EDP - Introducción

En caso de encontrar un error o posible mejora, no dude en mencionarlo en clases o por email. ¡Gracias!

(S)cientific (C)omputing (T)eam
ILI-286 DI-UTFSM Chile

v0.34

Contenido

Introducción

Definición

Ecuación Diferencial Parcial (EDP)[a]:

Ecuación diferencial que involucra variables multidimensionales (al menos 2 dimensiones) y sus derivadas.

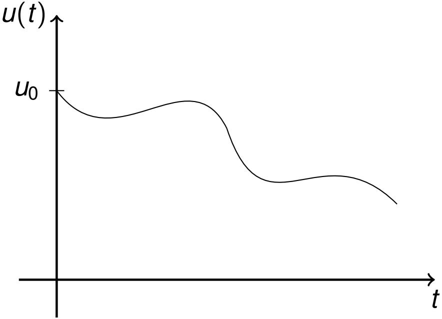
[a] or Partial Differential Equation (PDE)

Las EDOs permiten representar sistemas dinámicos unidimensionales, por ejemplo, cantidades que varían en el tiempo.
Las EDP permiten representar sistemas dinámicos multidimensionales, por ejemplo, cantidades que varían simultáneamente en espacio y/o tiempo.

Introducción

IVP:

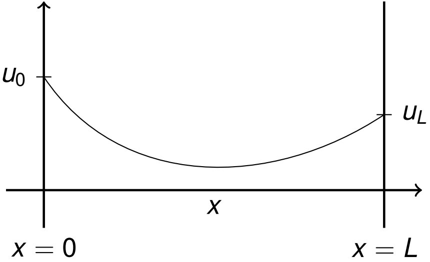
$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$
$$u(t = 0) = u_0$$



Introducción

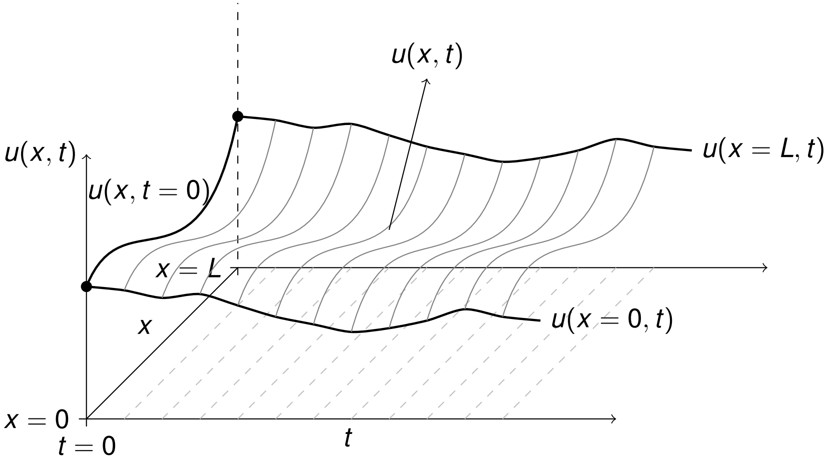
BVP:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, u_x)$$
$$u(t = 0) = u_0$$
$$u(t = L) = u_L$$



Introducción

IBVP



Introducción

Algunos problemas que requieren el cálculo de PDE:

- Respuesta sísmica de un edificio a un terremoto.
- Progagación del calor en un material.
- Propagación de un contaminante en un río o lago.
- Propagación de olas generadas por un tsunami.
- Creación y propagación de fracturas.
- Deformación de vasos sanguíneos que originan aneurismas.
- Modelos biológicos: corazón, pulmones, músculos.
- Etcétera.

Introducción

Una EDP lineal de segundo orden tiene la forma:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

Las EDP se clasifican en:

- Elípticas: $B^2 - 4\,A\,C < 0$
- Parabólicas: $B^2 - 4\,A\,C = 0$
- Hiperbólicas: $B^2 - 4\,A\,C > 0$

Introducción

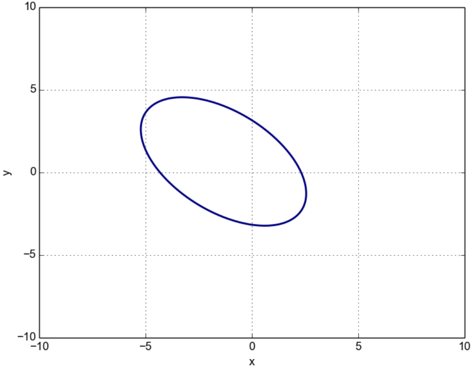
¿Porque esa clasificación tan arbitraria?
Recordemos que pasaba con las formas cuadráticas:

$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + G = 0$$

- Elipse: $B^2 - 4\,A\,C < 0$
- Parábola: $B^2 - 4\,A\,C = 0$
- Hipérbola: $B^2 - 4\,A\,C > 0$

Introducción

Forma cuadrática elíptica:

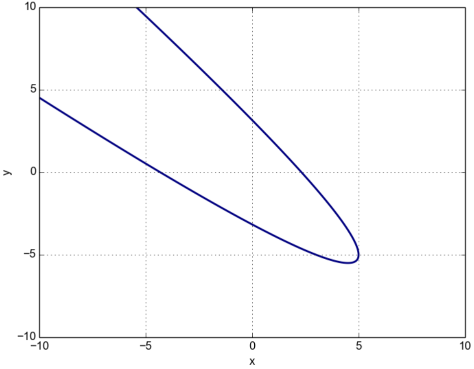


$$A = 1, B = 1, C = 1, D = 2, E = 0, G = -10$$

$$B^2 - 4\,A\,C = -3 < 0$$

Introducción

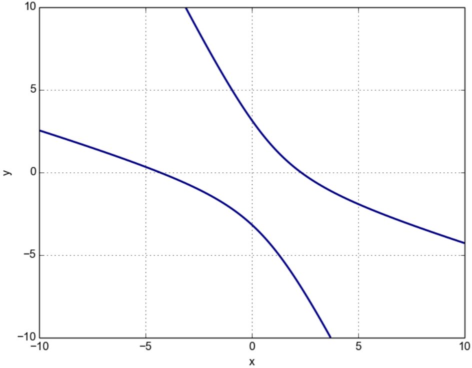
Forma cuadrática parabólica:



$$A = 1, B = 2, C = 1, D = 2, E = 0, G = -10$$
$$B^2 - 4\,A\,C = 0$$

Introducción

Forma cuadrática hiperbólica:



$$A = 1, B = 3, C = 1, D = 2, E = 0, G = -10$$

$$B^2 - 4\,A\,C = 5 > 0$$

Introducción

- La clasificación de las formas cuadráticas permite separarlas en familias que comparten características.
- Se facilita así su estudio, análisis y comprensión.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

Con las PDEs pasa lo mismo. Existen 3 grandes familias, de propiedades y características diferentes:

- EDP Elíptica: $B^2 - 4\,A\,C < 0$.
- EDP Parabólica: $B^2 - 4\,A\,C = 0$
- EDP Hiperbólica: $B^2 - 4\,A\,C > 0$

Ejemplos de EDP elípticas:

- Ecuación de Laplace:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

- Ecuación de Poisson:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y)$$

- Ecuación de Helmholtz:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = k^2 \, u(x, y)$$

Características de EDP elípticas:

- En general no se asocian al tiempo, sino únicamente al espacio.
- No requieren condiciones iniciales, sino únicamente de frontera.
- Principio del máximo:
$$\max_{x\in\Omega} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$
  ¿Qué significa el Principio del Máximo?
- Habitualmente se buscan soluciones en dominios acotados.

Sea (x, y) en $[0, 1] \times [0, 1]$.
¿Qué función $u(x, y)$ cumple la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \\
u(x, y = 0) = u(x, y = 1) = \sin(\pi x) \\
u(x = 0, y) = u(x = 1, y) = 0
\end{aligned}
$$

Ejemplos de EDP parabólicas:

- Ecuación de Difusión:

$$u_{xx}(x,y) - u_y(x,y) = 0$$

- Ecuación de Advección-Difusión:

$$u_{xx}(x,y) - u_y(x,y) + b\,u_x(x,y) = 0$$

Características de EDP parabólicas:

- Se asocian con una evolución en el tiempo, además de cambios en el espacio.
- En general las soluciones son disipativas, es decir, los valores máximos disminuyen en el tiempo.

Reescribiendo los ejemplos de EDP parabólicas:

- Ecuación de Difusión
$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$
- Ecuación de Advección-Difusión
$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + b\,u_x(x,t) = 0$$

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [0, 1]$.
¿Qué función $u(x, y)$ es solución de la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \\
u(x, t=0) &= x^2 \\
u(x=0, t) &= 0 \\
u(x=1, t) &= 1
\end{aligned}
$$

Ejemplos de EDP hiperbólicas:

- Ecuación de Onda

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0$$

Características de EDP hiperbólicas:

- Se asocian con una evolución en el tiempo, además de cambios en el espacio.
- Las soluciones no son necesariamente disipativas. Esto es, los valores máximos no necesariamente disminuyen en el tiempo.

Reescritura de ejemplos de EDP hiperbólicas:

- Ecuación de Onda

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [0, 1]$.
¿Qué función $u(x, t)$ es solución de la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\
u(x, t = 0) &= x^2 \\
u_t(x, t = 0) &= 0 \\
u(x = 0, t) &= 0 \\
u(x = 1, t) &= 1
\end{aligned}
$$

Hemos visto que para poder solucionar una PDE necesitamos especificar algunas condiciones. Estas son la condición inicial y/o condición de frontera.

- Condición Inicial: Cuando existe una variable temporal y se especifica el valor inicial de la incógnita

$$u(x, t = 0) = f(x), \quad \forall x \in \Omega$$

- Condiciones de Frontera: Cuando se especifica el comportamiento de la incógnita en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Tipos de Condiciones de Frontera:

- Dirichlet: Se especifica el valor de la incógnita en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$u(x,t) = f(x,t), \;\; \forall x \in \partial\Omega$$

- Neumann: Se especifica la derivada del valor de la incógnita en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = f(x,t), \;\; \forall x \in \partial\Omega$$

- Robin: Se especifica una combinación de la incógnita y su derivada en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = f(x,t), \;\; \forall x \in \partial\Omega$$

- Según su ecuación las EDP se pueden clasificar en elípticas, parabólicas o hiperbólicas.
- Las condiciones de frontera pueden ser Dirichlet, Neumann o Robin.
- Una EDP temporal (de evolución) requiere condiciones iniciales.

Durante las siguientes semanas, estudiaremos

- Resolución de EDP elípticas utilizando método de diferencias finitas.
- Resolución de EDP parabólicas utilizando método de diferencias finitas.
- Resolución de EDP hiperbólicas utilizando método de diferencias finitas.

Preguntas

Algunas preguntas sugeridas

- ¿Cómo está conectado esto con lo que hemos visto anteriormente?
- ¿Tiene esto alguna relación con sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Tiene esto alguna relación con problemas de valores propios?
- ¿Es esto un IVP o BVP?
- Tarea: Estudiar el método de las líneas (Esto se verá con ecuaciones parabólicas y hiperbólicas).