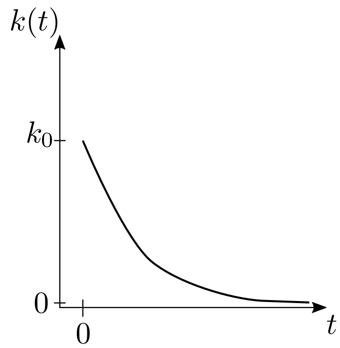
PAUTA CERTAMEN N^{o}1 ILI-286
SCT - SÁ.14.10.17

1. **(a)** La ecuación es una EDO lineal de primer orden de la forma $k'(t) = \lambda\, k(t)$ con $\lambda < 0$. Por lo tanto, para $t \to \infty$, $k(t) \to 0$.



> **Puntajes**
>
> 2 puntos por explicar lo que ocurre con $k(t)$.
> 2 puntos por dibujar el gráfico correspondiente.

(b) El Algoritmo 1 muestra una implementación que determina el valor de la constante de elasticidad en el tiempo $T_1 > 0$. Notar que el método siempre es estable para esta EDO, puesto a que al analizar la condición de estabilidad se llega a $0 < h\,\alpha$, que es verdadero para cualquier h y $\alpha > 0$.

Algoritmo 1 Backward Euler para constante de elasticidad

```
function BackwardEuler(k_0, α, T_1, h)
    K = k_0
    n = T_1/h
    for i = 0, 1, ..., n do
        K̂ = K
        K = K̂/(1 + h α)
    end for
    return K
end function
```

> **Puntajes**
>
> 2 puntos por analizar la estabilidad de Backward Euler.
> 4 puntos por mostrar el paso iterativo de Backward Euler para este caso.
> 2 puntos por entregar el valor de la constante de elasticidad en el tiempo T_1.
> **0 puntos en esta pregunta si no se utiliza Backward Euler**

(c) Los valores propios de la matriz Jacobiana en $t = 0$ son:

$$\lambda_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\,m\,k_0}}{2\,m} \tag{1}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\,m\,k_0}}{2\,m} \tag{2}$$

Además, como el sistema está sobreamortiguado ambos valores propios son negativos y reales, ya que $\beta^2 > 4\,m\,k_0$ y $\beta > \sqrt{\beta^2 - 4\,m\,k_0}$. Se esperaría que para $t > 0$, ante un descenso en el valor de k_0, λ_1 se acerque al valor $-\beta/m$ y λ_2 se acerque a un valor cercano a cero. Ambos valores serán negativos y reales para todo t.

> **Puntajes**
>
> 4 puntos por obtener los valores propios de la matriz Jacobiana en $t = 0$.
> 2 puntos por argumentar que ambos valores son negativos.
> 3 puntos por indicar lo que ocurre con los valores propios para $t > 0$.

(d) En base al análisis de la pregunta anterior, se debe resolver vectorialmente un problema de valor inicial, con $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$. Por lo que cualquier método que se mantenga en la región de estabilidad se puede utilizar. Por ejemplo, considerar el método de Euler, con región de estabilidad restringida por $|1 + \lambda_i h| < 1$. El valor de h queda restringido por la condición $h < 2\,m/\beta$ (restringido por el mayor valor posible de λ_2 en magnitud), de tal forma de asegurar estabilidad en todos los casos. La función ForwardEuler del Algoritmo 2 obtiene numéricamente los valores de $x(t)$ para los tiempos comprendidos en el intervalo $[0, T_2]$ siempre y cuando se cumpla la restricción de la región de estabilidad.

Algoritmo 2 Forward Euler para MAS Sobreamortiguado

function ForwardEuler$(k_0, x_0, v_0, m, \alpha, \beta, T_2, h)$
    if $h \geq 2\,m/\beta$ **then**
        mostrar 'El método no es estable'
        return Error
    end if
    $L =$ `emptyList`
    $x = x_0$
    $v = v_0$
    $n = T_2/h$
    for $i = 0, 1, \ldots, n$ **do**
        $K =$ BackwardEuler$(k_0, \alpha, i \cdot h, h)$
        $xt = x + v$
        $vt = v - (K/m)\,x - (\beta/m)\,v$
        L.`push`(xt)
        $x = xt$
        $v = vt$
    end for
    return L
end function

Puntajes

4 puntos por analizar la estabilidad del método propuesto y establecer una cota para h.
3 puntos por implementar correctamente el paso iterativo del método, usando el valor correspondiente para la constante de elasticidad.
2 puntos por entregar el valor de $x(t)$ entre $[0, T_2]$.

2. **(a)** Reemplazando las series de taylor asociadas en la expresión de primera derivada forward de segundo orden obtenemos:

$$\frac{1}{2h}\left(-3f(x) + 4\left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1)\right) - \left(f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(\xi_2)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2h}\left(f(x) + 4hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1) - f(x) - 2hf'(x) - 2h^2f''(x) - \frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)\right)$$
$$= \frac{1}{2h}\left(2hf'(x) + \mathcal{O}(h^3)\right)$$
$$= f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Puntajes

3 puntos por escribir las series de Taylor para f en $x + h$ y $x + 2h$.
4 puntos por reemplazar y combinar los términos comunes
4 puntos por enunciar o resolver que los errores asociados a $f'''(c)$ son combinables.
4 puntos por mostrar que la reducción lleva a que los términos de orden superior que se truncan son $\mathcal{O}(h^2)$.

(b) Dados los tres puntos del enunciado, consideremos $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ con $\Omega_0 = [0, \pi]$ y $\Omega_1 = [\pi, 2\pi]$. La spline entonces estará compuesta de $S_0(x)$ y $S_1(x)$, según el hint dado deberán tener la forma:

$$S_0(x) = w_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, \quad \text{en } \Omega_0,$$
$$S_1(x) = w_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, \quad \text{en } \Omega_1,$$

donde $\mathbf{w}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son incógnitas para ajustar la spline. Los requisitos en $x = \pi$ según el enunciado deben ser:

$$\begin{aligned} S_0(\pi) &= S_1(\pi), \\ S_0'(\pi) &= S_1'(\pi), \\ S_0''(\pi) &= S_1''(\pi). \end{aligned}$$

En Ω_0 el BVP induce la restricción $S'(0) = 1$, es decir:

$$b_0 + 2c_0(-x_0) + 3d_0(-x_0)^2 - 1 = 0$$

La restricción en $x = 2\pi$ se traduce a:

$$\begin{aligned} w_1 + b_1\pi + c_1\pi^2 + d_1\pi^3 &= \frac{2\pi b_1 + 2c_1\pi + 3d_1\pi^2}{2} \\ \Rightarrow w_1 + c_1(\pi^2 - \pi) + d_1\left(\pi^3 - \frac{3\pi^2}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación diferencial en su forma $F = 0$ se tiene:

$$F(x, S(x), S'(x), S''(x)) = S''(x) - S(x) - \cos(x) = 0$$

Se debe minimizar el siguiente error:

$$\sum_{l=\{0,1\}} \sum_{x_j \in \Omega_l} (S_l''(x_j) - S_l(x_j) - \cos(x_j))^2,$$

donde x_j son N_{Ω_i} puntos distribuidos en el dominio respectivo de cada segmento de spline. Por lo tanto el problema de optimización relacionado es:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{l=\{0,1\}} \sum_{x_j \in \Omega_l} (S_l''(x_j) - S_l(x_j) - \cos(x_j))^2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & S_0(\pi) - S_1(\pi) = 0 \\ & S_0'(\pi) - S_1'(\pi) = 0 \\ & S_0''(\pi) - S_1''(\pi) = 0 \\ & b_0 + 2c_0(-x_0) + 3d_0(-x_0)^2 - 1 = 0 \\ & w_1 + c_1(\pi^2 - \pi) + d_1\left(\pi^3 - \frac{3\pi^2}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Puntajes

5 puntos por mostrar las incógnitas del problema que deben encontrarse.
5 puntos por indicar la ecuación que debe minimizarse.
5 puntos por mostrar las restricciones que deben cumplirse.

3. **(a)** Considerar $u_i \approx u(x_i)$, con $i \in \{0, \dots n\}$, donde cada u_i es una incógnita del problema. En total se tienen $n+1$ incógnitas para determinar. Integrando la Ecuación Diferencial se obtiene (3):

$$u''(x) + u(x) = \cos(x) + C \tag{3}$$

con C una constante de integración y con las mismas condiciones de frontera $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$ y $u(\pi) = -1$. Para $0 < i < n$ se satisface esta ecuación diferencial, y usando fórmulas de diferencias finitas se tienen $n-1$ ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + u_i - C &= \cos(x_i) \\ \frac{1}{h^2}u_{i-1} + \left(1 - \frac{2}{h^2}\right)u_i + \frac{1}{h^2}u_{i+1} - C &= \cos(x_i) \\ \alpha\, u_{i-1} + \beta\, u_i + \alpha\, u_{i+1} - C &= \cos(x_i) \end{aligned} \tag{4}$$

A partir de la ecuación anterior aparece C como una nueva incognita. Dos ecuaciones adicionales se obtienen al discretizar las condiciones de frontera $u(0) = 1$ y $u(\pi) = -1$:

$$u_0 = 1 \tag{5}$$

$$u_n = -1 \tag{6}$$

Contabilizando, hasta el momento se tienen $n+2$ incógnitas entre los valores u_i y la incógnita C y $n+1$ ecuaciones. La ecuación restante se obtiene discretizando la condición de frontera faltante. Es así, como se tiene (7):

$$u'(0) = 2 \Rightarrow \frac{u_1 - u_0}{h} = 2 \tag{7}$$

Finalmente, resolviendo un sistema de $n+2$ ecuaciones y $n+2$ incógnitas, se encontrarán los valores de u_i para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,h \\ \cos(x_1) \\ \vdots \\ \cos(x_{n-1}) \\ -1 \end{bmatrix}$$

Puntajes

3 puntos por integrar la ecuación diferencial ordinaria.
3 puntos por establecer condiciones para los puntos interiores del BVP.
2 puntos por utilizar las condiciones de frontera del BVP para establecer restricciones asociadas.
2 puntos por indicar como se obtendrán numéricamente los valores de $u(x_i)$.

(b) Derivando la ecuación diferencial se obtiene la ecuación (8):

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) + u''(x) &= -\cos(x) \\ u^{(4)}(x) &= -u''(x) - \cos(x) \end{aligned} \tag{8}$$

Sea $v_i \approx u^{(4)}(x_i)$, luego para cada x_i, con $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se cumple la ecuación (8). Usando diferencias finitas sobre la segunda derivada para estimar $u''(x)$ y los valores encontrados en la pregunta anterior, se determinan numéricamente los valores de v_i:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(x_1) + \alpha\,u_0 \\ \cos(x_2) \\ \vdots \\ \cos(x_{n-2}) \\ \cos(x_{n-1}) + \alpha\,u_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

Finalmente, se revisa cada valor de v_i y se entrega una lista con todos aquellos x_i tales que $v_i > 0$.

Puntajes

3 puntos por derivar la ecuación diferencial ordinaria.
3 puntos por utilizar los valores conocidos $u(x_i)$ de la pregunta anterior.
6 puntos por proponer un algoritmo numérico para encontrar los valores desconocidos.
3 puntos por entregar los valores positivos de la cuarta derivada.
0 puntos en la pregunta si se utiliza directamente una fórmula de diferencias finitas para la cuarta derivada.

4. **(a)** Considerar $\Delta x1 = 3/N_{x1}$, $\Delta x2 = 2/N_{x2}$, $\Delta y = 2/N_y$ y la notación $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ y $v_{k,j} \approx v(x_k, y_j)$, para $x_i = -i\,\Delta x1$, $x_k = k\,\Delta x2$ y $y_j = j\,\Delta y$ para $i \in \{0, 1, \ldots, N_{x1}\}$, $k \in \{0, 1, \ldots, N_{x2}\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, N_y\}$.

Utilizando fórmulas de diferencias finitas, se pueden discretizar las Ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2\,u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x1)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2\,u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad 0 \le i < N_{x1}, \quad 0 < j < N_y \tag{10}$$

$$\frac{v_{k-1,j} - 2\,v_{k,j} + v_{k+1,j}}{(\Delta x2)^2} + \frac{v_{k,j-1} - 2\,v_{k,j} + v_{k,j+1}}{(\Delta y)^2} = x_k\,y_j \qquad 0 \le k < N_{x2}, \quad 0 < j < N_y \tag{11}$$

Las condiciones de frontera también pueden ser discretizadas de acuerdo a la notación definida:

$$u_{N_{x1},j} = 100 \qquad 0 < j < N_y \tag{12}$$
$$u_{0,j} - v_{0,j} = 0 \qquad 0 < j < N_y \tag{13}$$
$$v_{N_y,j} = 50 \qquad 0 < j < N_y \tag{14}$$
$$u_{i,0} = g(x_i) \qquad 0 \leq i < N_{x1} \tag{15}$$
$$u_{i,N_y} = g(x_i) \qquad 0 \leq i < N_{x1} \tag{16}$$
$$v_{k,0} = g(x_k) \qquad 0 \leq k < N_{x2} \tag{17}$$
$$v_{k,N_y} = g(x_k) \qquad 0 \leq k < N_{x2} \tag{18}$$

Ahora, se debe resolver un sistema de ecuaciones con la finalidad de determinar numéricamente la temperatura al interior de ambos materiales. El algoritmo solo debe entregar los valores de $u_{0,j}$ o $v_{0,j}$, que corresponden a la temperatura en la unión de ambos materiales.

Considerar, por ejemplo, $N_{x1} = 3$, $N_{x2} = 2$ y $N_y = 2$. El sistema a resolver es el siguiente.

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2,1} \\ u_{1,1} \\ u_{0,1} \\ v_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{3,1} - u_{2,2} - u_{2,0} \\ -u_{1,2} - u_{1,0} \\ -u_{0,0} - u_{0,2} \\ -x_1\, y_1 - v_{2,1} - v_{1,2} - v_{1,0} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Donde la temperatura en la unión de los materiales corresponde al punto $u_{0,1}$.

Puntajes

6 puntos por proponer una notación para discretizar $u(x_i, y_j)$ y $v(x_k, y_j)$.
4 puntos por discretizar la ecuación diferencial parcial de ambos materiales.
7 puntos por discretizar las condiciones de frontera.
5 puntos por indicar una forma de determinar las incógnitas del problema.
3 puntos por entregar el perfil de la temperatura en la unión de los materiales.