{r} = 1.2l$ (longitud inicial de la molla), i s'han estudiat petites variacions d'aquesta, amb $\varphi_1 \in \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. A continuació es mostra la representació gràfica de l'energia del sistema en funció del temps, dividida entre l'energia inicial, per a les diferents condicions inicials.

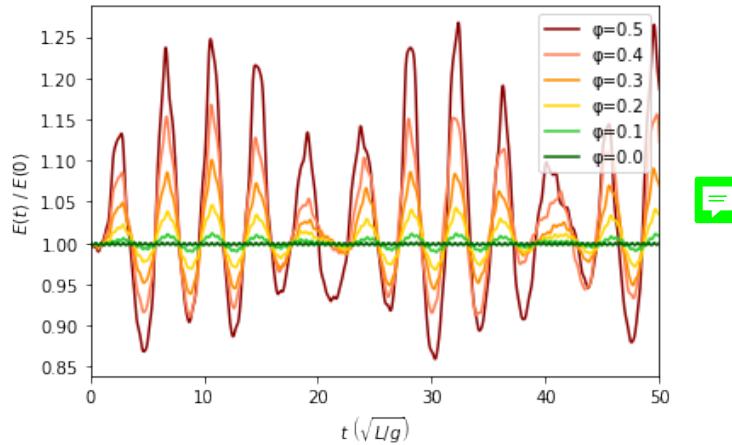


Figura 2: Relació d'energia del sistema respecte de l'energia inicial en funció del temps, per a les condicions especificades i diversos valors de φ_1 , expressat en radians

Observem un error que creix molt ràpidament quan ens allunyem de la petita oscil·lació. Si establim l'error relatiu acceptable en l'energia en un 10%, podem observar que aquest mètode només dóna resultats vàlids per aquestes condicions inicials si $\varphi_1 \leq 0.3\text{rad}$.

A més, observem que l'energia presenta en tots els casos la doble periodicitat característica de l'oscil·lador débilment acoblat. Pensem que això és degut al sistema formant un acoblament débil amb el reservori d'energia que suposa l'oscil·lació de $|\vec{r}_1|$ en torn a L degut a la imprecisió inherent al mètode numèric. Com que la barra rígida no té constant elàstica associada, mentre l'energia està *emmagatzemada* en ella, aquesta energia està absent en el sistema. Una forma de comprovar això seria repetir la simulació fent servir una molla amb una constant elàstica molt elevada, en comptes de la barra rígida, i comprovar si en tenir en compte aquesta energia la fluctuació desapareix, com anotarem al final de l'informe.

A continuació s'afegeixen dues animacions que il·lustren aquesta fluctuació del valor de $|\vec{r}_1|$ en el temps. Observem que, tal i com prediu la nostra hipòtesi, en les primeres 10 unitats de temps hi ha 4 oscil·lacions en tots dos casos. No se'n poden extreure, però, conclusions quantitatives ni definitives, ja que per raons de poder computacional només s'ha capturat una imatge del sistema cada 10 iteracions del mètode, i només durant 10 unitats de temps. No tots els lectors de .pdf suporten aquestes animacions, Adobe Acrobat Reader, per exemple, sí ho fa.

(a) $\phi_1(0) = 0.2\text{rad}$ (b) $\phi_1(0) = 0.5\text{rad}$

Figura 3: Evolució temporal del sistema durant la primera unitat de temps \sqrt{gL} en dos casos diferents

3 Conclusions i propostes de millora

Amb aquesta pràctica podem conoure que el mètode de Runge-Kutta 4 en sistemes caòtics és insuficient quan ens allunyem de la petita oscil·lació (en el cas molt particular estudiat, $\varphi_1 \lesssim 0.3\text{rad}$), ja que l'error relatiu en l'energia arriba a valors molt grans, fins al 25% amb $\varphi_1 = 0.5\text{rad}$.

D'altra banda, i en una nota menys acadèmica, hem après sobre la definició formal i el comportament dels sistemes caòtics.

Aquesta pràctica ens ha deixat amb diverses propostes de millora. En primer lloc, ens hauria agradat resoldre aquest mateix problema fent servir les formulacions lagrangiana i hamiltoniana de la mecànica clàssica, cosa que no hem pogut fer donada la dificultat de les equacions resultants, i el fet que inclouen fraccions que divergeixen en certes situacions. Pensem que algú amb més coneixements podria resoldre aquests problemes, bé evitant els infinitis a la implementació numèrica amb més coneixements de programació, o bé trobant equacions menys problemàtiques fent servir per exemple transformacions canòniques, cosa que eliminaria la problemàtica de la fluctuació en la mida de la barra rígida, en convertir-se en un lligam del sistema.

D'altra banda, ens hauria agradat trobar la dependència de l'amplitud en l'error relatiu de l'energia amb l'angle inicial φ_1 , però fer un ajust significatiu hauria requerit la simul·lació de més escenaris dels que el nostre temps i poder computacional ens permeten.

Com ja hem comentat, pensem que una continuació interessant d'aquesta recerca seria la simulació del mateix sistema però conformat per dues molles en comptes d'una barra rígida i una molla, per a comprovar si per a valors molt grans de la constant recuperadora de la primera molla, i tenint en compte l'energia potencial d'aquesta, s'elimina la oscil·lació de l'energia al llarg del temps, com teoritzem.