

Solución Asignación 2

FISI 6510

Guillermo Fidalgo

February 9, 2021

Exercise 2.10: The semi-empirical mass formula

In nuclear physics, the semi-empirical mass formula is a formula for calculating the approximate nuclear binding energy B of an atomic nucleus with atomic number Z and mass number A :

$$B = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{a_5}{A^{1/2}},$$

where, in units of millions of electron volts, the constants are $a_1 = 15.8$, $a_2 = 18.3$, $a_3 = 0.714$, $a_4 = 23.2$, and

$$a_5 = \begin{cases} 0 & \text{if } A \text{ is odd,} \\ 12.0 & \text{if } A \text{ and } Z \text{ are both even,} \\ -12.0 & \text{if } A \text{ is even and } Z \text{ is odd.} \end{cases}$$

- Write a program that takes as its input the values of A and Z , and prints out the binding energy for the corresponding atom. Use your program to find the binding energy of an atom with $A = 58$ and $Z = 28$. (Hint: The correct answer is around 490 MeV.)
- Modify your program to print out not the total binding energy B , but the binding energy per nucleon, which is B/A .
- Now modify your program so that it takes as input just a single value of the atomic number Z and then goes through all values of A from $A = Z$ to $A = 3Z$, to find the one that has the largest binding energy per nucleon. This is the most stable nucleus with the given atomic number. Have your program print out the value of A for this most stable nucleus and the value of the binding energy per nucleon.
- Modify your program again so that, instead of taking Z as input, it runs through all values of Z from 1 to 100 and prints out the most stable value of A for each one. At what value of Z does the maximum binding energy per nucleon occur? (The true answer, in real life, is $Z = 28$, which is nickel. You should find that the semi-empirical mass formula gets the answer roughly right, but not exactly.)

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Partes a) y b)

```
[2]: def Binding_energy(A,Z,ret="b"):  
    #Todos están en MeV  
    a1=15.8  
    a2=18.3  
    a3=0.714  
    a4=23.2  
    #si A es impar  
    if A%2 ==1:  
        a5= 0  
  
    #si A y Z son par  
    elif A%2 ==0 and Z%2 ==0 :  
        a5=12  
  
    #Si A es par y Z es impar  
    elif A%2==0 and Z%2==1:  
        a5=-12  
  
    B= a1*A - a2*A**(2/3) - a3*(Z**2/A**(1/3)) - a4*((A-2*Z)**2)/A + a5/(A**.5)  
  
    if ret == "b":  
        return B  
    elif ret == "b/a":  
        return B/A
```

```
[3]: print('Energía de enlace es {} MeV'.format(Binding_energy(58,28)))
```

Energía de enlace es 497.5620206224374 MeV

```
[4]: print('Energía de enlace por nucleón es {} MeV'.format(Binding_energy(58,28,ret='b/  
→a')))
```

Energía de enlace por nucleón es 8.578655527973059 MeV

Parte c)

```
[5]: Z=int(input('Ingrese número atómico\n'))  
    A = np.arange(Z,3*Z+1)
```

Ingrese número atómico
28

```
[6]: maxBindE=0  
    for a in A:  
        if Binding_energy(a,Z,ret='b/a') > maxBindE:  
            maxBindE=Binding_energy(a,Z,ret='b/a')  
            MaxA=a
```

```
print("El número de masa A={0} tiene la mayor energía por nucleón : {1} MeV".
      ↪format(MaxA,maxBindE))
```

El número de masa A=62 tiene la mayor energía por nucleón : 8.70245768367189 MeV

Parte d)

```
[7]: Z=np.arange(1,101)
MAXbindEnergies=[]
MAX_A=[]

for z in Z:

    maxBindE=0

    for a in np.arange(z,3*z+1):
        if Binding_energy(a,z,ret='b/a') > maxBindE:
            maxBindE=Binding_energy(a,z,ret='b/a')
            MaxA=a
    MAXbindEnergies.append(maxBindE)
    MAX_A.append(MaxA)

    print("El número atómico Z={0} tiene la mayor energía por nucleón cuando A={1}\n",
          ↪con energía {2}\n\n"
          .format(z,MaxA,maxBindE))
```

El número atómico Z=1 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=3
con energía 0.36869091831015793

El número atómico Z=2 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=4
con energía 5.321930578649441

El número atómico Z=3 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=7
con energía 5.280168164356119

El número atómico Z=4 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=8
con energía 6.466330085889912

El número atómico Z=5 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=11
con energía 6.650123444727665

El número atómico Z=6 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=14
con energía 7.200918138809924

El número atómico Z=7 tiene la mayor energía por nucleón cuando A=15
con energía 7.330860591990981

El número atómico $Z=8$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=18$
con energía 7.719275577459026

El número atómico $Z=9$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=19$
con energía 7.73697768275634

El número atómico $Z=10$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=22$
con energía 8.035350864715019

El número atómico $Z=11$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=25$
con energía 8.025554739665797

El número atómico $Z=12$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=26$
con energía 8.241172535624845

El número atómico $Z=13$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=29$
con energía 8.240988355754636

El número atómico $Z=14$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=30$
con energía 8.37916169002579

El número atómico $Z=15$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=33$
con energía 8.38521415855582

El número atómico $Z=16$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=36$
con energía 8.489230168218935

El número atómico $Z=17$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=37$
con energía 8.48201495174352

El número atómico $Z=18$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=40$
con energía 8.573405285254953

El número atómico $Z=19$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=43$
con energía 8.551826855569242

El número atómico $Z=20$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=44$
con energía 8.627152167121634

El número atómico $Z=21$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=47$
con energía 8.610130576802973

El número atómico $Z=22$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=48$
con energía 8.6585154571142

El número atómico $Z=23$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=51$
con energía 8.645234048730842

El número atómico $Z=24$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=54$
con energía 8.687306583887372

El número atómico $Z=25$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=55$
con energía 8.662703971015583

El número atómico $Z=26$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=58$
con energía 8.701432576808987

El número atómico $Z=27$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=61$
con energía 8.678053678353882

El número atómico $Z=28$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=62$
con energía 8.70245768367189

El número atómico $Z=29$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=65$
con energía 8.681907349580422

El número atómico $Z=30$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=68$
con energía 8.701580328486784

El número atómico $Z=31$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=69$
con energía 8.675012598311142

El número atómico $Z=32$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=72$
con energía 8.693433639739787

El número atómico $Z=33$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=75$
con energía 8.668156247337208

El número atómico $Z=34$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=76$
con energía 8.67683411103597

El número atómico $Z=35$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=79$
con energía 8.653727479263061

El número atómico $Z=36$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=82$
con energía 8.66141248935323

El número atómico $Z=37$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=85$
con energía 8.633940444065898

El número atómico $Z=38$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=86$
con energía 8.639441275530453

El número atómico $Z=39$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=89$
con energía 8.613815033672552

El número atómico $Z=40$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=92$
con energía 8.614514461544127

El número atómico $Z=41$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=93$
con energía 8.587741675710747

El número atómico $Z=42$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=96$
con energía 8.588337807352417

El número atómico $Z=43$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=99$
con energía 8.561488033970447

El número atómico $Z=44$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=102$
con energía 8.557428804696526

El número atómico $Z=45$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=103$
con energía 8.531857077904819

El número atómico $Z=46$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=106$
con energía 8.52785864674169

El número atómico $Z=47$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=109$
con energía 8.500490244095234

El número atómico $Z=48$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=110$
con energía 8.4940569666179

El número atómico $Z=49$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=113$
con energía 8.46797678166812

El número atómico $Z=50$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=116$
con energía 8.460713172533021

El número atómico $Z=51$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=119$
con energía 8.433224407343122

El número atómico $Z=52$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=120$
con energía 8.424696665334825

El número atómico $Z=53$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=123$
con energía 8.398332486638505

El número atómico $Z=54$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=126$
con energía 8.38868945344295

El número atómico $Z=55$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=129$
con energía 8.361310553455423

El número atómico $Z=56$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=130$
con energía 8.350819725669146

El número atómico $Z=57$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=133$
con energía 8.32443069811602

El número atómico $Z=58$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=136$
con energía 8.313019639868703

El número atómico $Z=59$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=139$
con energía 8.285884693887583

El número atómico $Z=60$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=140$
con energía 8.273583815729522

El número atómico $Z=61$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=143$
con energía 8.247327458286065

El número atómico $Z=62$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=146$
con energía 8.234582872513133

El número atómico $Z=63$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=149$
con energía 8.207769087134613

El número atómico $Z=64$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=150$
con energía 8.193813966434627

El número atómico $Z=65$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=153$
con energía 8.167786207290451

El número atómico $Z=66$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=156$
con energía 8.154024477520512

El número atómico $Z=67$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=159$
con energía 8.127574530301825

El número atómico $Z=68$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=162$
con energía 8.11278037767185

El número atómico $Z=69$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=163$
con energía 8.086373082934724

El número atómico $Z=70$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=166$
con energía 8.071829365612306

El número atómico $Z=71$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=169$
con energía 8.045764583108769

El número atómico $Z=72$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=172$
con energía 8.030368571593026

El número atómico $Z=73$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=175$
con energía 8.004105311543137

El número atómico $Z=74$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=176$
con energía 7.988369073415251

El número atómico $Z=75$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=179$
con energía 7.962697427019249

El número atómico $Z=76$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=182$
con energía 7.946838055684514

El número atómico $Z=77$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=185$
con energía 7.921016888554693

El número atómico $Z=78$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=188$
con energía 7.904575879934101

El número atómico $Z=79$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=191$
con energía 7.87868400232803

El número atómico $Z=80$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=192$
con energía 7.862438691993173

El número atómico $Z=81$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=195$
con energía 7.837047201045294

El número atómico $Z=82$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=198$
con energía 7.82033857608665

El número atómico $Z=83$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=201$
con energía 7.794899333942829

El número atómico $Z=84$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=204$
con energía 7.777785761025879

El número atómico $Z=85$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=205$
con energía 7.75239433360284

El número atómico $Z=86$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=208$
con energía 7.735485475322137

El número atómico $Z=87$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=211$
con energía 7.710478810144077

El número atómico $Z=88$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=214$
con energía 7.693222175964614

El número atómico $Z=89$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=217$ con energía 7.668228396728228

El número atómico $Z=90$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=220$ con energía 7.65068598823387

El número atómico $Z=91$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=223$ con energía 7.625739835440575

El número atómico $Z=92$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=224$ con energía 7.608214013689897

El número atómico $Z=93$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=227$ con energía 7.583639834526779

El número atómico $Z=94$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=230$ con energía 7.566035830526522

El número atómico $Z=95$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=233$ con energía 7.5415108314640555

El número atómico $Z=96$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=236$ con energía 7.523703637516345

El número atómico $Z=97$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=239$ con energía 7.499251800171257

El número atómico $Z=98$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=242$ con energía 7.481279349508352

El número atómico $Z=99$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=243$ con energía 7.456937323389022

El número atómico $Z=100$ tiene la mayor energía por nucleón cuando $A=246$ con energía 7.439122944429214

```
[8]: Z_max_index= np.argmax(MAXbindEnergies)
      print("Z={} tiene el valor máximo de B/A con A = {} y B/A={} MeV"
            .format(Z[Z_max_index],MAX_A[Z_max_index],MAXbindEnergies[Z_max_index]))
```

Z=28 tiene el valor máximo de B/A con A = 62 y B/A=8.70245768367189 MeV

2.

Exercise 2.6: Planetary orbits

The orbit in space of one body around another, such as a planet around the Sun, need not be circular. In general it takes the form of an ellipse, with the body sometimes closer in and sometimes further out. If you are given the distance ℓ_1 of closest approach that a planet makes to the Sun, also called its *perihelion*, and its linear velocity v_1 at perihelion, then any other property of the orbit can be calculated from these two as follows.

- a) Kepler's second law tells us that the distance ℓ_2 and velocity v_2 of the planet at its most distant point, or *aphelion*, satisfy $\ell_2 v_2 = \ell_1 v_1$. At the same time the total energy, kinetic plus gravitational, of a planet with velocity v and distance r from the Sun is given by

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r},$$

where m is the planet's mass, $M = 1.9891 \times 10^{30}$ kg is the mass of the Sun, and $G = 6.6738 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ is Newton's gravitational constant. Given that energy must be conserved, show that v_2 is the smaller root of the quadratic equation

$$v_2^2 - \frac{2GM}{v_1 \ell_1} v_2 - \left[v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1} \right] = 0.$$

Once we have v_2 we can calculate ℓ_2 using the relation $\ell_2 = \ell_1 v_1 / v_2$.

- b) Given the values of v_1 , ℓ_1 , and ℓ_2 , other parameters of the orbit are given by simple formulas that can be derived from Kepler's laws and the fact that the orbit is an ellipse:

$$\text{Semi-major axis: } a = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2),$$

$$\text{Semi-minor axis: } b = \sqrt{\ell_1 \ell_2},$$

$$\text{Orbital period: } T = \frac{2\pi ab}{\ell_1 v_1},$$

$$\text{Orbital eccentricity: } e = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2 + \ell_1}.$$

Write a program that asks the user to enter the distance to the Sun and velocity at perihelion, then calculates and prints the quantities ℓ_2 , v_2 , T , and e .

- c) Test your program by having it calculate the properties of the orbits of the Earth (for which $\ell_1 = 1.4710 \times 10^{11}$ m and $v_1 = 3.0287 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$) and Halley's comet ($\ell_1 = 8.7830 \times 10^{10}$ m and $v_1 = 5.4529 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$). Among other things, you should find that the orbital period of the Earth is one year and that of Halley's comet is about 76 years.

Parte a)

Comenzando con la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned}v_2^2 - 2\frac{GM}{v_1\ell_1}v_2 - \left[v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1}\right] &= 0 \\v_2 &= \frac{\frac{2GM}{v_1\ell_1} \pm \sqrt{(2GM/v_1\ell_1)^2 - 4(1)(-v_1^2 + \frac{2GM}{\ell_1})}}{2} \\v_2 &= \frac{GM}{v_1\ell_1} \pm \sqrt{\left(\frac{2GM}{v_1\ell_1}\right)^2 + \frac{4(v_1^2\ell_1 - 2GM)v_1^2\ell_1}{(v_1\ell_1)^2}} \\v_2 &= \frac{GM}{v_1\ell_1} \pm \frac{2\sqrt{(GM)^2 - 2(GM)v_1^2\ell_1 + (v_1^2\ell_1)^2}}{2v_1\ell_1} \\v_2 &= \frac{GM}{v_1\ell_1} \pm \frac{\sqrt{(GM - v_1^2\ell_1)^2}}{v_1\ell_1} \\v_2 &= \frac{GM}{v_1\ell_1} \pm \left(\frac{GM}{v_1\ell_1} - v_1^2\ell_1\right)\end{aligned}$$

Si tomamos el valor (+) obtenemos que

$$v_2 = \frac{GM}{v_1\ell_1} + \frac{GM}{v_1\ell_1} - v_1^2\ell_1 = 2\frac{GM}{v_1\ell_1} - v_1$$

Si tomamos el valor (−) obtenemos

$$v_2 = \frac{GM}{v_1\ell_1} - \frac{GM}{v_1\ell_1} + v_1^2\ell_1 = v_1$$

El problema con este segundo resultado es que sabemos que por la segunda Ley de Kepler, la velocidad en afelio debe ser menor que la velocidad en perihelio ($v_2 < v_1$) por lo tanto el término menor es el término (+) con

$$v_2 = 2\frac{GM}{v_1\ell_1} - v_1$$

Parte b) y c)

Valores para la Tierra

```
[9]: #Definimos los parámetros
# v1=3.0287e4
# l1=1.4710e11
M= 1.9891e30 #Kg
G= 6.6738e-11
v1=float(input("Ingrese velocidad en perihelio\n"))
l1=float(input("Ingrese distancia en perihelio\n"))
```

Ingrese velocidad en perihelio

3.0287e4

Ingrese distancia en perihelio

1.4710e11

Calculamos v_2 , ℓ_2 , T y e

```
[10]: v2 = 2*G*M/(v1*l1) - v1
      l2 = l1*v1/v2
      a=.5*(l1+l2)
      b= (l1*l2)**.5
      T=2*np.pi*a*b/(l1*v1)/(3600*24*365) # days
      e=(l2-l1)/(l2+l1)
```

```
[11]: print("Para la tierra\nl2 = {:,} m\nv2 = {:,} m/s\nT = {:,} años\ne = {:,}").
      ↪format(l2,v2,T,e))
```

```
Para la tierra
l2 = 152,027,197,208.65976 m
v2 = 29,305.399177261308 m/s
T = 1.0002238777234556 años
e = 0.016471913134741584
```

Para el cometa Halley

```
[12]: # v1=5.4529e4
      # l1=8.7830e10

      v1=float(input("Ingrese velocidad en perihelio\n"))
      l1=float(input("Ingrese distancia en perihelio\n"))
```

```
Ingrese velocidad en perihelio
5.4529e4
Ingrese distancia en perihelio
8.7830e10
```

```
[13]: v2 = 2*G*M/(v1*l1) - v1
      l2 = l1*v1/v2
      a=.5*(l1+l2)
      b= (l1*l2)**.5
      T=2*np.pi*a*b/(l1*v1)/(3600*24*365) # days
      e=(l2-l1)/(l2+l1)
```

```
[15]: print("Para el cometa Halley\nl2 = {:,} m\nv2 = {:,} m/s\nT = {:,} años\ne = {:,}").
      ↪format(l2,v2,T,e))
```

```
Para el cometa Halley
l2 = 5,282,214,660,876.42 m
v2 = 906.680696919153 m/s
T = 76.08170065465417 años
e = 0.967288912645406
```