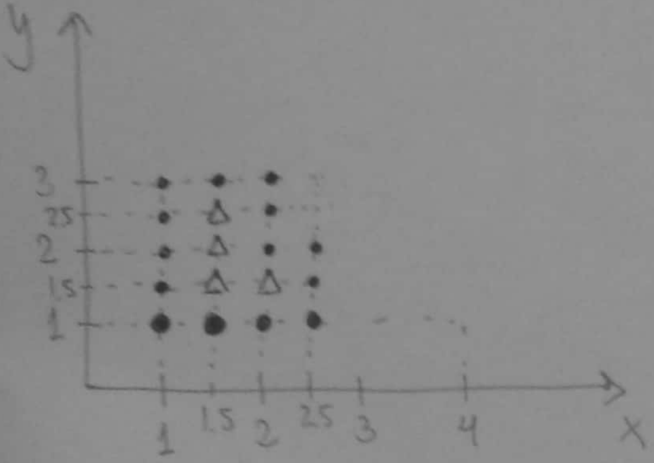
Ayudantía 8.

1.- a) La edp en cuestión es elíptica.

$$-\Delta u(x,y) = -u(x,y)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right) = -u(x,y)$$

Utilizando la discretización:



Con h el espaciado en x. y
K el espaciado en y.

$$x_i = 1 + ih$$

$$y_j = 1 + jK$$

$u(x_i, y_j) = w_{ij}$ y en $\delta\Omega$: $u(x_i, y_j) = (1+ih)\cdot(1+jK)$

Luego, los aproximaciones de la edp con diffs. finitas.:

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{K^2} = w_{ij}$$

$$\rightarrow w_{ij}\cdot\left(\frac{-2}{h^2} - \frac{2}{K^2} - 1\right) + \frac{w_{i+1,j}}{h^2} + \frac{w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1}}{K^2} + \frac{w_{i,j-1}}{K^2} = 0$$

$$\xi = \left(\frac{-2}{h^2} - \frac{2}{K^2} - 1\right) \quad \delta = (h^2)^{-1} \quad \eta = (K^2)^{-1}$$

b) Considerando $h=.5$ y $k=0.5$, se tendrán 4 ptos desconocidos en la malla. Luego, las ecuaciones asociadas a cada punto son:

$$i=1,\ j=1 \rightarrow W_{11}\cdot\xi + W_{21}\cdot\delta + W_{01}\delta + W_{12}\cdot\eta + W_{10}\eta = 0$$

$$i=2,\ j=1 \rightarrow W_{21}\xi + W_{31}\delta + W_{11}\delta + W_{22}\eta + W_{20}\eta = 0$$

$$i=1,\ j=2 \rightarrow W_{12}\xi + W_{22}\delta + W_{02}\delta + W_{13}\eta + W_{11}\cdot\eta = 0$$

$$i=1,\ j=3 \rightarrow W_{13}\xi + W_{23}\delta + W_{03}\delta + W_{14}\eta + W_{12}\eta = 0$$

De los elementos anteriores, los puntos encerrados son parte de la frontera y por lo tanto, conocidos.

El sistema en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \xi & \delta & \eta & 0 \\ \delta & \xi & 0 & 0 \\ \eta & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \\ W_{12} \\ W_{13} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} W_{01}\cdot\delta + W_{10}\cdot\eta \\ W_{31}\cdot\delta + W_{22}\eta + W_{20}\cdot\eta \\ W_{22}\delta + W_{02}\delta \\ W_{23}\delta + W_{03}\delta + W_{14}\eta \end{bmatrix}$$

c) Ya que la matriz es pequeña y simétrica, podría revisarse si acaso todos sus valores propios son positivos. En cuyo caso, se puede realizar la factorización de Cholesky y resolver el problema.

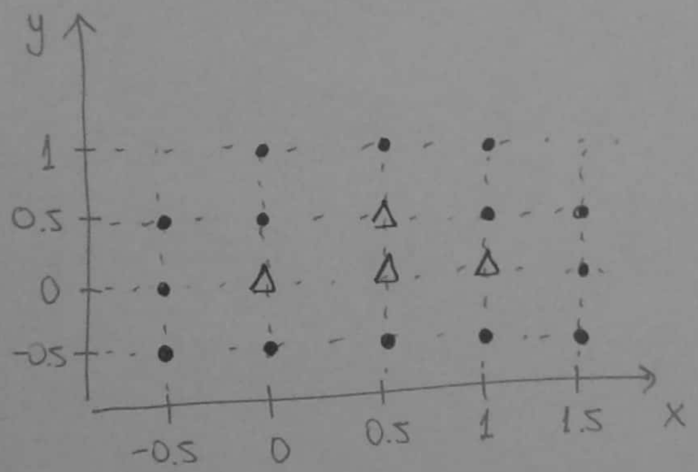
Si no son todos positivos, cualquier solver bastará.

2.- a) La edp:

$$-\Delta u(x,y) = -\lambda u(x,y)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right) = \lambda u(x,y)$$

Utilizando la discretización:



Con h el espaciado en x y K el espaciado en y.

$$x_i = -0.5 + ih$$
$$y_j = -0.5 + jK$$

$u(x_i, y_j) = w_{ij}$ y en $\partial\Omega$: $u(x_i, y_j) = 0$

La aproximación por diferencias finitas:

$$-\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{K^2}\right] = \lambda w_{ij}$$

$$-\left[w_{ij}\cdot\left(\frac{-2}{h^2} - \frac{2}{K^2}\right) + \frac{w_{i+1,j}}{h^2} + \frac{w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1}}{K^2} + \frac{w_{i,j-1}}{K^2}\right] = \lambda w_{ij}$$

$$\xi = \left(\frac{-2}{h^2} - \frac{2}{K^2}\right) \qquad \partial = \frac{1}{h^2} \qquad \eta = \frac{1}{K^2}$$

b) Los puntos de interés en la región son 4. Sus ecuaciones asociadas son:

$$i=1,\ j=1 \rightarrow -\left[\omega_{11}\cdot\xi + \omega_{21}\cdot\delta + \omega_{01}\delta + \omega_{12}\cdot\eta + \omega_{10}\eta\right] = \lambda\omega_{11}$$

$$i=2,\ j=1 \rightarrow -\left[\omega_{21}\xi + \omega_{31}\delta + \omega_{11}\delta + \omega_{22}\eta + \omega_{20}\eta\right] = \lambda\omega_{21}$$

$$i=3,\ j=1 \rightarrow -\left[\omega_{31}\xi + \omega_{41}\delta + \omega_{21}\delta + \omega_{32}\eta + \omega_{30}\eta\right] = \lambda\omega_{31}$$

$$i=2,\ j=2 \rightarrow -\left[\omega_{22}\xi + \omega_{12}\delta + \omega_{32}\delta + \omega_{23}\eta + \omega_{21}\eta\right] = \lambda\omega_{22}$$

De las ecuaciones anteriores, los elementos encerrados son parte de la frontera y tienen valor 0. (Como se dice en el enunciado).

Entonces, el sistema matricial:

$$-\begin{bmatrix} \xi & \delta & 0 & 0 \\ \delta & \xi & \delta & \eta \\ 0 & \delta & \xi & 0 \\ 0 & \eta & 0 & \xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \omega_{31} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \omega_{31} \\ \omega_{22} \end{bmatrix}$$

c) Es claro que el sistema tiene la forma $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, formulación que corresponde al problema de valores propios. Por lo tanto, es necesario utilizar un algoritmo que obtenga todos los pares valor-vector propio de una matriz. Como podrían serlo NSI o Unshifted QR.