UNIVERSIDAD ADVENTISTA DEL PLATA

Facultad de Ciencias Económicas y de la Administración

Ingeniería en Sistemas de la Información

Cálculo Numérico

Unidad 2

Profesor: *Rafael Vargas*

Año: 2021

Cálculo Numérico - Contenidos

Unidad 2: Resolución de ecuaciones

Introducción. Métodos numéricos cerrados y abiertos. **Método de bisección**. Método de la falsa posición. **Método de Newton. Método de la secante**. Otros métodos. Comparación entre métodos. Análisis de performance. Criterios de selección. Aplicaciones.

Introducción

Al modelizar una situación a partir de una función f, suele resultar significativo encontrar el o los valores de la variable independiente para los cuales la función se anula. Dichos valores se denominan ceros de una función y gráficamente corresponden al valor de las abscisas de los puntos en los cuales la gráfica de la función interseca al eje de abscisas.

Analíticamente, para hallar los ceros de una función, debemos calcular las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Si f es una función lineal o cuadrática resulta sencillo determinar el o los ceros de f (si es que existen), ya que se cuenta con fórmulas conocidas para encontrar las soluciones reales y exactas de la ecuación $f(x) = 0$. Ahora bien, en el caso que f sea otra función escalar algebraica o escalar trascendente, no se cuenta con fórmulas para obtener las soluciones reales y exactas de la ecuación $f(x) = 0$.

Precisamente, el objetivo de esta sección consiste en analizar métodos numéricos que permiten obtener aproximaciones numéricas de las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función polinomial con grado mayor a 2, ó bien, una función trascendente. La importancia de los métodos numéricos, también conocidos como métodos de aproximaciones sucesivas o métodos de iteraciones, radica en el hecho de que en la mayoría de las ocasiones se carece de métodos analíticos exactos que permitan obtener tales soluciones.

Métodos cerrados o de intervalos

Los métodos cerrados utilizan intervalos que contienen a la raíz y luego reducen sistemáticamente el tamaño del intervalo.

Se desarrollarán:

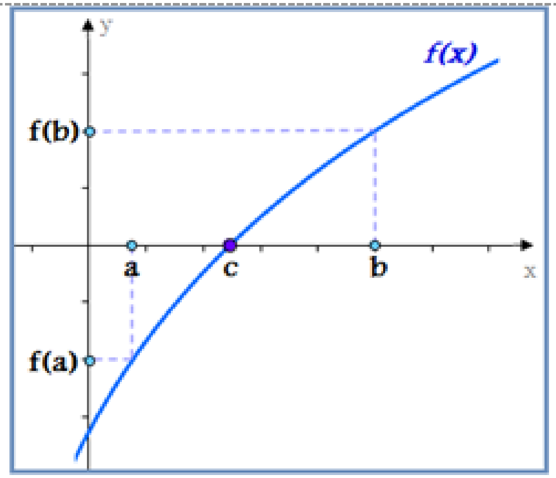
- El método de bisección
- El método de la falsa posición.

Se desarrollan formulaciones del error para ayudar a determinar el trabajo computacional que se requiere para estimar la raíz con un nivel de precisión especificado previamente.

Método de bisección

El **método de Bisección** o de **búsqueda binaria** consiste en bisecar de manera sucesiva un intervalo que, se sabe, tiene una solución real de la ecuación $f(x) = 0$. Este método se basa en el Teorema de Bolzano, el cual enuncia las condiciones suficientes para garantizar la existencia de al menos una raíz de una función f comprendida en cierto intervalo de su dominio. Su enunciado es el siguiente:

⇨ **Teorema de Bolzano:**



Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a; b]$ y toma valores de signos opuestos en los extremos de ese intervalo, entonces existe un punto c comprendido entre a y b en el cual la función se anula.

- Hipótesis: f es continua en $[a; b]$

  signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$

- Tesis: $\exists\, c \,/\, a < c < b$ tal que $f(c) = 0$

Enunciar "existe un punto c" significa que "existe al menos un punto c". Es decir, la verificación de la hipótesis del Teorema de Bolzano para una función f nos garantiza la existencia de al menos una raíz de dicha función en un cierto intervalo $[a; b]$.

Método de bisección

Otra manera de enunciar el Teorema de Bolzano es la siguiente:

Si una función f es continua en $[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Como se puede observar, indicar que $f(a).f(b) < 0$ es equivalente a decir que los signos de $f(a)$ y $f(b)$ son opuestos. Además, se menciona que $c \in (a, b)$ lo cual equivale a decir que el punto c está comprendido entre a y b. Cabe destacar que sería incorrecto decir que $c \in [a, b]$ ya que es necesario que c sea diferente a los extremos de dicho intervalo, es decir, $c \neq a$ y $c \neq b$. Como se puede analizar, en el caso en el que c sea igual a uno de los extremos del intervalo, resultaría $f(a).f(b) = 0$ y en consecuencia no se cumpliría la hipótesis del Teorema de Bolzano. Por lo tanto, $c \in (a, b)$.

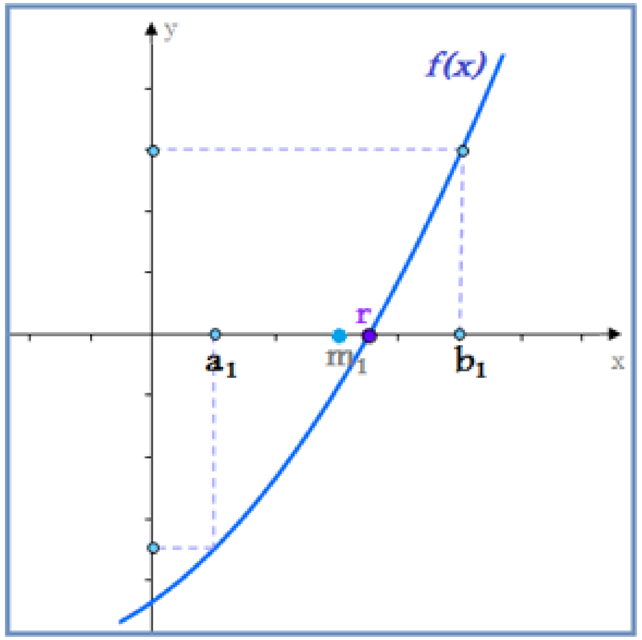
Otra característica digna de ser mencionada, al analizar dicho teorema, es el hecho de que las condiciones que en él se presentan para garantizar la existencia de al menos una raíz de una función f comprendida en cierto intervalo son suficientes pero no necesarias. Un ejemplo claro de este hecho es la función $f(x) = x^2$, en la cual al considerar cualquier intervalo $[a; b]$, con $a < 0$ y $b > 0$ resulta $f(a).f(b) > 0$. Sin embargo, dicha función presenta una raíz doble en $x = 0$.

Método de bisección

Veamos entonces en qué consiste el método de bisección. Supongamos que f es una función continua definida en un intervalo $[a; b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. Bajo dichas condiciones el Teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de al menos una raíz de f en $(a; b)$. Si bien el método de bisección se aplica aunque exista más de una raíz en el intervalo $(a; b)$, por razones de simplicidad suponemos que la raíz de este intervalo es única. El método de bisección propone aproximar dicha raíz de f, es decir, propone aproximar una solución real de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos de igual amplitud. Al efectuar esta división la raíz buscada puede coincidir con el punto medio del intervalo o bien puede ser interior a uno de los dos subintervalos determinados. Si se da el primer caso, hemos encontrado el valor exacto de la raíz y por lo tanto aquí finaliza el procedimiento. Caso contrario, se elige aquél subintervalo en el que sus extremos toman valores de signos opuestos, garantizando así la existencia de la raíz que se desea aproximar en dicho subintervalo. Este procedimiento se repite hasta que se verifique la tolerancia deseada para el error. Como es de suponer, este último disminuirá al aumentar la cantidad de veces que realice dicho procedimiento y, en consecuencia, aumentará la precisión de la raíz buscada.

Método de bisección

Analicemos detenidamente el procedimiento descripto anteriormente partiendo del supuesto que f es una función continua y realizando un bosquejo de la gráfica de dicha función. Como se sabe, una raíz r de f es la abscisa de un punto donde la gráfica de la función interseca al eje de abscisas. Para localizar y/o aproximar este punto a través del método de bisección se considera un primer intervalo $[a_1; b_1]$, de modo tal que $f(a_1).f(b_1) < 0$, garantizando por el Teorema de Bolzano que $r \in (a_1, b_1)$.

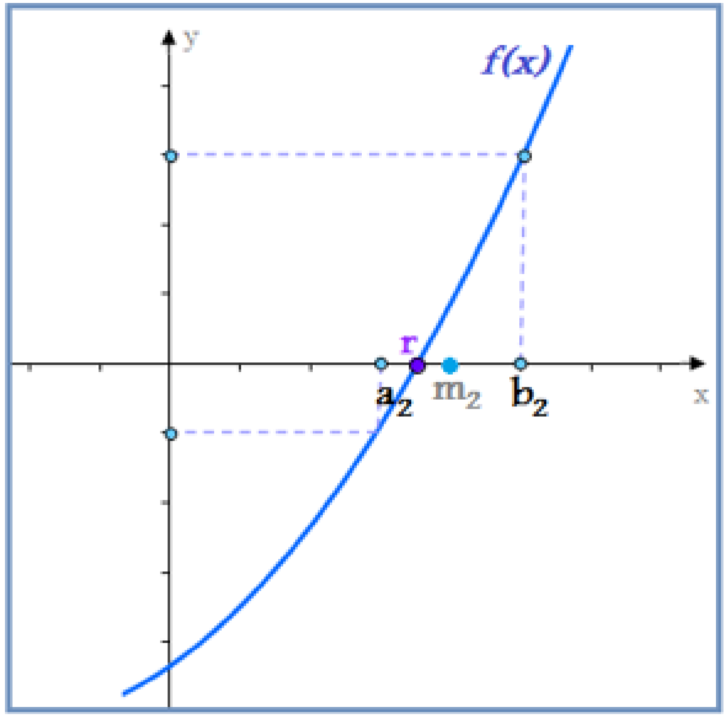


Sea m_1 el punto medio de $[a_1; b_1]$, es decir: $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Dicho número es nuestra primera aproximación a r. Al calcular $f(m_1)$ puede resultar $f(m_1) = 0$ ó bien $f(m_1) \neq 0$.

- Si $f(m_1) = 0$, entonces m_1 es la raíz buscada, en cuyo caso hemos terminado.

- Si $f(m_1) \neq 0$, entonces $f(m_1)$ difiere en signo de $f(a_1)$ o $f(b_1)$. En consecuencia, r pertenece a uno de los subintervalos $(a_1; m_1)$ o $(m_1; b_1)$, el cual se puede determinar fácilmente considerando el Teorema de Bolzano.

Método de bisección



Aquel subintervalo $[a_1; m_1]$ o $[m_1; b_1]$ donde f toma valores de signos opuestos en sus extremos es aquel que contiene a r. Denotando $[a_2; b_2]$ a dicho intervalo se repite el procedimiento anterior, es decir, se calcula su punto medio, $m_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$, el cuál corresponde a nuestra segunda aproximación de r. Luego, se calcula $f(m_2)$ dando lugar a alguno de los dos casos analizados, es decir, que $f(m_2) = 0$ ó bien $f(m_2) \neq 0$.

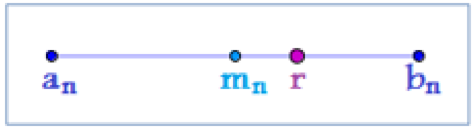
Cada aproximación sucesiva se denomina una *iteración*.

Al repetir el proceso se determina una sucesión de aproximaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots$, y subintervalos $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $[a_3; b_3]$, …, de modo que cada subintervalo contiene a la raíz r y cada uno posee una amplitud equivalente a la mitad de la de su predecesor.

Método de bisección

En caso de no encontrar el valor exacto de r en alguna iteración, el proceso se detiene cuando r queda determinada con la precisión deseada. Considerando como estimación el punto medio de $[a_n; b_n]$ es decir, tomando como estimación m_n, se tendrá como error la distancia entre r y m_n. Entonces, el error E_n que se comete en la aproximación n es $E_n = |r - m_n|$.

Además, podemos observar que E_n será como máximo la mitad de la amplitud del intervalo $[a_n; b_n]$. A esta última distancia la llamaremos $h_n = \frac{b_n - a_n}{2}$. Por lo tanto, $E_n \leq h_n$.



Entonces, el proceso se detiene cuando la distancia entre m_n y r es menor que el error permitido, denominado *tolerancia*, que denotaremos por $\mathcal{E}$. Es decir, el proceso se detiene cuando resulte $h_n < \mathcal{E}$.

Luego, en la iteración n resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{E_n \leq h_n < \mathcal{E}}}$$

Donde:

- E_n es el error que se comete al considerar m_n como aproximación de r, es decir: $E_n = |r - m_n|$.
- h_n es la mitad de la amplitud del intervalo $[a_n; b_n]$, es decir: $h_n = \frac{b_n - a_n}{2}$.
- $\mathcal{E}$ es la tolerancia o error permitido.

Método de bisección

Algoritmo	Método de bisección

Sea f una función continua en $[a_1; b_1]$ con $f(a_1) . f(b_1) < 0$.

Sea $\mathcal{E}$ la cota deseada para el error o tolerancia y h_n la distancia entre m_n y r.

Repetir los siguientes pasos para $n = 1,2, \ldots$ hasta que $h_n < \mathcal{E}$.

1. Calcular $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
2. Calcular $f(m_n)$. Si $f(m_n) = 0$, entonces culmina aquí el proceso.
3. Calcular $h_n = \frac{b_n - a_n}{2}$
4. Si $f(a_n).f(m_n) < 0$, $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = m_n$.
5. Si $f(a_n).f(m_n) > 0$, $a_{n+1} = m_n$ y $b_{n+1} = b_n$.

Método de bisección

Cabe observar que para iniciar el algoritmo de bisección hay que encontrar un intervalo $[a_1; b_1]$ de modo que $f(a_1) \,.\, f(b_1) < 0$. En cada paso, la amplitud del intervalo que se sabe que contiene a r se reduce a la mitad. Por lo tanto, conviene escoger un intervalo inicial $[a_1; b_1]$ cuya amplitud sea la menor posible.

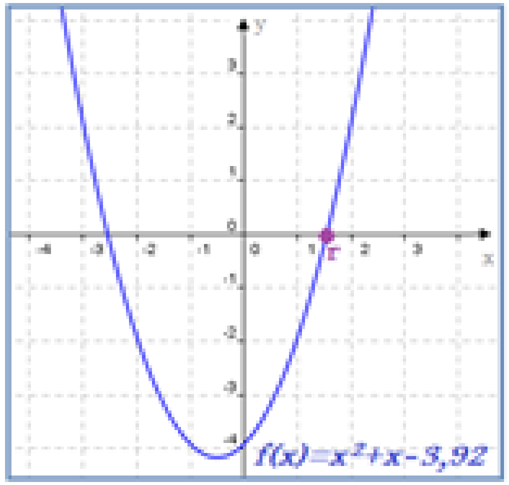
Por ejemplo, si $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$, entonces: $f(-4).f(4) < 0$ y $f(0).f(1) < 0$, de manera que el algoritmo de bisección pueda emplearse en uno de los intervalos $[-4; 4]$ o $[0; 1]$. Al comenzar el algoritmo de bisección en $[0; 1]$ y no en $[-4; 4]$, la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar determinada exactitud disminuirá en 3.

Método de bisección

Analicemos un primer ejemplo, el cual consiste en aproximar la raíz positiva de una función cuadrática aplicando el método de bisección. Al tratarse de una función cuadrática, dicha raíz puede calcularse de forma exacta utilizando la fórmula resolvente. De esta manera podremos calcular E_n y observar a partir del ejemplo que $E_n \leq h_n < \mathcal{E}$.

Ejemplo 1

Aproximar, aplicando el método de bisección, la raíz positiva de $f(x) = x^2 + x - 3{,}92$ en el intervalo $[1; 2]$ con una tolerancia de $0{,}01$.



Método de bisección

➲ Solución:

Al momento de aplicar el método de bisección resulta pertinente y práctico efectuar una tabla como la que se encuentra a continuación:

n	a_n	r_n	b_n	$f(a_n)$	$f(m_n)$	$f(b_n)$	h_n	ε_a (%)
1	1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5	
2	1,5	1,75	2	$-$	$+$	$+$	0,25	14,2857
3	1,5	1,625	1,75	$-$	$+$	$+$	0,125	7,69230
4	1,5	1,5625	1,625	$-$	$+$	$+$	0,0625	4
5	1,5	1,53125	1,5625	$-$	$-$	$+$	0,03125	2,0408
6	1,53125	1,546875	1,5625	$-$	$+$	$+$	0,015625	1,01010
7	1,53125	**1,5390625**	1,546875	$-$	$-$	$+$	0,0078125	0,50761

Se puede observar que en las columnas de $f(a_n)$, $f(m_n)$ y $f(b_n)$ no es necesario escribir los valores, ya que solo nos interesa es el signo que toma la función para a_n, b_n y c_n para poder así elegir los extremos del siguiente intervalo.

Anteriormente se mencionó que el proceso se detiene cuando $h_n < \mathcal{E}$. En el presente ejemplo, la tolerancia $\mathcal{E} = 0{,}01$. Por consiguiente, el proceso finaliza cuando $h_n < 0{,}01$. Como se puede observar, en la iteración número 7 resulta $h_7 = 0{,}0078125$ y $0{,}0078125 < 0{,}01$.

Método de bisección

Luego, la raíz positiva de $f(x) = x^2 + x - 3{,}92$ es aproximadamente:

$$\boldsymbol{m_7 = 1,5390625}$$

Esta última aproximación posee una tolerancia de 0,01 de error.

Calculemos la raíz exacta y positiva de $f(x) = x^2 + x - 3{,}92$.

Haciendo $x^2 + x - 3{,}92 = 0$ y aplicando la fórmula resolvente se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-3{,}92)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{16{,}68}}{2}$$

Luego:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{16{,}68}}{2} = \frac{-5 + \sqrt{417}}{10} \cong 1{,}542057786$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{16{,}68}}{2} = \frac{-5 - \sqrt{417}}{10} \cong -2{,}542057786$$

Como estamos buscando la raíz positiva de $f(x) = x^2 + x - 3{,}92$, consideraremos solamente la raíz x_1.

Cabe destacar que la expresión decimal que nos brinda la calculadora al calcular el valor de x_1 es también aproximada, con una tolerancia de 9 decimales, es decir, 10^{-9}.

Por consiguiente, consideraremos la expresión exacta de x_1 para calcular el error que se comete en la iteración número7, es decir, para calcular E_7.

Luego, el error que se comete en la iteración 7 es:

$$E_7 = \left| \frac{-5 + \sqrt{417}}{10} - 1{,}5390625 \right| \cong 0{,}002995285666$$

Podemos observar entonces que:

$$E_7 \leq h_7 < \mathcal{E} \Rightarrow 0{,}002995285666 \leq 0{,}0078125 < 0{,}01$$

Veamos a continuación cómo calcular la cantidad te iteraciones necesarias al aplicar el método de bisección para obtener una aproximación de una raíz de una función f partiendo de un intervalo inicial $[a_1; b_1]$ y considerando una tolerancia $\mathcal{E}$.

Método de bisección

Además, se requiere estimar el error de forma tal que no se necesite el conocimiento previo de la raíz. Como se vió en la **Unidad 1**, se puede calcular el error relativo porcentual $\boldsymbol{\varepsilon_a}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varepsilon_a = \left|\frac{r_n - r_{n-1}}{r_n}\right| 100\%}$$

donde r_n es la raíz aproximada en la iteración n y r_{n-1} es el valor de la raíz aproximada en la iteración $n-1$. Se utiliza el valor absoluto ya que por lo general importa sólo la magnitud de ε_a sin considerar su signo. Cuando ε_a es menor a la tolerancia previamente fijada, termina el cálculo.

Método de bisección

Cálculo del número de iteraciones

Considerando un intervalo inicial $[a_1; b_1]$, el cual contiene una raíz r de una función f, se desea saber cuántas iteraciones serán necesarias para aproximar dicha raíz utilizando el método de bisección, con una tolerancia $\mathcal{E}$. Para ello veamos lo siguiente:

- La amplitud del intervalo inicial es $(b_1 - a_1)$
- En la primera iteración $(n = 1)$, la raíz es interior a un intervalo cuya amplitud es $\frac{b_1-a_1}{2}$, es decir, la mitad del tamaño del intervalo inicial.
- En la segunda iteración $(n = 2)$, la raíz se encuentra contenida en un intervalo de amplitud $\frac{b_2-a_2}{2}$, la cual es equivalente a la mitad de la amplitud del intervalo anterior, es decir $\frac{b_2-a_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b_1-a_1}{2^2}$.
- En la tercera iteración $(n = 3)$, la amplitud del intervalo donde se encuentra la raíz es $\frac{b_3-a_3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1-a_1}{2^2} = \frac{b_1-a_1}{2^3}$.

- En la n-ésima iteración $(n = n)$, la amplitud del intervalo que contiene a la raíz será $\frac{b_1-a_1}{2^n}$. Dicho valor representa el máximo error posible que se comete cuando en la iteración n se toma como aproximación el punto medio del intervalo $[a_n; b_n]$, es decir, cuando se considera como aproximación a m_n.

Método de bisección

Para alcanzar la tolerancia $\mathcal{E}$ deseada se debe cumplir que la amplitud del intervalo, después de n iteraciones, sea menor que $\mathcal{E}$.

Por consiguiente, el número n de iteraciones necesarias para obtener la tolerancia $\mathcal{E}$ será el mínimo número natural que satisfaga $\frac{b_1-a_1}{2^n} < \mathcal{E}$.

Despejando n de dicha desigualdad, obtenemos:

$$\frac{b_1-a_1}{2^n} < \mathcal{E} \Rightarrow \frac{b_1-a_1}{\mathcal{E}} < 2^n \Rightarrow log_2\left(\frac{b_1-a_1}{\mathcal{E}}\right) < log_2(2^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_2\left(\frac{b_1-a_1}{\mathcal{E}}\right) < n.\ log_2(2) \Rightarrow log_2\left(\frac{b_1-a_1}{\mathcal{E}}\right) < n$$

Luego:

$$\boxed{\boldsymbol{n > log_2\left(\frac{b_1-a_1}{\mathcal{E}}\right)} \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}}$$

Método de bisección

Calculemos el número de iteraciones necesarias para el ejemplo número1, en el cuál se ha considerado un intervalo inicial $[1; 2]$ y una tolerancia de 0,01:

$$n > log_2\left(\frac{2-1}{0{,}01}\right)$$

$$n > 6{,}64$$

Luego, como $n \in \mathbb{N}$:

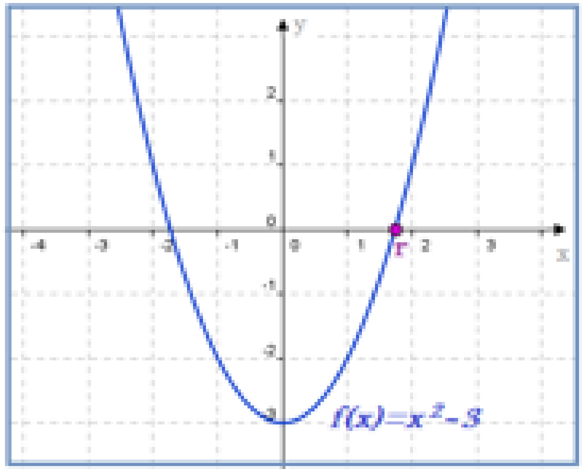
$$\boldsymbol{n = 7}$$

Método de bisección

Ejemplo 2

Calcular la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar $\sqrt{3}$ con una tolerancia de 10^{-2} considerando el intervalo $[1{,}5\,;2]$. Luego, aproxime dicho radical a través del método de bisección.

<u>Sugerencia:</u> considere $f(x) = x^2 - 3$



Método de bisección

➲ Solución:

Para aproximar $\sqrt{3}$ debemos considerar la función $f(x) = x^2 - 3$, ya que una de las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ es precisamente $\sqrt{3}$.

Calculemos entonces la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar $\sqrt{3}$ a través del método de bisección. El ejemplo propone considerar como intervalo inicial a $[1{,}5\,;2]$ y desea aproximar $\sqrt{3}$ con una tolerancia $\mathcal{E} = 10^{-2}$.

Entonces:

$$n > log_2\left(\frac{2-1{,}5}{0{,}01}\right)$$

$$n > 5{,}64$$

Luego, como $n \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{n = 6}$$

Es decir, la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar $\sqrt{3}$ a través del método de bisección, considerando como intervalo inicial a $[1{,}5\,;2]$ y una tolerancia $\mathcal{E} = 10^{-2}$, es 6.

Método de bisección

Luego, para aproximar $\sqrt{3}$ construimos la tabla como en el ejemplo anterior:

n	a_n	m_n	b_n	$f(a_n)$	$f(m_n)$	$f(b_n)$	h_n
1	1,5	1,75	2	$-$	$+$	$+$	0,25
2	1,5	1,625	1,75	$-$	$-$	$+$	0,125
3	1,625	1,6875	1,75	$-$	$-$	$+$	0,0625
4	1,6875	1,71875	1,75	$-$	$-$	$+$	0,03125
5	1,71875	1,734375	1,75	$-$	$+$	$+$	0,015625
6	1,71875	1,7265625	1,734375	$-$	$-$	$+$	0,0078125

Dijimos que el proceso se detiene cuando $h_n < \mathcal{E}$. En el presente ejemplo, la tolerancia $\mathcal{E} = 0{,}01$. Por consiguiente, el proceso finaliza cuando $h_n < 0{,}01$. Como se puede observar, en la iteración número 6 (como hemos calculado en el punto anterior) resulta $h_6 = 0{,}0078125$ y $0{,}0078125 < 0{,}01$.

Luego, $\sqrt{3}$ es aproximadamente:

$$\boldsymbol{m_6 = 1,7265625}$$

Esta última aproximación posee una tolerancia de 0,01 de error.

Método de bisección

Ejemplo 3

Determinar la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ con un rango de precisión $\mathcal{E} = 10^{-5}$.

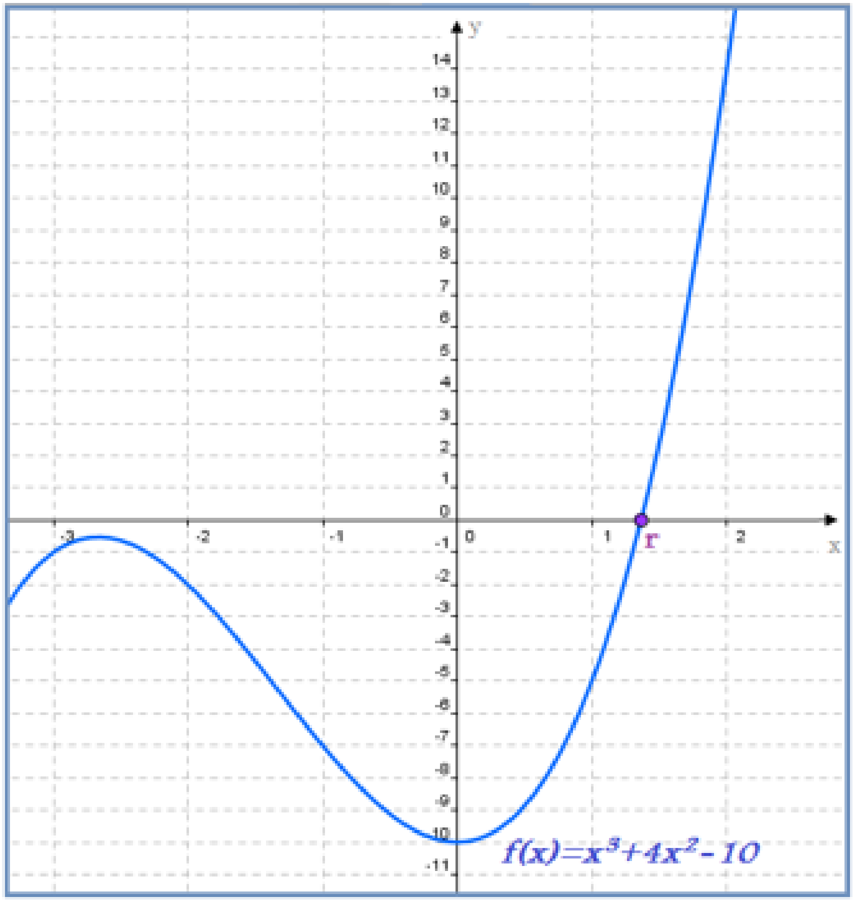
Método de bisección

Solución:

Para calcular cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ debemos elegir un intervalo inicial que contenga a la raíz buscada. Como dicho intervalo no está dado, podemos realizar un bosquejo de la gráfica de dicha función para poder así elegir de forma pertinente los extremos del primer intervalo.

Para ello, podemos completar una tabla de valores:

x	$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
-2	-2
-1	-7
0	-10
1	-5
2	14

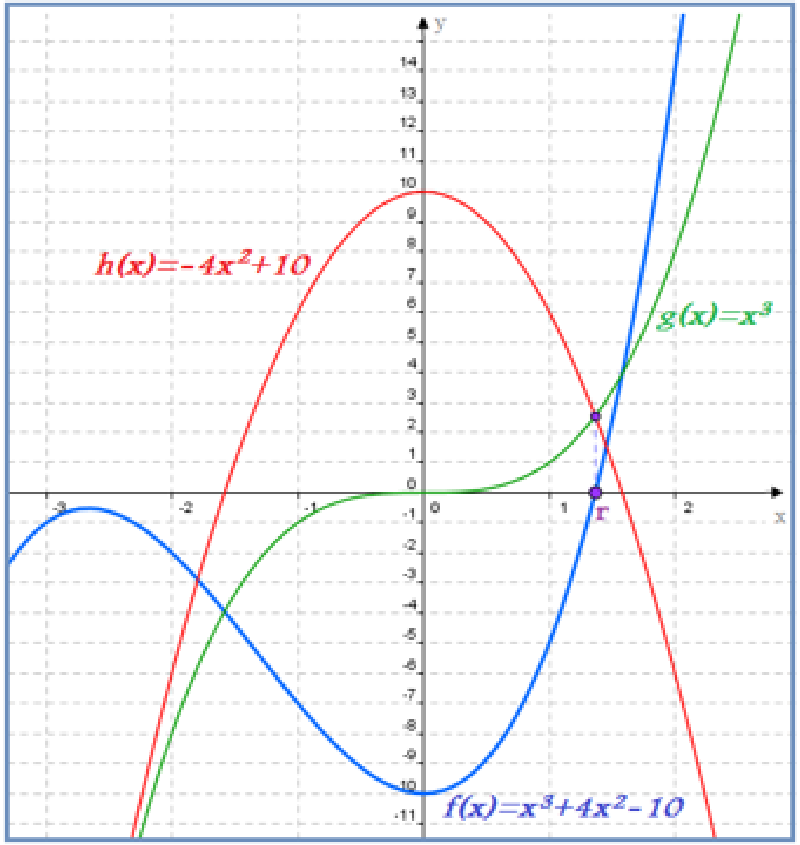


Podemos observar que para los valores 1 y 2 de la variable independiente, la función toma valores con signos opuestos. Por consiguiente, la raíz $r \in [1; 2]$

Método de bisección

De igual modo, realicemos un bosquejo de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ considerando los valores obtenidos anteriormente:

Como sabemos, r es una solución real a la ecuación $f(x) = 0$. Por lo tanto, r es una solución real a la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. De allí, realizando pasaje de términos se puede obtener la igualdad $x^3 = -4x^2 + 10$. Entonces, otra forma de determinar un intervalo inicial que contenga a r es representar gráficamente las funciones $g(x) = x^3$ y $h(x) = -4x^2 + 5$. Luego, la abscisa del punto de intersección de ambas funciones es equivalente a la raíz buscada. La ventaja de este procedimiento es que permite deducir un intervalo inicial para aplicar el método de bisección a partir de la gráfica de funciones cuya gráfica es conocida.



Método de bisección

Luego, consideremos el intervalo $[1;2]$ para determinar la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ con un rango de precisión $\mathcal{E} = 10^{-5}$.

Entonces:

$$n > log_2\left(\frac{1-0}{0{,}00001}\right)$$

$$n > 16{,}61$$

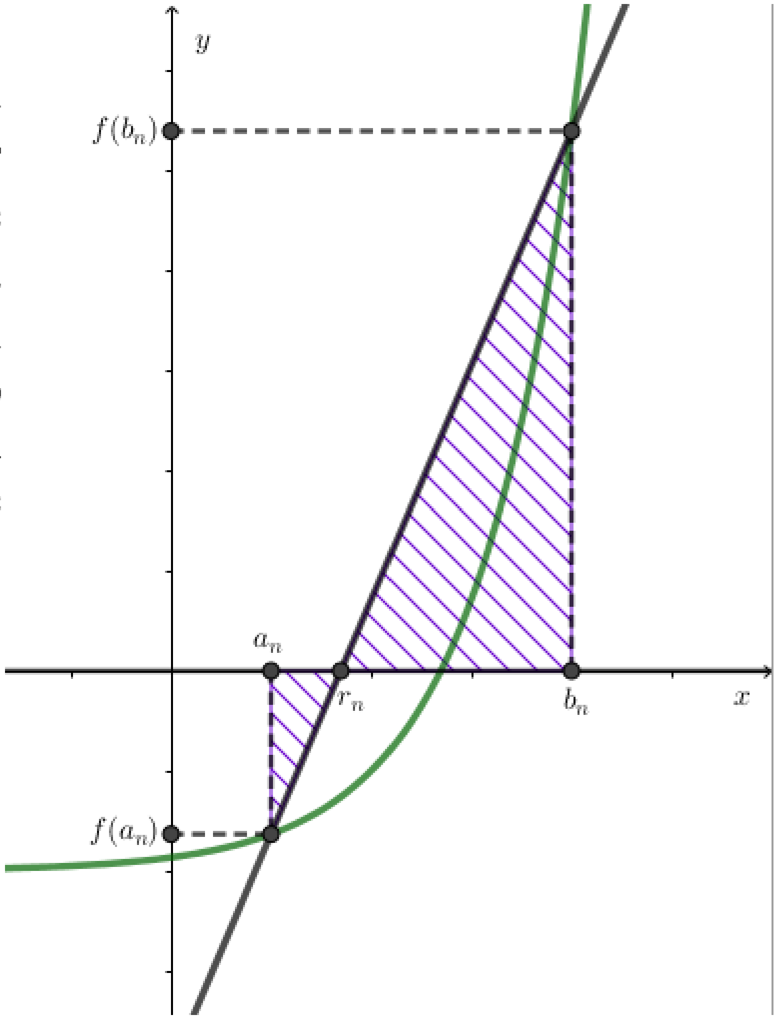
Luego, como $n \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{n = 17}$$

Este tercer ejemplo ilustra la desventaja del método de bisección. Las aproximaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots,$ convergen muy lentamente a la raíz r. Pero como ventaja podemos mencionar que converge, es decir, el método funciona, y en el paso n obtenemos la raíz con la precisión deseada.

Método de la falsa posición

Un inconveniente del método de bisección es que al dividir el intervalo a_n a b_n en mitades iguales, no se toman en consideración las magnitudes de $f(a_n)$ y $f(b_n)$. Por ejemplo, si $f(a_n)$ está mucho más cercano a cero que $f(b_n)$, es lógico que la raíz se encuentre más cerca de a_n que de b_n. Un método alternativo que aprovecha esta visualización gráfica consiste en unir $f(a_n)$ y $f(b_n)$ con una línea recta. La intersección de esta línea con el eje de abscisas representa una mejor aproximación de la raíz. El hecho de que se reemplace la curva por una línea recta da una "falsa posición" de la raíz; de ahí el nombre de **método de la falsa posición**, o en latín, *regula falsi*. También se le conoce como *método de interpolación lineal*.



Método de la falsa posición

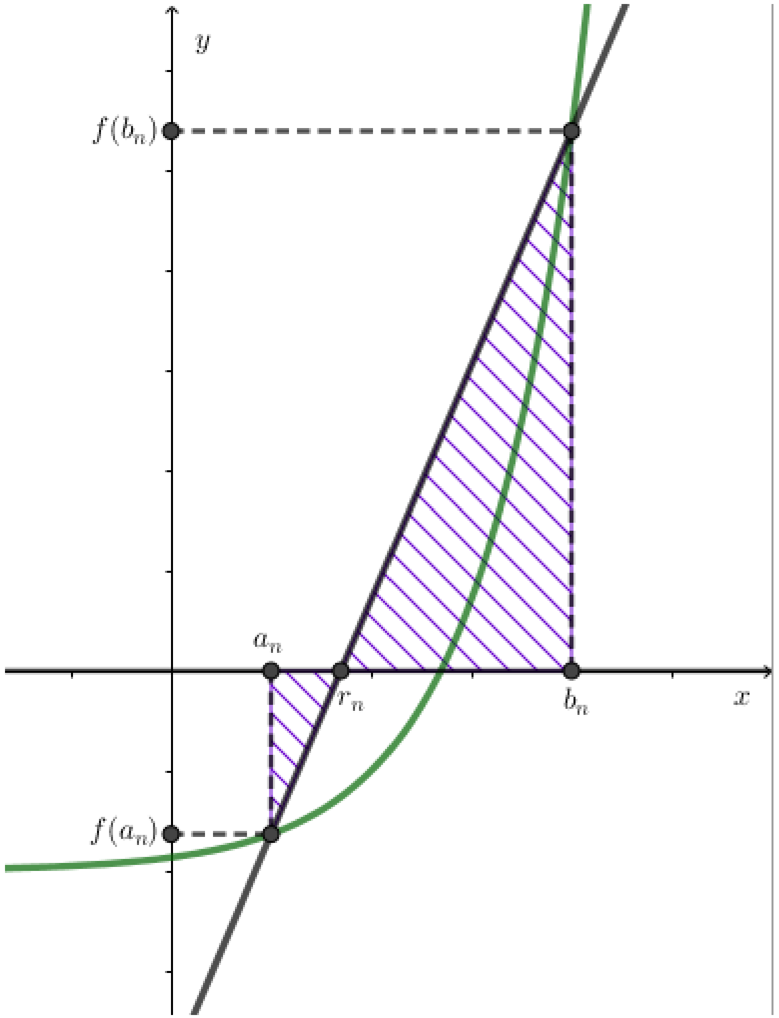
Usando triángulos semejantes, la intersección de la línea recta con el eje de abscisas se estima mediante:

$$\frac{f(a_n)}{r_n - a_n} = \frac{f(b_n)}{r_n - b_n}$$

en la cual, al despejar r_n, se obtiene:

$$\boxed{r_n = b_n - \frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}}$$

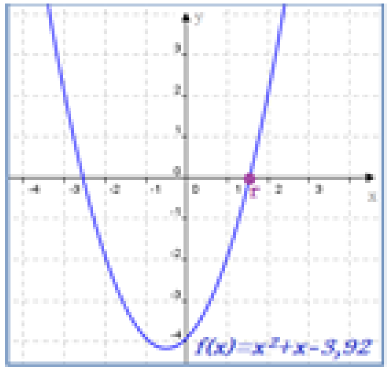
Ésta es la fórmula de la falsa posición. El valor de r_n calculado con la igualdad anterior reemplazará, en la siguiente iteración, a uno de los dos valores iniciales a_n o b_n, considerando, al igual que en el método de la bisección, el Teorema de Bolzano. De esta manera, los valores a_n y b_n siempre encierran la verdadera raíz. El proceso se repite hasta que la aproximación a la raíz sea adecuada.



Método de la falsa posición

Ejemplo 1

Aproximar, aplicando el método de la falsa posición, la raíz positiva de $f(x) = x^2 + x - 3{,}92$ en el intervalo $[1; 2]$ con una tolerancia de $0{,}01$.



➲ Solución:

Al momento de aplicar el método de la falsa posición resulta pertinente y práctico efectuar una tabla como la que se encuentra a continuación, considerando la igualdad:

$$r_n = b_n - \frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}$$

Método de la falsa posición

a_n	m_n	b_n	f(a_n)	f(m_n)	f(b_n)	h_n	e_a (%)
1	1,5	2	-1,92	-0,17	2,08	0,5	
1,5	1,75	2	-0,17	0,8925	2,08	0,25	14,2857143
1,5	1,625	1,75	-0,17	0,345625	0,8925	0,125	7,69230769
1,5	1,5625	1,625	-0,17	0,08390625	0,345625	0,0625	4
1,5	1,53125	1,5625	-0,17	-0,04402344	0,08390625	0,03125	2,04081633
1,53125	1,546875	1,5625	-0,04402344	0,01969727	0,08390625	0,015625	1,01010101
1,53125	**1,5390625**	1,546875	-0,04402344	-0,01222412	0,01969727	0,0078125	0,50761421

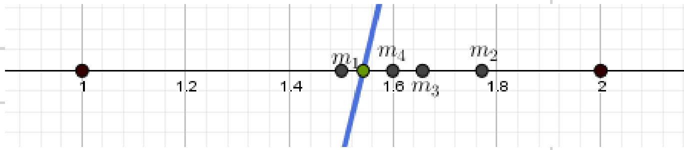
MÉTODO DE BISECCIÓN

f(x)=x^2+x-3,92

[1 ; 2]

tol 0,01 o 1%

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$



a_n	r_n	b_n	f(a_n)	f(r_n)	f(b_n)	e_a (%)
1	1,48	2	-1,92	-0,2496	2,08	
1,48	1,53571429	2	-0,2496	-0,02586735	2,08	3,62790698
1,53571429	**1,54141732**	2	-0,02586735	-0,00261531	2,08	0,36998657

MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN

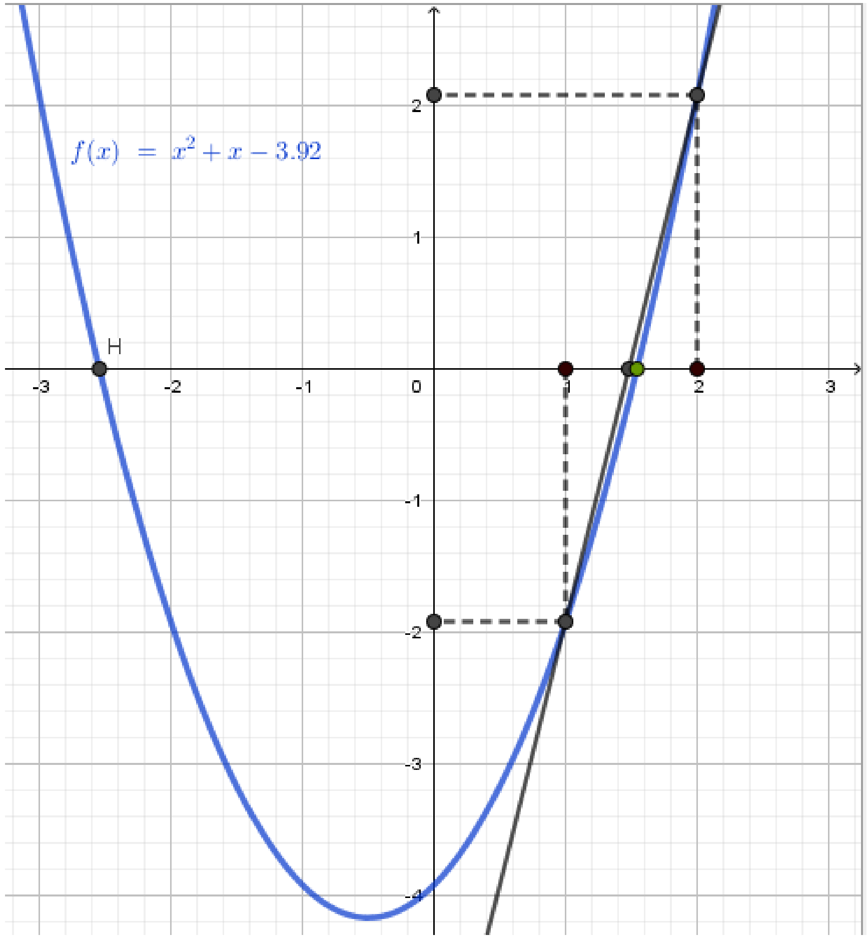
f(x)=x^2+x-3,92

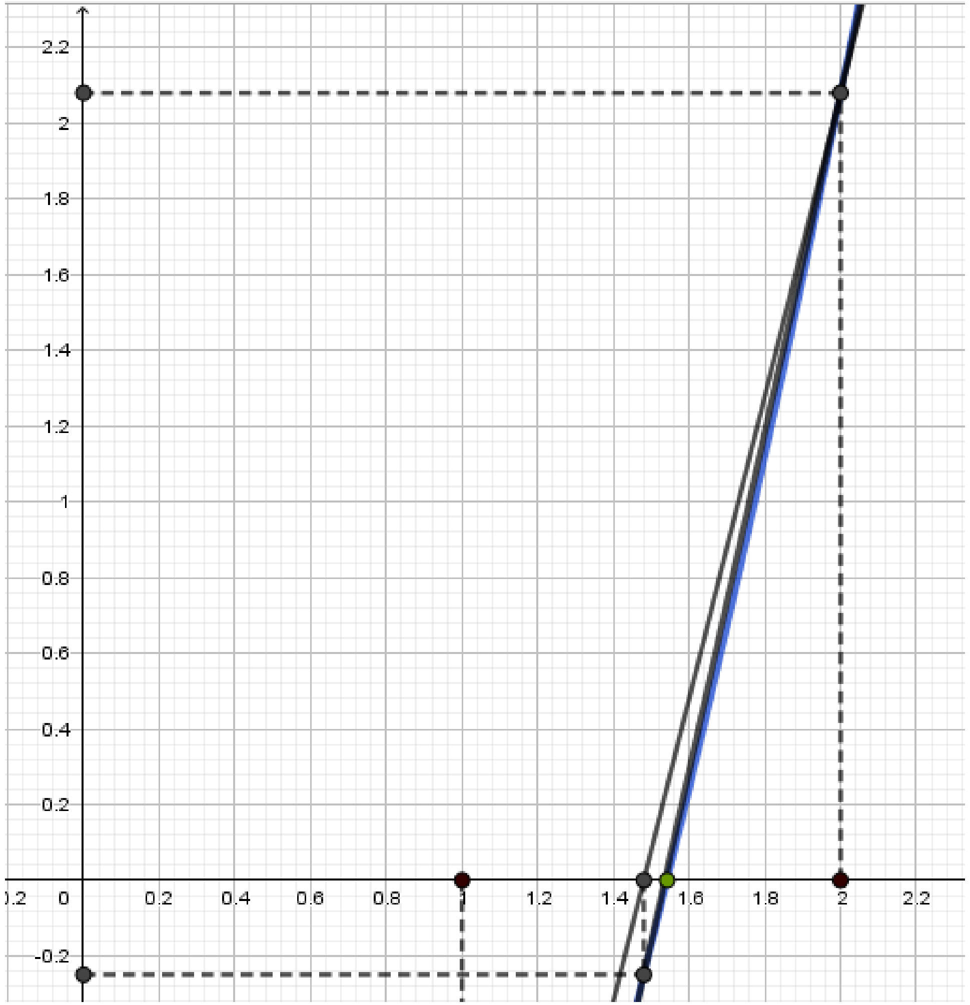
[1 ; 2]

tol 0,01 o 1%

$$r_n = b_n - \frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}$$

Método de la falsa posición





Método de la falsa posición

Ejemplo 2

Aproximar, aplicando el método de bisección y el método de la falsa posición, la raíz de $f(x) = x^{10} - 1$ en el intervalo $[0; 1{,}3]$ con una tolerancia de 0,05.

Método de la falsa posición

a_n	m_n	b_n	f(a_n)	f(m_n)	f(b_n)	h_n	e_a (%)
0	0,65	1,3	-1	-0,98653726	12,7858492	0,65	
0,65	0,975	1,3	-0,98653726	-0,22367038	12,7858492	0,325	33,3333333
0,975	1,1375	1,3	-0,22367038	2,62672022	12,7858492	0,1625	14,2857143
0,975	1,05625	1,1375	-0,22367038	0,72849139	2,62672022	0,08125	7,69230769
0,975	**1,015625**	1,05625	-0,22367038	0,16770685	0,72849139	0,040625	4

MÉTODO DE BISECCIÓN

f(x)=x^10 -1

[0 ; 1,3]

tol 0,05 o 5%

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

a_n	r_n	b_n	f(a_n)	f(r_n)	f(b_n)	e_a (%)
0	0,0942996	1,3	-1	-1	12,7858492	
0,0942996	0,18175887	1,3	-1	-0,99999996	12,7858492	48,1182987
0,18175887	0,26287401	1,3	-0,99999996	-0,99999842	12,7858492	30,8570403
0,26287401	0,3381051	1,3	-0,99999842	-0,99998048	12,7858492	22,2508001
0,3381051	0,40787792	1,3	-0,99998048	-0,99987256	12,7858492	17,1062983
0,40787792	0,47258315	1,3	-0,99987256	-0,99944437	12,7858492	13,6918205
0,47258315	0,53257151	1,3	-0,99944437	-0,99816439	12,7858492	11,2639065
0,53257151	0,58814457	1,3	-0,99816439	-0,99504731	12,7858492	9,44887727
0,58814457	0,63954397	1,3	-0,99504731	-0,98855267	12,7858492	8,03688315
0,63954397	0,68694317	1,3	-0,98855267	-0,97660042	12,7858492	6,9000171
0,68694317	0,73044644	1,3	-0,97660042	-0,95676019	12,7858492	5,95570979
0,73044644	0,77009874	1,3	-0,95676019	-0,92663918	12,7858492	5,14899006
0,77009874	**0,80590751**	1,3	-0,92663918	-0,88442816	12,7858492	4,44328463

MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN

f(x)=x^10 -1

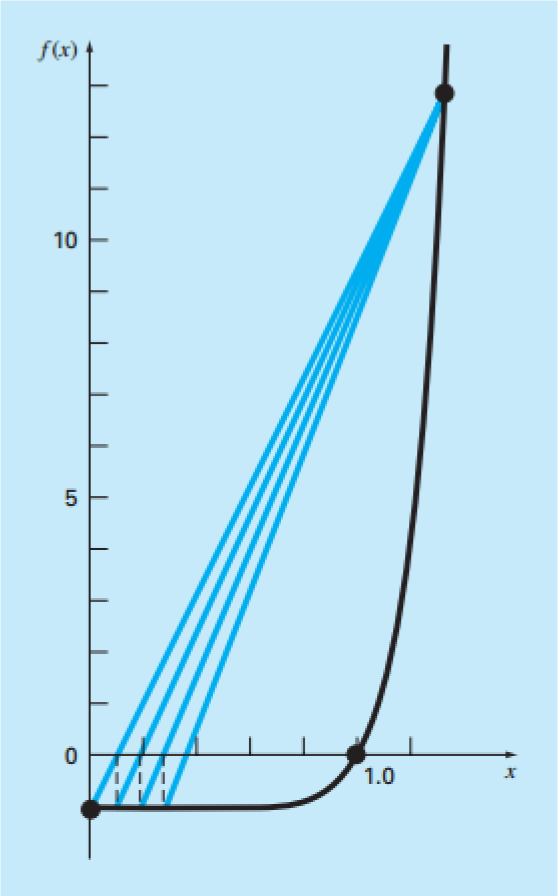
[0 ; 1,3]

tol 0,05 o 5%

$$r_n = b_n - \frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}$$

Método de la falsa posición

El Ejemplo 2 ilustra que, por lo común, no es posible realizar generalizaciones con los métodos de obtención de raíces. Como se puede observar gráficamente, la curva de la función $f(x) = x^{10} - 1$ en el intervalo $[0; 1{,}3]$ viola la premisa sobre la cual se basa la falsa posición; es decir, si $f(a_n)$ se encuentra mucho más cerca de cero que $f(b_n)$, la raíz se encuentra más cerca de a_n que de b_n. Por consiguiente, este ejemplo ilustra una importante desventaja del método de la falsa posición: su unilateralidad. Es decir, conforme se avanza en las iteraciones, uno de los puntos limitantes del intervalo tiende a permanecer fijo. Esto puede llevar a cierta lentitud de la convergencia, especialmente en funciones con una curvatura importante. En estos casos el error aproximado es engañoso, por lo que además de usar ε_a, los resultados se deben verificar sustituyendo la raíz aproximada en la ecuación original y determinar si el resultado se acerca a cero. Esta prueba se debe incorporar en todos los programas que localizan raíces.



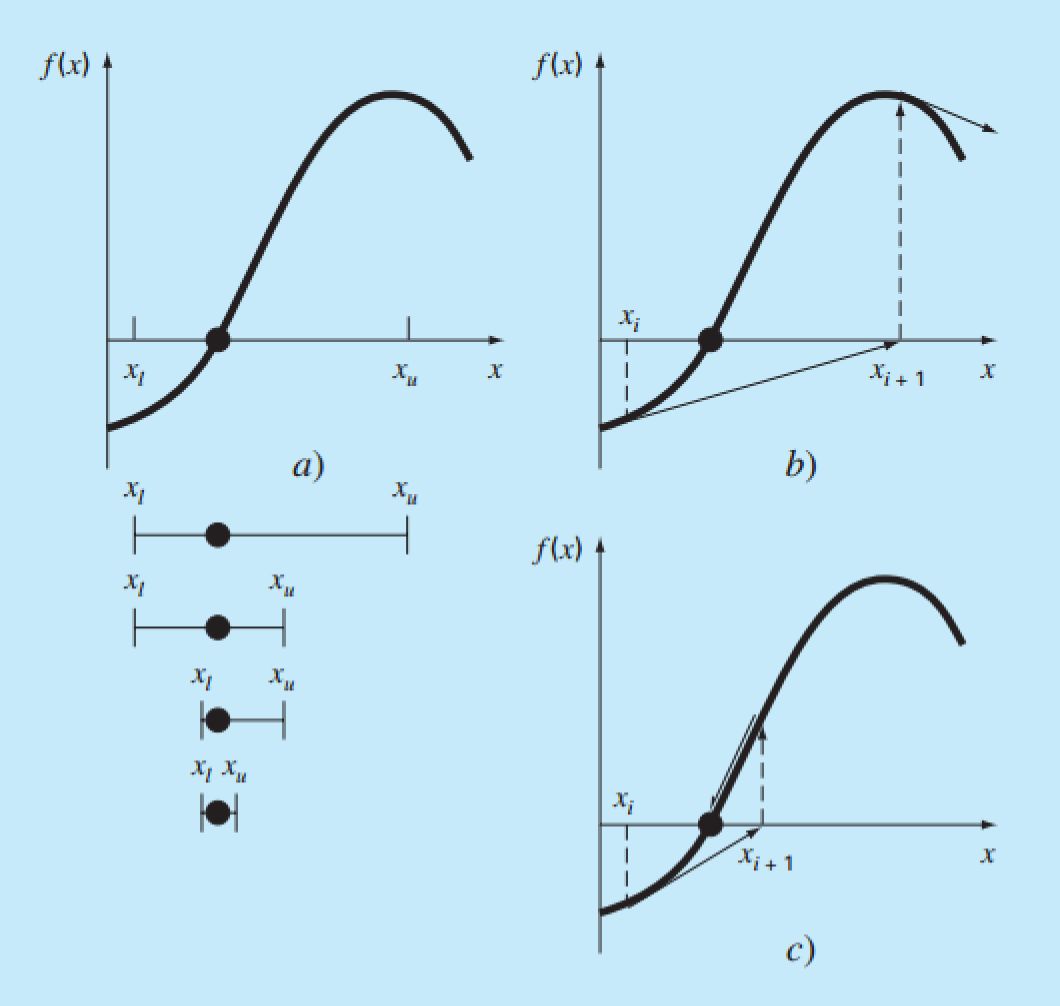
Métodos abiertos

En los métodos cerrados del capítulo anterior la raíz se encuentra dentro de un intervalo predeterminado por un límite inferior y otro superior. La aplicación repetida de estos métodos siempre genera aproximaciones cada vez más cercanas a la raíz. Se dice que tales métodos son *convergentes* porque se acercan progresivamente a la raíz a medida que se avanza en el cálculo.

En contraste, los **métodos abiertos** se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio x o que empiecen con un par de ellos, pero que no necesariamente encierran la raíz. Éstos, algunas veces *divergen* o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza en el cálculo. Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados. Empecemos el análisis de los métodos abiertos con una versión simple que es útil para ilustrar su forma general y también para demostrar el concepto de convergencia.

Métodos abiertos

FIGURA 6.1
Representación gráfica de las diferencias fundamentales entre los métodos *a*) *cerrados*, *b*) y *c*) los métodos abiertos para el cálculo de raíces. En *a*) se ilustra el método de bisección, donde la raíz está contenida dentro del intervalo dado por x_l, y x_u. En contraste, en los métodos abiertos, ilustrados en *b*) y *c*), se utiliza una fórmula para dirigirse de x_i a x_{i+1}, con un esquema iterativo. Así, el método puede *b*) diverger o *c*) converger rápidamente, dependiendo de los valores iniciales.



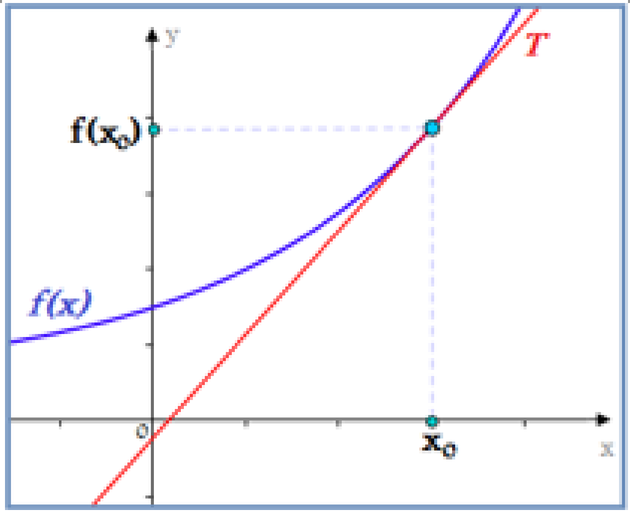
Se estudiarán los métodos de:

- ~~iteración de un punto fijo~~
- Newton-Raphson
- de la secante

Método de Newton

El **método de Newton**, también conocido como **método de Newton-Raphson**, utiliza rectas tangentes a diferentes puntos de una función f para aproximar una solución real de la ecuación $f(x) = 0$. Antes de analizar dicho método, repasemos como hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función:

➩ **Recta tangente a la gráfica de una función:**



Sea f una función derivable. La recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $(x_0; y_0)$ es la recta que pasa por ese punto y cuya pendiente es el valor de la derivada de la función para $x = x_0$.

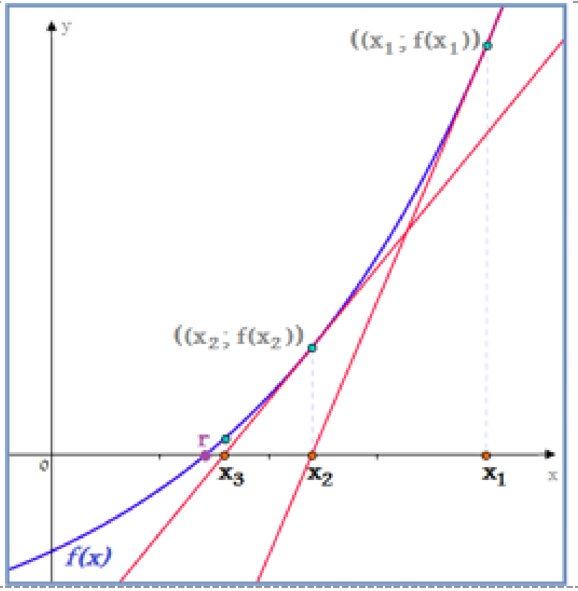
Luego, la ecuación de la recta tangente a f que pasa por el punto $(x_0; y_0)$ es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0)$$

Método de Newton

Veamos entonces en qué consiste el método de Newton. Supongamos que r es una raíz de f, siendo f una función diferenciable. Por consiguiente, la gráfica de f tiene una recta tangente en cada punto.

El método de Newton propone considerar una primera aproximación x_1 para r, ya sea a través de la gráfica de f o por cualquier otro medio. Luego, una mejor aproximación de r será la abscisa del punto donde la recta tangente a f que pasa por el punto $(x_1; f(x_1))$ interseca al eje de abscisas. A la abscisa este último punto lo denotaremos x_2. Entonces, utilizando x_2 como aproximación de r, podemos determinar una aproximación x_3 aún mejor, y así, sucesivamente.



Analicemos dicho proceso considerando que la ecuación de la recta tangente a f que pasa por el punto $(x_0; y_0)$ es: $y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0)$.

Si partimos de una primera aproximación x_1 para r, la recta tangente a f en el punto $(x_1; f(x_1))$ será:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)\ (x - x_1)$$

Método de Newton

Luego, se desea encontrar x_2 que es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente a f en $(x_1; f(x_1))$ y el eje de abscisas. Por consiguiente, el punto $(x_2; 0)$ pertenece a la recta tangente a f en $(x_1; f(x_1))$ cuya fórmula hallamos anteriormente. Entonces, haciendo $x = x_2$ e $y = 0$ en dicha fórmula, se obtiene:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)\ (x_2 - x_1)$$

$$-f(x_1) = f'(x_1)\ (x_2 - x_1)$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Si continuamos con el razonamiento, en la iteración $n + 1$ tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}$$

Método de Newton

Algoritmo	Método de Newton

Sea f una función derivable y x_1 una aproximación inicial a la raíz r de f.

Sea $\mathcal{E}$ la tolerancia para el error $E = |r - x_{n+1}|$.

Repetir el siguiente paso para $n = 1,2, \ldots$ hasta que $|x_{n+1} - x_n| < \mathcal{E}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si $|x_{n+1} - x_n| < \mathcal{E}$, entonces tomar x_{n+1} como aproximación final.

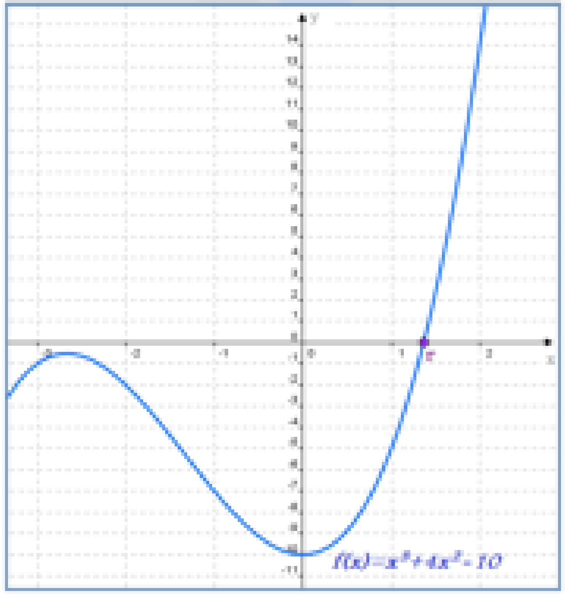
Método de Newton

Consideremos nuevamente el último ejemplo analizado al desarrollar el método de bisección y resolvámoslo aplicando el método de Newton.

Ejemplo 1

Determinar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ utilizando el método de Newton. Continuar las iteraciones hasta lograr que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 10^{-5}.

<u>Observación:</u> la gráfica de dicha función se realizó en el ejemplo 3 del método de bisección.



Método de Newton

➲ Solución:

Podemos observar a partir de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ que la raíz r se encuentra entre 1 y 2. Por lo tanto, podemos elegir como primera aproximación a $x_1 = 1$.

Como $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ y $f'(x) = 3x^2 + 8x$, resulta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 + 4{x_n}^2 - 10}{3{x_n}^2 + 8x_n}$$

Luego, obtenemos la siguiente tabla:

n	x_n	Cota de error $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	1	
2	1,454545455	0,454545455
3	1,368900401	0,085645054
4	1,3652366	0,003663801
5	1,365230013	0,000006587

Como para $n = 5$ la cota de error es inferior a 10^{-5}, la raíz aproximada de r es $x_5 = 1.365230013$.

Método de Newton

A partir de este ejemplo podemos ver que el método de Newton es más rápido que el método de bisección, ya que es 5 iteraciones se logró aproximar la raíz con la precisión deseada mientras que aplicando el método de bisección hubiesen sido necesarias 17 iteraciones. Igualmente, el método de Newton posee como desventaja que no siempre converge. Este hecho lo analizaremos más adelante.

Método de Newton

Ejemplo 2

Aproximar $\sqrt[3]{590}$ utilizando el método de Newton.

Sugerencia: considere $f(x) = x^3 - 590$

Método de Newton

➲ Solución:

El problema de calcular $x = \sqrt[3]{590}$ se puede reformular como determinar la raíz de la función dada por $f(x) = x^3 - 590$.

Sabemos que la raíz r de $f(x) = x^3 - 590$ corresponde a la solución real y positiva de la ecuación $x^3 - 590 = 0$. Por lo tanto, al momento de elegir una estimación inicial es pertinente considerar un valor x_1 tal que $|f(x_1)|$ sea lo más próximo a cero. Elegir una estimación inicial considerando este detalle nos permitirá tener una menor cantidad de iteraciones al momento de aplicar el método de Newton. Observemos lo siguiente:

x_1	$f(x_1) = {x_1}^3 - 590$	$\|f(x_1)\|$
7	-247	247
8	-78	78
9	139	139

Entonces, podemos definir una estimación inicial $x_1 = 8$.

Como $f(x) = x^3 - 590$ y $f'(x) = 3x^2$, resulta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 590}{3{x_n}^2}$$

Método de Newton

Como en este segundo ejemplo no se menciona una cota de error deseada, consideraremos como tolerancia 10^{-9}, ya que las calculadoras, generalmente, aproximan hasta nueve decimales.

Luego, aplicando el método de Newton, obtenemos la siguiente tabla:

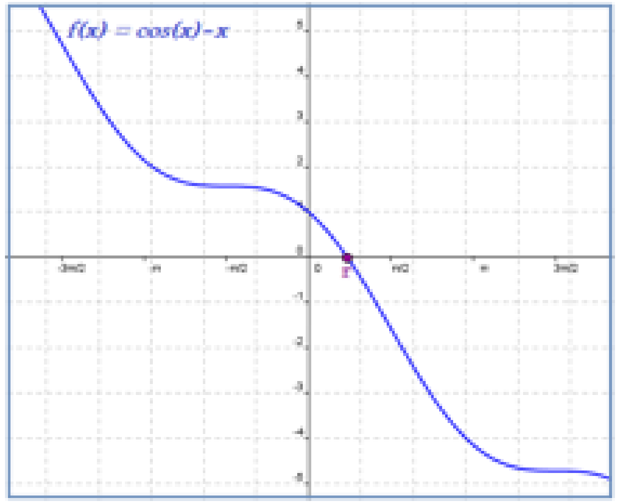
n	x_n	Cota de error $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	8	
2	8,40625	0,40625
3	8,387249635	0,019000365
4	8,387206527	0,000043108
5	8,387206527	$< 10^{-9}$

Como para $n = 5$ la cota de error es inferior a 10^{-9}, la raíz aproximada de r es $x_5 = 8{,}387206527$.

Método de Newton

Ejemplo 3

Determinar la raíz de $f(x) = \cos(x) - x$ utilizando el método de Newton. Continuar las iteraciones hasta lograr una cota de error inferior a 10^{-5}.



Método de Newton

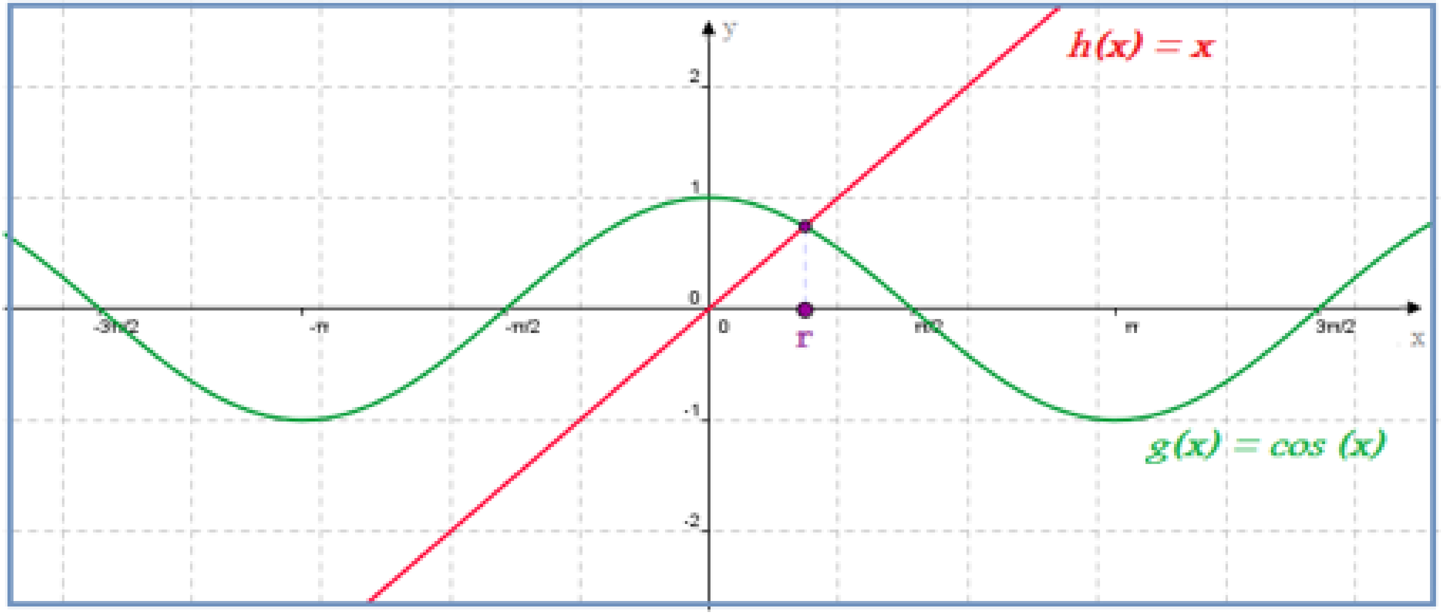
➲ Solución:

Como puede observarse en la gráfica de $f(x) = \cos(x) - x$, la raíz de dicha función es próxima a 1. Por consiguiente una estimación inicial de r puede ser $x_1 = 1$.

Igualmente, veamos cómo podemos elegir una primera aproximación pertinente, sin la ayuda de un graficador de funciones, de manera similar a como lo hemos hecho en el ejemplo número 3 del método de bisección.

Como sabemos, r es una solución real a la ecuación $f(x) = 0$. Por lo tanto, r es una solución real a la ecuación $\cos(x) - x = 0$. De allí, realizando pasaje de términos se puede obtener la igualdad $\cos(x) = -x$. Entonces, otra forma de determinar un intervalo inicial que contenga a r es representar gráficamente las funciones $g(x) = \cos(x)$ y $h(x) = -x$. Luego, la abscisa del punto de intersección de ambas funciones es equivalente a la raíz buscada. La ventaja de este procedimiento es que permite deducir una aproximación inicial para aplicar el método de Newton a partir de la gráfica de funciones cuya gráfica es conocida.

Método de Newton



Luego, podemos definir una estimación inicial $x_1 = 1$.

Método de Newton

Como $f(x) = \cos(x) - x$ y $f'(x) = -sen(x) - 1$, resulta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-sen(x_n) - 1}$$

Cabe aclarar que al momento de completar la tabla, es importante utilizar la calculadora en modo radianes ya que se trata de una función trigonométrica.

Entonces, aplicando el método de Newton, obtenemos la siguiente tabla:

n	x_n	Cota de error $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	1	
2	0,7503638678	0,2496361322
3	0,737151911	0,0132119568
4	0,7394466703	0,0022947593
5	0,7390185163	0,000428154
6	0,7390974422	0,0000789259
7	0,73908286	0,0000145822
8	0,7390855531	0,0000026931

Como para $n = 8$ la cota de error inferior a 10^{-5}, la raíz aproximada de r es $x_5 =$ 0,7390855531.

Método de Newton

Algunas consideraciones sobre el método de Newton

Cuando las aproximaciones a una raíz r de una función f tienden a un límite finito, como en los ejemplos anteriores, se dice que la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ **converge**.

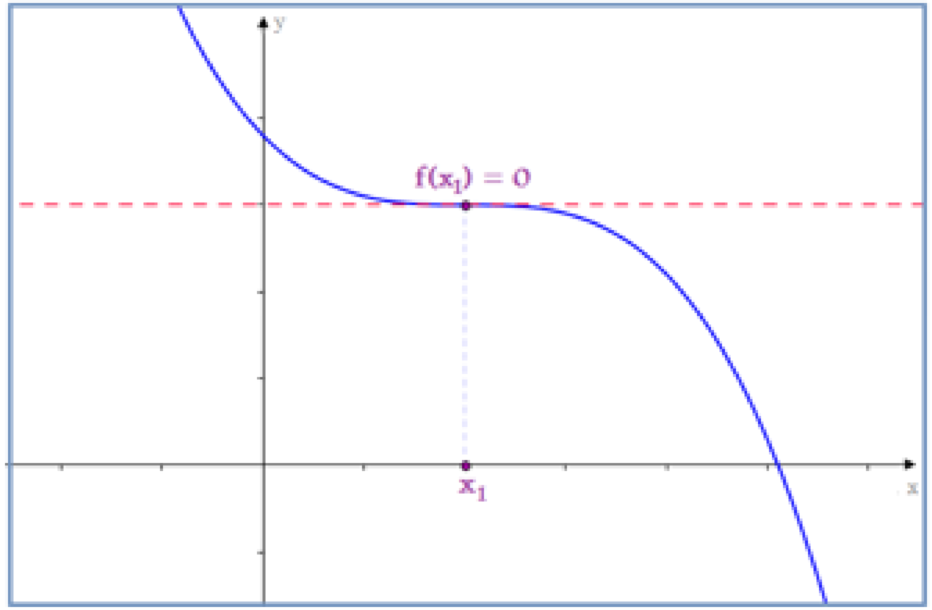
A continuación, observaremos que el método de Newton no siempre proporciona una sucesión convergente. Analizaremos dos dificultades posibles:

Método de Newton

Primera dificultad

Debido a que el método de Newton implica la división por $f'(x)$, es claro que el método fallará si la derivada es cero para cualquier x_n de la sucesión.

Este problema puede subsanarse eligiendo un valor diferente para x_1.



Método de Newton

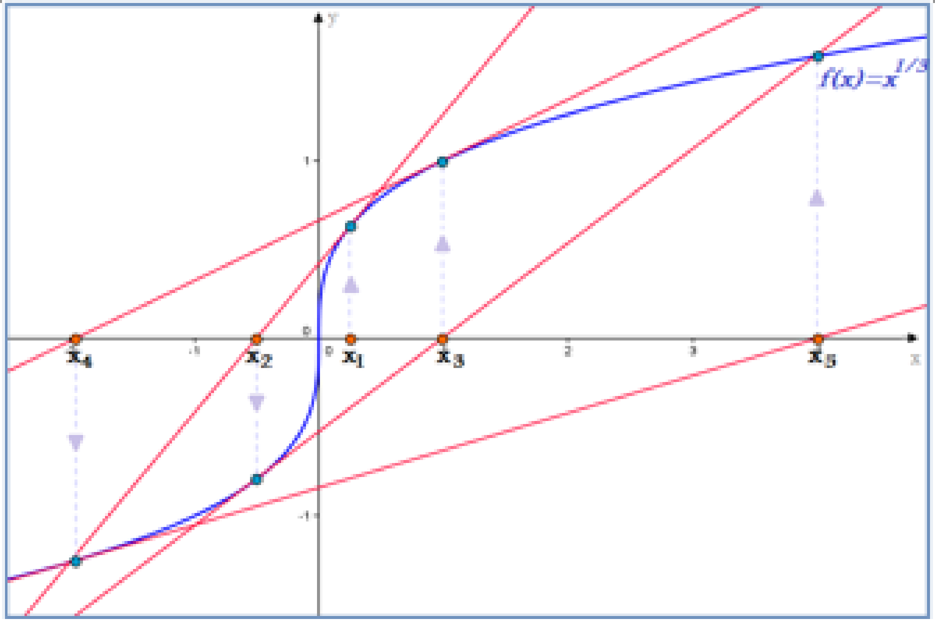
Segunda dificultad

Otra forma en la que el método de Newton falla se muestra en el siguiente ejemplo.

⇨ La función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ no es derivable en $x = 0$. Demostrar que el método de Newton no converge al utilizar $x_1 = 0{,}1$.

Como $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ y $f'(x) = \frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}}$, resulta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}.x_n^{-\frac{2}{3}}} = -2.x_n$$



Método de Newton

Entonces, aplicando el método de Newton, obtenemos la siguiente tabla:

n	x_n	Cota de error $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	0,1	
2	−0,2	0,3
3	0,4	0,6
4	−0,8	1,2
5	1,6	2,4

Como podemos observar, al aumentar las iteraciones, la cota de error aumenta. Este hecho también se manifiesta en la gráfica de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Para $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ no converge para ninguna elección de la aproximación inicial x_1, lo que significa que el límite de esta sucesión no existe.

Cuando el método de Newton falla en producir aproximaciones que convergen a la solución, se puede reintentar aplicar dicho método a partir de otra estimación inicial ó bien, utilizar otro, como el método de bisección.

Método de la secante

Un problema potencial en la implementación del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada. Aunque esto no es un inconveniente para los polinomios ni para muchas otras funciones, existen algunas funciones cuyas derivadas en ocasiones resultan muy difíciles de calcular. En dichos casos, la derivada se puede aproximar mediante una diferencia finita dividida hacia atrás, como en (figura 6.7)

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Método de la secante

Esta aproximación se sustituye en la ecuación (6.6) para obtener la siguiente ecuación iterativa:

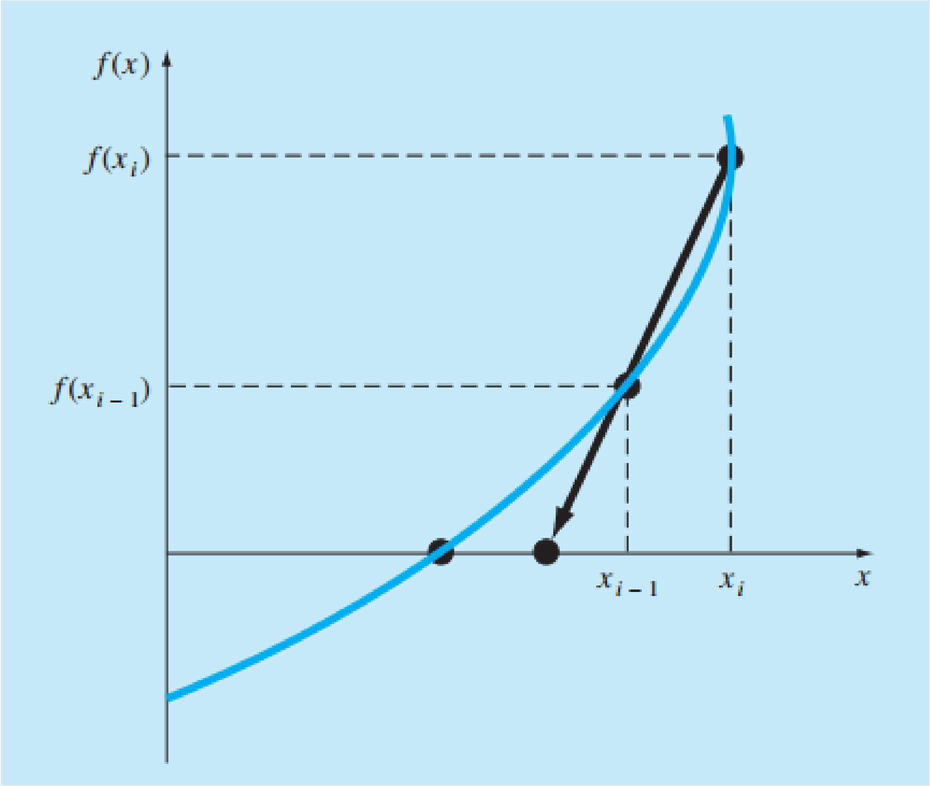
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - (f(x_i)} \tag{6.7}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

La ecuación (6.7) es la fórmula para el *método de la secante*. Observe que el método requiere de dos valores iniciales de x. Sin embargo, debido a que no se necesita que $f(x)$ cambie de signo entre los valores dados, este método no se clasifica como un método cerrado.

Método de la secante

FIGURA 6.7
Representación gráfica del método de la secante. Esta técnica es similar a la del método de Newton-Raphson (figura 6.5) en el sentido de que una aproximación de la raíz se predice extrapolando una tangente de la función hasta el eje x. Sin embargo, el método de la secante usa una diferencia dividida en lugar de una derivada para estimar la pendiente.



Método de la secante

EJEMPLO 6.6 El método de la secante

Planteamiento del problema. Con el método de la secante calcule la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$. Comience con los valores iniciales $x_{-1} = 0$ y $x_0 = 1.0$.

Solución. Recuerde que la raíz real es 0.56714329...

Primera iteración:

$$x_{-1} = 0 \qquad f(x_{-1}) = 1.00000$$

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = 1 - \frac{-0.63212(0-1)}{1-(-0.63212)} = 0.61270 \qquad \varepsilon_t = 8.0\%$$

Segunda iteración:

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = 0.61270 \qquad f(x_1) = -0.07081$$

(Note que ambas aproximaciones se encuentran del mismo lado de la raíz.)

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.07081\,(1-0.61270)}{-0.63212-(0.07081)} = 0.56384 \qquad \varepsilon_t = 0.58\%$$

Tercera iteración:

$$x_1 = 0.61270 \qquad f(x_1) = -0.07081$$

$$x_2 = 0.56384 \qquad f(x_2) = 0.00518$$

$$x_3 = 0.56384 - \frac{0.00518(0.61270-0.56384)}{-0.07081-(-0.00518)} = 0.56717 \qquad \varepsilon_t = 0.0048\%$$

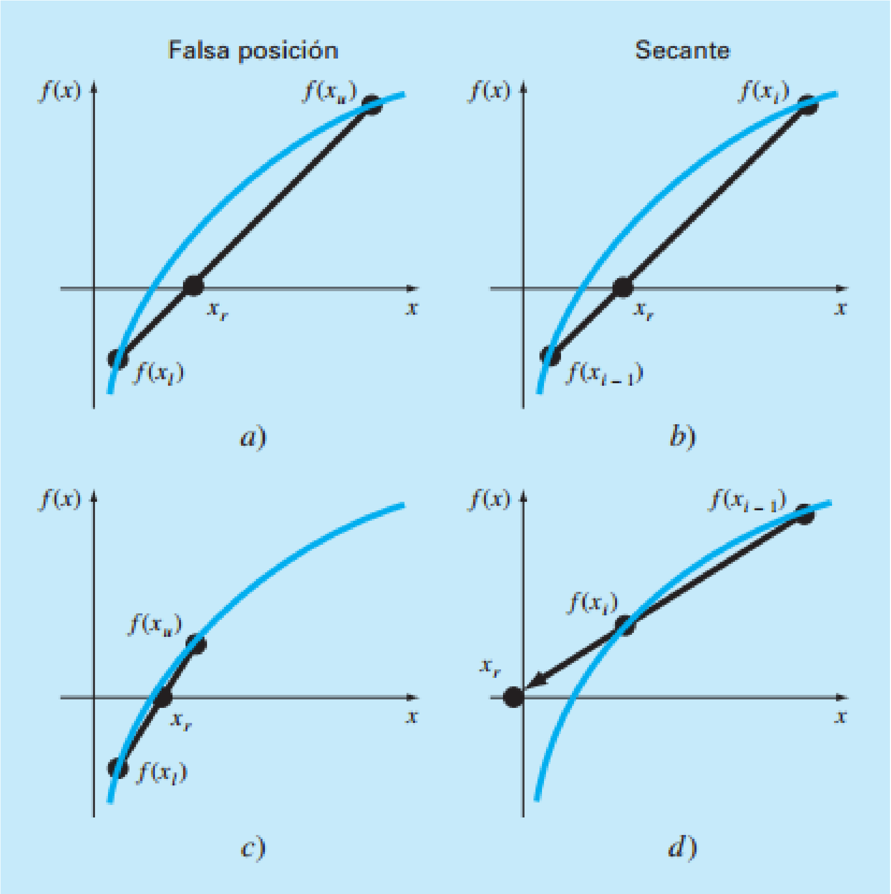
Comparación

6.3.1 Diferencia entre los métodos de la secante y de la falsa posición

Observe la similitud entre los métodos de la secante y de la falsa posición. Por ejemplo, las ecuaciones (6.7) y (5.7) son idénticas en todos los términos. Ambas usan dos valores iniciales para calcular una aproximación de la pendiente de la función que se utiliza para proyectar hacia el eje x una nueva aproximación de la raíz. Sin embargo, existe una diferencia crítica entre ambos métodos. Tal diferencia estriba en la forma en que uno de los valores iniciales se reemplaza por la nueva aproximación. Recuerde que en el método de la falsa posición, la última aproximación de la raíz reemplaza cualquiera de los valores iniciales que dé un valor de la función con el mismo signo que $f(x_r)$. En consecuencia, las dos aproximaciones siempre encierran a la raíz. Por lo tanto, para todos los casos, el método siempre converge, pues la raíz se encuentra dentro del intervalo. En contraste, el método de la secante reemplaza los valores en secuencia estricta: con el nuevo valor x_{i+1} se reemplaza a x_i y x_i reemplaza a x_{i-1}. En consecuencia, algunas veces los dos valores están en el mismo lado de la raíz. En ciertos casos esto puede llevar a divergencias.

Comparación

FIGURA 6.8
Comparación entre los métodos de la falsa posición y de la secante. Las primeras iteraciones *a)* y *b)* de ambos métodos son idénticas. No obstante, en las segundas iteraciones *c)* y *d)*, los puntos usados son diferentes. En consecuencia, el método de la secante llega a diverger, como se indica en *d)*.



Comparación

EJEMPLO 6.7 Comparación de la convergencia en los métodos de la secante y de la falsa posición

Planteamiento del problema. Utilice los métodos de la secante y de la falsa posición para calcular la raíz de $f(x) = \ln x$. Empiece los cálculos con los valores iniciales $x_l = x_{i-1} = 0.5$ y $x_u = x_i = 5.0$.

Solución. En el método de la falsa posición, con el uso de la ecuación (5.7) y los criterios del intervalo para el reemplazo de las aproximaciones, se obtienen las siguientes iteraciones:

Iteración	x_l	x_u	x_r
1	0.5	5.0	1.8546
2	0.5	1.8546	1.2163
3	0.5	1.2163	1.0585

Como se observa (figuras 6.8*a* y *c*), las aproximaciones van convergiendo a la raíz real que es igual a 1.

En el método de la secante, con el uso de la ecuación (6.7) y el criterio secuencial para el reemplazo de las aproximaciones, se obtiene:

Iteración	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
1	0.5	5.0	1.8546
2	5.0	1.8546	–0.10438

Como se muestra en la figura 6.8*d*, el método es divergente.

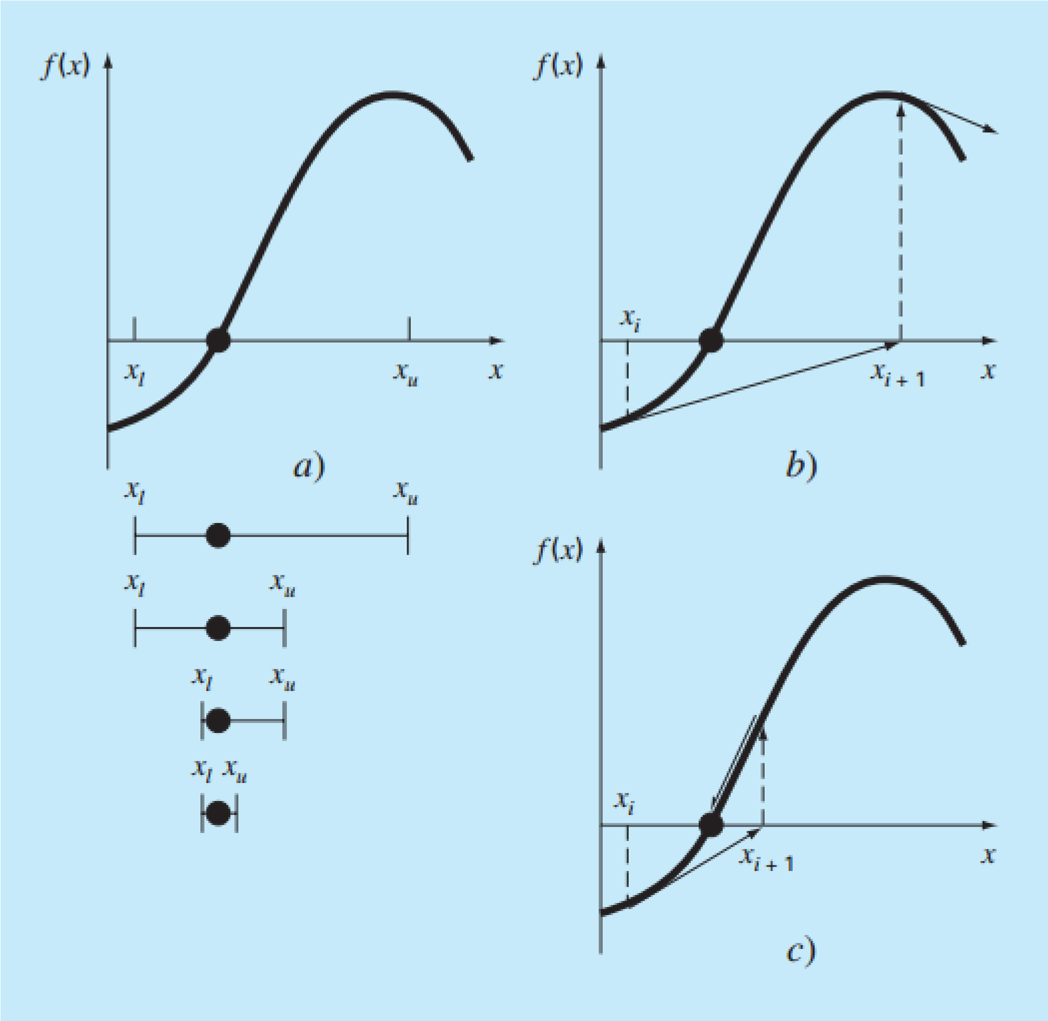
Conclusiones

Los métodos numéricos se dividen en dos grandes categorías: métodos cerrados y abiertos. Los primeros requieren dos valores iniciales que estén a ambos lados de la raíz, para acotarla. Este "acotamiento" se mantiene en tanto se aproxima a la solución, así, dichas técnicas son siempre convergentes. Sin embargo, se debe pagar un precio por esta propiedad, la velocidad de convergencia es relativamente lenta.

Las técnicas abiertas difieren de los métodos cerrados inicialmente en que usan la información de un solo punto (o dos valores que no necesitan acotar a la raíz para extrapolar a una nueva aproximación de la misma). Esta propiedad es una espada de dos filos. Aunque llevan a una rápida convergencia, también existe la posibilidad de que la solución diverja. En general, la convergencia con técnicas abiertas es parcialmente dependiente de la calidad del valor inicial y de la naturaleza de la función. Cuanto más cerca esté el valor inicial de la raíz verdadera, los métodos convergerán más rápido.

Conclusiones

FIGURA 6.1
Representación gráfica de las diferencias fundamentales entre los métodos *a) cerrados*, *b)* y *c)* los métodos abiertos para el cálculo de raíces. En *a)* se ilustra el método de bisección, donde la raíz está contenida dentro del intervalo dado por x_l, y x_u. En contraste, en los métodos abiertos, ilustrados en *b)* y *c)*, se utiliza una fórmula para dirigirse de x_i a x_{i+1}, con un esquema iterativo. Así, el método puede *b)* diverger o *c)* converger rápidamente, dependiendo de los valores iniciales.



Conclusiones

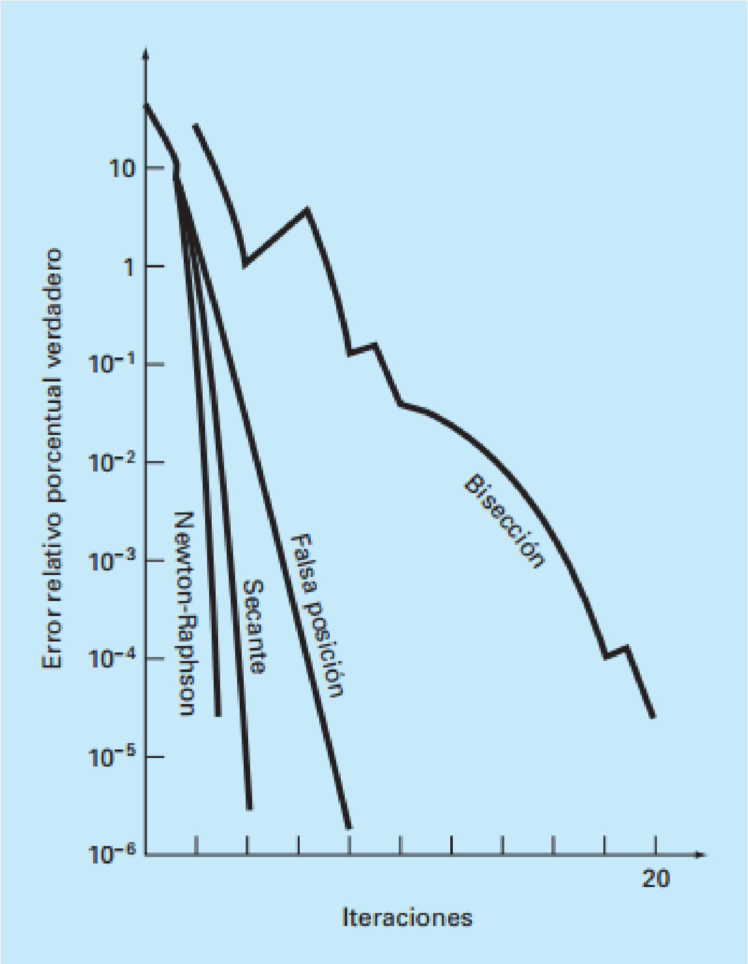
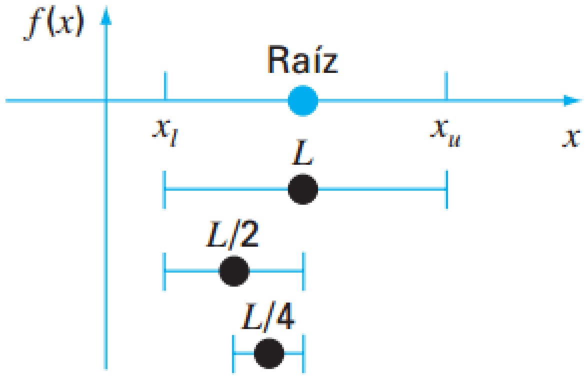
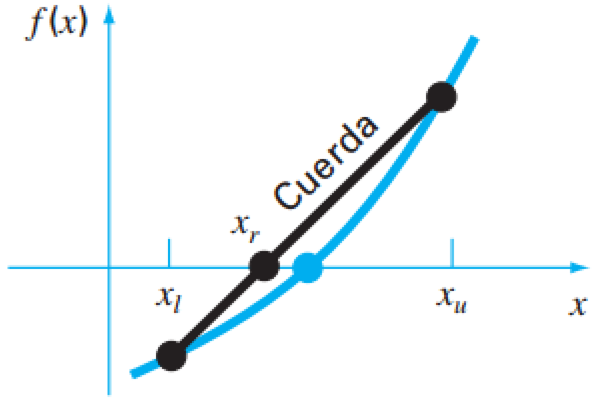
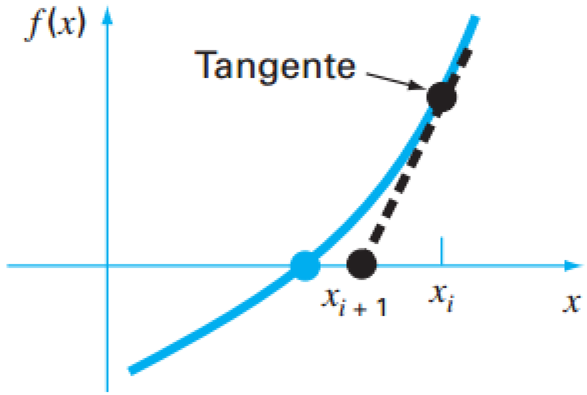
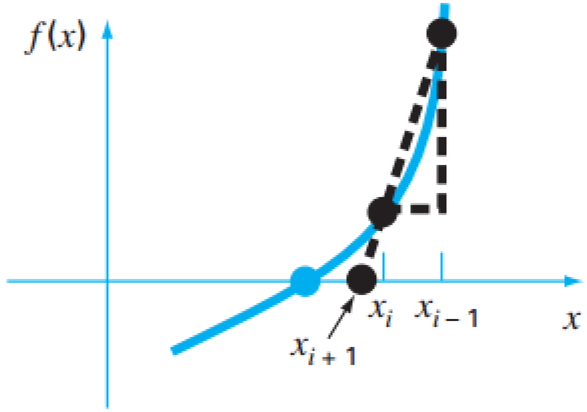


FIGURA 6.9
Comparación de los errores relativos porcentuales verdaderos ε_t, para los métodos que determinan las raíces de $f(x) = e^{-x} - x$.

Resumen

Método	Formulación	Interpretación gráfica	Errores y criterios de terminación
		Métodos cerrados:	
Bisección	$x_r = \dfrac{x_l + x_u}{2}$ Si $f(x_l)f(x_r) < 0,\ x_u = x_r$ $f(x_l)f(x_r) > 0,\ x_l = x_r$		Criterio de terminación: $\left\lvert \dfrac{x_r^{\text{nuevo}} - x_r^{\text{anterior}}}{x_r^{\text{nuevo}}} \right\rvert 100\% \le \epsilon_s$
Falsa posición	$x_r = x_u - \dfrac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$ Si $f(x_l)f(x_r) < 0, x_u = x_r$ $f(x_l)f(x_r) > 0,\ x_l = x_r$		Criterio de terminación: $\left\lvert \dfrac{x_r^{\text{nuevo}} - x_r^{\text{anterior}}}{x_r^{\text{nuevo}}} \right\rvert 100\% \le \epsilon_s$

Resumen

Método	Formulación	Interpretación gráfica	Errores y criterios de terminación
Newton-Raphson	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$		Criterio de terminación: $\left\|\dfrac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right\| 100\% \le \epsilon_s$ Error: $E_{i+1} = O(E_i^2)$
Secante	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f'(x_{i-1}) - f(x_i)}$		Criterio de terminación: $\left\|\dfrac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right\| 100\% \le \epsilon_s$

Comparación

TABLA PT2.3 Comparación de las características de los métodos alternativos para encontrar raíces de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Las comparaciones se basan en la experiencia general y no toman en cuenta el comportamiento de funciones específicas.

Método	Valores iniciales	Velocidad de convergencia	Estabilidad	Exactitud	Amplitud de aplicación	Complejidad de programación	Comentarios
Directo	—	—	—	—	Limitada		
Gráfico	—	—	—	Pobre	Raíces reales	—	Puede tomar más tiempo que el método numérico
Bisección	2	Lenta	Siempre	Buena	Raíces reales	Fácil	
Falsa posición	2	Lenta/media	Siempre	Buena	Raíces reales	Fácil	
FP modificado	2	Media	Siempre	Buena	Raíces reales	Fácil	
Iteración de punto fijo	1	Lenta	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	
Newton-Raphson	1	Rápida	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	Requiere la evaluación de $f'(x)$
Newton-Raphson modificado	1	Rápida para raíces múltiples; media para una sola	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	Requiere la evaluación de $f''(x)$ y $f'(x)$
Secante	2	Media a rápida	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	Los valores iniciales no tiene que acotar la raíz
Secante modificada	1	Media a rápida	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	
Müller	2	Media a rápida	Posiblemente divergente	Buena	Polinomios	Moderada	
Bairstow	2	Rápida	Posiblemente divergente	Buena	Polinomios	Moderada	

Raíces múltiples

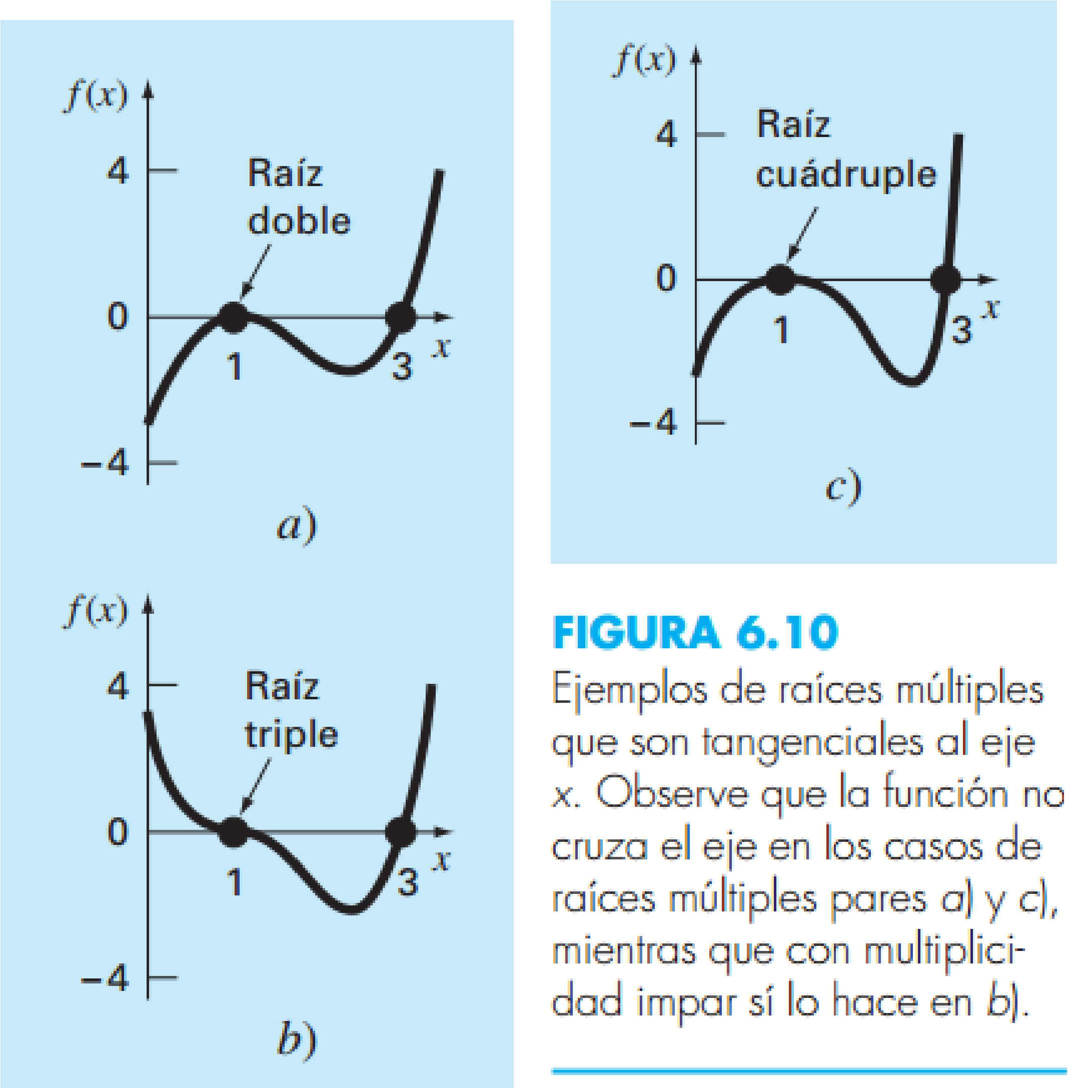


FIGURA 6.10
Ejemplos de raíces múltiples que son tangenciales al eje x. Observe que la función no cruza el eje en los casos de raíces múltiples pares *a*) y *c*), mientras que con multiplicidad impar sí lo hace en *b*).

Las raíces múltiples ofrecen algunas dificultades a muchos de los métodos numéricos expuestos en la parte dos:

1. El hecho de que la función no cambie de signo en raíces múltiples pares impide confiarse de los métodos cerrados, que se analizan en el capítulo 5. Así, en los métodos incluidos en este texto, se está limitando a los abiertos que pueden ser divergentes.
2. Otro posible problema se relaciona con el hecho de que no sólo $f(x)$, sino también $f'(x)$ se aproxima a cero en la raíz. Tales problemas afectan los métodos de Newton-Raphson y de la secante, los cuales contienen derivadas (o su aproximación) en el denominador de sus fórmulas respectivas. Esto provocará una división entre cero cuando la solución converge muy cerca de la raíz. Una forma simple de evitar dichos problemas, que se ha demostrado teóricamente (Ralston y Rabinowitz, 1978), se basa en el hecho de que $f(x)$ siempre alcanzará un valor cero antes que $f'(x)$. Por lo tanto, si se compara $f(x)$ contra cero, dentro del programa, entonces los cálculos se pueden terminar antes de que $f'(x)$ llegue a cero.

Raíces múltiples

3. Es posible demostrar que el método de Newton-Raphson y el método de la secante convergen en forma lineal, en vez de cuadrática, cuando hay raíces múltiples (Ralston y Rabinowitz, 1978). Se han propuesto algunas modificaciones para atenuar este problema. Ralston y Rabinowitz (1978) proponen que se realice un pequeño cambio en la formulación para que se regrese a la convergencia cuadrática, como en

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{6.9a}$$

donde m es la multiplicidad de la raíz (es decir, $m = 2$ para una raíz doble, $m = 3$ para una raíz triple, etc.). Se trata de una alternativa poco satisfactoria, porque depende del conocimiento de la multiplicidad de la raíz.

Raíces múltiples

Otra alternativa, también sugerida por Ralston y Rabinowitz (1978), consiste en definir una nueva función $u(x)$, que es el cociente de la función original entre su derivada:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{6.10}$$

Se puede demostrar que esta función tiene raíces en las mismas posiciones que la función original. Por lo tanto, la ecuación (6.10) se sustituye en la ecuación (6.6) para desarrollar una forma alternativa del método de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} \tag{6.11}$$

Se deriva con respecto a x la ecuación (6.10) para obtener

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \tag{6.12}$$

Se sustituyen las ecuaciones (6.10) y (6.12) en la ecuación (6.11) y se simplifica el resultado:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

EJEMPLO 6.9 Método de Newton-Raphson modificado para el cálculo de raíces múltiples

Planteamiento del problema. Con los dos métodos, el estándar y el modificado, de Newton-Raphson evalúe la raíz múltiple de la ecuación (6.9), use un valor inicial de $x_0 = 0$.

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)$$

Planteamiento del problema. Con los dos métodos, el estándar y el modificado, de Newton-Raphson evalúe la raíz múltiple de la ecuación (6.9), use un valor inicial de $x_0 = 0$.

Solución. La primera derivada de la ecuación (6.9) es $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$, y por lo tanto, el método de Newton-Raphson estándar para este problema es [ecuación (6.6)]

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_1^2 - 10x_i + 7}$$

que se resuelve iterativamente para obtener

i	x_i	ε_t(%)
0	0	100
1	0.4285714	57
2	0.6857143	31
3	0.8328654	17
4	0.9133290	8.7
5	0.9557833	4.4
6	0.9776551	2.2

Como ya se había anticipado, el método converge en forma lineal hacia el valor verdadero 1.0.

Para el caso del método modificado, la segunda derivada es $f''(x) = 6x - 10$, y en consecuencia la ecuación iterativa será [ecuación (6.13)]

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(3x_i^2 - 10x_i + 7)}{(3x_i^2 - 10x_i + 7)^2 - (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

que se resuelve para obtener

i	x_i	ε_t(%)
0	0	100
1	1.105263	11
2	1.003082	0.31
3	1.000002	0.00024

De esta manera, la fórmula modificada converge en forma cuadrática. Se pueden usar ambos métodos para buscar la raíz simple en $x = 3$. Con un valor inicial $x_0 = 4$ se obtienen los siguientes resultados:

i	Estándar	ε_t(%)	Modificado	ε_t(%)
0	4	33	4	33
1	3.4	13	2.636364	12
2	3.1	3.3	2.820225	6.0
3	3.008696	0.29	2.961728	1.3
4	3.000075	0.0025	2.998479	0.051
5	3.000000	2×10^{-7}	2.999998	7.7×10^{-5}

De esta forma, deberá notar que, ambos métodos convergen con rapidez, aunque el método estándar es el más eficiente.

Actividades

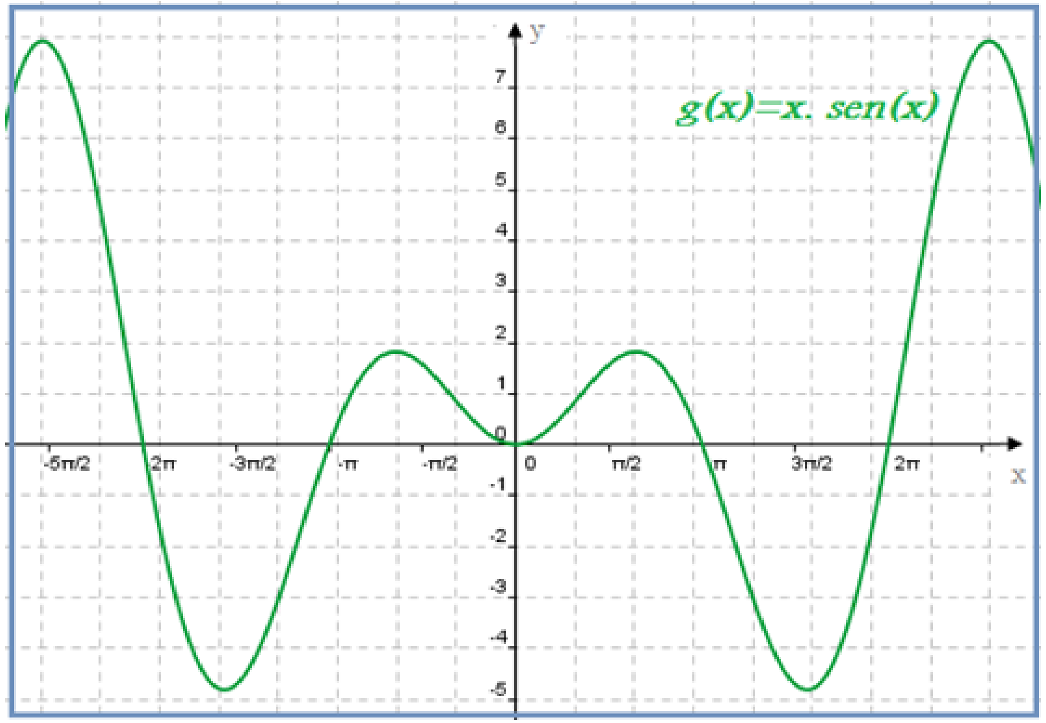
❶ Considerando que la raíz de $f(x) = e^x - x^2$ pertenece al intervalo $[-1; 0]$, aproxima dicha raíz con una tolerancia $\varepsilon = 0{,}01$ mediante el método de bisección.

❷ Calcula la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar $\sqrt[3]{20}$ con una tolerancia de 10^{-2} considerando como intervalo inicial a $[2{,}5 ; 3]$. Luego, aproxima dicho radical a través del método de bisección.

❸ Aplicando el método de bisección, aproxima la raíz de $f(x) = x - 2^{-x}$ con una tolerancia de 10^{-2}.

Actividades

❹ A partir de la gráfica de $g(x) = x.sen(x)$, determina un intervalo al cual pertenezca la segunda raíz positiva de la función $f(x) = x.sen(x) - 1$. Luego aproxima dicha raíz, con una tolerancia de 10^{-1}, utilizando el método de bisección.



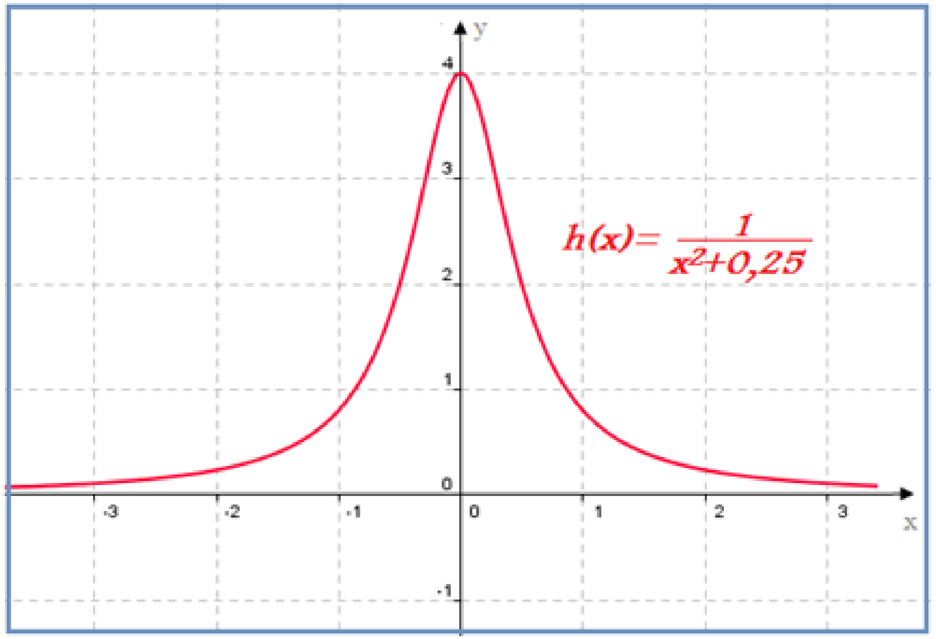
❺ Determina la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de $f(x) = x^3 - x - 1$ aplicando el método de bisección considerando una tolerancia de $\mathcal{E} = 10^{-6}$.

Actividades

❻ Aproxima la raíz positiva de la función $f(x) = -2x^2 + 3$ mediante el método de Newton, considerando como aproximación inicial a $x_1 = 1{,}5$.

❼ Utiliza el método de Newton para calcular $\sqrt[4]{47}$ con cinco decimales de precisión.

❽ A partir de la gráfica de $h(x) = \frac{1}{x^2+0{,}25}$, determina una aproximación inicial para la segunda raíz positiva de la función $f(x) = -3 + 2x + \frac{1}{x^2+0{,}25}$. Luego aproxima dicha raíz, con una tolerancia de 10^{-5}, utilizando el método de Newton.



❾ Aplicando el método de Newton, aproxima la menor raíz positiva de $f(x) = tg(x) - 0{,}5x$.

❿ Aproxima la segunda raíz positiva de $f(x) = sen(x) - 0{,}1e^x$ aplicando el método de Newton.