Ayudantía previa al certamen

Computer Sciences Team

April 13, 2018

Pregunta

Considere:

$$B = I + A + A^2 + A^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Si A es definida positiva, λ el valor propio dominante de A, $\vec{v}$ el vector propio asociado a λ y $|\lambda| < 1$. Demuestre que $\mu = \frac{1}{1-\lambda}$ es un valor propio de B y determine el vector propio de B asociado a μ.

Respuesta Sabemos de la ecuación de valores propios que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, entonces:

$$\begin{aligned}
B\vec{v} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)\vec{v} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A^k\vec{v} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\vec{v} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\right)\vec{v} \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\vec{v} \\
&= \frac{1}{1-\lambda}\cdot\vec{v}
\end{aligned}$$

Como se cumple la ecuación $B\vec{v} = \mu\vec{v}$ en donde B es una matriz y μ un escalar, entonces μ es valor propio de B y $\vec{v}$ es el vector propio asociado.

Pregunta

Se define como el vector propio izquierdo, al vector fila $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ que satisface la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}A = \lambda_l \mathbf{v},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Construya un algoritmo que encuentre el vector propio izquierdo dominante, donde el vector propio izquierdo dominante está asociado al valor propio izquierdo de mayor magnitud.

Respuesta El problema planteado está planteado de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}A = \lambda_l \mathbf{v}.$$

Recordando que $\mathbf{v}$ es vector fila podemos trasponer y conjugar el problema:

$$A^* \mathbf{v}^* = \lambda_l^* \mathbf{v}^*,$$

el cual es un problema de valores propios sobre la matriz A^*. El siguiente algoritmo toma en cuenta esta transformación:

Algorithm 1 Left Power Iteration

```
function LPI(A, x_0)
    (u_dom, λ_dom) ← PI(A*, x_0)
    return (u*_dom, λ*_dom)
end function
```

donde PI(...) es el algoritmo Power Iteration y x_0 es el initial guess.

Pregunta

Encontrar los valores propios de la siguiente matriz B, luego para cada valor propio λ de B determinar el máximo conjunto de vectores propios linealmente independiente asociado a cada λ. Hecho lo anterior, afirmar o refutar si la matriz es diagonalizable, en el caso de que B sea diagonalizable, determine una matriz U invertible de tal manera que $U^{-1}BU = D$ sea diagonal.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta Los valores propios son $\vec{\lambda} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ (sacar por el polinomio característico).

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

Nos queda como polinomio: $\lambda^3 - \lambda^2$. Ahora notar que los valores propios iguales a 0 tienen un solo vector propio asociado, $[0, 0, 1]$. Ya que al usar la relación $Av = \lambda$v nos queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 0 \\ -2a - 2b &= 0 \\ 0.5a + 0.5b &= 0 \end{aligned}$$

Como a y b tienen que ser 0 y c esta libre, además de que no pueden haber vectores propios nulos, el vector propio asociado a los valores propios 0 es $[0, 0, 1]$. Ahora como hay dos vectores propios LD, no es diagonalizable.

Pregunta

La primera constante matemática conocida por la mayoría de las personas es π, que viene del cuociente entre el perímetro (P) y el diámetro (d) de *cualquier* circunferencia, esto nos da aproximadamente:

$$\frac{P}{d} \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348 25$$

Probablemente la siguiente constante matemática conocida es e, la constante de Euler. Esta constante viene de la solución del siguiente problema de valor inicial $\dot{y}(t) = y(t)$ con $y(0) = 1$, que nos dice que la tasa de cambio de la función es igual al valor de la función en todo tiempo. Donde la solución es la conocida función exponencial: $y(t) = e^{(t)}$.

Ahora, les queremos presentar una nueva constante, γ, la constante de Euler-Mascheroni o EulerGamma. Esta constante viene del siguiente límite:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

donde $\log$ es el logaritmo natural y $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ es la serie harmónica truncada hasta n. Como se puede sospechar, ambos términos en el límite tienden a infinito, sin embargo, su diferencia no. La pregunta que rápidamente activa nuestras neuronas es: ¿Cuál será el valor de γ?

Una posible forma de representar el límite es la siguiente:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right) = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función parte entera inferior de x. Otra forma de representar γ es la siguiente:

$$\gamma = \int_0^{\infty} -e^{-x} \log(x) \mathrm{d}x$$

1. Realice un cambio de variables en la ecuación anterior de tal forma que los límites de integración sean entre -1 y 1.
2. Estime el valor de γ utilizando cuadratura Gaussiana para $n \geqslant 5$ (Ver tabla adjunta). ¿Cual es el valor de γ estimado?

Respuesta

1. Podemos realizar el cambio de variable:

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-x} & y_0 &= e^0 = 1 \\
\mathrm{d}y &= -e^{-x}\mathrm{d}x & y_1 &= \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 \\
x &= -\log(y)
\end{aligned}
$$

con lo que la integral queda:

$$\gamma = \int_0^\infty -e^{-x}\log(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \log(-\log(y))\mathrm{d}y,$$

sin embargo, esta integral está entre 0 y 1, por lo que para llevarla a -1, 1 utilizamos la clásica transformación lineal.

$$\gamma = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \log\left(-\log\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

2. Como el logaritmo se indetermina en 0, debemos usar una cantidad par de puntos, por ejemplo 6. La cuadratura queda:

$$\gamma = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} w_i \cdot \log\left(-\log\left(\frac{x_i+1}{2}\right)\right) \approx 0.5647622244051618.$$

El error es menor a 0.0125.

Pregunta

Resuelva la siguiente integral de manera numérica:

$$\int_{30}^{\infty} e^{\frac{-100}{x+6}}\frac{1}{x^3}dx$$

Respuesta Un cambio de variable valido sería $t = \frac{1}{x^2}$, $dt = \frac{-2}{x^3}$. Realizando este cambio de variable la integral queda como:

$$2\int_0^{1/900} e^{\frac{-100}{\frac{1}{t}+6}}dt$$

Notar que los limites de integración quedan $(1/900, 0)$, multiplicando por -1 queda entre $(0, 1/900)$. El valor de la integral (Wolfram) es de 0.000401204. Utilizando por ejemplo, midpoint con 5 puntos:

$$h = \frac{\frac{1}{900}}{5} = 0.0002222$$

$$0.0002222[0.74 + 0.38 + 0.25 + 0.18 + 0.14] = 0.00037556$$

Anexo - Tabla cuadratura Gaussiana

n	w_i	x_i
2	1	-0.5773502692
	1	0.5773502692
3	0.5555555556	-0.7745966692
	0.8888888889	0
	0.5555555556	0.7745966692
4	0.3478548451	-0.8611363116
	0.6521451549	-0.3399810436
	0.6521451549	0.3399810436
	0.3478548451	0.8611363116
5	0.2369268851	-0.9061798459
	0.4786286705	-0.5384693101
	0.5688888889	0
	0.4786286705	0.5384693101
	0.2369268851	0.9061798459
6	0.1713244924	-0.9324695142
	0.3607615730	-0.6612093865
	0.4679139346	-0.2386191861
	0.4679139346	0.2386191861
	0.3607615730	0.6612093865
	0.1713244924	0.9324695142
7	0.2797053915	-0.7415311856
	0.1294849662	-0.4991079123
	0.3818300505	-0.4058451514
	0.4179591837	0
	0.3818300505	0.4058451514
	0.1294849662	0.4991079123
	0.2797053915	0.7415311856
8	0.1012285363	-0.9602898565
	0.2223810345	-0.7966664774
	0.3137066459	-0.5255324099
	0.3626837834	-0.1834346425
	0.3626837834	0.1834346425
	0.3137066459	0.5255324099
	0.2223810345	0.7966664774
	0.1012285363	0.9602898565