QUIZ 2 - ILI286
PRIMAVERA 2017 - MI 04.10.17

NOMBRE: PAUTA ROL: ______

Responda las siguientes preguntas de forma personal. **Tiempo Máximo:** 30 minutos.

1. **[50 puntos]** Considere la siguiente función en dos variables $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \int_0^x H(s+y)\,\mathrm{d}s$$

Donde $H(x)$ es la función *escalón unitario de Heaviside*:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) **[50 puntos]** Utilice la regla del trapecio para obtener el valor de la integral I. **Nota:** Usted decide el número apropiado de intervalos a considerar para calcular la integral con el método numérico.

$$I = \int_1^2 F(1,y)\,\mathrm{d}y$$

1(a) Se usará regla del trapecio con 1 segmento, ya que $H(x)$ es constante. Primero se calculará $F(1,y)$

$$\begin{aligned} F(1,y) &= \int_0^1 H(s+y)\,ds \\ &= \frac{h}{2}\left(H(0+y)+H(1+y)\right) \\ &= \frac{(1-0)}{2}\left(H(y)+H(y+1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(H(y)+H(y+1)\right) \end{aligned}$$

Ahora se calculará el valor de la integral I:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 F(1,y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(H(y)+H(y+1)\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\left(H(1)+H(2)+H(2)+H(3)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(2-1)}{2}\left(1+1+1+1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = 1}$$

2. **[50 puntos]** Científicos han desarrollado un nuevo método numérico para calcular el valor de integrales, y lo han testeado con una función de prueba $f(x)$, generando los datos de la Tabla 1. Además, realizaron pruebas con el *método 1* y el *método 2*, los cuales se muestran en la Figura 1.

log(h) log(Error)

-2.1972 -5.4716

h	Error
0.11111111	0.00420441
0.05882353	0.00085717
0.04000000	0.00033900
0.03030303	0.00015994
0.02439024	0.00009369
0.02040816	0.00006485
0.01754386	0.00004238
0.01538462	0.00003104
0.01369863	0.00002245
0.01234568	0.00001886
0.01123596	0.00001517
0.01030928	0.00001271

-4.5747 -11.2731

Tabla 1: Error al calcular la integral de $f(x)$ con el nuevo método propuesto por los científico.

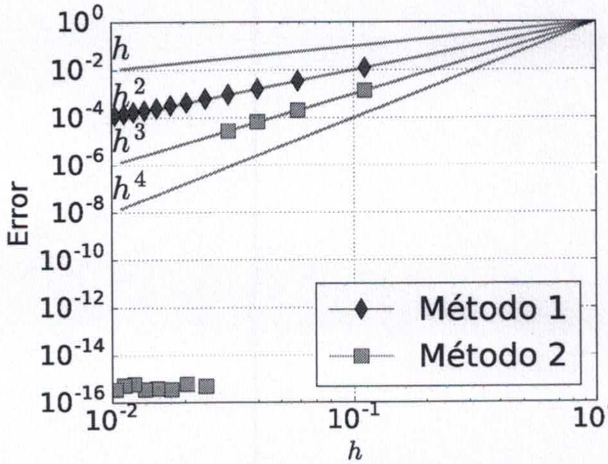

Figura 1: Error al calcular la integral de $f(x)$ con *dos métodos conocidos*.

(a) **[25 puntos]** Estime el orden del nuevo método numérico, i.e. sabiendo que el error tiene la forma Error $= k\,h^p$ encuentre p para $\mathcal{O}(h^p)$.

(b) **[25 puntos]** Compare el nuevo método de integración con el *método 1* y el *método 2*. ¿Cuál método considera que es más apropiado para obtener la integral numérica de $f(x)$.

(a) $\text{Error} = K\,h^p$ / log

$\log(\text{Error}) = \log(h^p) + \log(k)$

$\log(\text{Error}) = p\log(h) + \log(k)$, es una ecuación de la recta:

$y = m\,x + c$

donde p es la pendiente

$$p = \frac{\log(0.00001271) - \log(0.00420441)}{\log(0.01030928) - \log(0.11111111)}$$

$$p = \frac{-11.2731 - -5.4716}{-4.5747 - -2.1972} \approx 2.44$$

Finalmente el orden del nuevo metodo es $O(h^{2.44})$

(b) El método 2 es más apropiado, ya que muestra convergencia para el valor de la integral con error cero (computacionalmente).