

MÈTODES NUMÈRICS II

PRÀCTICA LLIURE: SIMULACIÓ DE MAREES EN 2D

Resum

Aquesta pràctica pretén estudiar el fenomen natural de les mareas mitjançant un model basat en un sistema de N cossos: els efectes gravitatoris de cada cos fan evolucionar un mar situat sobre un d'ells. Numèricament s'ha solucionat el problema de la trajectòria dels N cossos i s'ha utilitzat l'equació de l'ona esmorteïda i forçada per tractar l'evolució del mar. El mètode numèric utilitzat ha estat el mètode de Runge-Kutta a quart ordre (RK-4). Els resultats d'aquest estudi consten de simulacions d'una sèrie de sistemes d'interès, que permeten jutjar la validesa i utilitat del model.

Queralt Auguets Boixadé - 1563073
Ricard Fayos Bragatti - 1523983
Alba Monreal Maín - 1527385
Ana Pascual Aranda - 1525703

Gener 2022

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Índex

1	Introducció	1
2	Plantejament del problema	1
2.1	Problema dels N cossos	2
2.2	Problema del tractament del mar	2
2.3	Normalització i discretització	2
3	Resultats i discussió	4
4	Conclusions	6
4.1	Observacions de les simulacions	6
4.2	Fonts d'error i discrepàncies del model amb la realitat	6
4.3	Possibles millores del model	6

1 Introducció

S'anomenen mareas als moviments del mar sobre la superfície d'un planeta provocats per la força gravitatòria exercida per altres cossos celestes. En el sistema d'òrbita de la Terra, la Lluna i el Sol, per exemple, s'observen dues mareas diàries en costes amb accés als oceans. La Figura 1.1 (escala no real) és un esquema de les mareas que es produeixen en aquest sistema.

L'objectiu d'aquesta pràctica és crear un model que permeti l'estudi de les mareas generades per un sistema de N cossos sobre un cos M cobert totalment per un mar, en dues dimensions.

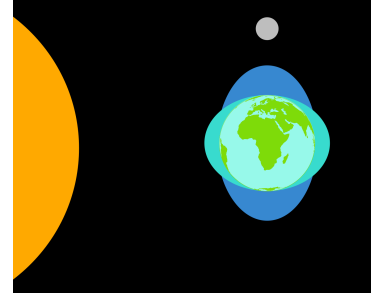


Figura 1.1: Marea lunar i solar. Els el·lipsoïdes deguts al sol i a la lluna tenen l'eix major dirigit cap al sol i cap a la lluna, respectivament.

2 Plantejament del problema

En aquesta experiència es consideren N cossos puntuals en dues dimensions. En un d'ells (M) se situa un mar perfectament pla, per sobre de la circumferència del radi del planeta i que cobreix tota la superfície del cos M . Es negligeixen els efectes de la forma que adquireix el mar sobre el centre de masses del planeta on està situat i s'estima que la massa del mar no provoca cap acceleració destacable en els altres cossos.

En aquesta disposició, qualsevol objecte de massa m en un punt de l'espai \mathbf{r} en el sistema de referència de M (denotat per $\mathbf{r}^{(M)}$) accelerarà juntament amb el cos de massa M (de posició \mathbf{r}_M des d'un sistema de referència inercial), per la qual cosa les seves equacions de Newton són:

$$\mathbf{F}^{(M)} = -\frac{m}{M} \mathbf{F}_M + \mathbf{F} \quad (2.1)$$

on $\mathbf{F}^{(M)}$ és la força que rep el punt $\mathbf{r}^{(M)}$ en el sistema de referència del cos M , \mathbf{F}_M és la força total que rep el cos M i \mathbf{F} és la suma de forces en un sistema de referència inercial, que rep el punt \mathbf{r} . En particular, si $\mathbf{r}^{(M)}$ són els punts de l'espai corresponents al mar que rodeja M , i \mathbf{F} és la força total generada pels satèl·lits en aquests punts, aquest canvi de sistema de referència genera un camp de forces (Figura 2.1). Per tant, el mar accelera internament fins a arribar a l'equilibri mecànic, el que es manifesta en la diferència d'alçada del mar característica del fenomen de les mareas.

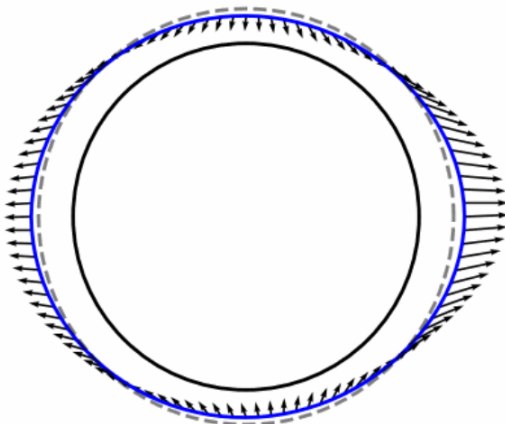


Figura 2.1: Força total (vectors negres) que reben els punts de la superfície del mar (blau), en el sistema de referència del cos M (circumferència negra). En aquest exemple, per a $N=2$, l'únic satèl·lit que genera aquest camp de forces està situat a la dreta de M . En aquest instant, el sistema ha arribat a l'equilibri des d'una alçada inicial uniforme (gris discontinu). S'observa també que la força a l'extrem dret del planeta és més intensa que a l'esquerra, gràcies al comportament proporcional a $1/r^2$ de la gravetat. Per tant, amb més distància al satèl·lit, les mareas sublunars (extrem dret) i antipodals (extrem esquerre) s'igualarien en forma i es reduirien en mida.

Sabent que la força gravitatòria de M que experimenta qualsevol punt de la superfície del mar és sempre en la direcció radial i molt més gran que qualsevol força radial que puguin provocar altres cossos, aquesta experiència se centra en la component tangencial (i no la radial) de la força que exerceixen els $N-1$ cossos sobre el mar, que es denotarà amb F_{\parallel} .

2.1 Problema dels N cossos

Per a poder simular mareas, primerament se soluciona numèricament el problema de l'òrbita dels N cossos puntuals. Cada cos i de massa m_i i posició \mathbf{r}_i compleix

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \equiv \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{k \neq i}^N \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} m_k \quad (2.2)$$

on G és la constant de gravitació universal.

2.2 Problema del tractament del mar

Per a l'estudi de l'evolució del mar sobre la superfície del cos M s'utilitza l'equació d'ona esmorteïda i forçada en una dimensió (2.3) amb condicions de contorn periòdiques, és a dir, es tracta el mar només en la seva superfície al voltant del planeta (polarment en $\theta \in [0, 2\pi]$) com a una ona unidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{(R + h_0)^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} - \kappa \frac{\partial h}{\partial t} + F(h, \mathbf{r}_{i \dots N}) \\ h(0, t) &= h(2\pi, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

on $h(\theta)$ és l'alçada del mar, c la velocitat de propagació d'ones en la superfície del mar i κ és la constant d'esmoreïment de l'ona. R és el radi del cos M , on se situa el mar, i h_0 l'alçada inicial del mar (pla). El terme F representa la força que rep un punt de la superfície del mar a $h(\theta)$ provocada pels diferents cossos i (2.1). S'ha triat aquesta equació perquè permet simular onades i un comportament intuïtiu del moviment del líquid, a més de conservar l'àrea sota la funció (la simulació conservarà tota la quantitat de líquid del mar en tot moment), sense haver de tractar amb mecànica de fluids.

2.3 Normalització i discretització

És convenient normalitzar les equacions per a tractar el problema numèricament. Amb el temps normalitzat com a $\tau = \sqrt{GM/L^3} t$ (essent L una distància arbitrària), la posició del cos i com a $\rho_i = \mathbf{r}_i/L$ i la seva massa normalitzada com a $\mu_i = m_i/M$, l'expressió que s'utilitzarà és:

$$\frac{d^2 \rho_i}{d\tau^2} = - \sum_{k \neq i}^N \frac{\rho_i - \rho_k}{|\rho_i - \rho_k|^2} \mu_k = \tilde{\mathbf{F}}_i \quad (2.4)$$

Normalitzant (2.3) amb aquests mateixos valors s'obté

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} - \gamma \frac{\partial q}{\partial \tau} + \phi \quad (2.5)$$

amb

$$q = \frac{h}{h_0} \quad w = \frac{c}{R + h_0} \quad \gamma = \frac{\kappa}{w} \quad \tau = w t \equiv w \sqrt{L^3/GM} \tau \quad (2.6)$$

i $\phi = (2.8)$. Degut a les escales diferents del problema dels N cossos i de l'equació d'ona, es pren el temps general de la simulació com a τ , i es seleccionen w , γ , L i les velocitats inicials dels μ_i convenientment, el que connecta numèricament els dos règims.

Per a solucionar numèricament el problema dels N cossos i tractar les equacions (2.4) en cada cos i s'ha utilitzat el mètode de Runge-Kutta a quart ordre (RK-4) [1] amb

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \tilde{\mathbf{F}}_i\end{aligned}\quad (2.7)$$

En el model es proposa la següent expressió per a la força normalitzada ϕ , en acord amb la Figura 2.2:

$$\phi = k_q \cdot q \cdot \tilde{F}_{\parallel} \cdot \Delta\theta \quad (2.8)$$

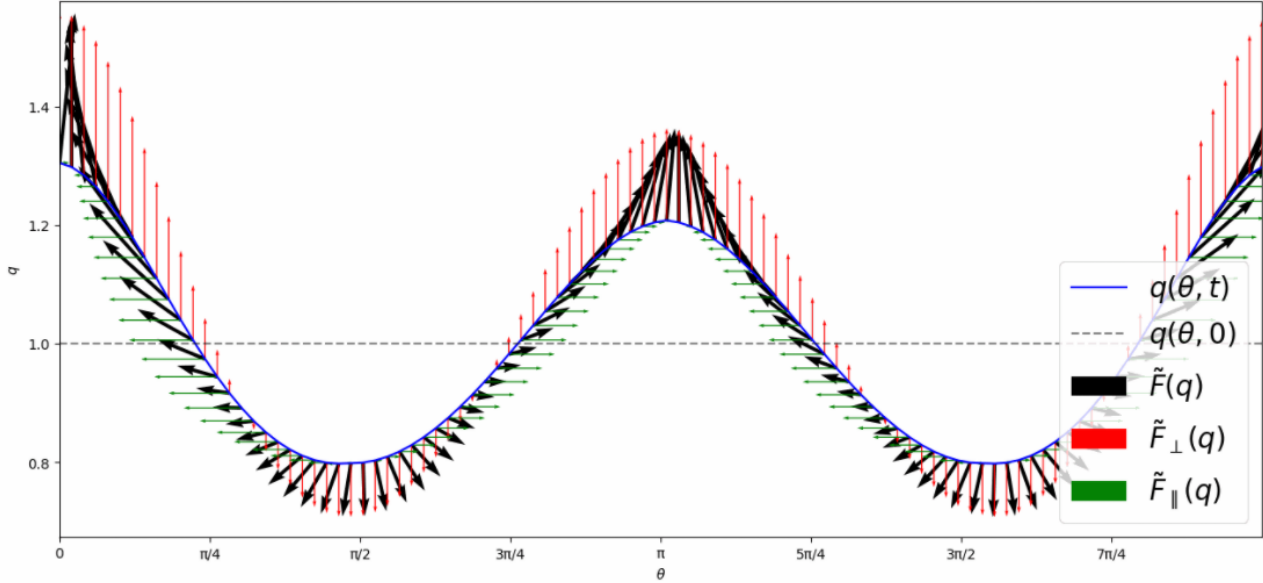


Figura 2.2: Força gravitatòria normalitzada \tilde{F} i la seva descomposició en les direccions radial \tilde{F}_{\perp} i tangencial \tilde{F}_{\parallel} en cada punt de la superfície del mar q (no a escala), que han sigut calculades a partir de (2.1).

Per tractar numèricament l'equació (2.5) s'han discretitzat les segones derivades centralment, i la primera derivada s'ha fet per l'esquerra:

$$\frac{q_i^{j+1} - 2q_i^j + q_i^{j-1}}{\Delta t^2} = \frac{q_{i+1}^j - 2q_i^j + q_{i-1}^j}{\Delta\theta^2} - \gamma \frac{q_i^j - q_i^{j-1}}{\Delta t} \quad (2.9)$$

essent j l'índex temporal i i l'índex en θ . D'aquí s'aïlla el terme q_i^{j+1} per a simular l'evolució lliure de l'ona de manera explícita. A continuació, la columna d'aigua q_i trasbalsa part de la seva alçada segons l'expressió (2.10) a la columna $q_{i\pm 1}$ depenent de la direcció que prengui \tilde{F}_{\parallel} :

$$\begin{aligned}q_{i\pm 1}^{j+1} &\mapsto q_{i\pm 1}^{j+1} + \Delta q_i^j \\ q_i^{j+1} &\mapsto q_i^{j+1} - \Delta q_i^j\end{aligned}\quad (2.10)$$

on l'expressió de Δq_i^j és

$$\Delta q_i^j = \phi \cdot \Delta t^2 = k_q \cdot q \cdot \tilde{F}_{\parallel} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta t^2 \quad (2.11)$$

fruit de la discretització (2.9) i l'expressió de ϕ proposada (2.8), on k_q és una constant.

En conclusió, el model es basa en: primerament obtenir l'evolució dels N cossos a través la seva gravitació amb el mètode RK-4 i, a continuació, simular la formació de mareas. Aquest segon pas es realitza fent evolucionar l'equació d'ones de manera explícita, i després afegint-hi el forçament que provoquen els satèl·lits amb la seva força gravitatòria.

3 Resultats i discussió

A continuació es presenten resultats de la simulació, per a diferents valors normalitzats de γ (constant d'esmoreïment d'ones), de w (velocitat de propagació d'ones) i de k_q (coeficient del qual depèn Δq_i^j) amb **hipervincles** a llurs animacions.

Són de particular interès òrbites estables (o periòdiques) per tal d'estudiar sistemes amb mareas realistes. En la Figura 3.1 s'estudia la formació de mareas d'un sistema Sol-Terra-Lluna. En la Figura 3.2 se superposen tres sistemes diferents en els quals el cos M és orbitat per 1, 2 i 3 satèl·lits de masses i radis d'òrbita iguals, el que és útil si només es vol considerar un planeta i els seus possibles satèl·lits equidistants. Per a un cas on dos satèl·lits de diferent massa ($\frac{1}{10}M, \frac{2}{10}M$) orbiten M a distàncies diferents, s'ha elaborat a la Figura 3.3.

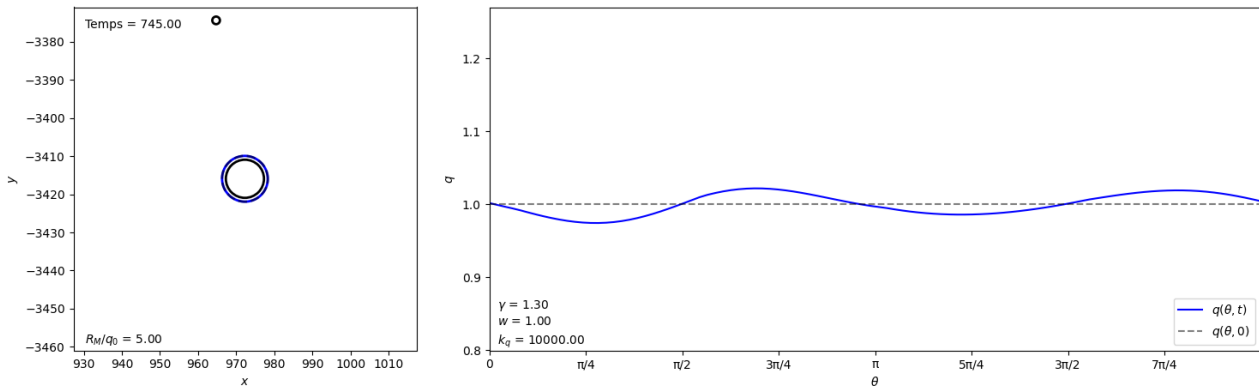


Figura 3.1: **Simulació d'un sistema Sol-Terra-Lluna** (esquerra) des de $\tau = 0$ fins a $\tau = 750$ en unitats normalitzades. S'observa com les pertorbacions sobre la superfície del mar (dreta) segueixen primàriament el satèl·lit, fet que dificulta l'estudi de l'efecte del Sol en la formació de mareas.

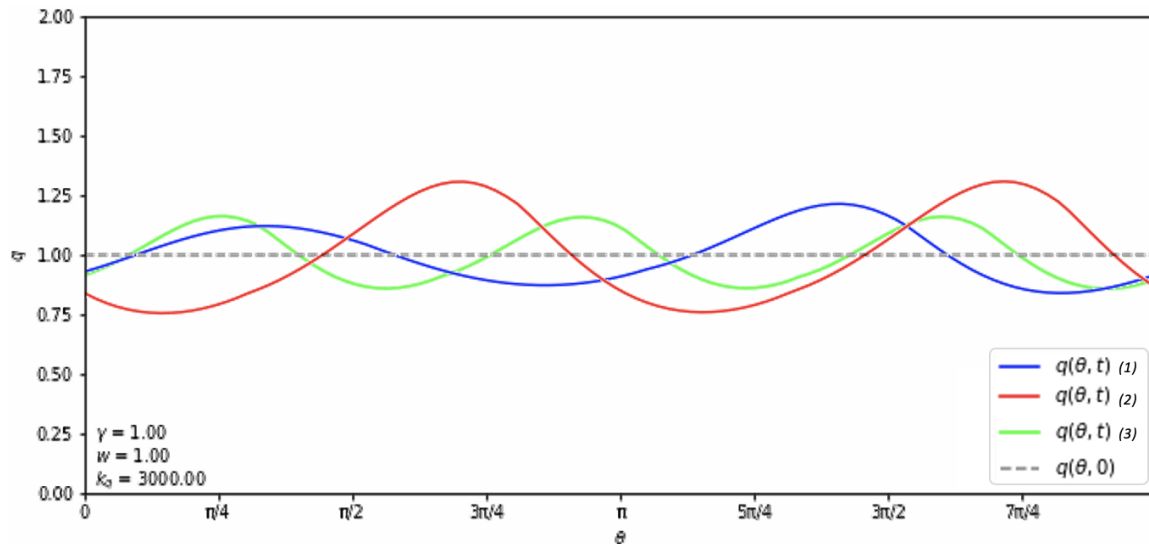


Figura 3.2: Alçades del mar simulades en sistemes amb **1** (blau), **2** (vermell) i **3** (verd) satèl·lits equidistants i d'igual massa, orbitant el cos M . Cada satèl·lit té la mateixa massa i està a la mateixa distància del cos M . S'observa que per a $N-1$ satèl·lits sempre apareixen $N-1$ mareas. Gràcies a la simetria dels sistemes, quan hi ha més d'un satèl·lit, totes les $N-1$ mareas tenen la mateixa forma. En canvi, per a només un satèl·lit, el model aconsegueix simular la diferència de mida de la marea sublunar i antipodal.

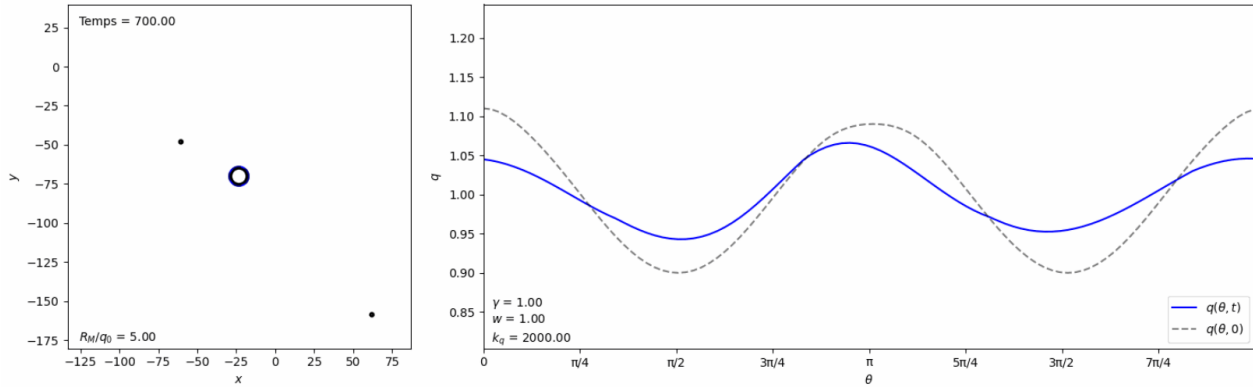


Figura 3.3: **Simulació d'un sistema de dos satèl·lits orbitant entorn M** (esquerra) des de $\tau = 0$ fins a $\tau = 5000$ en unitats normalitzades. La disposició inicial de l'alçada del mar (dreta) s'ha triat *semblant a un sinusoide* per a reduir el temps necessari per arribar a la posició d'equilibri. S'observa com les pertorbacions sobre la superfície del mar són provocades primàriament pel satèl·lit que es troba més proper a M en tot moment, tal com s'observava en la Figura 3.1.

El programa elaborat també permet simular casos extrems: en la Figura 3.4 es representa el cos M orbitant un forat negre (de massa $10^8 M$) en l'intent de recrear la famosa escena de la pel·lícula *Interstellar* (2014). En la Figura 3.5 s'estudia M en òrbita amb un cos igual: un sistema binari.

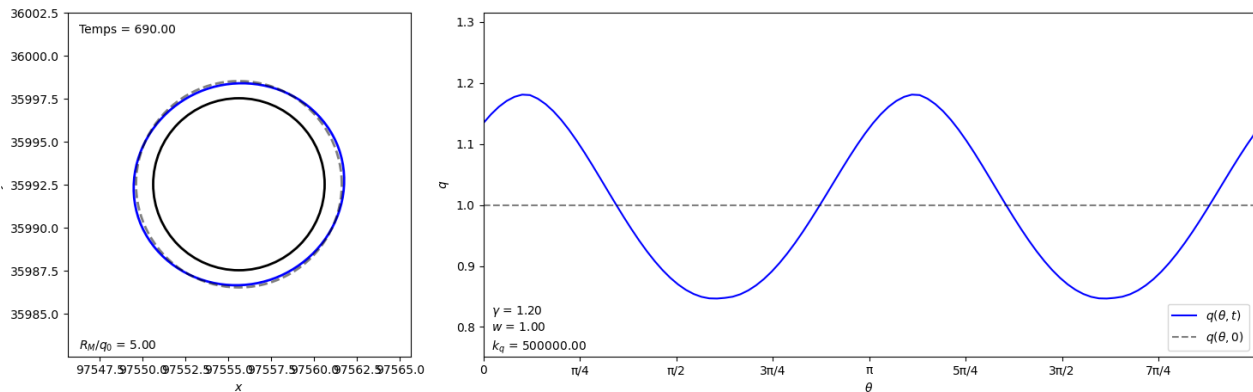


Figura 3.4: **Simulació d'un sistema estil *Interstellar*** (esquerra) des de $\tau = 0$ fins a $\tau = 700$ en unitats normalitzades. S'observa com les pertorbacions sobre la superfície del mar (dreta) arriben ràpidament a l'estat estacionari i giren sincronament amb l'òrbita d' M entorn l'objecte massiu (a l'esquerra de M).

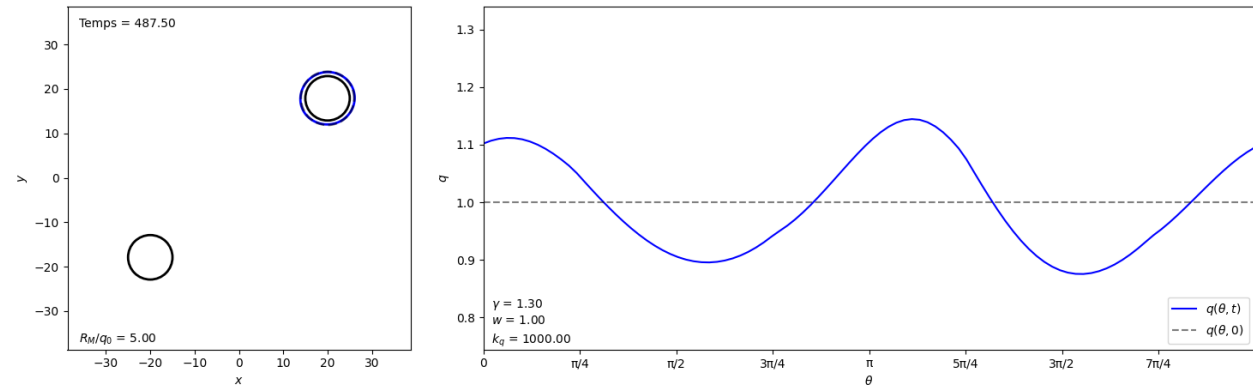


Figura 3.5: **Simulació d'un sistema planetari binari** (esquerra) des de $\tau = 0$ fins a $\tau = 500$ en unitats normalitzades. S'observa com les pertorbacions sobre la superfície del mar (dreta) segueixen sincronament la posició relativa de l'altre planeta amb un petit desfassament.

4 Conclusions

4.1 Observacions de les simulacions

Aquesta simulació té diversos punts d'interès. Primerament, la implementació del mètode de Runge-Kutta a quart ordre permet establir les condicions inicials necessàries per a resoldre el problema dels N cossos gravitatori (posicions i velocitats inicials), i és per això que qualsevol evolució del sistema físicament possible en queda assolida. Respecte de l'evolució de les mareas, el model proposat no necessita dades de les propietats del mar (compressibilitat, densitat, viscositat, etc.), ja que l'acceleració gravitatòria depèn només de la massa del cos que la provoqui, i això queda recollit en l'expressió de la força utilitzada (2.8). El model també permet arribar a un estat estacionari, on les pertorbacions en el mar que generen els camps gravitatoris dels N cossos segueixen certs patrons, gràcies a les diferents constants que governen l'equació tractada (2.3). Es confirma que les dues mareas (sublunar i antipodal) s'assimilen en mida com més lluny orbiti el satèl·lit que les provoca, i que el satèl·lit més proper és el que determinarà en major mesura la forma que adoptarà el mar (vist en les Figures 3.1 i 3.3), amb més prioritat que no pas la massa que tingui cada cos involucrat, tal com s'espera.

No obstant, el model divergeix sempre que $\phi \cdot \Delta\tau^2$ és major que la restitució natural de l'equació d'ona esmorteïda sense forçament. Això pot ser degut a un valor de k_q massa alt, un aproximament massa tancat en la trajectòria dels N cossos o una mala discretització de $\Delta\tau$ i $\Delta\theta$. Tot i això, les equacions conservaran la quantitat total de mar (àrea sota la corba de la funció d'ona) en tot moment.

4.2 Fonts d'error i discrepàncies del model amb la realitat

El model utilitzat presenta diverses fonts d'error fruit de les aproximacions i mètodes utilitzats.

Model: El fet de treballar amb un model aproximat genera discrepàncies amb la realitat. Al llarg de tota la pràctica s'ha considerat el model clàssic (2.2) per descriure el moviment dels N cossos. S'han negligit els possibles efectes relativistes en les equacions que descriuen el moviment orbital dels planetes i satèl·lits. També s'ha omès la rotació del cos M sobre si mateix i els efectes d'aquest moviment sobre l'evolució de les mareas. Per a la simulació de la marea en sí, s'ha utilitzat l'equació d'ona (2.3), tractant només els punts de la superfície del mar per a representar tota la columna associada a cada angle. Això no té en compte la dinàmica dels fluids en existir corrents sota la superfície de l'aigua, que són part important de la formació de mareas, i porta implícita l'assumpció que les oscil·lacions patides pel mar són petites i, per tant, ben comportades matemàticament.

Errors de truncament i arrodoniment: A més del propi error causat pel càlcul numèric, s'ha pogut detectar que el mètode Runge-Kutta provoca una certa dispersió respecte a les trajectòries esperades a l'hora de calcular les òrbites dels cossos. A causa de les expressions utilitzades per calcular les derivades s'hi afegeix un cert error de truncament, ja que s'ha aproximat el límit de la derivada a una expressió discreta. El fet que s'hagi discretitzat l'angle polar θ per realitzar els càlculs també indueix un cert error: concretament, facilita la divergència numèrica de l'equació d'ona. També degut a l'ús de constants, com és el cas de la constant de gravitació universal i els valors emprats en les magnituds característiques, sorgeix un cert error d'arrodoniment.

4.3 Possibles millores del model

Mantenint el tractament del mar com a equació d'ona, un punt clau de millora del model podria ser l'expressió de la força ϕ (2.8) que genera les mareas, que no té per què estar relacionada linealment per una constant de proporcionalitat k_q amb la component angular de la força rebuda pel mar $\tilde{F}_{||}$. Una expressió que sigui una funció més exòtica d'aquesta força rebuda podria ser desenvolupada e.g. per simular exactament l'evolució de les mareas de la terra en presència del Sol i la Lluna o e.g. trobar una connexió experimental entre l'equació d'ona en 1D i la mecànica de fluids en 2D.

Referències

- [1] Navau, C. (2021). Mètodes Numèrics II (Física, UAB). 56-57.