

# Herramientas Útiles

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

## Álgebra

### ■ Identidades

- $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
- $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$  si  $a \neq 1$

- **El truco de las razones** Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  entonces  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ , es decir, podemos sumar o restar arriba y abajo y obtenemos la misma fracción.

### ■ Factorizaciones y productos notables

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ab^{n-2} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- Si  $n$  es impar, en la identidad anterior podemos substituir  $b$  por  $-b$  y obtener  $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ .
- Factorización de Sophie-Germain:  $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z) \frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{2}$
- $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
- $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

Las últimas dos identidades nos permiten poner los coeficientes de un polinomio de grado dos o tres en términos de sus raíces. Estas son algunas de las identidades de Vietta.

Si tienes una ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c$ , entonces sus raíces (es decir, los valores de  $x$  para los cuales esta expresión se hace cero) son  $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  y  $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ .

## ■ Exponentes y logaritmos

Propiedades de los exponentes:

- $a^0 = 1$
- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $(ab)^c = a^c \cdot b^c$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

El logaritmo base  $a$  de un número  $b$ , que denotaremos por  $\log_a b$  es el número al cual se tiene que elevar  $a$  para obtener  $b$ . Por ejemplo,  $\log_2 8 = 3$  pues al elevar 2 a la potencia 3 obtenemos 8. A partir de las propiedades de los exponentes se obtienen las siguientes propiedades para los logaritmos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a (b^c) = c \log_a b$
- $\frac{\log_a c}{\log_b c} = \log_b a$
- $\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$

## ■ Desigualdades

Los números reales se dividen positivos, negativos y el cero. Los positivos se colocan a la derecha del 0 y los negativos a su izquierda. Una multiplicación por  $-1$  la podemos pensar como una rotación de  $180^\circ$  centrada en 0 de la recta real. Hacer dos veces esto deja fija la recta real, por lo que  $(-1)(-1) = 1$  y en general  $(-a)(-a) = a^2$ .

Estas observaciones nos permiten afirmar que para cualquier real  $r$  tenemos  $r^2 \geq 0$ .

Las desigualdades se pueden sumar, si  $a > c$  y  $b > d$  entonces  $a + b > c + d$ . Multiplicando una desigualdad por un número positivo se preserva y por uno negativo se invierte, es decir, si  $a > b$  entonces  $ra > rb$  si  $r > 0$  y  $ra < rb$  si  $r < 0$ .

El valor absoluto de un número  $|x|$  es su distancia al cero. Como las distancias son positivas, si el número es negativo entonces se le debe cambiar de signo para hacerlo positivo. Por ejemplo,  $|3| = 3$ ,  $|-2,5| = 2,5$ ,  $|0| = 0$ . Podemos calcular la distancia entre dos números por  $|x - y|$ , lo cual es lo mismo que al mayor restarle el menor. La desigualdad del triángulo dice que  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Algunas desigualdades algebraicas:

- $r^2 \geq 0$
- Desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética. Para  $a, b \geq 0$ , tenemos que  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ . La igualdad se da sólo cuando  $a = b$ .
- Desigualdad del acomodado. Si  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  y  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  entonces:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

Algunas desigualdades geométricas:

- Dado un punto fijo  $P$ , el conjunto de puntos cuya distancia a  $P$  es constante es una circunferencia con centro en  $P$ . Los puntos interiores tienen una distancia menor a  $P$  y los exteriores una mayor.
- Dada una recta  $l$  y un punto  $P$ , la distancia más corta de  $P$  a un punto de  $l$  se hace cuando en  $l$  se elige el pie de la perpendicular desde  $P$ . A esta longitud se le llama la distancia de  $P$  a  $l$ .
- Los lados de un triángulo son positivos. El lado más grande es opuesto al ángulo más grande, y el más chico es opuesto al ángulo más chico.
- En un triángulo con lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  se tienen las desigualdades del triángulo:  $a + b > c$ ,  $b + c > a$ ,  $c + a > b$ . Este resultado es invertible, es decir, si los tres números reales positivos  $a$ ,  $b$  y  $c$  cumplen que  $a + b > c$ ,  $b + c > a$  y  $c + a > b$ , entonces se puede hacer un triángulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- Desigualdad de Ptolomeo. Para un cuadrilátero  $ABCD$  se tiene  $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$ . La igualdad se da si y sólo si los vértices del cuadrilátero están en una circunferencia (decimos que el cuadrilátero es cíclico).

#### ■ Notación de suma

El símbolo  $\sum_{i=1}^n a_i$  se utiliza para indicar la suma de los números  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Por ejemplo, para escribir la suma de los primeros  $n$  números podemos escribir  $\sum_{i=1}^n i$  y para escribir la suma de los primeros  $n$  cuadrados podemos escribir  $\sum_{i=1}^n i^2$ . El uso de  $i$  es arbitrario, en realidad se puede usar cualquier símbolo que pensamos como un contador. Algunos ejemplos:

- $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
- $\sum_{j=0}^4 2j - 1 = (-1) + (1) + (3) + (5) + (7) = 15$
- $\sum_{k=5}^8 k(10 - k) = (5 \cdot 5) + (6 \cdot 4) + (7 \cdot 3) + (8 \cdot 2)$

La notación de suma tiene las siguientes propiedades:

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + b_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

- **Parte entera** Para un número real  $x$ , denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  al mayor entero que sea menor o igual a  $x$ . Los siguientes ejemplos son ilustrativos:  $\lfloor 10.2 \rfloor = 10$ ,  $\lfloor -12 \rfloor = -12$ ,  $\lfloor \frac{25}{6} \rfloor = 4$ ,  $\lfloor -11.5 \rfloor = -12$ ,  $\lfloor \sqrt{79} \rfloor = 8$ ,  $\lfloor 10000\pi \rfloor = 31415$  y  $\lfloor -10000\pi \rfloor = -31416$ .

La notación  $\lfloor x \rfloor$  se lee “parte entera de  $x$ ”. La parte entera tiene las siguientes propiedades:

- Si  $x$  es un número entero, entonces  $\lfloor x \rfloor = x$ .
- Para cualquier real se tiene que  $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x + 1 \rfloor$ .

- La operación parte entera es idempotente:  $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$ .
- Desigualdad del triángulo:  $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ .

## Combinatoria

- **Principios básicos de conteo** Si existen  $m$  formas de hacer una cosa  $A$  y  $n$  formas de hacer una cosa  $B$  entonces:
  - Hacer  $A$  ó hacer  $B$  (pero sólo una de las dos) se puede hacer de  $m + n$  formas.
  - Hacer  $A$  y luego hacer  $B$  se puede hacer de  $mn$  formas.
- **Permutaciones** Si se tienen  $n$  objetos distinguibles, entonces se pueden poner en fila de  $n!$  formas distintas. La notación  $n!$  se pronuncia “ $n$  factorial” y denota al producto de los primeros  $n$  enteros. Además, definimos  $0! = 1$ .
- **Combinaciones** Si tenemos  $n$  objetos distinguibles, entonces podemos elegir  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) de ellos de  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  formas. La notación  $\binom{n}{k}$  se pronuncia “ $n$  en  $k$ ”. A los números  $\binom{n}{k}$  se les conoce como coeficientes binomiales.
- **Propiedades básicas de los coeficientes binomiales**
  - Definimos  $\binom{n}{k} = 0$  si  $n$  es negativo,  $k$  es negativo o  $k > n$ .
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .
  - Fórmula de Pascal:  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ .
  - $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ .
  - $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ .

Las siguientes observaciones son sencillas, pero son muy poderosas. Muchas veces estas observaciones nos ayudan a justificar con formalidad por qué podemos o no podemos hacer ciertas cosas.

- **Principio de las Casillas** Esta es una de las afirmaciones más intuitivas de las matemáticas. Tomando en cuenta su sencillez es una herramienta muy poderosa. El Principio de las Casillas dice lo siguiente:

*Si tenemos  $n + 1$  objetos y  $n$  casillas para acomodarlos, entonces en alguna de las casillas deben quedar al menos dos objetos.*

El Principio de las Casillas admite las siguientes generalizaciones:

- Si tenemos  $kn + 1$  objetos y  $n$  cajas, entonces al menos una de esas cajas tiene al menos  $k + 1$  objetos.
- Si tenemos una infinidad de objetos y los acomodamos en una cantidad finita de cajas, entonces una caja tiene una infinidad de objetos.
- (Dual del principio de las casillas) Si tenemos  $n$  objetos y  $n + 1$  cajas, entonces al colocar los objetos en las cajas una caja queda vacía.

*Ejemplo* De tres personas, dos son del mismo sexo. Si tenemos 13 personas, hay dos que nacieron el mismo mes.

- **Principio del Doble conteo** Si contando los objetos de un conjunto de una forma obtenemos que son  $a$  y contándolos de otra forma obtenemos que son  $b$  entonces  $a = b$ .

*Ejemplo* Si tenemos  $n+1$  puntos alineados, estos hacen 1 segmento de longitud  $n$ , 2 de longitud  $n-1$ , 3 de longitud  $n-2$ , ...,  $n$  de longitud 1. De modo que en total hacen  $1 + 2 + \dots + n$  segmentos. Otra forma de contar cuántos segmentos hacen es ver de cuántas formas podemos escoger dos de ellos. Esto se puede de  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  formas distintas. Esto demuestra que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

- **Principio de Invarianza** Si tenemos un proceso que deja una variable fija (o hace que tome siempre valores en un mismo conjunto), entonces con el proceso no podemos llegar a una situación en la cual esa variable sea distinta (o tome un valor fuera de ese conjunto).

*Ejemplo* Comenzamos con el número 1. El proceso consiste en cada paso en sumar o restar 2. Lo que se mantiene invariante es la paridad del número (siempre es impar), de modo que con este proceso no podemos llegar a 2010.

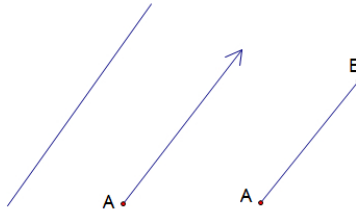
- **Principio del Buen Orden** Si tenemos un conjunto no vacío de números enteros positivos, o un conjunto finito de números cualesquiera, entonces ese conjunto tiene un mínimo, es decir, hay un número en el conjunto que es el más chico de todos los números en el conjunto.

## Geometría

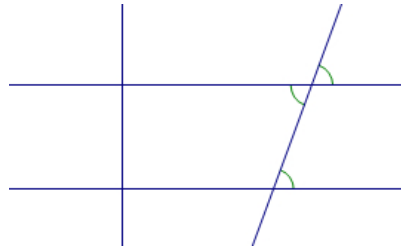
### ■ Líneas y puntos

Asumimos como conocido el concepto de línea y punto. Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en una línea llamamos un rayo desde  $A$  a los puntos que están en la línea en un mismo lado del punto  $A$ . A los puntos entre  $A$  y  $B$  le llamamos el segmento  $AB$ .

Dos líneas pueden o no intersectarse. Si no se intersectan, las llamamos paralelas. Si se intersectan en un ángulo de  $90^\circ$  entonces las llamamos perpendiculares. Si  $l$  es perpendicular a  $m$  y  $m$  es perpendicular a  $n$  entonces  $l$  es paralela a  $n$ .



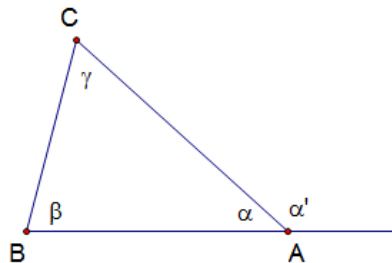
De hecho más en general, si una línea transversal corta a dos rectas y forma ángulos iguales, entonces estas dos rectas son paralelas. El regreso también es cierto, si dos rectas son paralelas entonces los ángulos que hacen con cualquier transversal son iguales.



Tres puntos son colineales (o están alineados) si existe una recta que pasa por los tres. Tres rectas son concurrentes (o se intersectan) si existe un punto que se encuentre en las tres.

### ■ Triángulos

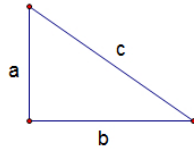
Un triángulo es una figura con tres lados. La suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ . En la siguiente figura el ángulo  $\alpha'$  mide  $\beta + \gamma$ . A este ángulo se le llama el ángulo externo (o exterior) en  $A$  del triángulo  $ABC$ .



Decimos que un triángulo es isósceles si tiene al menos dos lados iguales. Decimos que es equilátero si tiene sus tres lados iguales (y por lo tanto, un triángulo equilátero es isósceles). En caso de que no suceda ninguna de estas opciones diremos que el triángulo es escaleno.

Otra forma de clasificar triángulos es por sus ángulos. Un triángulo con todos sus ángulos menores a  $90^\circ$  se llama acutángulo. Un triángulo con un ángulo de  $90^\circ$  se le llama rectángulo. Si tiene un ángulo obtuso se le llama obtusángulo.

En un triángulo rectángulo se conoce como hipotenusa al lado opuesto al ángulo de  $90^\circ$ . A los otros dos lados se les conoce como catetos. El Teorema de Pitágoras nos dice que la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Es decir, en la figura siguiente  $a^2 + b^2 = c^2$ .



Dos triángulos son congruentes si sus tres lados y sus tres ángulos son iguales respectivamente. Para verificar que dos triángulos son congruentes basta verificar alguna de las siguientes condiciones:

- Criterio LLL: Sus tres lados son iguales.
- Criterio ALA: Dos de sus ángulos y el lado entre ellos son iguales.
- Criterio LAL: Dos de sus lados y el ángulo entre ellos son iguales.

Enfatizamos que la importancia de los criterios de congruencia es que con que se cumpla alguna de las condiciones arriba mencionadas se tiene que el resto de los lados y ángulos son iguales.

Decimos que dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos iguales y sus lados guardan la misma proporción. A esta proporción la llamamos la razón de semejanza entre los triángulos. Para verificar que dos triángulos son semejantes basta verificar alguna de las siguientes condiciones:

- Criterio LLL: Sus tres lados correspondientes guardan la misma proporción
- Criterio AA: Dos de sus ángulos son iguales.
- Criterio LAL: Dos de sus lados guardan la misma proporción y el ángulo entre esos lados es igual.

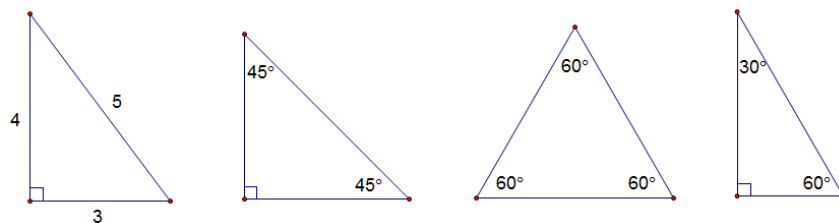
Si dos triángulos son semejantes en razón  $q$ , entonces la distancia entre parejas de puntos correspondientes también están en razón  $q$ , por lo que los perímetros, alturas, medianas, etc., también están en razón  $q$ . Sin embargo, la razón entre las áreas es  $q^2$ .

En un triángulo  $ABC$  se toman puntos  $D$  sobre  $AB$  y  $E$  sobre  $AC$ . El Teorema de Tales dice que  $BC$  es paralela a  $DE$  si y sólo si  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ .

A continuación se muestran algunos triángulos importantes:

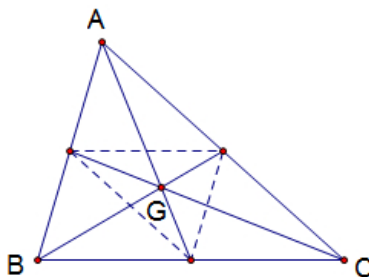
En un triángulo  $ABC$  se tienen las siguientes rectas importantes:





- Mediana: Una mediana es la recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.
- Bisectriz: Una bisectriz es la recta que pasa por un vértice y bisecta al ángulo del triángulo que está en ese vértice.
- Bisectriz Exterior: Una bisectriz exterior es la recta que pasa por un vértice y bisecta al ángulo exterior del triángulo que está en ese vértice
- Mediatriz: Una mediatriz es una recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por el punto medio de ese lado.
- Altura: Una altura es una recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por el vértice opuesto.

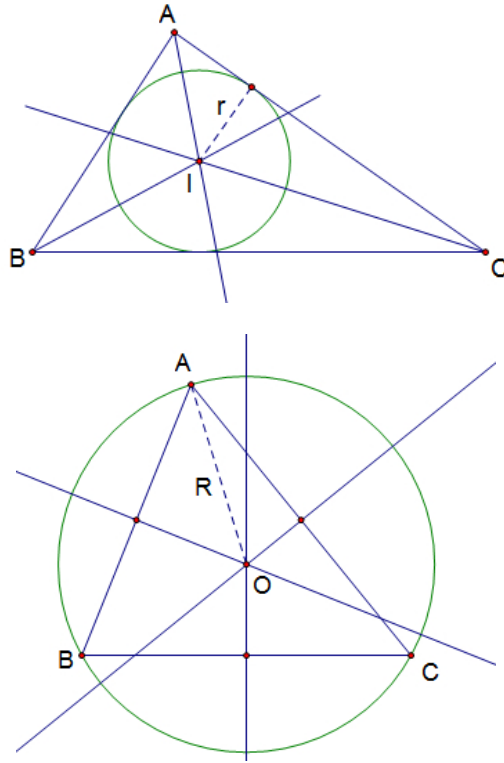
Las medianas de un triángulo se cortan dos a dos en proporción  $1 : 2$  y las tres se intersectan en un punto, llamado el gravicentro del triángulo, que usualmente se denota por  $G$ . Al triángulo formado por los tres puntos medios se le conoce como el triángulo medial y es semejante al triángulo original en razón  $\frac{1}{2}$ , de modo que tiene área  $\frac{1}{4}$  del triángulo original.



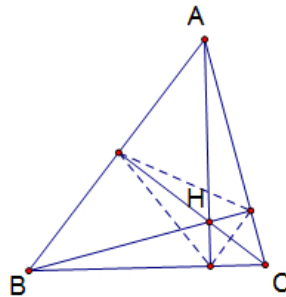
Las tres bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado el incentro del triángulo, que usualmente se denota por  $I$ . Existe una circunferencia que es tangente internamente a cada uno de los lados del triángulo. A esta circunferencia la llamamos el incírculo de  $ABC$ . Su centro es  $I$ , de modo que  $I$  equidista de los tres lados. Al radio del incírculo lo llamamos el inradio del triángulo y usualmente se denota por  $r$ .

La bisectriz interna y la externa por un mismo vértice son perpendiculares. Las dos bisectrices externas por dos vértices y la bisectriz interna por el tercer vértice son rectas concurrentes.

Las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado el circuncentro del triángulo, que usualmente se denota por  $O$ . Existe una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. A esta circunferencia la llamamos el circuncírculo de  $ABC$ . Su centro es  $O$ , de modo que  $O$  equidista de los tres vértices. Al radio del circuncírculo lo llamamos el circunradio del triángulo y usualmente se denota por  $R$ .



Las tres alturas se intersectan en un punto llamado el ortocentro del triángulo, que usualmente se denota por  $H$ . Al triángulo formado por los tres pies de las alturas se le conoce como el triángulo órtico.

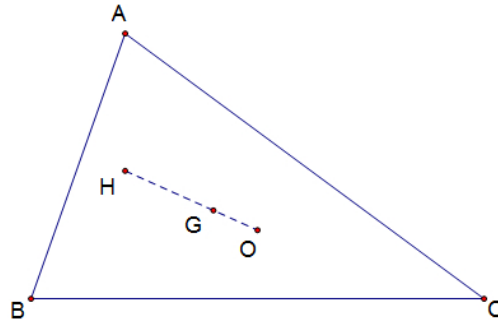


La mediatriz y la altura correspondientes a un mismo lado son paralelas.

Si en un triángulo dos de las siguientes rectas por un mismo lado (o vértice correspondiente) son la misma: altura, mediana, mediatriz, bisectriz; entonces el triángulo es isósceles con los otros dos lados iguales, y por tanto todas esas rectas (por ese lado) son la misma. Por ejemplo, si la mediana por  $A$  también es perpendicular a  $BC$  (i.e. es altura), entonces  $AB = AC$  y entonces la mediana también es la bisectriz y mediatriz.

A partir de la observación anterior, si dos de los puntos  $O$ ,  $H$ ,  $G$  ó  $I$  coinciden entonces el triángulo es equilátero.

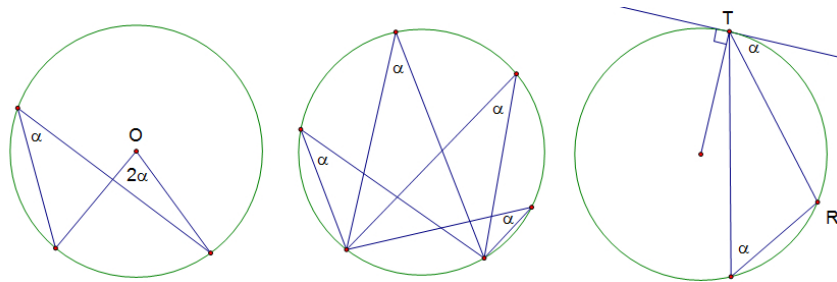
El Teorema de la Recta de Euler nos dice que  $G$ ,  $O$  y  $H$  están alineados en cualquier triángulo.



## ■ Circunferencias

Una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo  $P$ . La distancia que tiene  $P$  a cada uno de estos puntos se conoce como el radio de la circunferencia. Dados dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia, el segmento  $AB$  se conoce como una cuerda. Si la cuerda pasa por el centro entonces se llama diámetro y mide dos veces el radio.

En una circunferencia, la medida del ángulo que se hace con un vértice sobre la circunferencia es la mitad del ángulo central. Esto nos dice que ángulos que abran un mismo arco del mismo lado miden lo mismo. En particular, si un ángulo abre un diámetro entonces el ángulo es recto.

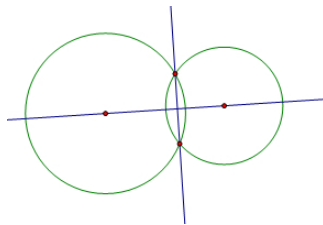


Una tangente es una recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto. Si  $T$  es el punto de tangencia y  $RT$  es una cuerda por  $T$ , el ángulo que hacen (llamado semi-inscrito) es el mismo que el que abre a la cuerda  $RT$  en la circunferencia. En particular, las tangentes son perpendiculares al radio que pasa por el punto de tangencia. Las dos tangentes que se pueden trazar desde un mismo punto a una misma circunferencia miden lo mismo.

Cuando dos circunferencias se intersectan, la recta que pasa por los dos puntos de intersección es perpendicular a la recta que une sus centros.

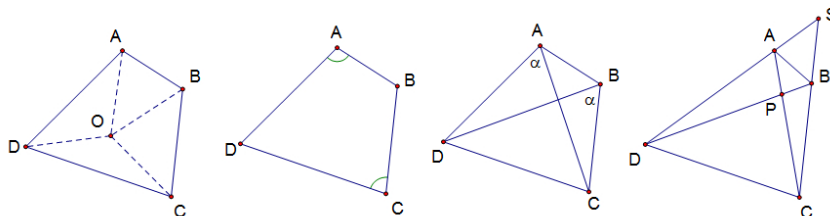
## ■ Cuadriláteros cíclicos

Tres puntos no alineados determinan una única circunferencia, de modo que la situación en la que cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  están en una misma circunferencia es especial. Cuando sucede esto, decimos que los cuatro puntos son concíclicos o bien que el cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico.



Supongamos además que  $AC$  se intersecta con  $BD$  en el interior del cuadrilátero en un punto  $P$  y que  $AB$  se intersecta con  $CD$  en un punto  $S$ . Entonces todas las siguientes afirmaciones son equivalentes, es decir, tan sólo con verificar que sucede una de ellas, inmediatamente sabemos que se cumplen las demás:

- El cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico.
- Existe un punto  $O$  que equidiste a  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .
- $\angle A + \angle C = 180^\circ$
- $\angle B + \angle D = 180^\circ$
- $\angle ACB = \angle ADB$
- $\angle BAC = \angle BDC$
- $\angle CBD = \angle CAD$
- $\angle DCA = \angle DBA$
- Potencia de un punto interior:  $PA \cdot PC = PB \cdot PD$
- Potencia de un punto exterior:  $SA \cdot SB = SC \cdot SD$
- Igualdad de Ptolomeo:  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$



Usamos una terminología similar cuando tenemos más puntos sobre una misma circunferencia, por ejemplo, podemos hablar de hexágonos cíclicos o decir que tenemos  $n$  puntos concíclicos.

### ■ Trigonometría

En un triángulo  $ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = CA$  y  $c = AB$  con circunradio  $R$  se cumple lo siguiente:

- Ley de senos:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- Ley de cosenos:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Además, tenemos las siguientes identidades trigonométricas:

- $\operatorname{sen} 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$
- $\cos 0^\circ = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\operatorname{sen} x = \cos(90^\circ - x)$
- Seno de una suma:  $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
- Coseno de una suma:  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- Tangente de una suma:  $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Observa que a partir de estas identidades puedes encontrar muchas otras fórmulas más, por ejemplo, si en la fórmula de seno de la suma de ángulo pones el mismo ángulo obtienes  $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ . O si quieres encontrar el coseno de una resta  $x - y$  entonces puedes usar la de coseno de la suma y cambiar  $y$  por  $-y$  y usar las otras identidades para obtener  $\cos(x - y) = \cos x \cos(-y) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ .

## Teoría de Números

### ■ Clasificación de los números

Llamamos enteros a los números con los cuales podemos contar cosas y sus negativos, por ejemplo 1, 2, 3,  $-10$ , etc. Llamamos números racionales a los números que se pueden escribir como una división de enteros. A los números reales los podemos pensar como todos los números que se pueden escribir en expansión decimal. A los reales que no son racionales, como  $\pi$ , los llamamos irracionales. Los símbolos para denotar a los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales son  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  respectivamente. El conjunto de números irracionales no tienen su símbolo, pero los podemos denotar por  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (los reales que no son racionales).

Ocasionalmente a cualquiera de estos conjuntos los podemos limitar un poco más especificando que se habla de positivos, negativos, no negativos, etc.

### ■ Divisibilidad

Para dos números enteros  $a$  y  $b$  diremos que  $a$  divide a  $b$  si existe un entero  $k$  para el cual  $b = ka$ . También esto se puede decir como  $b$  es múltiplo de  $a$ ,  $a$  es un divisor de  $b$ , entre otras. La notación para  $a$  divide a  $b$  es  $a|b$ . A partir de este momento sólo nos referiremos a números enteros, salvo que explícitamente se diga lo contrario.

Por definición, 0 es divisible entre cualquier número, pues la  $k$  correspondiente es 0. Así mismo, 1 divide a todo número. A los números divisibles entre 2 los llamamos pares y a los números enteros que no son pares los llamamos impares (o menos frecuentemente, nones). Como 0 es divisible entre 2, entonces 0 es par.

A los números que tienen exactamente dos divisores positivos los llamamos primos. De esta forma, 2 es primo, 13 es primo, pero ni 6 ni 1 lo son.

La divisibilidad cumple las siguientes propiedades para cualesquiera números enteros  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $l$ :

- $a|a$
- Si  $a|b$  y  $b|c$  entonces  $a|c$ .
- Si  $a|b$  y  $b|a$  y  $a$  y  $b$  son positivos entonces  $a = b$ .
- Si  $a|b$  y  $a|c$  entonces  $a|bk + cl$ .
- Si  $p$  es primo y  $p|n^k$  entonces  $p|n$ .

Para dos números definimos su mínimo común múltiplo como el menor entero positivo que es múltiplo de ambos. De manera similar, definimos su máximo común divisor como el mayor entero positivo que los divide. Denotamos a estos números por  $[m, n]$  y  $(m, n)$  respectivamente. Si dos números tienen como máximo común divisor a 1 entonces los llamamos primos relativos.

Si  $k$  es el máximo común divisor de  $m$  y  $n$  entonces  $k$  se puede expresar como combinación lineal de  $m$  y  $n$ , es decir, existen enteros  $a$  y  $b$  para los cuales  $k = am + bn$ .

En muchas ocasiones un número  $a$  no divide a un número  $b$ , sin embargo, podemos expresar a  $b$  de la forma  $b = qa + r$  con  $0 \leq r < a$ , es decir, podemos poner a  $b$  como un múltiplo de  $a$  más un residuo pequeño  $r$  que está entre 0 y  $a - 1$ .

## ■ Algunos criterios de divisibilidad

- Todo número es divisible entre 1.
- Un número es divisible entre 2 si y sólo si su último dígito es par.
- Un número es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
- Un número es divisible entre 4 si y sólo si el número formado por sus últimos dos dígitos es múltiplo de 4.
- Un número es divisible entre 5 si y sólo si su último dígito es 0 ó 5.
- Un número es divisible entre 6 si y sólo si es divisible entre 2 y 3.
- Un número es divisible entre 8 si y sólo si el número formado por sus últimos tres dígitos es múltiplo de 8.
- Un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
- Un número es divisible entre 11 si al sumar y restar alternadamente sus dígitos se obtiene un número divisible entre 11.

Un buen ejercicio para practicar los criterios de divisibilidad es ver entre cuáles números que tengan criterio es divisible el número 12345678.

La cantidad de múltiplos de  $k$  que existen desde 1 hasta  $n$  es  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ .

## ■ Teorema Fundamental de la Aritmética

El Teorema Fundamental de la Aritmética dice que todo entero se puede descomponer como producto de primos de manera única salvo el orden de los factores. En símbolos, si  $n$  es un natural entonces existen  $k$  primos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  y exponentes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  para los cuales  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ .

Descomponiendo a  $m$  en producto de primos como  $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$  se tienen las siguientes fórmulas:

- Número de divisores de  $m$ :  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$
- Suma de los divisores de  $m$ :  $\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \dots \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$
- Primos relativos con  $m$  que están entre 1 y  $m$ :  $m(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$

Además, si también descomponemos a  $n$  en producto de primos como  $n = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$ , pensando en que algunos de los exponentes pueden ser 0 entonces tenemos:

- Máximo común divisor de  $m$  y  $n$ :  $p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(a_k, b_k)}$
- Mínimo común múltiplo de  $m$  y  $n$ :  $p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(a_k, b_k)}$

## ■ Congruencias

Diremos que  $a$  y  $b$  son congruentes módulo un número  $n$  si el residuo de dividir ambos números entre  $n$  es el mismo. Esto es equivalente a que  $n$  divida a  $a - b$ . La notación para esto es  $a \equiv b \pmod n$ . Por ejemplo,  $2009 \equiv 2011 \pmod 2$ ,  $10 \equiv 3 \pmod 7$ ,  $100 \equiv 1 \pmod 9$ ,  $-4 \equiv 1 \pmod 5$ .

Ver a los números así nos permite enfocarnos únicamente en una cantidad finita de términos, pues los posibles residuos de dividir un número entre  $n$  son solamente  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Dado un módulo fijo, las congruencias se pueden tratar como igualdades en la mayoría de los casos. Se pueden sumar, restar y multiplicar, pero no siempre se pueden “dividir”. Esto y otras propiedades básicas se enlistan a continuación:

- $a \equiv a \pmod{n}$
- Si  $a \equiv b \pmod{n}$  entonces  $b \equiv a \pmod{n}$
- Si  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $b \equiv c \pmod{n}$  entonces  $a \equiv c \pmod{n}$
- Si  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $c \equiv d \pmod{n}$  entonces
  - $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
  - $a - c \equiv b - d \pmod{n}$
  - $ac \equiv bd \pmod{n}$ , en particular,  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

Diremos que  $a$  tiene inverso módulo  $n$  si existe un número  $b$  para el cual  $ab \equiv 1 \pmod{n}$ . Si  $a$  y  $n$  son primos relativos entonces  $a$  tiene inverso módulo  $n$ . En particular, dado un primo  $p$ , todos los números que no son múltiplos de  $p$  tienen inverso módulo  $p$ .

Si  $a$  tiene un inverso  $b$  módulo  $n$  y  $ac \equiv d \pmod{n}$  entonces  $c \equiv bd \pmod{n}$ . Esto es más o menos “dividir” entre  $a$  módulo  $n$ .

Las congruencias sirven para encontrar fácilmente el residuo que deja un número al dividirlo entre otro. Para que una igualdad entre enteros se cumpla, se debe cumplir en cualquier módulo. Esto quiere decir que si no existen soluciones para una ecuación en enteros para una congruencia, entonces no existe la solución en los enteros.

Finalmente, se enlistan algunos teoremas más avanzados de las congruencias:

- Pequeño Teorema de Fermat: Si  $p$  es primo y  $a$  no es múltiplo de  $p$  entonces  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .
- Teorema de Wilson: Si  $p$  es primo, entonces  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .
- Teorema de Euler: Si  $\phi(n)$  denota la cantidad de primos relativos con  $n$  que están entre 1 y  $n$ , y  $a$  es primo relativo con  $n$  entonces  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .