QUIZ 6 - ILI286
PRIMAVERA 2017 - MI 22.11.17

NOMBRE: PAUTA ROL: ____________

Responda las siguientes preguntas de forma personal. **Tiempo Máximo:** 30 minutos.

1. **[100 puntos]** Considere el siguiente sistema de ecuaciones hiperbólicas que modela una deformación a través de un material elástico, considere $p(x,t)$ la presión y $u(x,t)$ la velocidad de esta deformación para un eje espacial unidimensional en el tiempo:

$$p_t(x,t) + \kappa_0\, u_x(x,t) = 0 \tag{1}$$
$$u_t(x,t) + \frac{1}{\rho_0} p_x(x,t) = 0 \tag{2}$$

donde κ_0 es el módulo de compresibilidad y ρ_0 es la densidad del material.

(a) **[30 puntos]** Muestre que a partir del sistema de ecuaciones hiperbólicas puede obtener una ecuación de onda de segundo orden para la presión, de la forma $p_{tt}(x,t) = c^2\, p_{xx}(x,t)$. ¿Cuánto vale c en este caso?
Hint: derive (1) con respecto a t y (2) con respecto a x.
Hint2: considere que las derivadas mixtas son iguales, i.e. $u_{xt}(x,t) = u_{tx}(x,t)$.
Hint3: debe hacer alguna transformación en el sistema y luego restar ambas ecuaciones.

(b) **[10 puntos]** Usted desea resolver la ecuación de onda de segundo orden de la pregunta anterior con el método de diferencias finitas. ¿Qué consideraciones debe tener en cuenta antes de resolver para asegurar estabilidad?

(c) **[60 puntos]** Considere $\kappa_0 = 8\,[Pa]$, $\rho_0 = 2\,[Kg/m^2]$ y la siguiente ecuación de ondas de segundo orden válida para $x \in [0,2]$ y $t > 0$:

$$p_{tt}(x,t) = c^2\, p_{xx}(x,t) \tag{3}$$
$$p(x,0) = x^2 - 2\,x \tag{4}$$
$$p_t(x,0) = x^2 \tag{5}$$
$$p(0,t) = 0 \tag{6}$$
$$p(2,t) = 0 \tag{7}$$

Construya un algoritmo estable que determine numéricamente la presión $p(x_i, T)$ en $T = 1\,[s]$. Considere $x_i = i\,\Delta x$, con $i \in \{0, \ldots, N_x\}$ y $t_n = n\,\Delta t$, con $n \in \{0, \ldots, N_t\}$.

(a) Derivando (1) con respecto a t y (2) con respecto a x:

$$p_{tt}(x,t) + \kappa_0\, u_{xt}(x,t) = 0 \qquad (A)$$
$$u_{tx}(x,t) + \frac{1}{\rho_0} p_{xx}(x,t) = 0 \qquad (B)$$

Sumando $(A) + -\kappa_0(B)$:

$$p_{tt}(x,t) + \kappa_0\, \cancel{u_{xt}(x,t)} - \kappa_0\, \cancel{u_{tx}(x,t)} - \frac{\kappa_0}{\rho_0} p_{xx}(x,t) = 0$$
$$\Rightarrow p_{tt}(x,t) = \frac{\kappa_0}{\rho_0} p_{xx}(x,t)$$

con $c = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\rho_0}}$

(b) Debe tenerse en cuenta la condición CFL: $\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

NOMBRE: PAUTA ROL:

(c)- Considerar $N_x = N_t = 5$, por lo que $\Delta x = \frac{2-0}{5} = 0.4$ y $\Delta t = \frac{1-0}{5} = 0.2$

Luego $c = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

- Se satisface estabilidad, pues $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{2 \cdot 0.2}{0.4} = 1 \leq 1$ ✓✓

- Considerar $w_{i,n} \approx p(x_i, t_n)$

- Discretizando (3):

$$\frac{w_{i,n-1} - 2w_{i,n} + w_{i,n+1}}{\Delta t^2} = \frac{c^2}{\Delta x^2}(w_{i-1,n} - 2w_{i,n} + w_{i+1,n}), \quad \text{sea } \sigma = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$w_{i,n-1} - 2w_{i,n} + w_{i,n+1} = \sigma^2 w_{i-1,n} - 2\sigma^2 w_{i,n} + \sigma^2 w_{i+1,n}$$

$$\Rightarrow w_{i,n+1} = \sigma^2 w_{i-1,n} + (2-2\sigma^2) w_{i,n} + \sigma^2 w_{i+1,n} - w_{i,n-1} \qquad n>0, \quad 0<i<5$$

- Para $n=0$ se utilizará la condición (5):

$$\frac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2\Delta t} = x_i^2$$

$$\Rightarrow w_{i,-1} = w_{i,1} - 2\Delta t\, x_i^2$$

$$\Rightarrow w_{i,1} = \frac{\sigma^2}{2} w_{i-1,0} + (1-\sigma^2) w_{i,0} + \frac{\sigma^2}{2} w_{i+1,0} + \Delta t\, x_i^2 \qquad 0<i<5$$

- Discretizando (4), (6) y (7):

$$w_{i,0} = x_i^2 - 2x_i \qquad 0<i<5$$

$$w_{0,n} = 0 \qquad n>0$$

$$w_{5,n} = 0 \qquad n>0$$

- Sea:

$$W_k = \begin{bmatrix} w_{1,k} \\ w_{2,k} \\ w_{3,k} \\ w_{4,k} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2-2\sigma^2 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ \sigma^2 & 2-2\sigma^2 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 2-2\sigma^2 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 2-2\sigma^2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \end{bmatrix}$$

Para obtener W_1, debe calcularse:

$$W_1 = \frac{1}{2} A W_0 + \Delta t\, G$$

Luego, para $k = 1, \ldots, 4$ se realiza la iteración

$$W_{k+1} = A W_k - W_{k-1}$$

Donde W_5 corresponde a la presión en el tiempo $T = t_5 = 1[s]$