Solución Examen Final
FISI 6510

Guillermo Fidalgo

13 de mayo de 2021

Oscilador Armónico Amortiguado

Sabemos por experiencia que la mayoría de los movimientos oscilatorios que aparecen en la naturaleza disminuyen gradualmente hasta que el desplazamiento se hace cero; este tipo de movimiento se dice que es *amortiguado* y se dice que el sistema es *disipativo* en vez de conservativo. En este proyecto vamos a escribir un programa en **Python** que simule el movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Para velocidades pequeñas, una aproximación razonable es asumir que la fuerza de arrastre (drag force) es proporcional a la primera potencia de la velocidad. En este caso la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado puede escribirse como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt}.$$

El *coeficiente de arrastre* γ es una medida de la magnitud del término de arrastre. Note que de la ecuación de movimiento la fuerza de arrastre se opone al movimiento. En este proyecto vas a simular el comportamiento del oscilador armónico amortiguado.

a) Escriba un programa en **Python** que incorpore los efectos de amortiguamiento en un oscilador armónico (debe usar el método de Runge-Kutta de 4to orden para resolver la ecuación diferencial), y haga una gráfica de la posición y la velocidad como funciones del tiempo. Describa el comportamiento cualitativo de $x(t)$ y $v(t)$ para $\omega_0 = 3$ y $\gamma = 0.5$ con $x(t=0) = 1$ y $v(t=0) = 0$. (50 puntos)

a)

[38]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
omega0=3
gamma=.5
def f(r,t):

    x=r[0]
    dxdt=r[1]
    d2xdt2=-x*omega0**2 - gamma*dxdt
```

```
    return np.array([dxdt,d2xdt2],float)

def rk4_2d(f,a,b,N,Init_cond=[0,0]):
    h = (b-a)/N
    tpoints = np.arange(a,b,h)
    xpoints = []
    vpoints = []
    r = np.array(Init_cond,float)
    for t in tpoints:

        xpoints.append(r[0])
        vpoints.append(r[1])

        k1 = h*f(r,t)
        k2 = h*f(r+0.5*k1,t+0.5*h)
        k3 = h*f(r+0.5*k2,t+0.5*h)
        k4 = h*f(r+k3,t+h)
        r += (k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    return tpoints,xpoints,vpoints
```

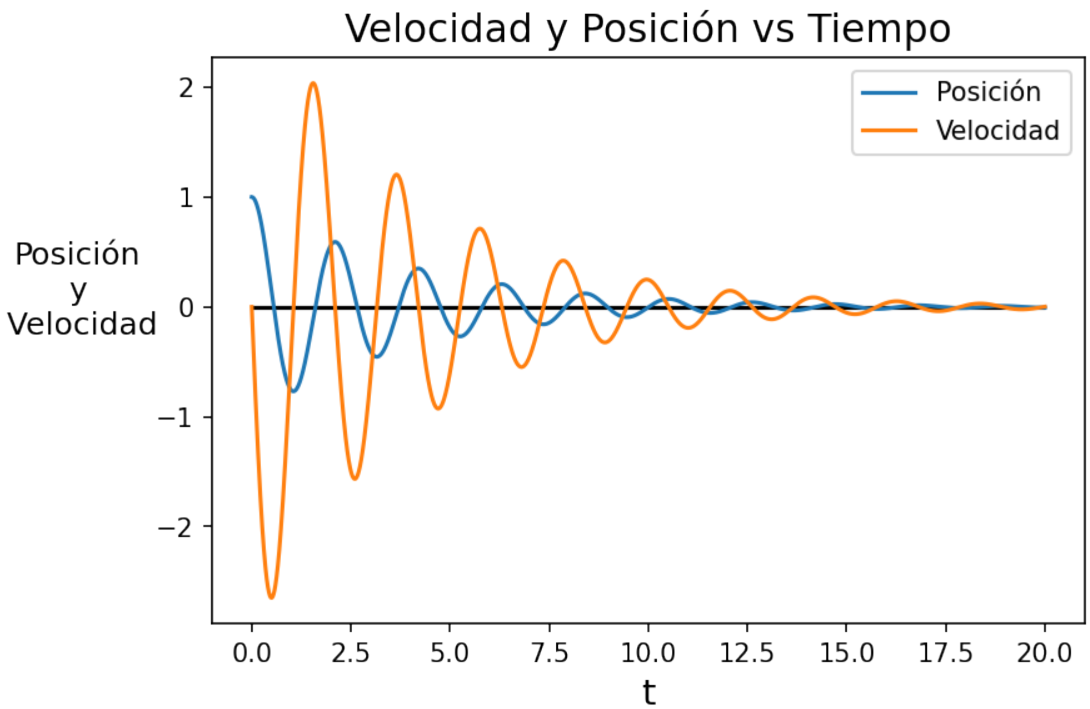
[39]:
```
a,b,N=0,20,10000
h = (b-a)/N
t,x,v=rk4_2d(f,a,b,N,Init_cond=[1,0])
```

La solución para este tipo de ecuación diferencial tiene la forma siguiente

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega t$$

Verificamos si esto concuerda con nuestra solución numérica más abajo

[40]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.plot(t,x,label='Posición')
plt.plot(t,v,label='Velocidad')
plt.hlines(0,min(t),max(t),'k')
plt.ylabel('Posición\ny\n Velocidad',rotation=0,labelpad=30,size=12)
plt.xlabel('t',size=14)
plt.legend()
plt.title("Velocidad y Posición vs Tiempo",size=15)
plt.show()
```



b) El periodo del movimiento es el tiempo entre máximos sucesivos de $x(t)$. Compute el periodo y la frecuencia angular correspondiente, y compare con el caso sin amortiguamiento. ¿Es el periodo más largo o corto? Haga corridas adicionales para $\gamma = 1$, 2, y 3. ¿Aumenta o disminuye el periodo con más amortiguamiento? ¿Por qué? (10 puntos)

El perido se define como

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$ y tenemos que

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}}$$

[41]:
```
omega0=3
gamma=.5
omega=(omega0**2-(gamma/2)**2)**(.5)
T= 2*np.pi/omega
print("El periodo es",T,"s")
print("La frecuencia angular del sistema amortiguado es",omega,"Hz")


T= 2*np.pi/(omega0**2)**(.5)
```

```
print("\nSin amortiguamiento\nT = {} s\n".format(T))
for gamma in [1,2,3]:
#     if gamma==omega0:
#         print('El perido con gamma={} es infinito ya que hay amortiguamiento␣
 ↪crítico'.format(gamma))
#         continue
    T= 2*np.pi/(omega0**2-(gamma/2)**2)**(.5)
    print('El perido con gamma={} es {} s'.format(gamma,T))
```

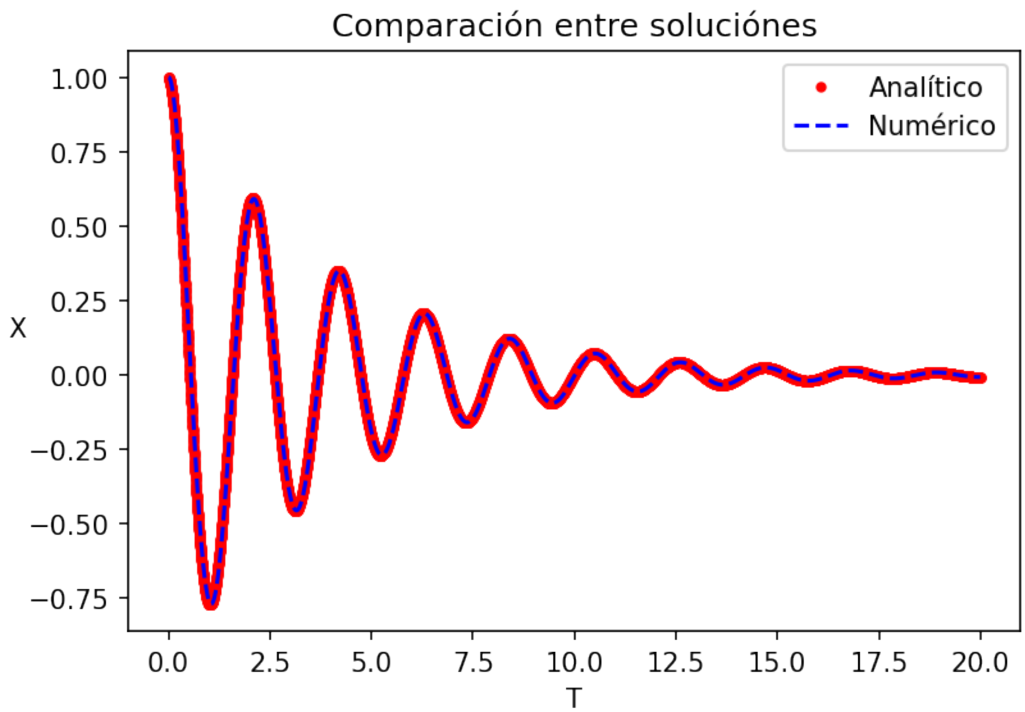
```
El periodo es 2.101705404209151 s
La frecuencia angular del sistema amortiguado es 2.9895651857753496 Hz

Sin amortiguamiento
T = 2.0943951023931953 s

El perido con gamma=1 es 2.1241043182442114 s
El perido con gamma=2 es 2.221441469079183 s
El perido con gamma=3 es 2.4183991523122903 s
```

b) **El periodo del movimiento es el tiempo entre máximos sucesivos de $x(t)$. Compute el periodo y la frecuencia angular correspondiente, y compare con el caso sin amortiguamiento. ¿Es el periodo más largo o corto? Haga corridas adicionales para $\gamma = 1$, 2, y 3. ¿Aumenta o disminuye el periodo con más amortiguamiento? ¿Por qué? (10 puntos)**

Vemos que sin amortiguamiento el período es más corto y que mientras más amortiguamiento haya el periodo aumenta. Esto es porque la cantidad de oscilaciones por segundo se están disminuyendo hasta llegar a 0, lo que causa que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ aumente.

Con esta información verificamos si nuestra solución numérica corresponde a la analítica

[42]:
```
omega0=3
gamma=.5
omega=(omega0**2-(gamma/2)**2)**(.5)
T= 2*np.pi/omega

X=x[0]*np.exp(-gamma*t/2)*np.cos(omega*t)
plt.figure(dpi=150)
plt.plot(t,X,'r.')
plt.plot(t,x,'b--')
plt.title("Comparación entre soluciónes")
plt.ylabel("X",rotation=0)
plt.xlabel("T")
plt.legend(('Analítico',"Numérico"))
plt.show()
```



Por lo visto no hay diferencias entre las soluciones

c) La amplitud es el valor máximo de x durante un ciclo. Compute el *tiempo de relajamiento* τ, el tiempo que le toma a la amplitud de una oscilación disminuir por *1/e* ≈ 0.37 de su valor máximo. ¿Es el valor de τ constante durante todo el movimiento? Compute τ para los valores de γ considerados en la parte (b) y discuta la dependencia cualitativa de τ en γ. (10 puntos)

c) Computar el tiempo de relajamiento τ

El tiempo τ tendrá la amplitud a un valor de $A_0/e \approx A_0 \times 0.37$

Primero creamos una lista de las amplitudes en todo el movimiento

[43]:
```
A0=x[0] #Amplitud inicial
T0p5= 2*np.pi/omega # Periodo con gamma = 1/2
T=T0p5
Tplot=[0] # Inicializar lista de tiempos donde t = n*Periodo
A=[A0] #inicializar lista de Amplitudes máximas en todo el movimiento

# hallar los tiempos donde t es un múltiplo del período
for i,j in zip(t,x):
    if abs(i-T)<= h/2:
        A.append(j)
```

```
        Tplot.append(i)
        T+=T0p5



print("T ={}\n".format(Tplot))

print("A is",A)

Atau=np.array(A)*.37 # lista de amplitudes reducidas por .37

print("\nA_tau is {}\n".format(Atau))


# Hallar los tiempos tau en todo el movimiento
tau=0
count=0
Tauplot=[] # lista de tiempos donde se reduce la amplitud
Tau=[] # lista del valor tau por cada ciclo (debe ser constante 1/gamma)
delta=1
for i,j in zip(x,t):
    if count==len(Atau) :
        break
    if (abs(i - Atau[count]) <= h/5) and i>0 and Tplot[count]<j and␣
 ↪abs(Tplot[count]-j)>=delta:
        print("A es {:.3E}".format(Atau[count]))
        print("i es {:.3E}".format(i))
        print("t es {}".format(j))
        delta=j-tau
        Tau.append(delta)
        tau=j
        Tauplot.append(j)

        print("tau",delta)
        print("--"*10)
        count+=1
```

```
T =[0, 2.102, 4.204, 6.306, 8.406, 10.508000000000001, 12.61, 14.712, 16.814,
18.916]

A is [1.0, 0.5913029769689905, 0.3496389375162739, 0.2067422217236394,
0.12224739712258584, 0.0722854073328698, 0.0427426362760982,
0.025273863648176517, 0.014944508351497757, 0.008836723920125886]

A_tau is [0.37       0.2187821  0.12936641 0.07649462 0.04523154 0.0267456
 0.01581478 0.00935133 0.00552947 0.00326959]
```

```
A es 3.700E-01
i es 3.700E-01
t es 2.408
tau 2.408
--------------------
A es 2.188E-01
i es 2.186E-01
t es 4.51
tau 2.102
--------------------
A es 1.294E-01
i es 1.291E-01
t es 6.612
tau 2.1020000000000003
--------------------
A es 7.649E-02
i es 7.680E-02
t es 8.712
tau 2.0999999999999996
--------------------
A es 4.523E-02
i es 4.536E-02
t es 10.814
tau 2.1020000000000003
--------------------
A es 2.675E-02
i es 2.698E-02
t es 12.914
tau 2.0999999999999996
--------------------
A es 1.581E-02
i es 1.616E-02
t es 15.012
tau 2.0980000000000008
--------------------
A es 9.351E-03
i es 9.741E-03
t es 17.108
tau 2.096
--------------------
A es 5.529E-03
i es 5.906E-03
t es 19.202
tau 2.094000000000001
--------------------
```

[74]:
```
#teórico
Aexp=A0*np.exp(-gamma*t/2)
count=0
tau=0
tau_teorico=[]
A_teor=[]
Tau_teo=[]
for Ax,j in zip(Aexp,t):
    if abs(Ax-Atau[count])<=h/20:
        print(Ax,"en tiempo",j)
        delta=j-tau
        tau_teorico.append(j)
        Tau_teo.append(delta)
        A_teor.append(Ax)
        count=count+1
        tau=j
```

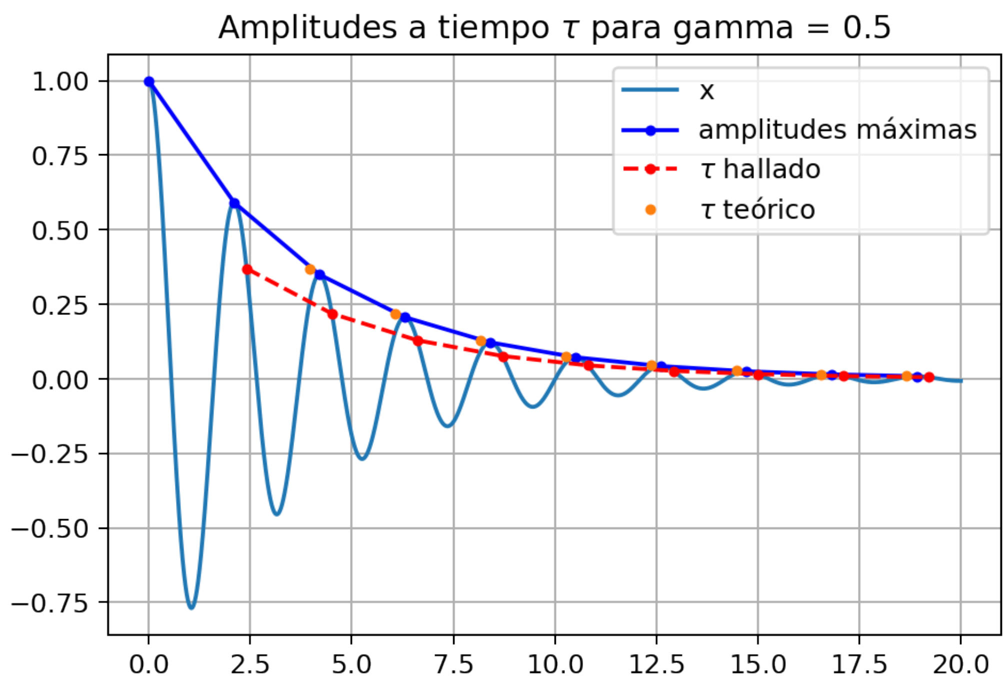
```
0.37009335291196127 en tiempo 3.976
0.21882127023923378 en tiempo 6.078
0.12944489624757924 en tiempo 8.178
0.07657382276516132 en tiempo 10.278
0.04532031011776911 en tiempo 12.376
0.02683629544670454 en tiempo 14.472
0.015906936611779787 en tiempo 16.564
0.009447548397216066 en tiempo 18.648
```

[75]:
```
print(Tau_teo)
```

```
[3.976, 2.1020000000000003, 2.1000000000000005, 2.0999999999999996,
2.097999999999999, 2.096, 2.0920000000000005, 2.0839999999999996]
```

[72]:
```
# tao=[2*i/(gamma) for i in range(1,6)]
# print(tao)
# np.array(tao,float)

plt.figure(dpi=180)

plt.plot(t,x)
plt.plot(Tplot,A,'b.-')
plt.plot(Tauplot,Atau[:-1],'r.--')
# plt.plot(t,Aexp,',')
plt.plot(tau_teorico,A_teor,'.')

# plt.vlines(2/gamma,-1,1,"k")
# plt.hlines(Atau[:5],0,20,linewidth=1,colors='g')
```

```
# plt.plot(tao,Atau[:5],'.')
# plt.xticks(np.arange(0,21,1))
plt.grid()
plt.title(r"Amplitudes a tiempo $\tau$ para gamma = {}".format(gamma))
plt.legend(['x','amplitudes máximas',r'$\tau$ hallado',r'$\tau$ teórico'])
plt.show()
```



Ahora repetimos para distintos valores de gamma

[33]:
```
A0=x[0] #Amplitud inicial
omega0=3
Gamma = np.array([1,2,3],float)
Omega=(omega0**2-(Gamma/2)**2)**(.5)
Periodos= 2*np.pi/Omega
print("Gamma=",Gamma)
print("Omega=",Omega)
print("Periodos =",Periodos)
```

```
Gamma= [1. 2. 3.]
Omega= [2.95803989 2.82842712 2.59807621]
Periodos = [2.12410432 2.22144147 2.41839915]
```

[31]:
```
for T,gamma in zip(Periodos,Gamma):
    t,x,v=rk4_2d(f,a,b,N,Init_cond=[1,0])
```

```
Tplot=[0] # Inicializar lista de tiempos donde t = n*Periodo
A=[x[0]] #inicializar lista de Amplitudes máximas en todo el movimiento
tempT=T
# hallar los tiempos donde t es un múltiplo del período
for i,j in zip(t,x):
    if abs(i-T)<= h/2:
        A.append(j)
        Tplot.append(i)
        tempT=tempT + T



print("T ={}\n".format(Tplot))

print("A is",A)

Atau=np.array(A)*.37 # lista de amplitudes reducidas por .37

print("\nA_tau is {}\n".format(Atau))


# Hallar los tiempos tau en todo el movimiento
tau=0
count=0
Tauplot=[] # lista de tiempos donde se reduce la amplitud
Tau=[] # lista del valor tau por cada ciclo (debe ser constante 1/gamma)
delta=0

for i,j in zip(x,t):
    if count==len(Atau) :
        break
    if (abs(i - Atau[count]) <= 1.4*h) and i>0  and␣
↪abs(Tplot[count]-j)>=delta/2:
        print("A es {:.3E}".format(Atau[count]))
        print("i es {:.3E}".format(i))
        print("t es {}".format(j))

        delta=j-tau
        Tau.append(delta)
        tau=j
        Tauplot.append(j)

        print("tau",delta)
        print("--"*10)
        count+=1

print("---"*20)
```

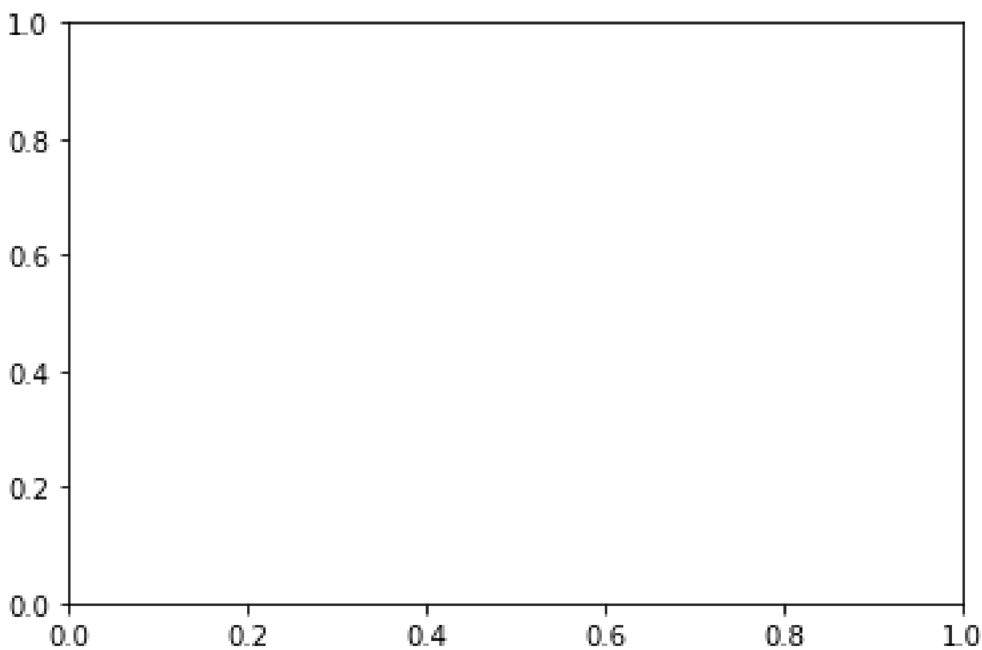
```python
#     plt.figure(dpi=180)
    print("gammas is {} and Tau is {}".format(gamma,Tau))
plt.plot(Gamma,Tau)
#     plt.plot(t,x)
#     plt.plot(Tplot,A,'b.-')
#     plt.plot(Tauplot,Atau,'r.--')
#     plt.grid()
#     plt.title(r"Amplitudes a tiempo $\tau$ para gamma = {}".format(gamma))
#     plt.legend(['x','amplitudes máximas',r'$\tau$ hallado'])
plt.show()
```

```
T =[0, 2.124]

A is [1.0, 0.3457455399872974]

A_tau is [0.37       0.12792585]

A es 3.700E-01
i es 3.724E-01
t es 0.428
tau 0.428
--------------------
A es 1.279E-01
i es 1.273E-01
t es 0.532
tau 0.10400000000000004
--------------------
------------------------------------------------------------
gammas is 1.0 and Tau is [0.428, 0.10400000000000004]
T =[0, 2.222]

A is [1.0, 0.10845251275282966]

A_tau is [0.37       0.04012743]

A es 3.700E-01
i es 3.717E-01
t es 0.466
tau 0.466
--------------------
A es 4.013E-02
i es 3.992E-02
t es 0.65
tau 0.184
--------------------
------------------------------------------------------------
gammas is 2.0 and Tau is [0.466, 0.184]
```

```
T =[0, 2.418]

A is [1.0, 0.026579914414383538]

A_tau is [0.37       0.00983457]

A es 3.700E-01
i es 3.707E-01
t es 0.512
tau 0.512
--------------------
A es 9.835E-03
i es 1.106E-02
t es 0.794
tau 0.28200000000000003
--------------------
------------------------------------------------------------
gammas is 3.0 and Tau is [0.512, 0.28200000000000003]
```

```
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-31-a5add9b89425> in <module>
     50 #     plt.figure(dpi=180)
     51     print("gammas is {} and Tau is {}".format(gamma,Tau))
---> 52 plt.plot(Gamma,Tau)
     53 #     plt.plot(t,x)
     54 #     plt.plot(Tplot,A,'b.-')

~/opt/anaconda3/lib/python3.8/site-packages/matplotlib/pyplot.py in plot(scalex,␣
 ↪scaley, data, *args, **kwargs)
   2838 @_copy_docstring_and_deprecators(Axes.plot)
   2839 def plot(*args, scalex=True, scaley=True, data=None, **kwargs):
-> 2840     return gca().plot(

   2841         *args, scalex=scalex, scaley=scaley,
   2842         **({"data": data} if data is not None else {}), **kwargs)

~/opt/anaconda3/lib/python3.8/site-packages/matplotlib/axes/_axes.py in plot(self,␣
 ↪scalex, scaley, data, *args, **kwargs)
   1741         """
   1742         kwargs = cbook.normalize_kwargs(kwargs, mlines.Line2D)
-> 1743         lines = [*self._get_lines(*args, data=data, **kwargs)]
   1744         for line in lines:
   1745             self.add_line(line)

~/opt/anaconda3/lib/python3.8/site-packages/matplotlib/axes/_base.py in␣
 ↪__call__(self, data, *args, **kwargs)
    271                 this += args[0],
```

```
    272                     args = args[1:]
--> 273                 yield from self._plot_args(this, kwargs)
    274
    275         def get_next_color(self):

~/opt/anaconda3/lib/python3.8/site-packages/matplotlib/axes/_base.py in␣
 ↪_plot_args(self, tup, kwargs)
    397
    398             if x.shape[0] != y.shape[0]:
--> 399                 raise ValueError(f"x and y must have same first dimension, but␣
 ↪"
    400                                  f"have shapes {x.shape} and {y.shape}")
    401             if x.ndim > 2 or y.ndim > 2:

ValueError: x and y must have same first dimension, but have shapes (3,) and (2,)
```



τ disminuye con γ de manera que $\tau \propto \frac{1}{\gamma}$

d) **Compute la energía total como función del tiempo para los valores de γ considerados en la parte (b). ¿Sí la disminución en la energía no es monotónica, explique? (10 puntos)**

La energía total es $E = T + U$ donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ y $U = \frac{1}{2}kx^2$ Si la ecuación diferencial es de la forma

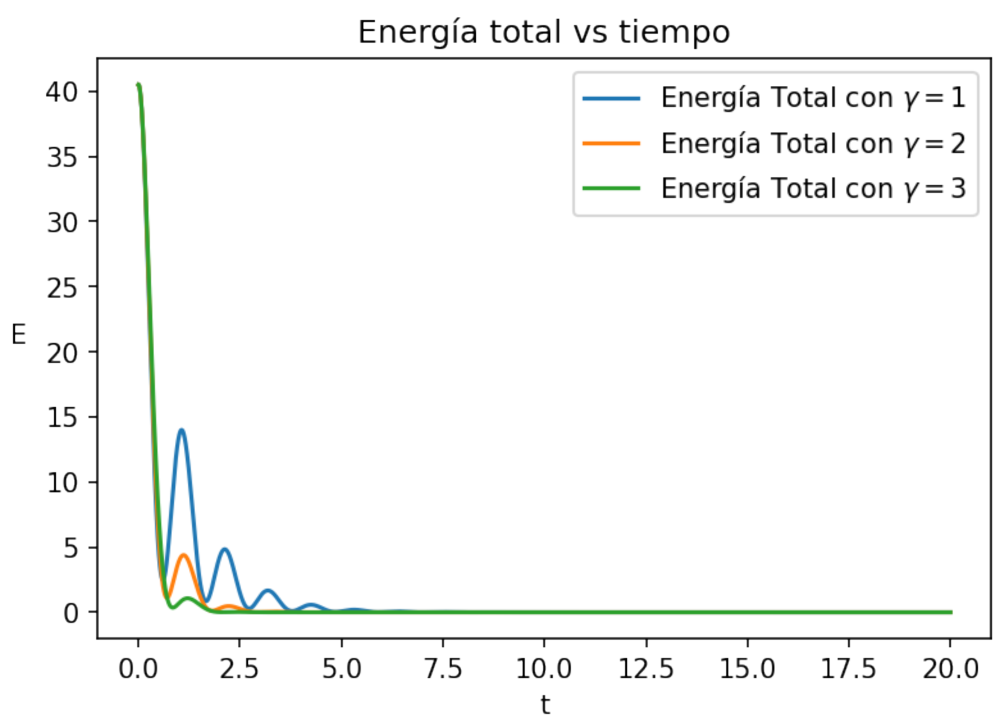
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

γ y ω_0 pueden ser reescritas como

$$\gamma = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Si tomamos que $m = 1$ podemos calcular k necesaria para la energía potencial. Esta sería

[96]:
```
k= omega0**2
Gamma = [1,2,3]
# print("k =",k)
plt.figure(dpi=150)
for gamma in Gamma:
    t,x,v=rk4_2d(f,a,b,N,Init_cond=[1,0])
    Tcinetica=.5*(1*np.array(v,float)**2)
    Upotencial= .5*(k*np.array(x,float))**2
#     print("T={}\nU={}".format(Tcinetica,Upotencial))
    E = Tcinetica+Upotencial
#     print("E=",E)
    plt.plot(t,E,label="Energía Total con $\gamma = {}$".format(gamma));
plt.legend()
plt.ylabel('E',rotation=0,labelpad=10)
plt.title("Energía total vs tiempo")
plt.xlabel('t')
plt.show()
```

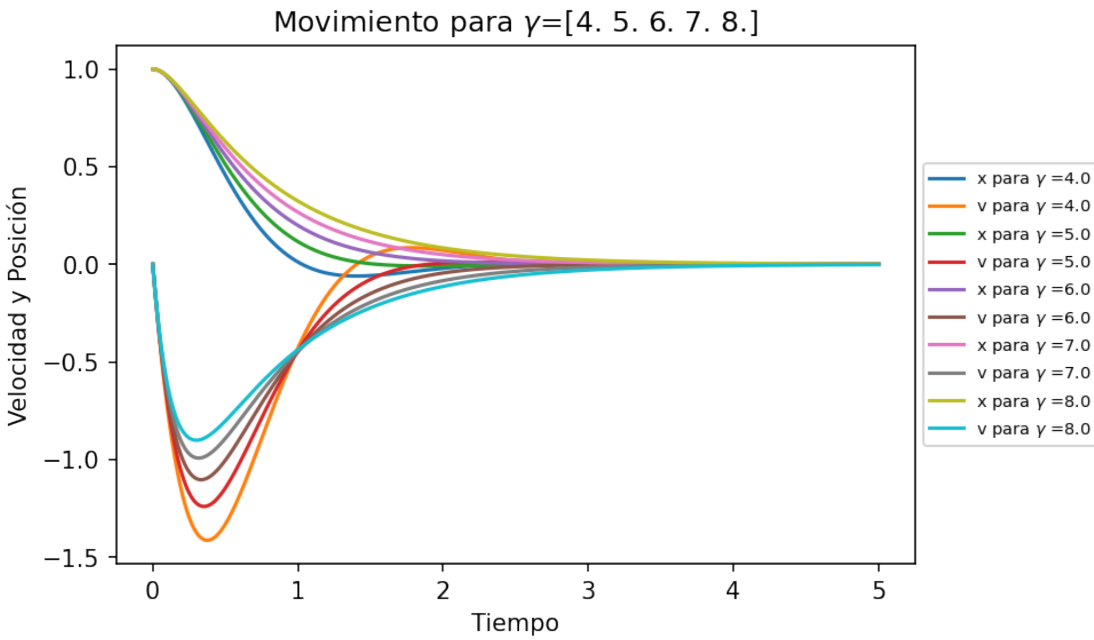


e) Compute la dependencia en el tiempo de $x(t)$ y $v(t)$ para $\gamma = 4, 5, 6, 7,$ y 8. ¿Es el movimiento oscilatorio para todo γ? ¿Cómo puedes caracterizar el decaimiento? Para ω_0 fijo, se dice que el oscilador está *amortiguado críticamente* en el valor de γ más pequeño para el cual decaimiento al equilibrio es monotónico. ¿Para cuál valor de γ el movimiento es monotónico para $\omega_0 = 4$ y $\omega_0 = 2$? Para cada valor de ω_0, compute el valor de γ para el cual el sistema alcanza el equilibrio más rápidamente. (10 puntos)

[104]:
```python
A0=x[0] #Amplitud inicial
omega0=3
Gamma = np.array([4,5,6,7,8],float)

Omega=(omega0**2-(Gamma/2)**2)**(.5)
Periodos= 2*np.pi/Omega
print(Gamma)
print(Omega)
print(Periodos)
plt.figure(dpi=150)
for gamma in Gamma:

    t,x,v=rk4_2d(f,a,5,N,Init_cond=[1,0])
    plt.plot(t,x,label='x para $\gamma$ ={}'.format(gamma))
    plt.plot(t,v,label='v para $\gamma$ ={}'.format(gamma))
    plt.legend(bbox_to_anchor=(1.12,.5),loc=10,fontsize=7)
plt.title("Movimiento para $\gamma$={}".format(Gamma))
plt.ylabel('Velocidad y Posición')
plt.xlabel('Tiempo')
plt.show()
```

```
<ipython-input-104-3be8d498f6c4>:5: RuntimeWarning: invalid value encountered in
sqrt
  Omega=(omega0**2-(Gamma/2)**2)**(.5)
<ipython-input-104-3be8d498f6c4>:6: RuntimeWarning: divide by zero encountered
in true_divide
  Periodos= 2*np.pi/Omega
```

```
[4. 5. 6. 7. 8.]
[2.23606798 1.6583124  0.                nan        nan]
[2.80992589 3.7889033          inf        nan        nan]
```



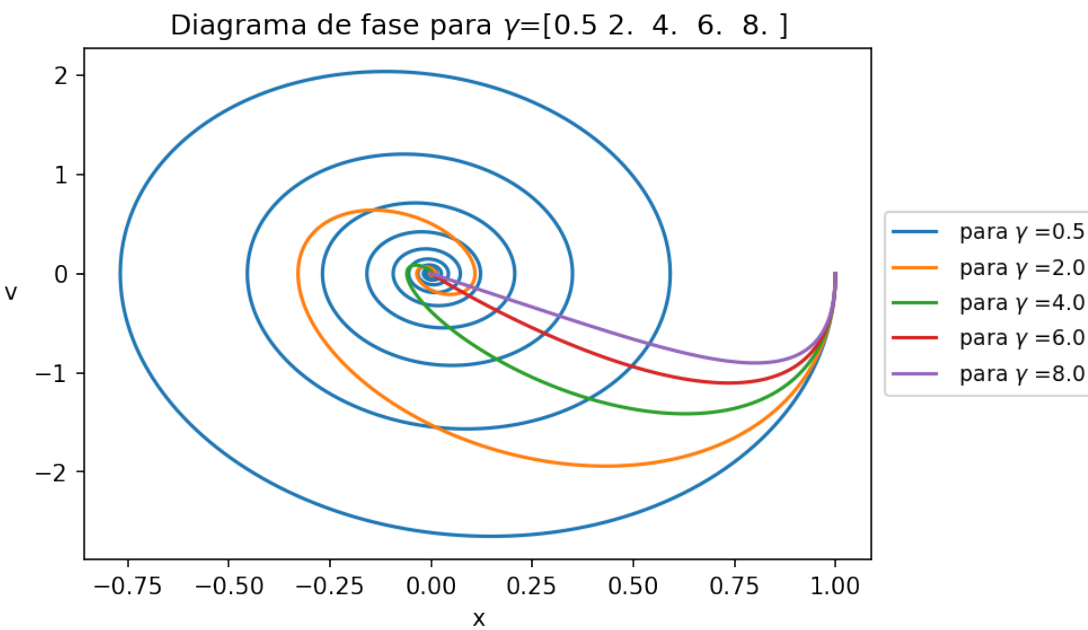
El movimiento deja de ser oscilatorio para esto valores de γ ya que el sistema se encuentra sobre amortiguado. El decaimiento es exponencial.

f) Compute el diagrama de fase para $\omega_0 = 3$ y $\gamma = 0.5$, 2, 4, 6 y 8. ¿Por qué la trayectoria en el espacio de fase converge a $x = 0$ y $v = 0$? Este punto se conoce como un *atractor*. ¿Son las características cualitativas del diagrama de fase independiente de γ? (10 puntos)

[108]:
```
A0=x[0] #Amplitud inicial
omega0=3
Gamma = np.array([.5,2,4,6,8],float)
Omega=(omega0**2-(Gamma/2)**2)**(.5)
Periodos= 2*np.pi/Omega
print(Gamma)
print(Omega)
print(Periodos)
plt.figure(dpi=150)
for gamma in Gamma:

    t,x,v=rk4_2d(f,a,b,N,Init_cond=[1,0])
    plt.plot(x,v,label=' para $\gamma$ ={}'.format(gamma))
    plt.legend(ncol=1,bbox_to_anchor=(1.15,.5),loc=10,fontsize=9)
plt.title("Diagrama de fase para $\gamma$={}".format(Gamma))
plt.ylabel("v",rotation=0,labelpad=10)
plt.xlabel('x')
plt.show()
```

```
<ipython-input-108-38b73071d998>:4: RuntimeWarning: invalid value encountered in
sqrt
  Omega=(omega0**2-(Gamma/2)**2)**(.5)
<ipython-input-108-38b73071d998>:5: RuntimeWarning: divide by zero encountered
in true_divide
  Periodos= 2*np.pi/Omega
```

```
[0.5 2.  4.  6.  8. ]
[2.98956519 2.82842712 2.23606798 0.                nan]
[2.1017054  2.22144147 2.80992589        inf        nan]
```



La trayectoria converge a $x = 0$ y $v = 0$ porque este es el estado al cual el sistema llega debido al amortiguamiento. Para toda $\gamma > 0$ el diagrama de fase convergerá a este punto evenvtualmente.