Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Introducción y Teoría - Problemas de Valor Inicial

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v1.1

Ecuación Diferencial Ordinaria

Es una ecuación diferencial en donde la incógnita es una función de una variable, generalmente $y(t)$ o $y(x)$.

- Existen muchas aplicaciones matemáticas que se pueden modelar mediante EDOs (ODEs).
- La idea es reconstruir una función incógnita considerando el comportamiento de la derivada de esta función.

La siguiente EDO, es un Problema de Valor Inicial (IVP):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \\ t &\in [0, T] \end{aligned}$$

- ¿Qué significa cada ecuación del IVP?
- ¿Qué información se conoce de la función incógnita en un IVP?

La siguiente EDO, es un Problema de Valor Frontera (BVP):

$$
\begin{aligned}
a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) &= 0 \\
y(0) &= y_0 \\
y(1) &= y_1 \\
0 \leq\ x &\leq 1
\end{aligned}
$$

- ¿Qué significa cada ecuación del BVP?
- ¿Qué información se conoce de la función incógnita en un BVP?

Ecuación Autónoma

Se dice que una EDO es **autónoma** cuando no existe dependencia de la variable independiente. Por ejemplo:

$$\dot{y} = f(y)$$

- La notación $\dot{y}$ es equivalente con $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$.
- Una ecuación que depende de la variable independiente se dice que es **no autónoma**. Por ejemplo: $\dot{y} = f(t, y)$.
- Una EDO autónoma de segundo orden tiene la forma $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$.

Introducción

Ejercicio: considerar las siguientes EDOs

1. $\dot{y} = t\,y + t^3$, con $y(0) = 1$ y solución exacta $y(t) = 3\,\exp(t^2/2) - t^2 - 2$.
2. $\dot{y} = c\,y(1-y)$, con $y(0) = y_0$ y solución exacta
$$y(t) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{y_0}{1-y_0}\exp(c\,t)}.$$

- Clasifique las EDOs en autónomas y no autónomas.
- Compruebe si $y(t)$ es la solución exacta en cada caso.

Considerar el problema:

$$\dot{y}_1(t) = 2\,y_1(t) + y_2(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = y_1(t) + 3\,y_2(t)$$

Este sistema de EDOs puede tener otras representaciones:

1. **Representación matricial**

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

2. **Representacion vectorial**

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$$
$$\dot{\mathbf{y}}(t) = J\,\mathbf{y}(t)$$

Considerar la EDO de orden superior:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

¿Cómo se puede tranformar esta EDO a un sistema de EDOs?

Sea:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= y'(t) \\ &\vdots \\ y_{n-1}(t) &= y^{(n-2)}(t) \\ y_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Con el cambio de variable, se transforma la EDO:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

En el sistema:

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_2(t) \\
y_2'(t) &= y_3(t) \\
&\vdots \\
y_{n-1}'(t) &= y_n(t) \\
y_n'(t) &= f\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right)
\end{aligned}$$

Sistema Dinámico

Un conjunto de ecuaciones que describe la evolución de un sistema a través del tiempo se conoce como **sistema dinámico**.

Estado Estacionario

Un conjunto de ecuaciones que permanece invariante en el tiempo corresponde a un **estado estacionario**, i.e. $\dot{\mathbf{y}}(t) = 0$.

- No es posible encontrar la solución exacta de una EDO en todos los casos.
- Entonces, los métodos proponen reconstruir una función $y(t)$ numéricamente.
- Considerar el problema de valor inicial, con y_0 un valor conocido:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación entre $t = t_0 = 0$ y un tiempo $t = t_1$:

$$\int_0^{t_1} \dot{y}(s)\mathrm{d}s = \int_0^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

$$y(t_1) = y(0) + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

¿Es posible utilizar un método numérico para aproximar el valor de la integral en la ecuación?

Utilizando la regla del punto medio para aproximar la integral se obtiene la siguiente **aproximación** numérica

$$
\begin{aligned}
y(t_1) &= y(0) + \int_0^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s \\
y(t_1) &\approx y_0 + (t_1 - 0) f\left(\frac{t_1 + 0}{2}, y\left(\frac{t_1 + 0}{2}\right)\right) \\
y(t_1) &\approx y_0 + t_1\, f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

¿Existe algún problema al utilizar este método? ¿Se dispone de toda la información necesaria?

No se tiene información de $y\left(\frac{t_1}{2}\right)$. Se utilizará $y(0)$ en su lugar, ya que es conocido.

$$y(t_1) \approx y_0 + t_1\, f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)$$
$$\Downarrow$$
$$y(t_1) \approx y_0 + t_1\, f(0, y(0))$$

En general, obtener una **aproximación** de la función $y(t)$ en el tiempo t_{i+1} consistirá en usar la información del tiempo t_i mediante la expresión:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y(t_i))$$

Método de Euler

$$y_0 = y(t_0) \text{ dato inicial}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i)$$

con $h = t_{i+1} - t_i$.

Notación:

- t_i: discretización de la variable t.
- $y(t_i)$: valor exacto de $y(t)$ en el tiempo $t = t_i$.
- y_i: valor aproximado de $y(t)$ en el tiempo $t = t_i$.
- e_i: error absoluto entre el valor exacto y el valor aproximado en $t = t_i$.

Ejemplo: considerar la EDO no autónoma

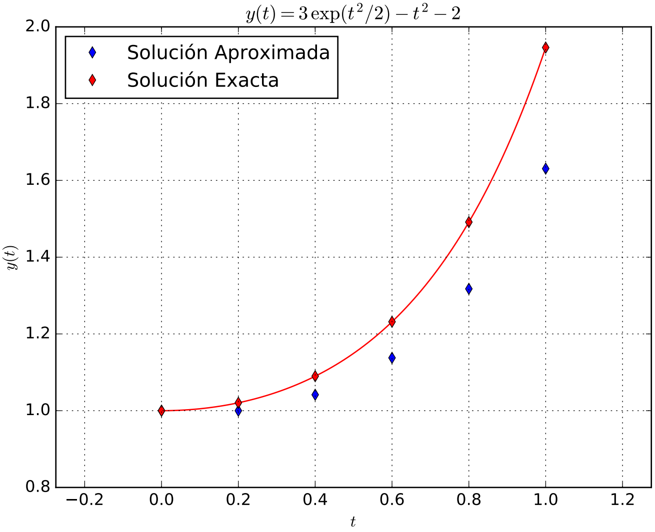
$$\dot{y} = t\,y(t) + t^3$$
$$y(0) = 1$$

con solución $y(t) = 3\,\exp\left(t^2/2\right) - t^2 - 2$.

Solución numérica obtenida con el método de Euler:

i	t_i	$y(t_i)$	y_i	$e_i = \lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0	0	1	1	0
1	0.2000	1.0206	1.0000	0.0206
2	0.4000	1.0899	1.0416	0.0483
3	0.6000	1.2317	1.1377	0.0939
4	0.8000	1.4914	1.3175	0.1739
5	1.0000	1.9462	1.6306	0.3155

Problemas de Valor Inicial
Método de Euler



Considerar el siguiente sistema dinámico:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= 2\,y_1(t) + y_2(t) \\
\dot{y}_2(t) &= y_1(t) + 3\,y_2(t) \\
y_1(0) &= 1 \\
y_2(0) &= 2
\end{aligned}
$$

El método de Euler puede usarse con álgebra vectorial:

Método de Euler

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0) \text{ dato inicial}$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

con $h = t_{i+1} - t_i$.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\, y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(t) + 3\, y_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}}(t) = J\, \mathbf{y}(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y}(0)$$

Lipschitz continuidad

Una función $f(t, y)$ es Lipschitz continua en la variable y sobre el rectángulo $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ si existe una constante L (llamada constante de Lipschitz) que satisface:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Ejemplo: Considerar el IVP:

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= t\,y(t) + t^3 \\
y(0) &= y_0 \\
t &\in [0,1]
\end{aligned}
$$

Buscar la constante de Lipschitz para el lado derecho de la ecuación, $f(t,y) = ty + t^3$.
La función $f(t,y)$ es Lipschitz continua en la variable y sobre el rectángulo $S = [0,1] \times (-\infty, \infty)$.

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t\,y_1 - t\,y_2| \le |t||y_1 - y_2| \le |y_1 - y_2|$$

Luego $L = 1$

Teorema

Asumir que $f(t,y)$ es Lipschitz continua en la variable y sobre $S = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ y $\alpha < y_a < \beta$. Entonces, existe un c entre a y b tal que el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y) \\ y(a) &= y_a \\ t &\in [a,c] \end{aligned}$$

tiene exactamente una solución $y(t)$. Si f es Lipschitz en $[a,b] \times (-\infty,\infty)$, entonces existe exactamente una solución en $[a,b]$.

Ejemplo: ¿En qué intervalo $[0, c]$, el problema de valor inicial tiene solución única?

$$\begin{aligned} y'(t) &= y^2(t) \\ y(a) &= 1 \\ t &\in [0, 2] \end{aligned}$$

Por teorema del valor medio, existe un c tal que:

$$\frac{\partial f(t,c)}{\partial y} = \frac{f(t,y_1) - f(t,y_2)}{y_1 - y_2}$$

Luego, L puede ser tomado del máximo valor de la derivada parcial:

$$\frac{\partial f(t,c)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y$$

Considerar $-10 \leq y \leq 10$. Entonces $\max |2y| = 20$ y se satisface la desigualdad:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq 20|y_1 - y_2|$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq 20|y_1 - y_2|$$

$L = 20$. Sin embargo, la solución no está garantizada en todo el intervalo. Considerar $y(t)$, solución analítica de la EDO:

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)}$$

Cuando $t \to 1$, $y \to \infty$. Solo se puede asegurar que en un intervalo pequeño $[0, c]$, con $0 < c < 1$, existe una solución.

Teorema

Asumir que $f(t, y)$ es Lipschitz en la variable y, en el rectángulo $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$. Si $Y(t)$ y $Z(t)$ son soluciones en S de la ecuación diferencial:

$$y' = f(t, y)$$

con condiciones iniciales $Y(a)$ y $Z(a)$ respectivamente, entonces:

$$|Y(t) - Z(t)| \leq e^{L(t-a)}|Y(a) - Z(a)|$$

Error Global de Truncamiento

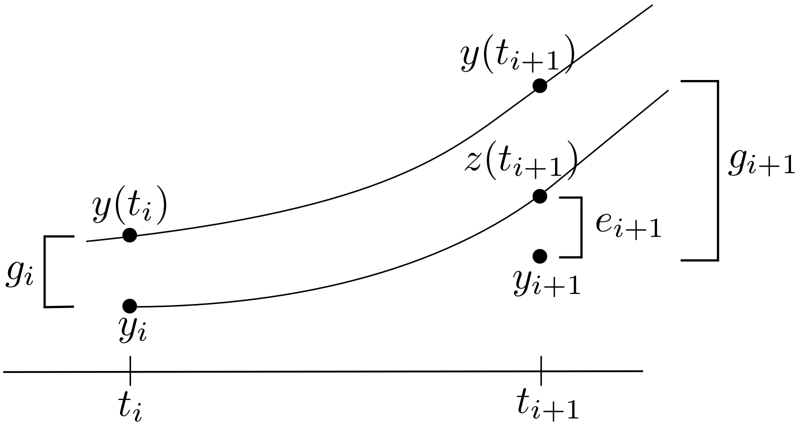
Se defne el error global de truncamiento a la diferencia entre la aproximación de un ODE solver y la solución correcta:

$$g_i = |y_i - y(t_i)|$$

Error Local de Truncamiento

Se defne el error local de truncamiento a la diferencia entre el valor del ODE solver en ese intervalo y la solución correcta del problema de valor inicial en un paso.

$$e_{i+1} = |y_{i+1} - z(t_{i+1})|$$



$y(t_{i+1})$
$z(t_{i+1})$
g_{i+1}
$y(t_i)$
e_{i+1}
g_i
y_{i+1}
y_i
t_i
t_{i+1}

Ejemplo: Encontrar el error local de truncamiento para el Método de Euler. Considerar que se aplica el método de Euler, $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_i) = y_i$. **En un paso**:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Ahora considerar el valor exacto en el tiempo $y(t_{i+1})$ como una expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) = y(t_i + h) &= y(t_i) + \dot{y}(t_i)h + \ddot{y}(c)\frac{h^2}{2} \\ = y(t_i + h) &= y(t_i) + f(t_i, y_i)h + \ddot{y}(c)\frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

Restando $y(t_{i+1})$ y y_{i+1}:

$$|y_{i+1} - y(t_{i+1})| = e_{i+1} = \frac{h^2}{2}|\ddot{y}(c)|$$

Entonces, si M es cota superior para $\ddot{y}$ en $[a, b]$, entonces el error local de truncamiento satisface:

$$e_i \leq M\frac{h^2}{2}$$

Ahora, se analizará el efecto de errores locales para formar errores globales:

- En la condición inicial, $g_0 = |y_0 - y(t_0)| = 0$.
- Después de un paso, no hay error acumulado de pasos anteriores y $g_1 = e_1$.
- Después de dos pasos, el error global acumula el error del paso anterior.
- ...

Sea $z(t)$ la solución exacta y $z(t_i)$ la solución exacta asumiendo que el IVP inicia en (t_{i-1}, y_{i-1}), entonces $e_2 = |y_2 - z(t_2)|$:

$$
\begin{aligned}
g_2 &= |y_2 - y(t_2)| \\
&= |y_2 - z(t_2) + z(t_2) - y(t_2)| \\
&\leq |y_2 - z(t_2)| + |z(t_2) - y(t_2)| \\
&\leq e_2 + e^{Lh} g_1 \\
&= e_2 + e^{Lh} e_1
\end{aligned}
$$

Para $i = 3$:

$$g_3 = |y_3 - y(t_3)| \leq e_3 + e^{Lh} g_2 \leq e_3 + e^{Lh} e_2 + e^{2Lh} e_1$$

De esta forma, el error de truncamiento global satisface:

$$g_i = |y_i - y(t_i)| \leq e_i + e^{Lh} e_{i-1} + e^{2Lh} e_{i-2} + \ldots + e^{(i-1)Lh} e_1$$

El método de Euler tiene error de truncamiento local proporcional a h^2.
Asumir que $e_i \leq Ch^{k+1}$ para algún entero k y constante $c > 0$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
g_i &\leq Ch^{k+1}(1 + e^{Lh} + \ldots + e^{(i-1)Lh}) \\
&= Ch^{k+1}\frac{e^{iLh} - 1}{e^{Lh} - 1} \\
&\leq Ch^{k+1}\frac{e^{L(t_i - a)} - 1}{Lh} \\
&= \frac{Ch^k}{L}(e^{L(t_i - a)} - 1)
\end{aligned}
$$

Teorema

Asumir que $f(t, y)$ tiene una constante de Lipschitz L para la variable y y que el valor y_i de la solución del problema de valor incial en t_i es aproximadamente y_i por un paso del ODE solver con error de truncamiento $e_i \leq Ch^{k+1}$ para alguna constante C y $k \geq 0$. Entonces, para cada $a < t_i < b$, el solver tiene error de truncamiento global:

$$g_i = |y_i - y(t_i)| \leq \frac{Ch^k}{L}(e^{L(t_i - a)} - 1)$$

Si un solver satisface la ecuación anterior con $h \to 0$, se dice que tiene orden k.

Orden del Método de Euler

El método de Euler es de primer orden, i.e. $\mathcal{O}(h)$.

- ¿Qué significa que el método de Euler sea de primer orden?
- ¿Qué ocurre con el error al disminuir el valor de h?

Backward Euler

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0) \text{ dato inicial}$$
$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})$$

con $h = t_{i+1} - t_i$.

- El método de Euler tradicional se conoce como **Forward Euler**. ¿Cuál es la diferencia entre Forward Euler y Backward Euler?
- ¿Que hay que hacer en Backward Euler para calcular $\mathbf{y}_{i+1}$?

Runge-Kutta de segundo orden - Midpoint rule

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0) \text{ dato inicial}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{k}_1\right)$$

con $h = t_{i+1} - t_i$.

- $\mathbf{k}_1$ debe calcularse en cada iteración. ¿Qué está calculando $\mathbf{k}_1$?
- RK2 es $\mathcal{O}(h^2)$. ¿Qué significa que un método sea de segundo orden?

Runge-Kutta de cuarto orden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_0 &= \mathbf{y}(t_0) \text{ dato inicial} \\
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}\left(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{k}_3\right) \\
\mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{h}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\,\mathbf{k}_2 + 2\,\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right)
\end{aligned}
$$

con $h = t_{i+1} - t_i$.

- $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ y $\mathbf{k}_4$ deben calcularse en cada iteración.
- RK4 es uno de los métodos más populares existentes.
- RK4 es $\mathcal{O}(h^4)$. ¿Qué significa que un método sea de cuarto orden?

Análisis de Estabilidad Lineal

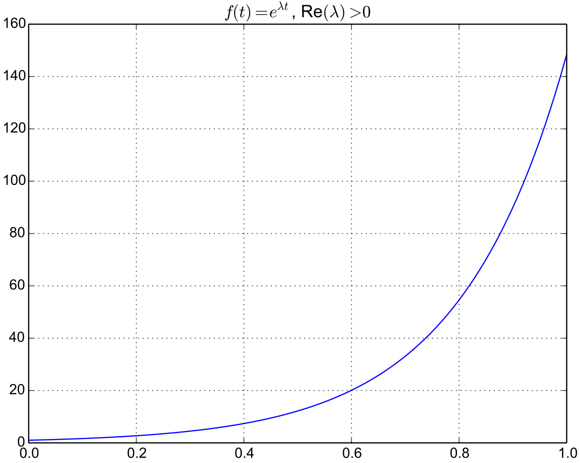
Considerar el problema de valor inicial, con $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \lambda y(t) \\
y(0) &= 1
\end{aligned}
$$

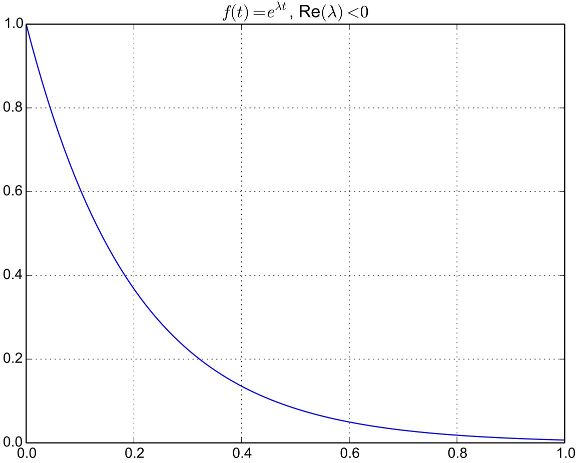
Con solución $y(t) = e^{\lambda t}$

- ¿Cómo se comporta la solución cuando $\text{Re}(\lambda) > 0$?
- ¿Cómo se comporta la solución cuando $\text{Re}(\lambda) < 0$?

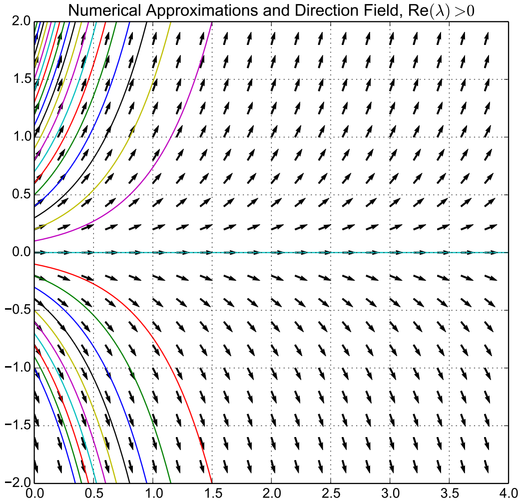
Análisis de Estabilidad Lineal



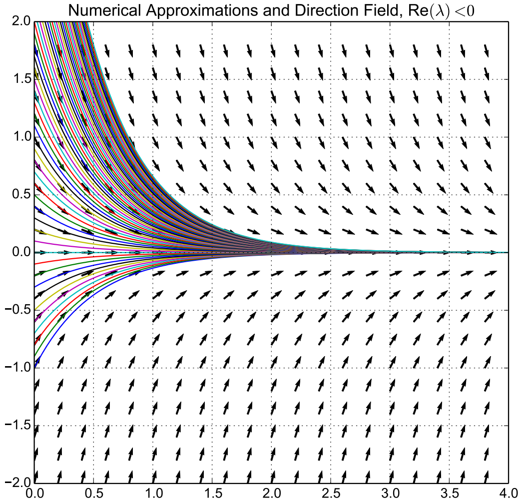
Análisis de Estabilidad Lineal



Análisis de Estabilidad Lineal



Análisis de Estabilidad Lineal



Análisis de Estabilidad Lineal

En el estado estacionario, se obtiene el **punto de equilibrio** $y = 0$. Luego:

- $y(t)$ es **inestable** cuando Re$(\lambda) > 0$.
- $y(t)$ es **asintóticamente estable** cuando Re$(\lambda) < 0$.

Considerar el caso Re$(\lambda) < 0$. Usando el Método de Euler:

Método de Euler

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0) \text{ dato inicial}$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

con $h = t_{i+1} - t_i$.

Se esperaría que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, ya que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

¿Qué condición debe cumplirse para que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?

$$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = y_0 + h\,\lambda\, y_0 \Rightarrow y_1 = (1 + h\,\lambda)\, y_0$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned} y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1) = y_1 + h\,\lambda\, y_1 &\Rightarrow y_2 = (1 + h\,\lambda)\, y_1 \\ &\Rightarrow y_2 = (1 + h\,\lambda)^2\, y_0 \end{aligned}$$

En general:

$$y_n = (1 + h\,\lambda)^n\, y_0$$

Análisis de Estabilidad Lineal

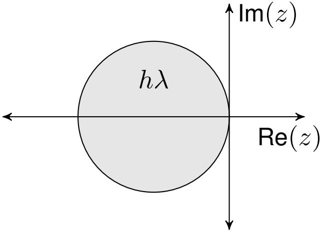
Para $y_0 = 1$, $y_n = (1 + h\,\lambda)^n$. Luego, para que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, debe cumplirse:

$$|1 + h\,\lambda| < 1$$

Suponer que $h\,\lambda = z = x + iy$, con $z \in \mathbb{C}$. Luego:

$$|1 + z| = |1 + x + iy| = \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} < 1$$

es una región del plano complejo.

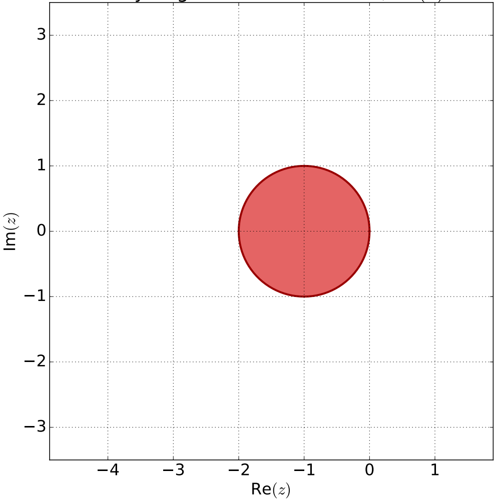


Análisis de Estabilidad Lineal

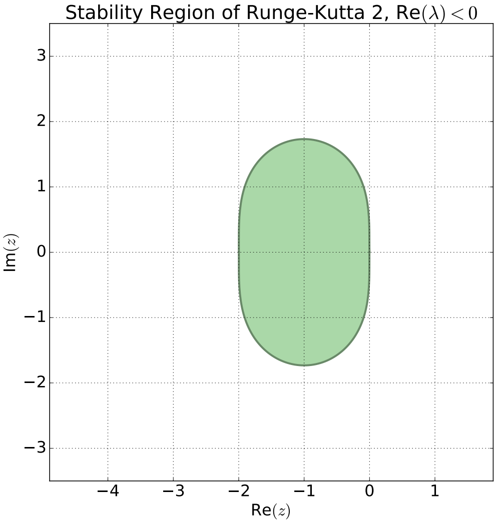
- La región anterior corresponde a un círculo de radio 1, centrado en el punto $(-1, 0)$ del plano complejo.
- Esta región se le conoce como **región de estabilidad**.
- El método se comporta de manera correcta dentro de este círculo.
- El valor de λ **restringe** a los valores h para que el método se comporte correctamente.

Análisis de Estabilidad Lineal

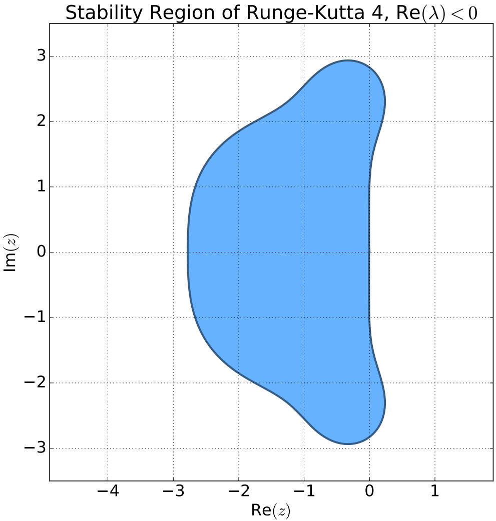
Stability Region of Forward Euler, Re$(\lambda) < 0$



Análisis de Estabilidad Lineal



Análisis de Estabilidad Lineal



Análisis de Estabilidad Lineal

Considerar el sistema dinámico lineal:

$$\mathbf{y}'(t) = J\,\mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

- ¿Cómo se puede aplicar la teoría de estabilidad lineal para un ODE Solver?
- ¿Qué es λ en este caso?

Radio Espectral

El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz cuadrada A de $n \times n$ es la máxima magnitud de sus valores propios.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$$

Teorema

Si la matriz A, de $n \times n$, tiene radio espectral $\rho(A) < 1$ y b es un vector arbitrario, entonces, para cualquier vector x_0, la iteración $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k + \mathbf{b}$ converge. De hecho, existe un único x_* tal que $\lim_{k\to\infty} = \mathbf{x}_*$ y $\mathbf{x}_* = A\,\mathbf{x}_* + b$.

Si $\mathbf{b} = 0$, entonces $\mathbf{x}_*$ es el vector nulo o un vector propio de A con valor propio 1.

Corolario

Si la matriz A de $n \times n$ tiene radio espectral $\rho(A) < 1$, entonces, para cualquier vector inicial $\mathbf{x}_0$, la iteración $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ converge a 0.

Análisis de Estabilidad Lineal

Considerar el sistema dinámico lineal:

$$\mathbf{y}'(t) = J\,\mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

En el estado estacionario, considerar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios de la matriz J:

- $\mathbf{y}(t)$ es **inestable** cuando $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ para $1 \leq i \leq n$.
- $\mathbf{y}(t)$ es **asintóticamente estable** cuando $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Análisis de Estabilidad Lineal

Considerar el caso Re$(\lambda_i) < 0$. El método de Euler realiza las iteraciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i) \\
\mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h\,J\,\mathbf{y}_i \\
\mathbf{y}_{i+1} &= (I + h\,J)\,\mathbf{y}_i
\end{aligned}$$

- Se necesita que el método satisfaga $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Si $\rho(I + h\,J) < 1$, el método converge a $\mathbf{y}_n = 0$.
- Entonces, es necesario que $|1 + h\,\lambda_i| < 1$ para $1 \leq i \leq n$.

Análisis de Estabilidad Lineal

Preguntas:

- ¿Cómo se aplica la teoría de estabilidad lineal de otros métodos numéricos para resolver EDOs?
- ¿Qué ocurre si $h\,\lambda$ no está dentro de la región de estabilidad?

Referencias

- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Chapter 6: Ordinary Differential Equations.
- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Appendix A: Matrix Algebra.
- Applied Mathematics, J. David Logan, Third Edition, Willey, 2006.
- A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations, A. Iserles, Second Edition, Cambridge university press, 2009.