Valores y Vectores Propios

Definiciones y Propiedades

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v1.0

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ son **valor propio** y **vector propio**, respectivamente si:

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$$

con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

- $\lambda = 0$ **SI** puede ser un valor propio.
- $\mathbf{v} = 0$ **NO** puede ser un vector propio.

1. Considerar I_n la matriz identidad de orden n. Si λ es valor propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, enconces $\det(A - \lambda\, I_n) = 0$.

   Demo: Como λ es valor propio, se tiene:

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{v} &= \lambda\,\mathbf{v} \\
(A - \lambda\, I_n)\,\mathbf{v} &= 0
\end{aligned}
$$

   ya que $\mathbf{v} \neq 0$, la matriz $A - \lambda\, I_n$ tiene que ser singular y por tanto $\det(A - \lambda\, I_n) = 0$.

2. El determinante de una matriz es igual al producto de sus valores propios, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Demo:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda\, I_n) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \\ &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda).\end{aligned}$$

Entonces, al evaluar en $\lambda = 0$ se tiene $\det(A) = \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

3. Sea c un escalar. Si $\mathbf{v}$ es vector propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $c\,\mathbf{v}$ también es vector propio de A.

Demo: Se sabe que $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, entonces:

$$\begin{aligned} A(c\,\mathbf{v}) &= c(A\,\mathbf{v}) \\ &= c(\lambda\,\mathbf{v}) \\ &= \lambda(c\,\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Se define $\mathbf{w} = c\,\mathbf{v}$, el cual también es vector propio de A al cumplir con la definición.

4. Sean λ y $\mathbf{v}$, valor y vector propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y c un escalar, con $c \neq 0$. Entonces, la matriz $B = c\,A$ tiene valor propio $c\,\lambda$ y vector propio $\mathbf{v}$.

   Demo: Se sabe que $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, entonces:

$$\begin{aligned} B\,\mathbf{v} &= (c\,A)\mathbf{v} \\ &= c(A\,\mathbf{v}) \\ &= c(\lambda\,\mathbf{v}) \\ &= (c\lambda)\mathbf{v} \end{aligned}$$

   Se define $\mu = c\,\lambda$. Por tanto B tiene valor propio $\mu = c\lambda$ y vector propio $\mathbf{v}$.

5. Sean λ y $\mathbf{v}$, valor y vector propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y Q una matriz invertible. Entonces, la matriz $B = Q^{-1}\,A\,Q$ tiene valor propio λ y vector propio $Q^{-1}\mathbf{v}$.

Demo: Se sabe que $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$. Se debe demostrar que $B(Q^{-1}\,\mathbf{v}) = \lambda(Q^{-1}\,\mathbf{v})$:

$$
\begin{aligned}
B(Q^{-1}\,\mathbf{v}) &= (Q^{-1}\,A\,Q)(Q^{-1}\,\mathbf{v}) \\
&= Q^{-1}\,A\,Q\,Q^{-1}\,\mathbf{v} \\
&= Q^{-1}\,A\,\mathbf{v} \\
&= Q^{-1}(\lambda\,\mathbf{v}) \\
&= \lambda(Q^{-1}\,\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto B tiene valor propio λ y vector propio $Q^{-1}\,\mathbf{v}$.

6 Sean λ y $\mathbf{v}$, valor y vector propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es invertible, entonces $B = A^{-1}$ tiene valor propio $\dfrac{1}{\lambda}$ y vector propio $\mathbf{v}$.

Demo: Se sabe que $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda:

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\,\mathbf{v}) &= A^{-1}(\lambda\,\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} &= \lambda(A^{-1}\,\mathbf{v}) \\ \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{v} &= A^{-1}\,\mathbf{v} \\ A^{-1}\,\mathbf{v} &= \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{v} \end{aligned}$$

Se define $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Luego la matriz A^{-1} tiene valor propio $\mu = \frac{1}{\lambda}$ y vector propio $\mathbf{v}$.

7. Sean λ y $\mathbf{v}$, valor y vector propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, s un escalar no nulo y I_n la matriz identidad de orden n. Entonces la matriz $B = A + s\,I_n$ tiene valor propio $\lambda + s$ y vector propio $\mathbf{v}$.

Demo: Se sabe que $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$. Entonces:

$$\begin{aligned} B\,\mathbf{v} &= (A + s\,I_n)\mathbf{v} \\ &= A\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{v} \\ &= \lambda\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{v} \\ &= (\lambda + s)\mathbf{v} \end{aligned}$$

Se define $\mu = \lambda + s$. Luego, la matriz B tiene valor propio $\mu = \lambda + s$ y vector propio $\mathbf{v}$.

8. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces:
   - 8a Todos los valores propios de A son reales:

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

   - 8b Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales:

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \mathbf{v}_i^* \, \mathbf{v}_j = 0$$

Demo: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con vector propio $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Por lo tanto, el producto $A\,\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Considerar el producto interno:

$$\begin{aligned}(A\,\mathbf{v})^*\,\mathbf{v} &= \mathbf{v}^*\,A^*\,\mathbf{v}\\ &= \mathbf{v}^*\,A\,\mathbf{v}\\ &= ((A\,\mathbf{v})^*\,\mathbf{v})^*\end{aligned}$$

Luego, el escalar $(A\,\mathbf{v})^*\,\mathbf{v} \in \mathbb{R}$, ya que es igual a su conjugado. Usando la definción de valor propio:

$$(A\,\mathbf{v})^*\,\mathbf{v} = (\lambda\,\mathbf{v})^*\,\mathbf{v} = \overline{\lambda}||v||_2^2$$

la cual es real solo si $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si A es matriz simétrica, sus valores propios son reales.

Ahora, sean λ_1 y λ_2 dos valores propios distintos y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ dos vectores propios distintos de A, matriz simétrica. Se debe demostrar que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales. Entoces, considerar:

$$(A\,\mathbf{v}_1)^*\,\mathbf{v}_2 = (\lambda_1\,\mathbf{v}_1)^*\,\mathbf{v}_2 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1^*\,\mathbf{v}_2$$

A es simétrica, luego:

$$(A\,\mathbf{v}_1)^*\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*(A\,\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^*(\lambda_2\,\mathbf{v}_2) = \lambda_2\,\mathbf{v}_1^*\,\mathbf{v}_2$$

Se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned} \lambda_1\,\mathbf{v}_1^*\,\mathbf{v}_2 &= \lambda_2\,\mathbf{v}_1^*\,\mathbf{v}_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1^*\,\mathbf{v}_2 &= 0 \end{aligned}$$

la cual es verdadera cuando $\mathbf{v}_1^*\,\mathbf{v}_2 = 0$. Por lo tanto $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales.

Ejercicio: Para cada una de las afirmaciones, probar que es verdadero o dar un ejemplo para mostrar que es falso.

1. Si λ es un valor propio de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\mu \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda - \mu$ es un valor propio de $A - \mu\, I_n$.
2. Si μ es un valor propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A es no singular, entonces μ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

¿Cuál es el procedimiento para calcular valores y vectores propios?

1. Calcular el polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n)$.
2. Calcular las raíces de $p_A(\lambda)$. Se obtiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
3. Reemplazar el valor obtenido para cada λ_i en el sistema $(A - \lambda_i\, I_n)\mathbf{v}_i = 0$ para un vector desconocido $\mathbf{v}_i$. Se escoge una representación conveniente para el vector $\mathbf{v}_i$ basado en la restricción anterior.

Ejemplo: Calcule los valores y vectores propios asociados a la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\, I_n) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \end{aligned}$$

2. Raíces del polinomio característico: se obtienen valores propios λ_1, λ_2.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = -1$$

3. Reemplazar el valor de cada λ_i en el sistema $(A - \lambda\, I_n)\mathbf{v}_i = 0$.
Para $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 0$$

Se puede elegir el vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$.

3. Reemplazar el valor de cada λ_i en el sistema $(A - \lambda\, I_n)\mathbf{v}_i = 0$.
Para $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Se puede elegir el vector propio $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 4$.

Ejercicio: Calcule los valores y vectores propios asociados a la matriz A. Indique si los valores propios son reales y si el espacio generado por los vectores propios genera a $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo: Calcule los valores y vectores propios asociados a la matriz A. ¿El espacio de vectores propios genera a $\mathbb{R}^3$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

- Valores propios no nulos ($\det(A) = 6 \neq 0$)
- Valores propios no son necesariamente reales ($A \neq A^T$)
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^3$

Ejercicio: Calcule los valores y vectores propios asociados a la matriz A. ¿Son todos los valores propios de A reales?:

$$A = \begin{bmatrix} 8.00 & 0.50 & 2.20 & 7.00 & 2.90 & 7.50 & 7.20 & 5.40 & 3.00 & 2.90 \\ 8.40 & 9.50 & 5.80 & 0.20 & 4.50 & 4.60 & 4.60 & 0.20 & 0.20 & 7.80 \\ 4.20 & 2.00 & 0.80 & 2.90 & 6.70 & 2.40 & 9.60 & 6.20 & 4.70 & 8.90 \\ 4.20 & 1.50 & 3.50 & 9.60 & 2.00 & 0.20 & 8.30 & 4.90 & 2.80 & 3.20 \\ 3.30 & 8.50 & 4.50 & 9.90 & 6.50 & 3.40 & 6.60 & 9.20 & 3.10 & 2.30 \\ 7.70 & 5.90 & 1.40 & 9.70 & 4.20 & 7.10 & 9.00 & 8.80 & 7.20 & 4.80 \\ 1.20 & 1.40 & 6.90 & 6.60 & 6.90 & 9.40 & 3.60 & 8.80 & 8.20 & 5.70 \\ 7.20 & 9.60 & 2.50 & 6.40 & 1.60 & 1.50 & 0.40 & 7.70 & 6.90 & 4.70 \\ 4.20 & 7.20 & 1.60 & 6.00 & 2.00 & 9.30 & 5.00 & 7.90 & 6.10 & 0.20 \\ 0.90 & 0.70 & 1.60 & 3.90 & 7.10 & 4.70 & 2.50 & 7.90 & 7.50 & 4.30 \end{bmatrix}$$

- Resulta impráctico (y con mucha imprecisión) calcular el determinante. Simetría aún puede testearse fácilmente.
- Se requieren técnicas numéricas para determinar los valores y vectores propios.

Sea A una matriz cuadrada en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que $\lambda_i \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ son el i-ésimo valor y vector propio de A. Si se suman todos y se ordenan considerando que el subíndice i corresponde a la i-ésima columna, se tiene:

$$A\left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\dots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A\,V = V\,\Lambda$$

Si V^{-1} existe, se tiene:

$$A = V\,\Lambda\,V^{-1}$$

Algunas preguntas:

- ¿Qué ocurre con la representación matricial de valores y vectores propios si los vectores propios forman una base ortonormal?
- Si la matriz A tiene valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. ¿cuáles son los valores propios de la matriz A^{100}?

$$
\begin{aligned}
A^n &= (V\,\Lambda\,V^{-1})^n \\
&= V\,\Lambda\,V^{-1}\,V\,\Lambda\,V^{-1}\ldots V\,\Lambda\,V^{-1}
\end{aligned}
$$

¿Es posible simplificar algo?

$$A^n = V\,\Lambda^n\,V^{-1}$$

Teorema

Se dice que dos matrices son **similares** si tienen los mismos valores propios.

- Las matrices A y $B = Q^{-1}\,A\,Q$ son matrices similares.

$$\begin{aligned}
\det\left(B - \lambda\, I_n\right) &= \det\left(Q^{-1}\,A\,Q - \lambda\, I_n\right) \\
&= \det\left(Q^{-1}\,A\,Q - \lambda\, Q^{-1}\,I_n\,Q\right) \\
&= \det\left(Q^{-1}(A - \lambda\, I_n)Q\right) \\
&= \det(Q^{-1})\det(A - \lambda\, I_n)\det(Q) \\
&= \det(A - \lambda\, I_n)
\end{aligned}$$

- Un teorema útil para acotar los valores propios es el **Teorema de Gerschgorin**.

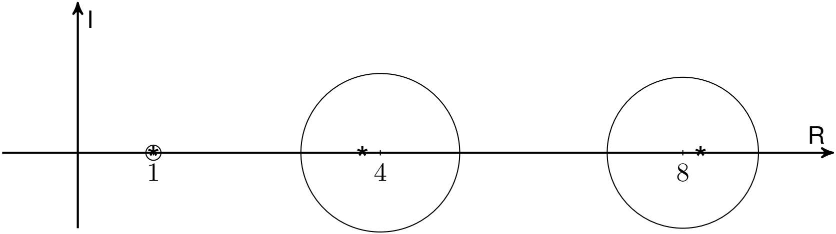
Teorema de Círculo de Gerschgorin

Sea A una matriz de $n \times n$. Cada valor propio λ de A pertenece por lo menos a uno de los discos $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

- Cada uno de los discos está centrado en a_{ii}, para $1 \leq i \leq n$.
- El radio de cada disco está dado por $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Ejemplo: considerar $\epsilon = 0.1$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} |\lambda - 8| \leq 1 & \lambda_1 = 8.23607 \\ |\lambda - 4| \leq 1 + |\epsilon|\,, & \lambda_2 = 3.76397 \\ |\lambda - 1| \leq |\epsilon| & \lambda_3 = 0.99965 \end{array}$$



Ejercicio: considere la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Muestre gráficamente los Discos de Gerschgorin.
2. Muestre que se satisface el Teorema del Círculo de Gerschgorin.

Algunas preguntas:

- ¿Es posible determinar los valores y vectores propios de una matriz con este teorema?
- ¿Cuál podría ser la utilidad de este teorema?

Referencias

- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Appendix A.3: Eigenvalues and Eigenvectors.
- Numerical Linear Algebra. L.N. Trefethen. Lecture 24: Eigenvalue Problems.