Fisi 4125 *19 de marzo de 2021*

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Física
Examen I

Instrucciones para Entregar su Examen

Instrucciones para Entregar su Examen

1) Suba los programas usados para contestar el examen con los nombres *Prob1.py*, *Prob2.py*, y *Prob3.py* a la plataforma Moodle antes de las 8:30 pm del viernes, 19 de marzo de 2021. Suba las respuestas a las preguntas del examen en un documento pdf.
2) 60 puntos = 100%

1. (20 puntos)

La teoría de radiación de Planck no dice que en el intervalo de frecuencia (angular) entre ω y ω + dω un cuerpo negro irradía electromagnéticamente una cantidad de energía termal por segundo igual a $I(\omega)\, d\omega$, donde

$$I(\omega) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}.$$

Aquí $\hbar$ es la constante de Planck sobre 2π, c es la velocidad de la luz, y k_B es la constante de Boltzmann.

a) Demuestre que la energía total irradiada por unidad de área es

$$W = \frac{k_B^4 T^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx.$$

(5 puntos)

b) Utilice cuadratura de Gauss para evaluar el integral en esta expresión. ¿Qué tan exacta piensas que es tú respuesta? (10 puntos)

c) La energía total por unidad de área por segundo que emite un cuerpo negro satisfice la ley de Stefan, $W = \sigma T^4$, donde σ es el valor de la constante de Stefan-Boltzmann. Utilice el valor obtenido por para el integral para estimar el valor de la constante de Stefan-Boltzmann (en unidades SI) a tres cifras significativas. (5 puntos)

2. ***(20 puntos)***

Un modelo simple para estudiar la efectividad de un medicamento antiviral en controlar una infección viral asume que en la sangre coexisten dos poblaciones que interacción entre sí mediante procesos biológicos. Una de las poblaciones son viruses, cuya concentración en la sangre en el instante t es representada por $N_v(t)$. Los viruses pueden infectar células del sistema inmunológico llamadas células T (cuya concentración en el instante t es representada por $N_I(t)$), y multiplicarse con una tasa igual a γ, y ser eliminados por la acción del sistema inmunológico con una tasa igual a k_v:

$$\frac{dN_\nu}{dt} = -k_\nu N_\nu + \gamma N_I.$$

Por otra parte, la población de células T infectadas es representada por $N_I(t)$, y sí asumimos que en el instante t = 0 días, el medicamento antiviral detiene completamente las infecciones de las células T, y que estas son eliminadas por el sistema inmunológico con una tasa igual a k_I:

$$\frac{dN_I}{dt} = -k_I N_I.$$

a) Escriba un programa que resuelva estas ecuaciones usando el método de Runge-Kutta de 4to orden para el caso en que k_v = 1.63/día, k_I = 0.49/día, y γ = 0.45/día, comenzando desde la condición inicial $N_v = 1.5 \times 10^5$ RNA/mL y $N_I = 1.02 \times 10^5$ células por mm^3. Haga que su programa haga una gráfica semi-log de la concentración del virus $N_v(t)$ y otra semi-log de la concentración de células T infectadas $N_I(t)$ desde t = 0 días hasta t = 8 días. (15 puntos)

b) Haga una descripción de los que está pasando en el sistema en términos de viruses y células T del sistema inmunológico. (5 puntos)

3. (20 puntos)

Muchos problemas en mecánica elemental tratan la física de objetos que se mueven o vuelan por el aire, pero casi siempre ignoran la fricción y la resistencia del aire para así simplificar las ecuaciones de movimiento, y permitir que las ecuaciones puedan resolverse analíticamente. Sí utilizamos una computadora no tenemos que simplificar las ecuaciones.

Considere una bala de cañón esférica lanzada desde un cañón a nivel del piso. La resistencia del aire en una esfera en movimiento es una fuerza en la dirección opuesta al movimiento con magnitud

$$F = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho C v^2$$

donde *R* es el radio de la esfera, *ρ* es la densidad del aire, *v* es la velocidad, and *C* es el llamado coeficiente de arrastre (una propiedad de la forma del objeto en movimiento, en este caso una esfera).

a) (5 puntos) Empezando desde la segunda ley de Newton, $F = ma$, demuestre que las ecuaciones de movimiento para la posición (*x, y*) de la bala de cañón son

$$\ddot{x} = -\frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad \ddot{y} = -g - \frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

donde *m* es la masa de la bala de cañón, *g* es la aceleración de la gravedad, y $\dot{x}$ *y* $\ddot{x}$ son la primera y segunda derivadas de *x* con respecto al tiempo.

b) (10 puntos) Cambie estas dos ecuaciones diferenciales de segundo-orden a cuatro ecuaciones diferenciales de primer-orden usando los métodos que hemos aprendido, luego escriba un programa que resuelva estas ecuaciones para una bola de cañón de masa 1 kg y radio 8 cm, lanzada a un ángulo de 30º con respecto a la horizontal con rapidez inicial de 100 ms^{-1}. La densidad del aire es $\rho = 1.22$ kg m^{-3} y el coeficiente de arrastre para una esfera es C = 0.47. Haga una gráfica de la trayectoria de la bola de cañón (i.e., una gráfica de *y* como función de *x*).

c) (5 puntos) Cuando ignoramos la resistencia del aire, la distancia de viaja un proyectil no depende de la masa del proyectil. En la vida real, sin embargo, la masa sí hace una diferencia. Use su programa para estimar la distancia total que viaja (sobre el piso horizontal) la bala de cañón de la parte b), y luego determine con su programa sí la bala de cañón viaja más sí es más pesada o liviana. Pudieras, por ejemplo, graficar una serie de trayectorias de la bala de cañón para masas diferentes, o pudieras hacer una gráfica de la distancia que viaja en función de la masa. Describa brevemente lo que descubras.