CERTAMEN N°1 ILI-286
SCT - SÁ.14.10.17

NOMBRE:______________________________ ROL:____________________

Instrucciones: *Usted tiene 120 minutos para responder el Certamen.*
Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.
Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o ***sin nombre*** *reciben 0 puntos.* Copy-and-Paste *de algoritmos reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!*

1. **[25 puntos]** Se define como el vector propio izquierdo, al vector fila $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisface la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}\,A = \lambda_l\,\mathbf{v},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Construya un algoritmo que encuentre el vector propio izquierdo dominante, donde el vector propio izquierdo dominante está asociado al valor propio izquierdo de mayor magnitud.

Hint: You don't need to reinvent the wheel! Just make sure you use the wheel you already know correctly.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: $\boxed{}$

NOMBRE:______________________________ ROL:____________________

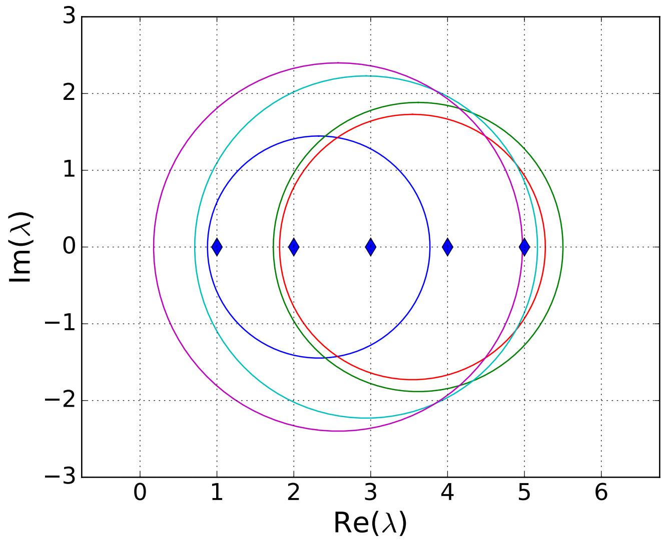
2. Considere las matrices A_1, A_2, A_3 y A_4, todas pertenecientes a $\mathbb{R}^{5\times 5}$, cada una con valores propios tales que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5$. En la Figura 1 se muestran los Discos de Gerschgorin y los valores propios respectivos para cada matriz en el plano complejo. La Tabla 1 muestra los valores propios de cada matriz.

   (a) [**8 puntos**] ¿Cuál de los siguientes métodos usaría para encontrar el valor propio dominante en cada matriz? *Power Iteration*, *Rayleigh Quotient Iteration* o *Inverse Power Iteration*. ¿Qué valor propio esperaría encontrar en cada caso? **Justifique su respuesta**.

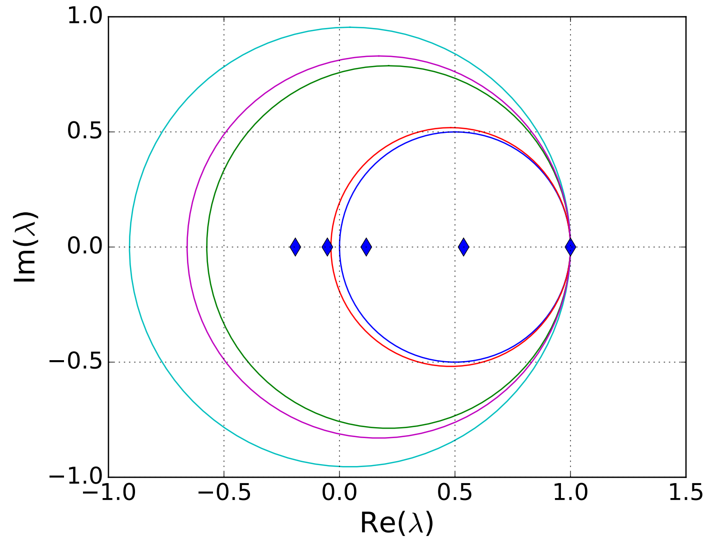
   (b) [**12 puntos**] ¿Cuál de los siguientes métodos usaría para encontrar el valor propio de menor magnitud en cada matriz? *Power Iteration*, *Inverse Power Iteration* o *Rayleigh Quotient Iteration*. ¿Qué valor propio esperaría encontrar en cada caso? **Justifique su respuesta**.

   (c) [**10 puntos**] Proponga un algoritmo para encontrar el valor propio λ_5 y que sea válido para todas las matrices.

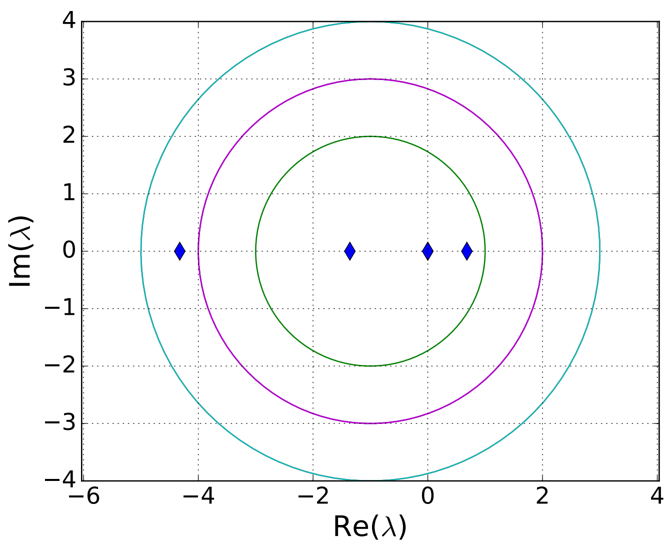
Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: $\boxed{}$



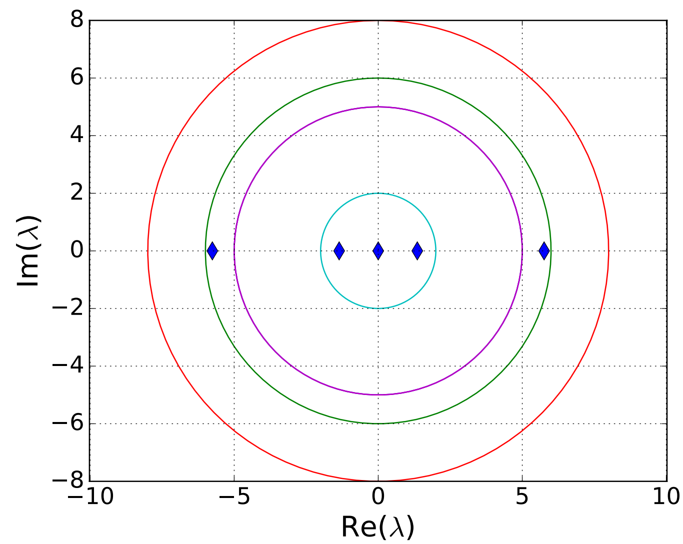
(a) Matriz A_1



(b) Matriz A_2



(c) Matriz A_3



(d) Matriz A_4

Figura 1: Discos de Gerschgorin y valores propios de 4 matrices distintas.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Matriz A_1	5.00000000	4.00000000	3.00000000	1.99999999	1.00000000
Matriz A_2	1.00000000	0.53730646	0.11609309	-0.05240699	-0.19107781
Matriz A_3	0.68133064	-0.00000000	-0.00000000	-1.35792637	-4.32340428
Matriz A_4	5.75851194	1.35629652	0.00000000	-1.35629652	-5.75851194

Tabla 1: Valores propios de 4 matrices distintas.

Nombre:______________________________ Rol:______________________

3. Cada 2 segundos un *tester-integral* mide la corriente inducida por el campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{l})$ (en $[A/m]$) que pasa por un cable de 5 metros ubicado entre $\mathbf{x}_a$ y $\mathbf{x}_b$ con distintas resoluciones. Recuerde que la corriente neta puede ser obtenida mediante la Ley de Ampère:

$$I = \oint_C \mathbf{H}(\mathbf{l}) \cdot d\mathbf{l} \tag{1}$$

El *tester-integral* mide la corriente mediante una curva cerrada C por cuyo centro pasa el cable. La parametrización de C es $\mathbf{l}(s) = \langle \cos(s), \sin(s), 0\rangle$, $s \in [0, 2\pi]$, ver Figura 2 como referencia.

La primera medición consistió en 2 valores $\mathbf{H}$ sobre la curva paramétrica (considerando las condiciones de borde periódicas) separados por una distancia h en s. Las mediciones sucesivos fueron realizados refinando la malla de estudio por la mitad. La Tabla 2 muestra sucesivas estimaciones de corriente eléctrica dadas por el *tester-integral* para los períodos indicados.

# Medición	h	$I[A]$
1	3.141593	0.000510
2	1.570796	0.209503
3	0.785398	0.444812
4	0.392699	0.486943
5	0.196350	0.496775
6	0.098175	0.499196
7	0.049087	0.499799
8	0.024544	0.499950
9	0.012272	0.499987
10	0.006136	0.499997

Tabla 2: Distancia entre mediciones de campo magnético y corriente estimada.

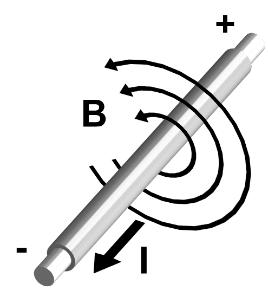


Figura 2: Esquema de corriente eléctrica a través del cable y campo magnético. (Imagen original de Wikimedia Commons).

Lamentablemente la documentación del medidor se ha perdido. Es necesario por lo tanto realizar ingeniería inversa para saber cómo trabaja el *tester-integral*.

(a) **[5 puntos]** Desarrolle explícitamente (1) tal que quede la integral de línea en función de s.

(b) **[15 puntos]** Estudie y estime el orden de convergencia del medidor utilizado. Considere para este estudio el error absoluto entre mediciones:

$$e_i = |I_i - I_{i+1}|,$$

donde I_i es el valor de la i-ésima medición.

(c) **[10 puntos]** Indique en que medición se debería obtener un error absoluto menor a 10^{-14}.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: ☐

NOMBRE:______________________________________ ROL:______________________________

4. Se tiene la siguiente función $p(x) = f(x) + \varepsilon(x)$ para $x \in [0, 10]$, donde $f(x)$ es la data *pura* y $\varepsilon(x)$ es un error de medición. Lamentablemente solo tenemos a nuestra disposición $p(x)$ pero nos interesa recuperar $f(x)$. Lo único que se sabe es que $\varepsilon(x)$ es una función de error que sigue una distribución $\mathcal{N}(0, \delta)$. Considere el siguiente operador integral propuesto para reducir el efecto de $\varepsilon(x)$:

$$I_a(x) = \int_{x-a}^{x+a} p(y)\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

 (a) [**10 puntos**] Construya un algoritmo que aproxime numéricamente (2). Su algoritmo debe recibir como parámetro el error absoluto permitido γ.
 Hint: You have to make sure that for a given x and a you compute $I_a(x)$ with an absolute error less or equal than γ

 (b) [**15 puntos**] Por estudios anteriores, se sabe que $f(x)$ tiene un máximo en el punto x_0. Construya un algoritmo que obtenga el máximo de $I_a(x)$ en función de a para $a \in [1e-5, 1e0]$. Usted debe explicar claramente los argumentos de su algoritmo y el output.
 Hint: You may assume that for a small "a" the maximum are close to x_0.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: $\boxed{}$