BLOC III
DINÀMICA DELS ELECTRONS DE BLOCH
CLASSIFICACIÓ DE SÒLIDS

3.1. El mínim de la banda de conducció d'un semiconductor es troba a $\vec{k} = \vec{0}$ i es caracteritza per un tensor de massa efectiva inversa de la forma:

$$\left(\frac{1}{m^*}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ 0 & \alpha_{yz} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}$$

a) Determineu la forma de la banda a l'entorn de $\vec{k} = \vec{0}$, tot aproximant l'energia fins a segon ordre.

b) Si sotmetem el semiconductor a un camp elèctric $\vec{E}_e$, en quina o quines direccions d'$\vec{E}_e$ l'acceleració serà paral·lela a aquest camp si $\alpha_{xx} \neq \alpha_{yy} = \alpha_{zz}$.

Per trobar la forma de la banda, recordem com es definia la massa efectiva per un electró en una banda d'energia genèrica ε(k). Si desenvolupem en sèrie de Taylor fins a 2on ordre al voltant d'un valor de k_0 en el qual hi ha un mínim:

$$\varepsilon\left(k_x, k_y, k_z\right) = \varepsilon(\vec{k}_0) + \sum_i \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i}\right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \left(k_i - k_{0i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j}\right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \left(k_i - k_{0i}\right)\left(k_j - k_{0j}\right)$$

on el 2on terme s'anul·la en ser un mínim (al nostre cas $k_0 = 0$). La massa efectiva està relacionada amb el factor que apareix al 3er terme:

$$\left(\frac{1}{m^\star}\right)_{ij} = \alpha_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j}$$

$$\left(\frac{1}{m^*}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ 0 & \alpha_{yz} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}$$

Així doncs, si l'energia en el mínim és ε_0:

$$\boxed{\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2}\left(\alpha_{xx} k_x^2 + \alpha_{yy} k_y^2 + \alpha_{zz} k_z^2 + 2\alpha_{yz} k_y k_z\right)}$$

b) Si sotmetem el semiconductor a un camp elèctric $\vec{E}_e$, en quina o quines direccions d'$\vec{E}_e$ l'acceleració serà paral·lela a aquest camp si $\alpha_{xx} \neq \alpha_{yy} = \alpha_{zz}$.

Recordem que quan només actua un camp elèctric, la força que experimenten els e⁻ és $\vec{F} = -e\vec{E}$

La seva acceleració ve donada per la llei de Newton que podem escriure matricialment: $\vec{a} = -\alpha_{ij}\vec{E}$

$$\vec{a} = \left[\frac{1}{m^\star}\right]\vec{F}$$

Si volem que a sigui paral·lela a F: $\vec{a} = \lambda\vec{F} \Rightarrow \left[\frac{1}{m^\star}\right]\vec{F} = \lambda\vec{F} \Rightarrow \left[\frac{1}{m^\star} - \lambda\mathbb{1}\right]\vec{F} = \vec{0}$

Matriu

Equació de valors propis

Sistema homogeni → determinant =0

Valors propis (simplifiquem la notació de les α's):

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & \gamma \\ 0 & \gamma & \beta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\alpha-\lambda)\left[(\beta-\lambda)^2-\gamma^2\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = \beta+\gamma \\ \lambda_3 = \beta-\gamma \end{cases}$$

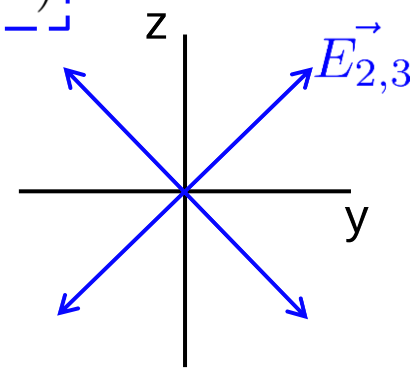
b) Si sotmetem el semiconductor a un camp elèctric $\vec{E}_e$, en quina o quines direccions d'$\vec{E}_e$ l'acceleració serà parallela a aquest camp si $\alpha_{xx} \neq \alpha_{yy} = \alpha_{zz}$.

Vector propi 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma \\ 0 & \gamma & \beta-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall E_x \\ (\beta-\alpha)E_y = \gamma E_z \\ \gamma E_y = (\beta-\alpha)E_z \end{cases} \Rightarrow E_y = E_z = 0 \qquad \boxed{\vec{E}_1 = (E,0,0)}$$

Vectors propis 2,3:

$$\begin{pmatrix} \alpha-\beta\pm\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \pm\gamma & \gamma \\ 0 & \gamma & \pm\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \pm E_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{2,3} = (0,\pm E,\pm E)}$$



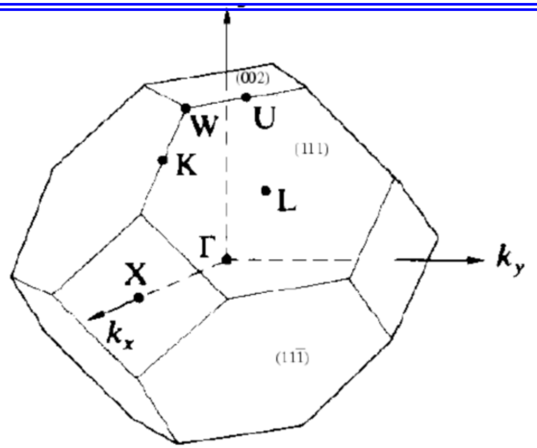
3.2. L'energia d'una banda s d'un determinat sòlid d'estructura cristal·lina fcc, de constant a i base monoatòmica, es pot aproximar mitjançant un model d'electrons fortament lligats amb interaccions a primers veïns.

a) Trobeu l'expressió general de l'energia per a aquesta banda, en funció dels paràmetres del model.

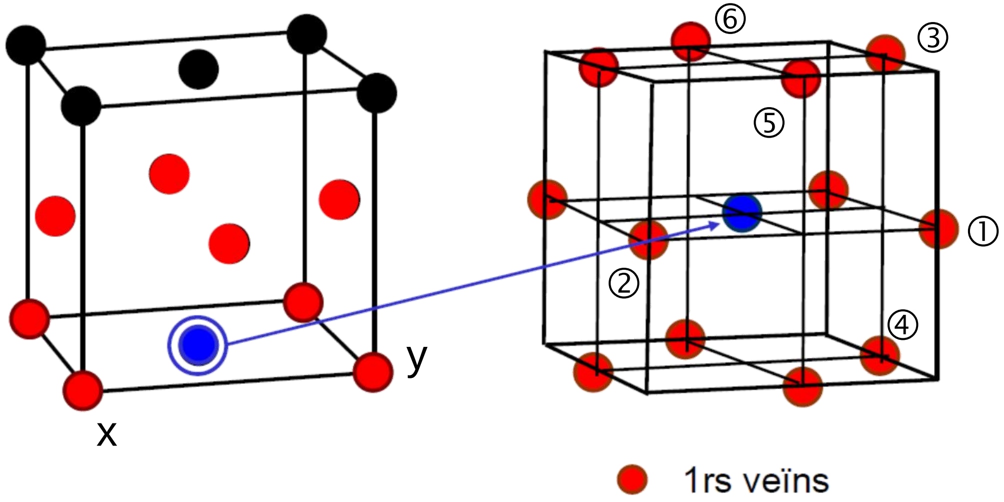
b) Doneu una aproximació vàlida de l'energia per a punts de la zona de Brillouin propers al punt $\mathrm{W} = (2\pi/a)(1/2, 0, 1)$ (vegeu la figura 2 a la pàgina 5), amb $\vec{k} = \vec{k}_\mathrm{W} + \vec{\delta}$.

c) Determineu l'expressió del tensor de massa efectiva inversa en aquest punt.

d) Si sotmetem el sòlid a un camp magnètic $\vec{B} = B\hat{x}$ trobeu la freqüència característica i la trajectòria en l'espai recíproc corresponent a un electró inicialment a $\vec{k}_0 = \vec{k}_\mathrm{W} - \delta_0\hat{z}$.



➢ Problema 3.2, apartat a)



Recordem on se situaven els 12 1ers veïns en una xarxa fcc (transp. 48, unitat 2). Les seves posicions són:

$$\vec{\rho}_1 = \frac{a}{2}(\hat{x}+\hat{y}) = -\vec{\rho}_7 \qquad \vec{\rho}_2 = \frac{a}{2}(\hat{x}-\hat{y}) = -\vec{\rho}_8$$
$$\vec{\rho}_3 = \frac{a}{2}(\hat{y}+\hat{z}) = -\vec{\rho}_9 \qquad \vec{\rho}_4 = \frac{a}{2}(\hat{y}-\hat{z}) = -\vec{\rho}_{10}$$
$$\vec{\rho}_5 = \frac{a}{2}(\hat{z}+\hat{x}) = -\vec{\rho}_{11} \qquad \vec{\rho}_6 = \frac{a}{2}(\hat{z}-\hat{x}) = -\vec{\rho}_{12}$$

En l'aproximació d'e- fortament lligats, vam veure que l'energia de la banda s es podia escriure com (prob. 2.8, cap. 5.5 transp. 51):

$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - \sum_n \gamma_n \exp\left(-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_n\right)$$

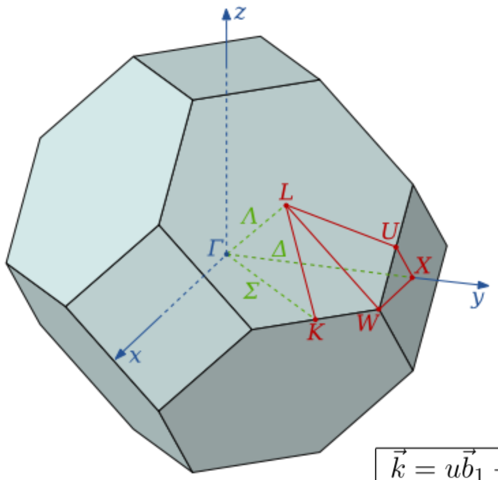
$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - \gamma\big(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_1} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_2} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_3} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_4} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_5} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_6}$$
$$+ e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_2} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_3} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_4} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_5} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_6}\big)$$

$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma\left(\cos(\vec{k}\cdot\vec{\rho}_1) + \cos(\vec{k}\cdot\vec{\rho}_2) + \cos(\vec{k}\cdot\vec{\rho}_3) + \cos(\vec{k}\cdot\vec{\rho}_4) + \cos(\vec{k}\cdot\vec{\rho}_5) + \cos(\vec{k}\cdot\vec{\rho}_6)\right)$$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) =$
$2\cos\alpha\cos\beta$
$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$

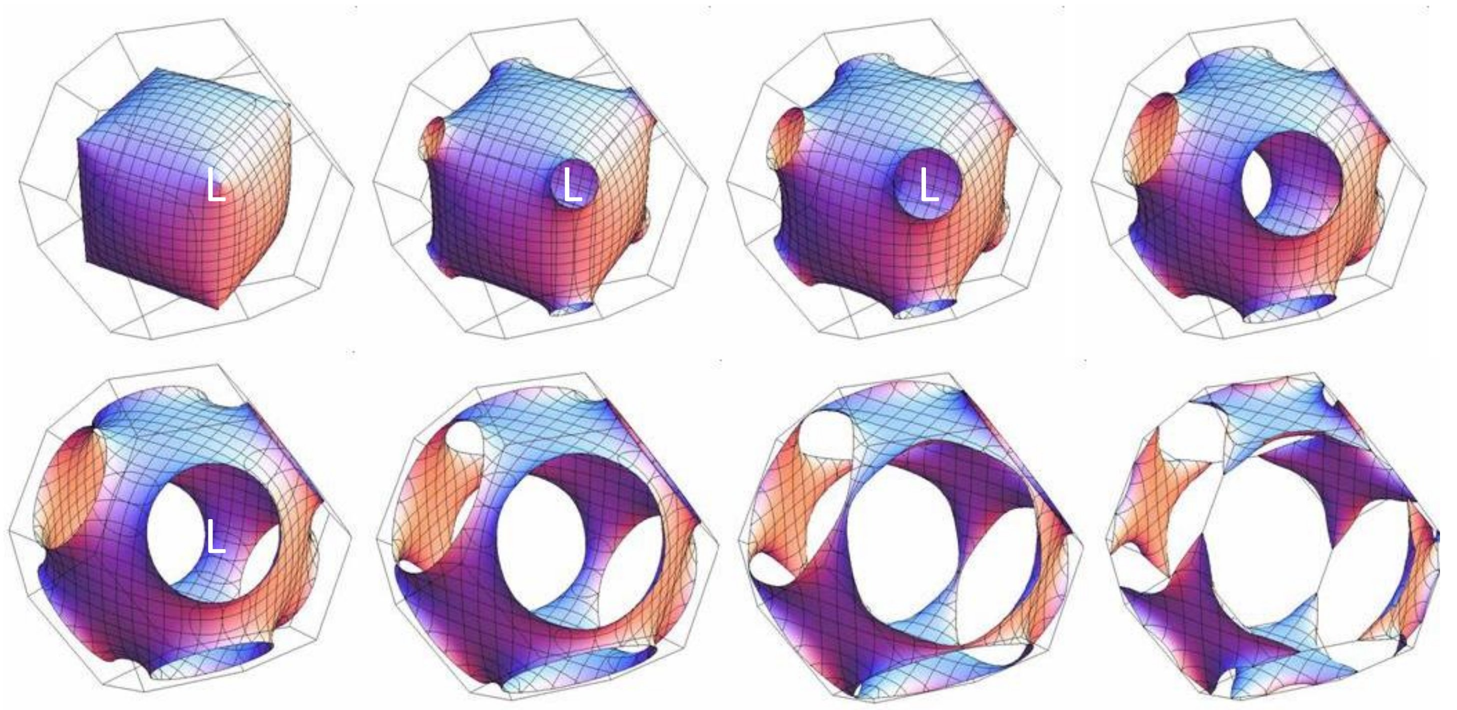
$$\boxed{\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - 4\gamma\left\{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\right\}}$$

➢ Problema 3.2, addicional



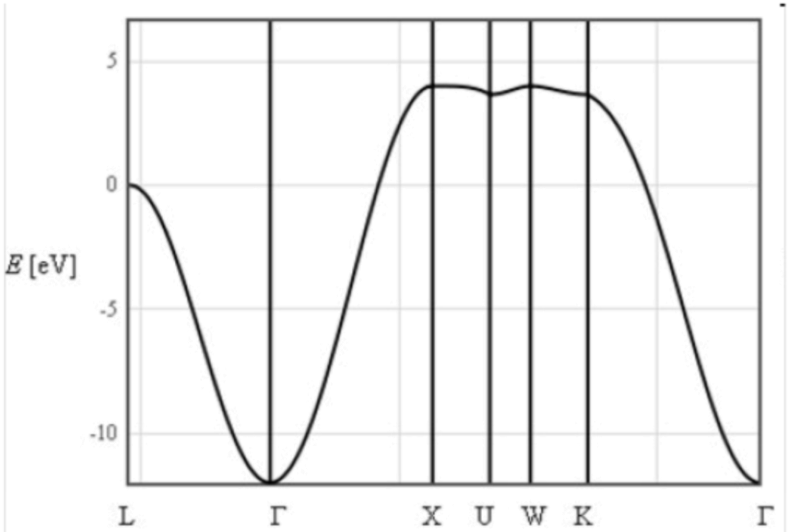
$$\boxed{\varepsilon(\vec{k}) = 1 - 4t\left\{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\right\}}$$

Fermi Surface for different values of ε_F



Symmetry points

$\vec{k} = u\vec{b}_1 + v\vec{b}_2 + w\vec{b}_3\ (u,v,w)$	$[k_x, k_y, k_z]$
$\Gamma : (0,0,0)$	$[0;0,0]$
$\mathrm{X} : (0,1/2,1/2)$	$[0;2\pi/a,0]$
$\mathrm{L} : (1/2,1/2,1/2)$	$[\pi/a,\pi/a,\pi/a]$
$\mathrm{W} : (1/4,3/4,1/2)$	$[\pi/a,2\pi/a,0]$
$U : (1/4,5/8,5/8)$	$[\pi/2a,2\pi/a,\pi/2a]$
$\mathrm{K} : (3/8,3/4,3/8)$	$[3\pi/2a,3\pi/2a,0]$



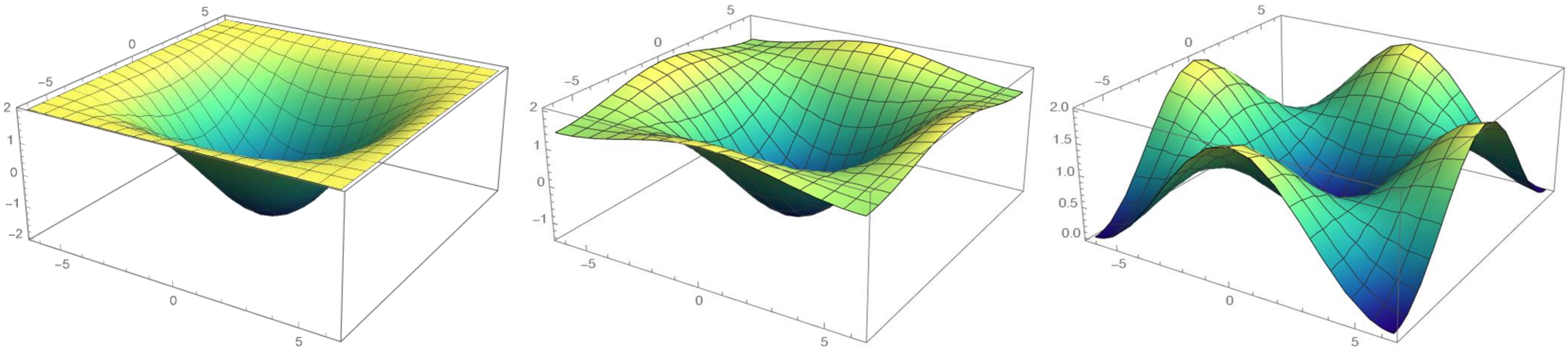
$$\overline{\Gamma\mathrm{L}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{a}\ (+proper,\ hex.),\ \overline{\Gamma\mathrm{X}} = \frac{2\pi}{a}\ (quad.),\ \overline{\Gamma\mathrm{W}} = \frac{\sqrt{5}\pi}{a}\ (+lluny,\ vx.)$$

$$\overline{\Gamma\mathrm{K}} = \overline{\Gamma\mathrm{U}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}a},\ \overline{KW} = \overline{XU} = \frac{\pi}{\sqrt{2}a}$$

$$\varepsilon(\vec{k}) = 1 - 4t\left\{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\right\}$$

See Mathematica Notebook @CV…
Ara ho podeu representar posant la funció al buscador de Google.

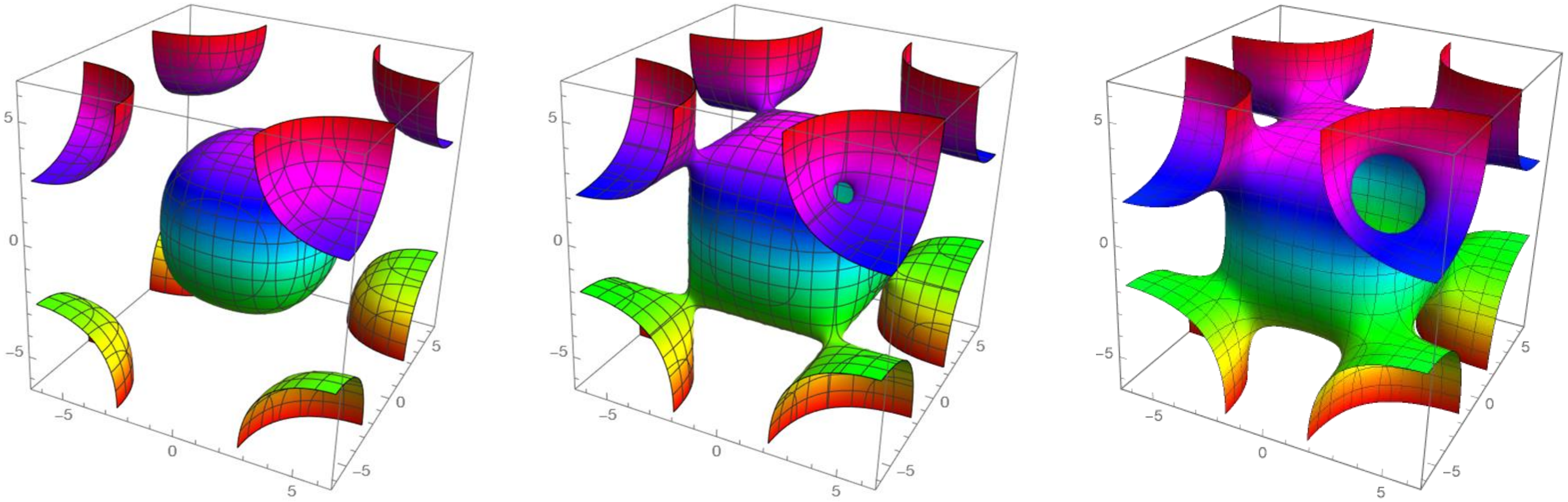
k_z=0, π/2a, π/a



➢ Problema 3.2, addicional

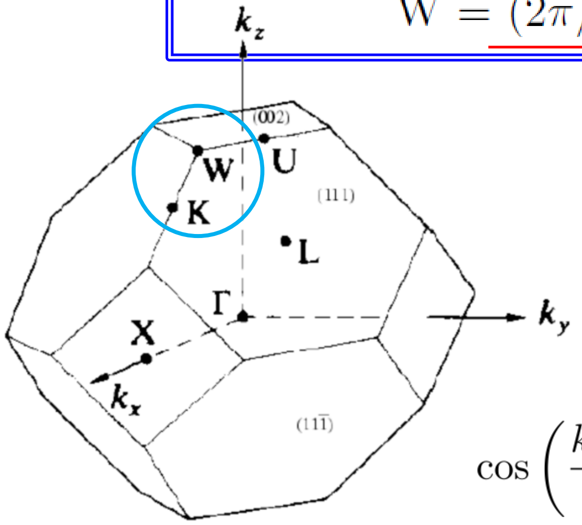
$$\varepsilon(\vec{k}) = 1 - 4t\left\{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\right\}$$

Fermi Surface for t=0.25, ε_F= 0, 1.01, 1.25 in a region k_i=-2π/a, +2π/a



See Mathematica Notebook @CV

b) Doneu una aproximació vàlida de l'energia per a punts de la zona de Brillouin propers al punt W $= (2\pi/a)(1/2, 0, 1)$ (vegeu la figura 2 a la pàgina 5), amb $\vec{k} = \vec{k}_W + \vec{\delta}$.



El que hem de fer ara és particularitzar l'expressió anterior per una k amb components

$$\vec{k} = \left(\frac{\pi}{a} + \delta_x, \delta_y, \frac{2\pi}{a} + \delta_z\right)$$

i expandir els cosinus per δ_i petit:

$$\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\delta_x a}{2}\right) \approx -\frac{\delta_x a}{2}, \quad \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y a}{2}\right)^2, \quad \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\delta_z a}{2}\right) \approx -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_z a}{2}\right)^2$$

$$\varepsilon(\vec{k}) = \mathcal{E}_0 - \alpha - 4\gamma\left(\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)\right)$$

Substituïnt i menyspreant termes d'ordre superior a 2:

$$\boxed{\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_W - \frac{\gamma a^2}{2}(\delta_y^2 + \delta_z^2)}$$

c) Determineu l'expressió del tensor de massa efectiva inversa en aquest punt.

Partint de l'expressió anterior i de la definició de massa efectiva:

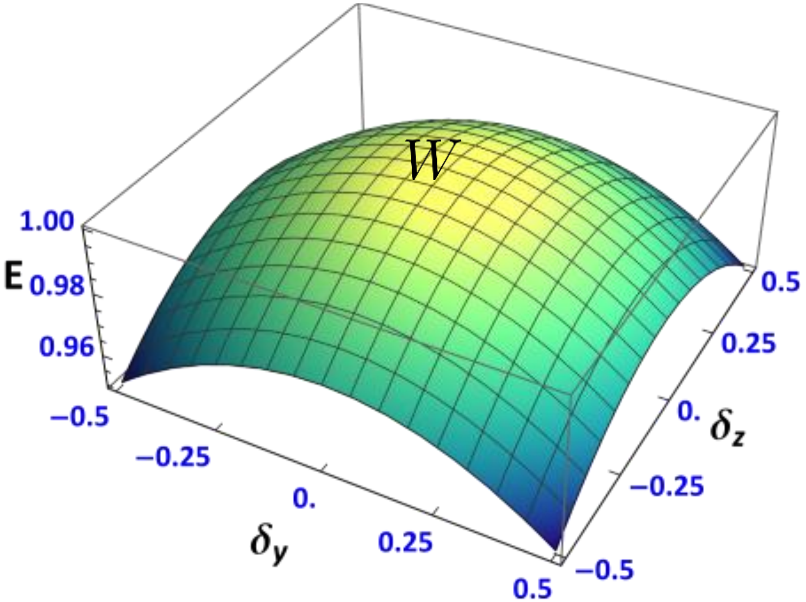
$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_W - \frac{\gamma a^2}{2}(\delta_y^2 + \delta_z^2)$$

$$\left(\frac{1}{m^\star}\right)_{ij} = \alpha_{ij} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j}$$

veiem que les components no nul·les seran:

$$\left(\frac{1}{m^\star}\right)_{yy} = -\frac{\gamma a^2}{\hbar^2}$$

$$\left(\frac{1}{m^\star}\right)_{zz} = -\frac{\gamma a^2}{\hbar^2}$$



$$\frac{1}{m^*} = -\frac{\gamma a^2}{\hbar^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Si sotmetem el sòlid a un camp magnètic $\vec{B} = B\hat{x}$ trobeu la freqüència característica i la trajectòria en l'espai recíproc corresponent a un electró inicialment a $\vec{k}_0 = \vec{k}_W - \delta_0\hat{z}$.

1) La força que actua sobre l'e⁻ és $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ on la velocitat ve donada en termes de l'energia de la banda

$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_W - \frac{\gamma a^2}{2}(\delta_y^2 + \delta_z^2)$$

$$\vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_{\vec{k}}\varepsilon(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_{\vec{\delta}}\varepsilon(\vec{k}) = -\frac{\gamma a^2}{\hbar}(0, \delta_y, \delta_z)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{e\gamma a^2 B}{\hbar}(0, \delta_z, -\delta_y)}$$

2) La trajectòria de l'e⁻ ve donada per l'equació del moviment:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} = \omega_c(0, \delta_z, -\delta_y)$$

$$\boxed{\omega_c \equiv \frac{e\gamma a^2 B}{\hbar^2}}$$

En components tenim:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\delta}_x = 0 \longrightarrow \delta_x(t) = A \\ \dot{\delta}_y = \omega_c\delta_z \\ \dot{\delta}_z = -\omega_c\delta_y \end{array}\right.$$

$$\ddot{\delta}_y = \omega_c\dot{\delta}_z = -\omega_c^2\delta_y$$

Freqüència ciclotró

$$\boxed{\omega_c \equiv \frac{eB}{m^\star}}$$

Solucionem les equacions:

$$\ddot{\delta}_y = -\omega_c^2 \delta_y \Longrightarrow \begin{cases} \delta_x(t) = A \\ \delta_y(t) = B_y \sin(\omega_c t) + \cancel{C_y} \cos(\omega_c t) \\ \delta_z(t) = \cancel{B_z \sin}(\omega_c t) + C_z \cos(\omega_c t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \delta_y(0) = C_y = 0 \\ \delta_z(0) = C_z = -\delta_0 \end{cases}$$

MHS

Condicions inicials: $\vec{k}(0) = \vec{k}_W - \delta_0 \hat{z} \Rightarrow \vec{\delta}(0) = (0, 0, -\delta_0)$

Condicions inicials:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_y(0) = \omega_c \delta_z(0) = -\omega_c \delta_0 = \omega_c B_y \\ \dot{\delta}_z(0) = -\omega_c \delta_y(0) = 0 = \omega_c B_z \end{cases} \quad \begin{cases} B_y = -\delta_0 \\ B_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta_x(t) = 0 \\ \delta_y(t) = -\delta_0 \sin(\omega_c t) \\ \delta_z(t) = -\delta_0 \cos(\omega_c t) \end{cases}$$

$$\vec{k} = \left(\frac{\pi}{a} + \delta_x, \delta_y, \frac{2\pi}{a} + \delta_z \right)$$

$$\boxed{\begin{cases} k_x(t) = \frac{\pi}{a} \\ k_y(t) = -\delta_0 \sin(\omega_c t) \\ k_z(t) = \frac{2\pi}{a} - \delta_0 \cos(\omega_c t) \end{cases}}$$

Moviment circular al pla yz (perp. a B) de radi δ_0 i centrat a k_W

3.3. Un electró d'un sòlid es troba en una banda de la forma

$$E(\vec{k}) = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \frac{k_\alpha^2}{f_\alpha}$$

amb E_0, $f_x > f_y > f_z$ constants positives.

a) Si s'aplica un camp magnètic constant i uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ i l'estat inicial de l'electró és $\vec{k} = (0, k_0, 0)$:
   i) Trobeu les equacions del moviment de l'electró en l'espai recíproc.
   ii) Determineu-ne la freqüència característica ω_z.

b) Generalitzeu els resultats anteriors per a $\vec{B}$ en la direcció de qualsevol dels altres dos eixos, $\alpha = x, y$.

c) Determineu els valors dels f_α si les mesures de les freqüències característiques són

$$\omega_x = 0'98\omega_0, \quad w_y = 0'92\omega_0, \quad w_z = 0'85\omega_0,$$

on ω_0 és la freqüència ciclotró, $\omega_0 \equiv eB/m_e$.

$$E(\vec{k}) = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \frac{k_\alpha^2}{f_\alpha}$$

amb E_0, $f_x > f_y > f_z$ constants positives.

a) Si s'aplica un camp magnètic constant i uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ i l'estat inicial de l'electró és $\vec{k} = (0, k_0, 0)$:

i) Trobeu les equacions del moviment de l'electró en l'espai recíproc.

ii) Determineu-ne la freqüència característica ω_z.

1) La força que actua sobre l'e⁻ és $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ amb $\vec{B} = (0, 0, B)$

on la velocitat ve donada en termes de l'energia de la banda $\vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{k_x}{f_x}, \frac{k_y}{f_y}, \frac{k_z}{f_z} \right)$

$$\vec{F} = \frac{e\hbar B}{m} \left(-\frac{k_y}{f_y}, \frac{k_x}{f_x}, 0 \right)$$

Ara substituïm F a l'equació del moviment:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\hbar}$$

i obtenim ...

$$\boxed{\begin{cases} \dot{k}_x(t) = -\frac{eB}{mf_y} k_y(t) \\ \dot{k}_y(t) = \frac{eB}{mf_x} k_x(t) \\ \dot{k}_z(t) = 0 \end{cases}}$$

2) Per resoldre el sistema d'equacions diferencials acoblades, derivem la 1ª i hi inserim la 2ª

$$\boxed{\begin{cases} \dot{k}_x(t) = -\dfrac{eB}{mf_y}k_y(t) \\ \dot{k}_y(t) = \dfrac{eB}{mf_x}k_x(t) \\ \dot{k}_z(t) = 0 \end{cases}}$$

$$\ddot{k}_x = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 \frac{1}{f_x f_y} k_x = -\frac{\omega_0^2}{f_x f_y} k_x$$

$$\omega_0 \equiv \frac{eB}{m}$$

Veiem que la solució k_x és una funció harmònica de freqüència:

$$\boxed{\omega_z = \frac{\omega_0}{\sqrt{f_x f_y}}}$$

b) Generalitzeu els resultats anteriors per a $\vec{B}$ en la direcció de qualsevol dels altres dos eixos, $\alpha = x, y$.

Mirarem d'intuir el que passa per arguments de simetria. Si observem el cas anterior...

$$\vec{B} = (0,0,B) \qquad \vec{F} = \frac{e\hbar B}{m}\left(-\frac{k_y}{f_y}, \frac{k_x}{f_x}, 0\right) \qquad \begin{cases} \dot{k}_x(t) = -\frac{eB}{mf_y}k_y(t) \\ \dot{k}_y(t) = \frac{eB}{mf_x}k_x(t) \\ \dot{k}_z(t) = 0 \end{cases}$$

Veiem que si B és en la direcció x, la força tindrà components en y,z amb índexs z,y a les components...

... per tant, les eq. mov. seran les mateixes però fent els canvis x ↔ y, y ↔ z, z↔x.

$$\boxed{\omega_x = \frac{\omega_0}{\sqrt{f_y f_z}}}$$

I de manera semblant si B és en la direcció y:

$$\boxed{\omega_y = \frac{\omega_0}{\sqrt{f_x f_z}}}$$

c) Determineu els valors dels f_α si les mesures de les freqüències característiques són

$$\omega_x = 0'98\omega_0, \quad w_y = 0'92\omega_0, \quad w_z = 0'85\omega_0,$$

on ω_0 és la freqüència ciclotró, $\omega_0 \equiv eB/m_e$.

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\omega_0}{\sqrt{f_y f_z}} \\ \omega_y &= \frac{\omega_0}{\sqrt{f_x f_z}} \end{aligned}\right\} \quad \omega_x \sqrt{f_y} = \omega_y \sqrt{f_x}$$

$$\omega_z = \frac{\omega_0}{\sqrt{f_x f_y}} \longrightarrow \sqrt{f_y} = \frac{\omega_0}{\sqrt{f_x}\,\omega_z}$$

$$\boxed{f_x = \frac{\omega_x \omega_0}{\omega_y \omega_z} \simeq 1.253}$$

$$\boxed{f_y = \left(\frac{\omega_y}{\omega_x}\right)^2 f_x \simeq 1.104}$$

$$\boxed{f_z = \left(\frac{\omega_0}{\omega_x}\right)^2 / f_y \simeq 0.943}$$