CERTAMEN N°2 COMPUTACIÓN CIENTÍFICA II
SCT - SÁ.29.10.16

NOMBRE:____ ROL:____________________________

Instrucciones: *Usted tiene 120 minutos para responder el Certamen.*
Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.
Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o ***sin nombre*** *reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!*

1. El Sr. Tony Stark desea obtener ayuda de los distinguidos estudiantes de Computación Científica II de la Universidad Técnica Federico Santa María. El Sr. Stark ha adquirido 3 módulos para el control de su más reciente armadura. Desafortunadamente se ha dado cuenta que los módulos, aunque resulven la tarea encomendada, tienen un compartamiento no claro. La tarea de los módulos es resolver un problema de valor inicial: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ con $y(0) = 1$. Donde $f(y(t), t)$ es conocido, sin embargo por seguridad industrial no ha querido divulgarlo. La información entregada por el Sr. Stark son las siguientes Tablas 1 y 2, donde $y_{m_i}^{(n)}$ es la salida del i-ésimo método utilizado en los tiempos indicados, para $i = 1, 2, 3$. Considere que el paso en el tiempo es constante y se puede obtener de las Tablas respectivas.

t_n	$y_{\text{exact}}(t_n)$	$y_{m_1}^{(n)}$	$y_{m_2}^{(n)}$	$y_{m_3}^{(n)}$
0	1	1	1	1
1	2.319776	2.316373	2.311614	2.000000

Tabla 1: Primer experimento numérico

t_n	$y_{\text{exact}}(t_n)$	$y_{m_1}^{(n)}$	$y_{m_2}^{(n)}$	$y_{m_3}^{(n)}$
0	1	1	1	1
0.3333	1.387071	1.383500	1.387034	1.333333
0.6666	1.855900	1.851951	1.855817	1.753314
1	2.319776	2.321411	2.319657	2.212616

Tabla 2: Segundo experimento numérico

(a) [**10 puntos**] Determine el orden de cada módulo utilizado por el Sr. Stark. *Hint: Recall that the order of a method for an IVP is the α for which the error in the approximation can be described as Δt^{α}.*

(b) [**5 puntos**] Indique cual módulo considera más conveniente desde el punto de vista del orden. Justifique claramente.

(c) [**10 puntos**] Considerando que todos los módulos se demoran 1 unidad de tiempo τ en un paso temporal. ¿Cuanto se demorará cada módulo en obtener una aproximación con un error menor o igual a 10^{-7}.

NOMBRE:____ ROL:______________________________

2. Considere la siguiente ecuación diferencial $-(0.1)^2\, u''(x) + x^2\, u(x) = \lambda\, u(x)$ en $x = [-3, 3]$ con $u(-3) = u(3) = 0$, donde λ es un escalar.

   (a) [**25 puntos**] Construya un algoritmo que obtenga una aproximación no nula de $u(x_j)$ para $x_j = -3 + j\,\dfrac{6}{n}$ con $j = 0, \ldots, n$. n debe ser un parámetro de su algoritmo.

Nombre:______________________________ Rol:______________________

3. Un circuito eléctrico RLC en serie está compuesto por una resistencia de $R[\Omega]$, un capacitor de capacitancia $C[F]$ y una bobina de inductancia $L[H]$. En el tiempo $t = 0$, el circuito se encuentra cargado con una carga $Q_0[C]$ y circula una corriente $I_0[A]$.

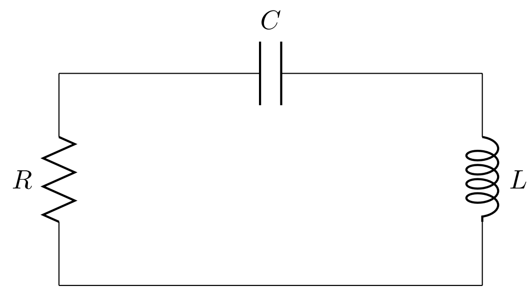

Figura 1: Circuito RLC en serie.

La Segunda Ley de Kirchhoff establece la ecuación diferencial ordinaria:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = 0 \tag{1}$$

Además, se considerará que este circuito está *sobre amortiguado* si $R^2 \geq \dfrac{4L}{C}$.

(a) [**5 puntos**] Transforme la EDO a un sistema dinámico.

(b) [**8 puntos**] Considere $R = 6[\Omega]$, $L = 1[H]$ y $C = 2[F]$. ¿Cuál es el máximo valor de Δt que asegura que el Método de Euler será estable?

(c) [**12 puntos**] Considere que el circuito eléctrico está sobreamortiguado. ¿Cuál es el máximo valor de Δt que asegura que el Método de Euler será estable? Exprese su resultado en términos de R, L y C.

NOMBRE:____ ROL:__________________________

4. La temperatura en estado estacionario de la cuarta parte de un anillo circular de radio interno $1[cm]$ y radio externo $3[cm]$ se modela con la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$-\Delta u(r,\theta) = 0 \tag{2}$$

$$u(1,\theta) = 2 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

$$u(3,\theta) = 3 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$u_\theta(r,0) = \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right) \qquad 1 < r < 3 \tag{5}$$

$$u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = \cos(r\pi) - 1 \qquad 1 < r < 3 \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Donde Δ es el operador laplaciano en coordenadas polares:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{8}$$

Para las siguientes preguntas realizará una discretización de la EDP utilizando el método de diferencias finitas, donde debe asumir que $w_{i,j} = u(r_i,\theta_j) = u(i\Delta r, j\Delta\theta)$.

(a) **[5 puntos]** Realice una discretización de la EDP (Ecuación (2)) utilizando diferencias centradas de segundo orden. Considere un caso general para puntos interiores y distintos valores Δr y $\Delta\theta$.

(b) **[10 puntos]** Realice una discretización de las condiciones de frontera de la EDP (Ecuaciones (3), (4), (5), (6)).

(c) **[10 puntos]** Ahora considere el caso particular donde $\Delta r = 1$ y $\Delta\theta = \frac{\pi}{8}$. Determine un sistema de ecuaciones en forma matricial con los puntos desconocidos de la discretización.