EDP Elípticas - Método de Diferencias Finitas

En caso de encontrar un error o posible mejora, no dude en mencionarlo en clases o por email. ¡Gracias!

(S)cientific (C)omputing (T)eam
ILI-286 DI-UTFSM Chile

v0.34

Contenido

EDP Elíptica

Llamaremos a una EDP elíptica cuando tiene la forma

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

y se cumple $B^2 - 4\,A\,C < 0$.
O bien, teniendo una forma más general, es posible reducirla a una caso equivalente al anterior.

Ejemplos de EDP elípticas:

- Ecuación de Laplace:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

- Ecuación de Poisson:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

- Ecuación de Helmholtz:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = k^2\,u(x,y)$$

Características de EDP elípticas:

- En general no se asocian al tiempo, sino únicamente al espacio.
- No requieren condiciones iniciales, sino únicamente de frontera.
- Principio del máximo:

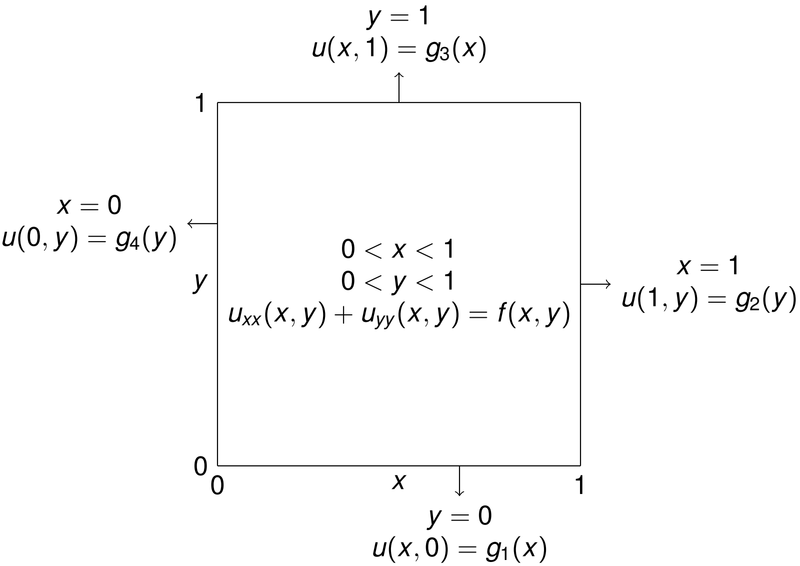
$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

- Habitualmente se buscan soluciones en dominios acotados.

Problema Ejemplo

Sea $u(x, y)$ una incógnita que depende las variables x e y, definidas en $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.
Nuestro problema ejemplo será la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= f(x, y) \\ u(x, 0) &= g_1(x) \\ u(1, y) &= g_2(y) \\ u(x, 1) &= g_3(x) \\ u(0, y) &= g_4(y) \end{aligned}$$

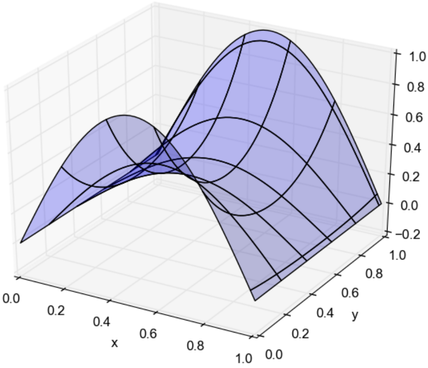

$y = 1$
$u(x, 1) = g_3(x)$
$x = 0$
$u(0, y) = g_4(y)$
$0 < x < 1$
$0 < y < 1$
$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y)$
$x = 1$
$u(1, y) = g_2(y)$
$y = 0$
$u(x, 0) = g_1(x)$
1
y
0
0
x
1

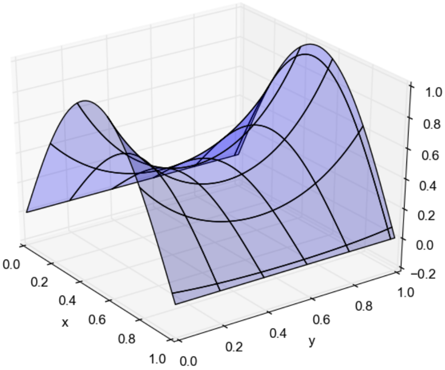
Ejemplo concreto:

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) &= x \\
u(x,0) &= \sin(\pi x) \\
u(1,y) &= 0 \\
u(x,1) &= \sin(\pi x) \\
u(0,y) &= 0
\end{aligned}
$$

Introducción

EDP Elíptica

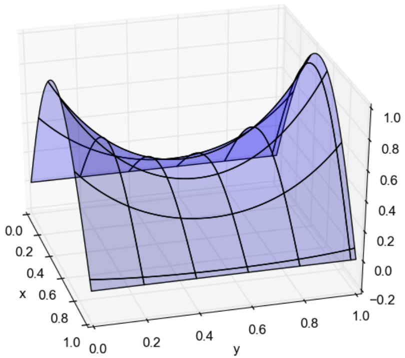


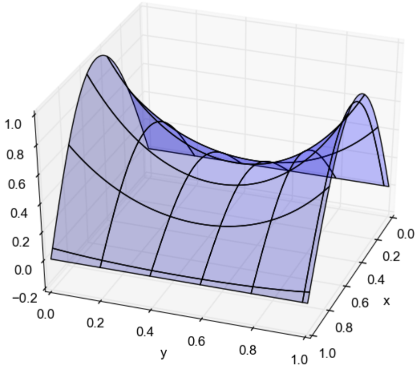


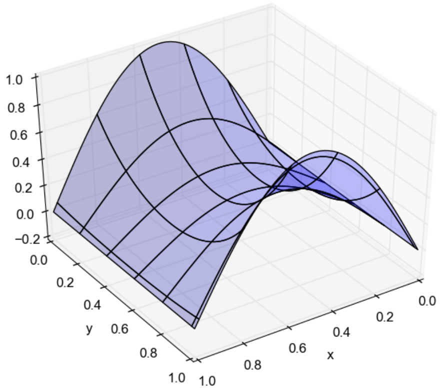
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
x
0.6
0.8
1.0
0.0
0.2
0.4
y
0.6
0.8
1.0

Introducción

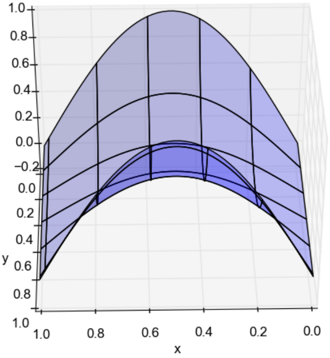
EDP Elíptica




1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
y
0.6
0.8
1.0
1.0
0.8
0.6
x
0.4
0.2
0.0


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
y
0.6
0.8
1.0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas consiste en reemplazar una derivada por una aproximación a esta.

Ejemplos:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

¿Cómo obtener una aproximación de $f'(x)$ y cómo saber que tan buena es la aproximación?

Por la expansión de Taylor sabemos que:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

Rearreglando los términos, tenemos:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}\left(\Delta x\right)$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Esto significa que es posible aproximar $\dfrac{df}{dx}(x)$ mediante la diferencia finita $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ con un error de aproximación de orden lineal en Δx.

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

¿Cómo obtener una aproximación $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ y cómo saber que tan buena es la aproximación?

Por la expansión de Taylor sabemos que:

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x) =& f(x) + \Delta x \frac{df}{dx}(x) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \\
& + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x) + \mathcal{O}\left(\Delta x^4\right) \\
f(x-\Delta x) =& f(x) - \Delta x \frac{df}{dx}(x) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \\
& - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x) + \mathcal{O}\left(\Delta x^4\right)
\end{aligned}
$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Sumando ambas expresiones obtenemos,

$$f(x-\Delta x)+f(x+\Delta x)=2f(x)+\Delta x^2\frac{d^2f}{dx^2}(x)+\mathcal{O}\left(\Delta x^4\right)$$

Despejando $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ se obtiene,

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x)=\frac{f(x-\Delta x)-2f(x)+f(x+\Delta x)}{\Delta x^2}+\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Esto significa que es posible aproximar $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ mediante la diferencia finita $\dfrac{f(x-\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$ con un error de aproximación de orden cuadrático en Δx.

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Aplicación

¿Como se aplica el método de diferencias finitas en nuestra EDP elíptica?

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

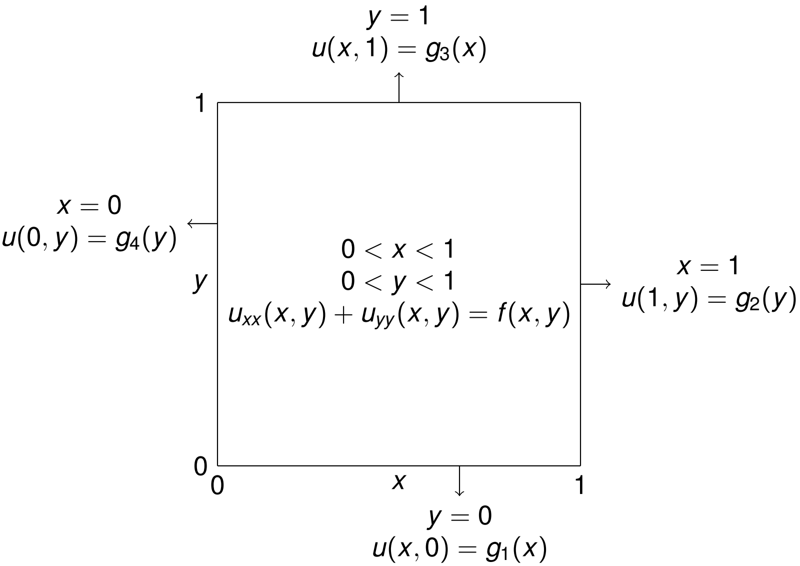
Discretizando $[0, 1]$ de manera regular en $N + 1$ puntos, de manera que $\Delta x = \frac{1}{N}$ y se tiene

$$x_i = i\Delta x, i \in \{0, 1, 2, ..., N\}$$

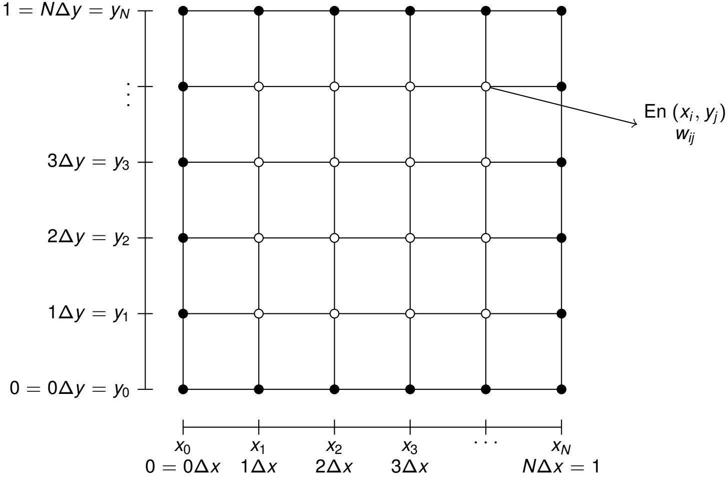
Similarmente, para y definiremos $\Delta y = \frac{1}{N}$ y se tiene

$$y_j = j\Delta y, j \in \{0, 1, 2, ..., N\}$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica



Diferencias Finitas para EDP Elíptica



Diferencias Finitas para EDP Elíptica

No buscaremos resolver la ecuación en todos los puntos, sino únicamente en los puntos de nuestra discretización. Esto es, sólo nos interesan los valores:

$$w_{i,j} \approx u(x_i, y_j) = u(i\Delta x, j\Delta y), \quad i, j \in \{0, 1, 2, ..., N\}$$

Existen por tanto $(N+1) \times (N+1)$ incógnitas que debemos encontrar.
¿Que relación existe entre los $w_{i,j}$, las derivadas y la EDP?

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Utilizando diferencias finitas podemos obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x-\Delta x, y) - 2u(x,y) + u(x+\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

y similarmente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x, y-\Delta y) - 2u(x,y) + u(x, y+\Delta y)}{\Delta y^2} + \mathcal{O}\left(\Delta y^2\right)$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Lo cual en nuestra notación $u(i\Delta x, j\Delta y) = w_{i,j}$ resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Con ello, nuestra EDP

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y)$$

Se transforma en

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f(i\Delta x, j\Delta y)$$

¿Cómo podemos obtener ahora los valores de $w_{i,j}$?

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

La relación anterior es válida únicamente para los puntos interiores del dominio, donde $0 < i < N$ y $0 < j < N$.

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f(i\Delta x, j\Delta y)$$

¿Que podemos hacer para $i = 0$, $i = N$, $j = 0$ y $j = N$?

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Es necesario utilizar las condiciones de frontera:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= g_1(x) \\
u(1,y) &= g_2(y) \\
u(x,1) &= g_3(x) \\
u(0,y) &= g_4(y)
\end{aligned}
$$

Resulta necesario discretizar las condiciones anteriores.

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Esto es sencillo, puesto que por definición se obtiene

$$
\begin{aligned}
w_{i,0} &= u(x_i, 0) = g_1(x_i),\ i \in \{0, 1, .., N\} \\
w_{N,j} &= u(1, y_j) = g_2(y_j),\ j \in \{0, 1, .., N\} \\
w_{i,N} &= u(x_i, 1) = g_3(x_i),\ i \in \{0, 1, .., N\} \\
w_{0,j} &= u(0, y_j) = g_4(y_j),\ j \in \{0, 1, .., N\}
\end{aligned}
$$

Diferencias Finitas para EDP Elíptica

- Hemos definido relaciones lineales entre todas las incógnitas.
- ¿Cómo podemos obtener los valores?
- Escribir sistema lineal para las incógnitas y resolver.

Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Algoritmo

Tras discretizar el dominio y reemplazar las derivadas con diferencias finitas, se escribe un sistema lineal en las incógnitas y se resuelve.

Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Tomemos un ejemplo pequeño, con $N = 3$, y escribamos todas las ecuaciones requeridas:

$$
\begin{aligned}
w_{0,0} &= g_1(0\Delta x) \\
w_{1,0} &= g_1(1\Delta x) \\
w_{2,0} &= g_1(2\Delta x) \\
w_{0,1} &= g_4(0\Delta y) \\
\frac{w_{0,1} - 2w_{1,1} + w_{2,1}}{\Delta x^2} + \frac{w_{1,0} - 2w_{1,1} + w_{1,2}}{\Delta y^2} &= f(1\Delta x, 1\Delta y) \\
w_{2,1} &= g_2(0\Delta y) \\
w_{0,2} &= g_3(0\Delta x) \\
w_{1,2} &= g_3(1\Delta x) \\
w_{2,2} &= g_3(2\Delta x)
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

Obtenemos:

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & \frac{1}{\Delta x^2} & & \frac{1}{\Delta x^2} & -\left(\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}\right) & \frac{1}{\Delta x^2} & & \frac{1}{\Delta x^2} & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{0,1} \\ w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{0,2} \\ w_{1,2} \\ w_{2,2}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
g_1(0\Delta x) \\ g_1(1\Delta x) \\ g_1(2\Delta x) \\ g_4(0\Delta y) \\ f(1\Delta x, 1\Delta y) \\ g_2(0\Delta y) \\ g_3(0\Delta x) \\ g_3(1\Delta x) \\ g_3(2\Delta x)
\end{pmatrix}
$$

Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

- Necesitamos formalizar lo anterior para un caso más general, $(N+1) \times (N+1)$.
- O bien, algo completamente general...
- en un dominio $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$, discretizar con $(N_x+1) \times (N_y+1)$ puntos.

Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

```python
import numpy as np
from numpy.linalg import solve

# Define Boundary Conditions
f  = lambda x,y : x
g1 = lambda x : np.sin(np.pi*x)
g2 = lambda x : 0
g3 = lambda x : np.sin(np.pi*x)
g4 = lambda x: 0

# Define Domain
x_min, x_max = 0., 1.
y_min, y_max = 0., 1.
```

Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

```
# Define Discretization Parameters
Nx = 10
Ny = 10

# Discretize x and y
x = np.linspace(x_min, x_max, Nx+1)
y = np.linspace(y_min, y_max, Ny+1)

# Define the discretization parameters
dx = x[1]-x[0]
dy = y[1]-y[0]
```

```python
# Create the matrix and the right hand size vector
A = np.zeros([(Nx+1)*(Ny+1), (Nx+1)*(Ny+1)])
b = np.zeros([(Nx+1)*(Ny+1), 1])

# Define global indexing
def index(i, j, nCols=(Ny+1)):
  return j + i*nCols
```

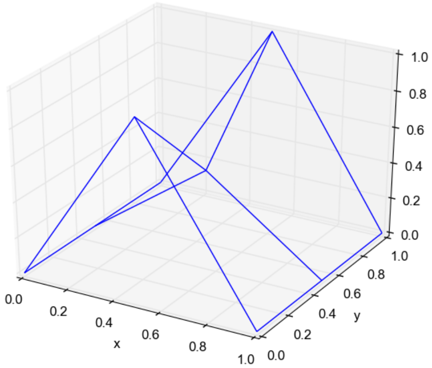
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

```
for i in xrange(Nx+1):
  for j in xrange(Ny+1):
    k = index(i,j)
    if j==0: # y=ymin
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g1(x[i])
    elif i==Nx: # x=xmax
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g2(y[j])
    elif j==Ny: # y=ymax
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g3(x[i])
    elif i==0:  # x=xmin
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g4(y[j])
    else:
      A[k, k] = -2./dx**2 - 2./dy**2
      A[k,index(i+1,j)] =  1./dx**2
      A[k,index(i-1,j)] =  1./dx**2
      A[k,index(i,j-1)] =  1./dy**2
      A[k,index(i,j+1)] =  1./dy**2
      b[k] = f(x[i], y[j])
```

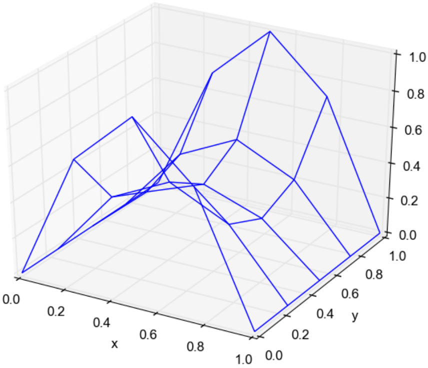
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica

```
# Solve the linear system
w = solve(A, b)
```

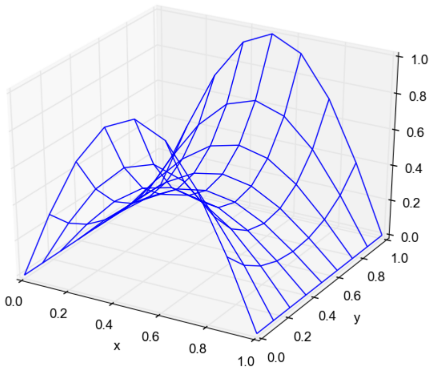
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



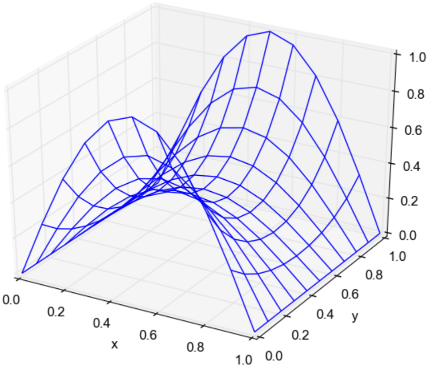
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



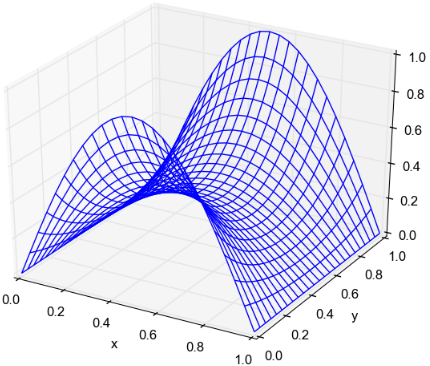
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



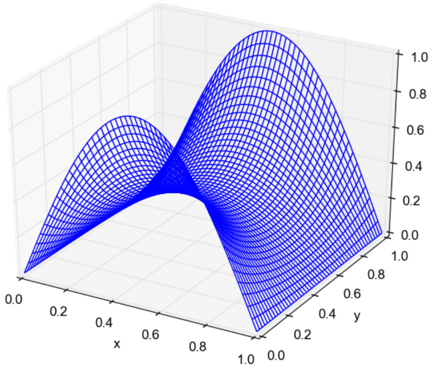
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



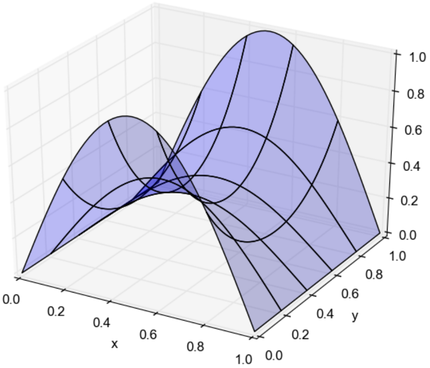
Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



Algoritmo de Diferencias Finitas para EDP Elíptica



Preguntas

- ¿Cómo puedo construir mi propia PDE? i.e. ¿Cómo obtengo $f(\cdot, \cdot)$ y $g_k(\cdot)$?
- ¿Cómo se podrían implementar otras condiciones de frontera (Neumann, Robin)?
- ¿Que cambios son necesarios para resolver otras EDP elípticas, como la ecuación de Helmholtz?
- ¿Existe alguna relación entre $f(\cdot, \cdot)$ y las condiciones de frontera $g_k(\cdot)$ de Dirichlet?