

Pràctica II: Modelització del flux de trànsit en diverses interseccions

Iñaki Erregue (1496166), Pol Guijosa (1492878), Guillermo Abad (1497619)

21 de novembre del 2019, Bellaterra

Resum

S'intentarà modelitzar la circulació de tràfic en una rotonda i un encreuament (ambdues en una via urbana) per així veure quin és el disseny que optimitza més la circulació de tràfic en ciutats. El que veurem és que el model emprat és útil per modelitzar una intersecció però no una rotonda.

1 Introducció i plantejament

Modelitzarem el problema emprant l'equació de continuïtat i suposant que el nombre total de cotxes es conserva:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad , \quad (1.1)$$

on $\rho(\mathbf{r}, t)$ denota la densitat de cotxes i està compresa entre el zero i un valor màxim ρ_{max} . $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \rho, t)$ representa el flux total de la densitat. En aquest model considerarem únicament el flux de transport, deixant de banda els termes difusius i viscosos (el mètode numèric que emprarem ja és difusiu de per sí):

$$\mathbf{J} = \rho \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (1.2)$$

on $\mathbf{v} = (a \cdot v_x, b \cdot v_y)^t$ és la velocitat a la que circulen els cotxes en el pla xy , (la superfície). Tractarem per separat el mòdul de la velocitat de la direcció d'aquesta. En referència a la direcció, hem afegit uns pesos a i b a cada component, els quals satisfan: $a^2 + b^2 = 1$, per tal de mantenir la normalització. El valor d'aquests pesos el canviarem manualment per cada punt de l'espai donant una direcció privilegiada al sentit del trànsit i evitant la dependència explícita dels pesos respecte les variables x i y . D'altra banda, busquem que el mòdul de la velocitat sigui lineal amb la densitat, que compleixi que quan la carretera estigui buida ($\rho = 0$), la velocitat sigui màxima, i que quan el trànsit sigui dens es circuli a menys velocitat, arribant a aturar-se per complet el trànsit ($v = 0$) quan la densitat sigui màxima. El model que satisfà aquestes condicions és el següent:

$$\|\mathbf{v}\| = v_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad . \quad (1.3)$$

Emprant els següents canvis de variable:

$$t' = t/\tau, \quad x' = x/L, \quad y' = y/L, \quad u = \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right) \quad , \quad (1.4)$$

aconseguint l'adimensionalització de l'equació (1.1) com

$$u_{t'} + auu_{x'} + buu_{y'} = 0 \quad , \quad (1.5)$$

on L i τ són la distància i el temps característics del sistema, i satisfan: $v_{max} = L/\tau$. Com és lògic, s'ha considerat que la velocitat límit en ambdues carreteres sigui la mateixa, $v_{max} = 30$ km/h. A més, hem suposat que els cotxes tenen una llargada mitjana de 5 m (tenint en compte furgonetes i camions petits), i que en trànsit dens la distància entre dos cotxes és de 3 m, obtenint així: $\rho_{max} = 125$ cotxes/km.

2 Solució numèrica

Esquema numèric

El mètode numèric emprat per a la resolució del problema és el de Lax-Wendroff. Alleugerim la notació escrivint les variables adimensionalitzades sense tilda. L'esquema numèric obtingut és el següent:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - \frac{(V_x)_{i,j}}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i-1,j}^n)^2 \right] + \\
 & \frac{((V_x)_{i,j})^2}{8} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[(u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n) \left((u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i,j}^n)^2 \right) - (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \left((u_{i,j}^n)^2 - (u_{i-1,j}^n)^2 \right) \right] - \\
 & \frac{(V_y)_{i,j}}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(u_{i,j+1}^n)^2 - (u_{i,j-1}^n)^2 \right] + \\
 & \frac{((V_y)_{i,j})^2}{8} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[(u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n) \left((u_{i,j+1}^n)^2 - (u_{i,j}^n)^2 \right) - (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \left((u_{i,j}^n)^2 - (u_{i,j-1}^n)^2 \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Notem que realment, s'ha aplicat el mètode dues vegades ja que treballem en el pla i , posteriorment, s'han sumat ambdues contribucions. Les matrius \hat{V}_x i \hat{V}_y fan referència als valors dels pesos a i b corresponentment, a cada punt del espai.

Metodologia

En primer lloc vam definir les zones permeses (carrils, per on circulen els cotxes) i les zones prohibides (fora dels carrils). Posteriorment vam observar que era necessari que les últimes caselles del recorregut fessin desaparèixer les densitats de cotxes, per simular que aquests marxaven de la superfície d'estudi, ja que sinó, es quedaven aturats al final del recorregut provocant el col·lapse del sistema. Les matrius obtingudes per la intersecció i per la rotonda es mostren a continuació, per a un mallat de $dx = dy = 0.1\text{m}$ i una superfície d'estudi de $20 \times 20\text{m}$ que serà la qual emprarem majoritàriament. Cal esmentar que la simulació està programada de tal manera que les dimensions del creuament s'adaptin a quan s'estudia una superfície més gran o més petita, permetent-nos l'estudi de diferents mesures del mapa, per exemple, fent menys *zoom*, amb una superfície de $50 \times 50\text{m}$.

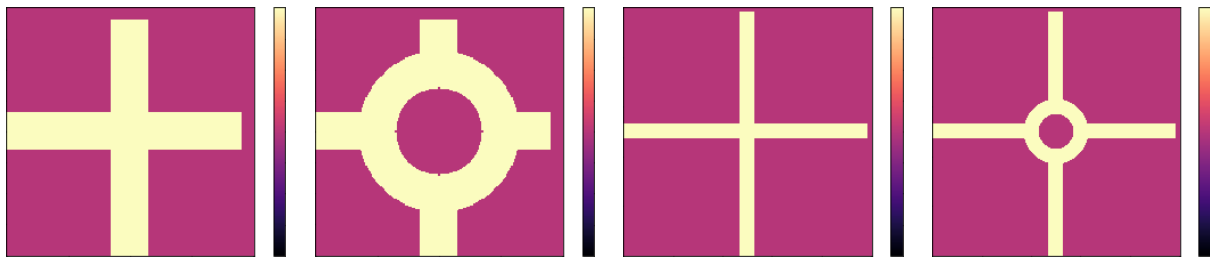


Figura 2.1: Zones permeses de densitat en la simulació per $20\text{m} \times 20\text{m}$ i per $50\text{m} \times 50\text{m}$ (on la llegenda de colors va del -1 (negre) al 1 (blanc), i serà així fins que arribem a la part de simulació de xocs).

Posteriorment, vam definir les matrius \hat{V}_x i \hat{V}_y , emprant el sentit de creixement dels índexs de les matrius com els sentits positius dels eixos x i y . Per aquest motiu, la velocitat horitzontal va d'esquerra a dreta i la vertical va de la part inferior a la superior, tant en la intersecció com en la rotonda. En canvi, en les zones d'encreuament les components de les velocitats tenen una forma molt diferent.

Inicialment, a la intersecció vam fer que la velocitat anés en direcció diagonal, amb $a = b = 1/\sqrt{2}$ i per la rotonda, vam fer que el trànsit anés donant voltes amb velocitats únicament tangencials, $\hat{e}_\theta = (-s_\theta \cdot \hat{e}_x, c_\theta \cdot \hat{e}_y)$. Els pesos en aquest cas variaven a cada punt de l'espai en funció del angle i va ser necessari definir una matriu d'angles $\hat{\theta}$ respecte al punt de gir (centre de la rotonda), calculada emprant $\theta = \arctan(y/x)$ i agafant la branca definida a l'interval $[0, 2\pi)$. Finalment els pesos obtinguts van ser: $(\hat{V}_x)_{i,j} = -\sin \hat{\theta}_{i,j}$, $(\hat{V}_y)_{i,j} = \cos \hat{\theta}_{i,j}$. Conseqüentment era necessari que els carrils de sortida penetressin a la rotonda si volíem que els cotxes no es quedessin fent voltes infinitament i continuessin el seu trajecte.



Figura 2.2: \hat{V}_x i \hat{V}_y representant la direcció de les velocitats en la rotonda.

Aquests dos primers models van introduir errors tant en la intersecció com en la rotonda, fent divergir la solució en alguns punts de la superfície.

En el cas de la intersecció, el flux que arribava a la cantonada superior dreta de l'encreuament en diagonal es quedava estancat en aquell punt sense decantar-se si anar cap a la dreta esquerra, acumulant densitat i provocant una divergència a partir d'un cert temps (es pot entendre com un cotxe que xoca contra la bifurcació enlloc de triar un dels dos carrils). Per solucionar-ho vam obligar al flux que s'aproximava en diagonal a la cantonada a anar a la dreta o bé a la esquerra, conformant així el model final per la intersecció.

En el cas de la rotonda, el primer problema sorgia quan a l'arribar als carrils a la zona radial, el flux del costat amb menys angle del carril es movia cap al costat amb angle més gran en direcció tangencial; simultàniament seguia entrant flux pel costat de més angle del carril, provocant que s'acumulés molt de flux en aquest sector i divergís (saturació de cotxes, que podem entendre com una col·lisió). Per solucionar-ho vam forçar que els carrils entressin en forma triangular a la rotonda de manera que cada part del carril deixés anar el seu flux a una altura diferent, però llavors provocàvem que el flux que deixava anar el carril de les VX anés a parar al triangle del carril de les VY, fent de nou que s'acumulés flux i tornés a divergir. La solució final sigué fer que les velocitats no anessin totalment en la direcció tangencial sinó que tinguessin també una petita component radial negativa (cap a l'interior), per evitar que els cotxes s'acumulessin tots a l'interior del carril. Aquesta component radial la podíem aplicar a tota la rotonda o només a la part de la rotonda on els cotxes s'incorporen, mantenint l'altre meitat amb components únicament tangencials depenent de la situació (es pot apreciar el tall en diagonal en eliminar la component radial i les formes triangulars dels carrils en les figures següents).

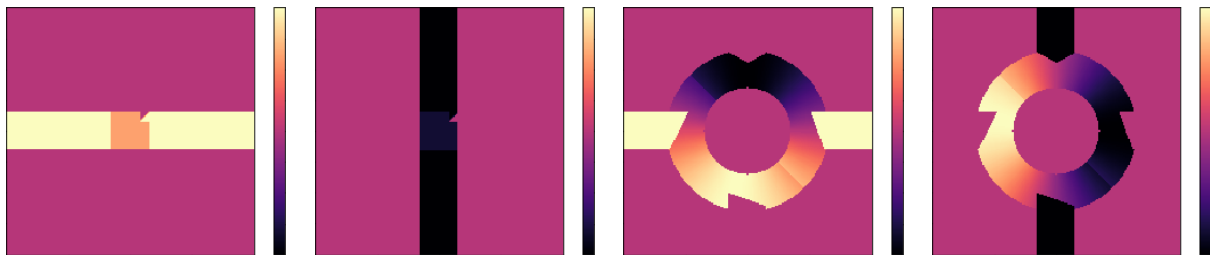


Figura 2.3: \hat{V}_x i \hat{V}_y representant la direcció de les velocitats.

Casos per a diferents condicions

Un cop establerts els dos models, podem estudiar el *flow* de cotxes per a diferents condicions inicials: entrada de densitat constant per ambdós carrils (terme de font), paquets de densitat, i combinacions d'aquests amb o sense trànsit inicial (més proves estan disponibles a les animacions adjuntades¹).

Començarem estudiant el cas de la intersecció, tenint en compte que si tenim fonts de densitat, aquestes no poden superar el valor de 0.5 unitats, doncs si ho fan divergeix en el xoc d'ambdós fronts, ja que en ser una font que emet constantment, no pot endarrerir-se suficientment i s'acumula més densitat de la màxima permesa divergint. Això no succeeix quan enlloc de fonts enviem paquets de cotxes (tot i que si

¹Nomenclatura de les animacions: PX = paquet amb densitat X/10, FX = font amb densitat X/10, IX = trànsit inicial amb densitat X, VF = velocitats amb terme de font, VP = velocitats amb paquets.

els fem molt llargs sí):

A continuació podem observar el xoc amb dues fonts de 0.5 de densitat, els quals interaccionen en l'encreuament i posteriorment surten dos nous fronts de densitat pels carrils de sortida. En aquest cas necessitem que la densitat dels cotxes no sumi 1, doncs si ho fa, al col·lisionar en la part inferior esquerra de la intersecció s'acumula massa densitat sense poder frenar-se perquè darrera porta tota una fila de cotxes i produeix una divergència, el que seria una col·lisió entre dos cotxes. Per aquest cas en concret s'ha calculat la velocitat real mitja a la que circulen els cotxes en la intersecció i és d'uns 7,55 km/h (disponible a les animacions).

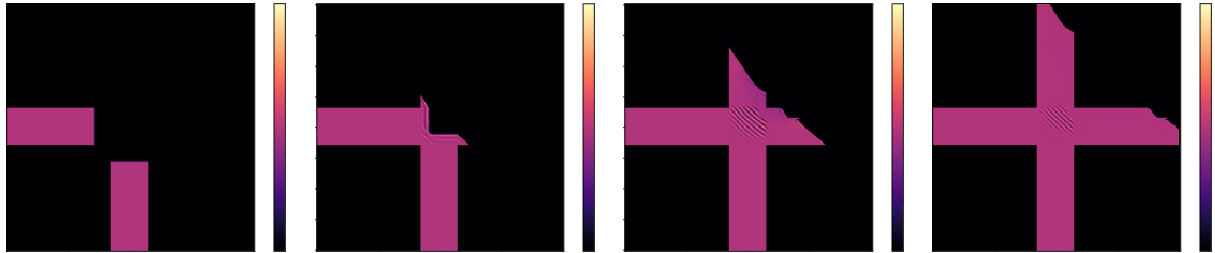


Figura 2.4: Xoc de dos fonts de densitat de 0.5 unitats sense trànsit inicial (on la llegenda va de 0 en negre a l'1 en blanc i així d'ara endavant).

En canvi, en aquest altre cas observem el xoc de dos paquets de cotxes de 0.8 de densitat amb una densitat de trànsit inicial de 0.2 unitats. En el cas dels paquets no divergeix perquè a mesura que avança es va expandint i frenant; i quan arriba al xoc, com no té infinits cotxes darrera pot frenar-se i no divergir:

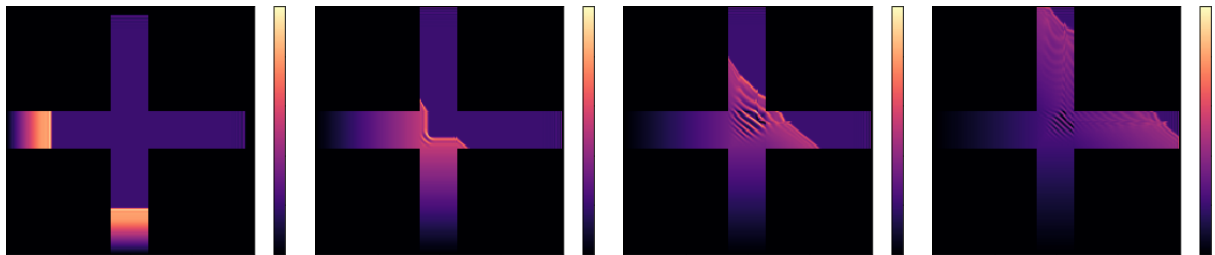


Figura 2.5: Xoc de dos paquets de densitat 0.8 amb terme constant a l'espai de 0.2.

Ara passarem a estudiar la rotonda, on sorgeixen diversos problemes. Si comencem usant-la sense terme radial, tot el *flow* se surt per la primera sortida, i observem que apareix densitat a la part superior, fet que no sabem explicar:



Figura 2.6: Xoc de dos fonts de densitat 0.5 sense trànsit inicial i sense component radial a les velocitats.

Aquesta densitat acaba divergint bastant ràpid a la part superior esquerra (taca blanca). Això com veurem més endavant és degut a que s'origina un corrent negatiu que circula en sentit contrari i que posteriorment es transforma en densitat positiva provocant una divergència, però en aquesta fase de l'estudi ho desconeixem.

Per solucionar aquest error intentem estudiar la rotonda amb components radials a la primera meitat però no a la segona, fent que aquest *flow* negatiu es comporti de manera més suau i repartint-se cap a

dins fent així que no divergeixi tant ràpidament. En solucionar-ho així provoquem un altre error en la part de la rotonda on fem el canvi de tenir component radial a no tenir radial, doncs sembla que poc a poc es va acumulant densitat allà fins que al final divergeix. Per tant, finalment passarem a estudiar una densitat amb component radial en tota la rotonda per no tenir aquest tall:



Figura 2.7: Xoc de dos fonts de densitat 0.5 sense trànsit inicial i amb component radial a les velocitats a tota la rotonda.

Observem que en haver fet aquests canvis aconseguim que la simulació duri més temps, però realment acaba divergint a les vores. Inserint els carrils més o menys a la rotonda, o fent els triangles de les puntes d'aquest carrils més inclinats o menys, fins i tot, variant la component radial; aquest problema no es soluciona. Es pot aconseguir allargar, però al final sempre acaba divergint, fins i tot si eliminem les densitats dels laterals de la rotonda. Una possible solució pot ésser eliminar un cert gruix dels laterals de la rotonda i posar-los a 0 sempre, però fent això perdriem moltíssima densitat, deixant de conservar-se el número total de cotxes, de fet ho hem probat i tenim el problema que en eliminar el *flow* de les voreres exteriors, no deixem casi *flow* per a que surti per els carrils de sortida.

A continuació passem a estudiar un paquet de densitat entrant a la rotonda:



Figura 2.8: Xoc de dos paquets de densitat 0.8 amb terme constant a l'espai de 0.2.

Veiem que tenim el mateix error de les divergències. Després de diversos anàlisis hem posat el rang de densitats de -1 a 1 i hem observat que el que està passant és que es crea un corrent de densitat negativa que va en sentit contrari al normal i que divergeix en trobar-se amb aquest. Es podria fer una analogia amb l'antimatèria: el podem anomenar *antiflow*, el qual en aniquilar-se amb el corrent normal ens fa divergir el mètode. Després de molts intents i variacions ens hem decantat per establir una condició d'acotament de la densitat per a així poder visualitzar com es comportaria el model si no tinguéssim aquesta divergència, obtenint uns resultats molt satisfactoris que ens introdueixen un error considerable però ens permet estudiar el model fins el final del cicle temporal:

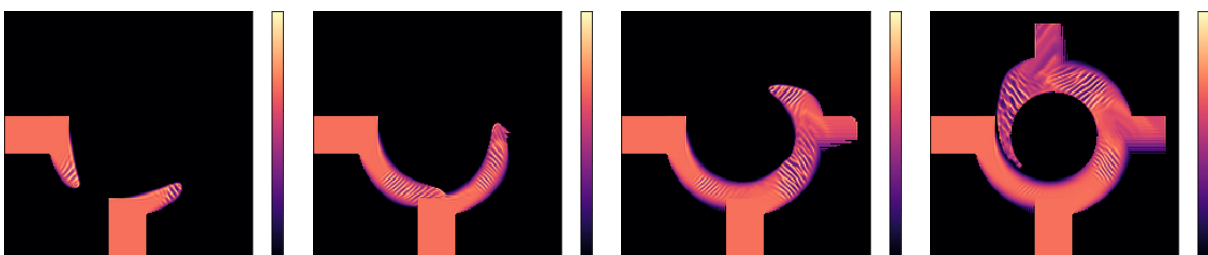


Figura 2.9: Xoc de fonts de densitat 0.7 sense terme constant a l'espai, amb la condició d'acotament aplicada.

Podem apreciar que el corrent de densitat entra a la rotonda, hi circula i també en surt, seguint així el comportament real que era d'esperar (veure més a l'animació, tant pel cas de fonts, com per el cas de paquets).

Per mesurar l'error comès en un mètode tant aproximat com el que hem emprat s'ens acudeixen dues coses: avaluar la quantitat de densitat que desapareix del nostre mapa o avaluar la velocitat a la qual es desplacen les nostres densitats. En el cas de la rotonda veiem que si volem que no divergeixi cal acotar la densitat perdent molt de flux. Això ens diu que és un model bastant dolent. Respecte les velocitats, també en surten unes velocitats de 5 km/h, que també ens fa pensar que el model no és prou bo. En el cas de la intersecció no perdem cap densitat i les velocitats segueixen sent baixes, però són més properes a les esperades, d'uns 8km/h, donant-nos idea que el model és prou bo, tot i que té moltes aproximacions i els girs són mig obligats sense tenir en compte el "lliure albir dels conductors". Però en algun moment algú n'ha tingut d'això? O estem tots marcats per un destí al que ens apropem cada cop mes, el qual ens porta a una mort inevitable?

3 Millora del model

En el mètode numèric podríem intentar entendre aquest *flow* negatiu i evitar-lo d'alguna manera més subtil (no eliminant-lo així bruscament). Podríem fer components radials cap a dins a l'exterior de la rotonda (com ja hem fet) però components radials cap a fora a l'interior de la rotonda, evitant així que els cotxes se surtin. Per últim podríem deduir les equacions numèriques a emprar des de 0 per així poder entendre el model i variar-lo a voluntat comprenent què està passant i el per què, i així poder adaptar-lo a diferents situacions.

En el plantejament del model d'entrada podríem considerar que la mida dels vehicles és més realista, passant a tenir en compte la circulació de camions llargs o tràilers. Anàlogament, es podria tenir en compte la circulació de vehicles de poca llargada. També es podria tenir més d'un carril, considerant com a possibles els canvis de carril i, fins i tot, els canvis de sentit en alguns casos si es permetessin carrils de sentits contraris contigus entre sí o carrils de vies no pavimentades. També es podria millorar el model considerant les hores puntes de tràfic i, fins i tot, es podria considerar l'existència de vies pavimentades amb una plataforma amb voral. En un cas extrem es podrien tenir en compte vies no pavimentades o afectades per condicions climatològiques adverses (arribant al punt de poder haver-hi accidents).

4 Conclusions

Com s'ha anat esmentant al llarg de tota la entrega, molts problemes han anat sorgint a mesura que reproduïem el sistema, i hem anat aplicant "parches" al codi cada cop per tal d'intentar solucionar-los, semblava això el LOL.

Pel que fa a l'encreuament, considerem que el model és bastant bo doncs no perdem ni guanyem densitat per cap lloc que no sigui l'entrada o sortida de la imatge d'estudi i acabem obtenint una velocitat mitjana en tots els casos estudiats molt propera als 10 km/h, un resultat bastant coherent. També esmentar que observem com el flux d'un carril entrant tendeix a anar cap als dos de sortida (no només cap a un), fent una bona aproximació a la vida real, on no tots els cotxes tenen la mateixa direcció.

En referència a la rotonda, aquí el model és totalment ineficient, serveix únicament per mostrar la situació qualitativament, però no s'ha aconseguit simular el trànsit real donada la complexitat a l'hora de definir un mapa vectorial tenint en compte coordenades cartesianes i polars juntament en un mallat quadrat.

Donada la ineficiència de la darrera simulació no podem concloure quin dels dos models és més eficient per el flux de trànsit en un encreuament, simplement hem estudiat com evolucionaven paquets de densitat o un flux continu d'aquesta, en arribar a la intersecció i a la rotonda.