Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, parte 2
Boundary Value Problems

En caso de encontrar un error o posible mejora, no dude en mencionarlo en clases o por email. ¡Gracias!

(S)cientific (C)omputing (T)eam
ILI-286 DI-UTFSM Chile

v0.31

Contenido

¿Qué es un BVP?

- S ¿Qué veremos hoy?
- P ¡Cosas extremadamente interesantes!
- S ¿Aún más interesantes que la semana pasada? ¡¿Es posible eso?!
- P ¡Sí!, es posible. Veamos la siguiente imagen (ver cámara externa o hoja anexa).
- S ¿Haremos interpolación nuevamente? Pero eso ya lo aprendí el semestre pasado.
- P No es exactamente lo mismo pero si está relacionado. Ahora lo que conocemos son "reglas" que definen $y(x)$ y sus valores extremales.
- S ¿Realmente necesitamos los valores extremales?
- P Sí.

Problema de Valor de Frontera

S ¿Qué tenemos ahora entonces?

P Ahora tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x))$$
$$y(a) = y_a$$
$$y(b) = y_b$$

S Pero esto es igual a lo que teníamos antes...

P ¿Seguro?

S ¡Sí!, mmm, ¿Qué es $y(b)$? ¿Por qué tenemos x y no t?

P Ahí está la gran diferencia, este es un problema de condiciones de borde. Tenemos una ecuación de segundo orden, en donde 2 constantes de integración aparecen, por lo que se necesitan 2 condiciones de borde. Por ejemplo, resuelva:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1$$
$$y(0) = a$$
$$y(1) = b$$

Problema de Valor de Frontera

P ¿Cuál es la solución?

S No se

P ¿Seguro?

S OK, veamos. Mmmmm, ¿Tengo que integrar?

P Exacto

S Entonces quedaría: $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + C_1\,x + C_2$

P ¿Qué es C_1 y C_2?

S Son constantes.

P OK, y ¿Cuál es su valor?

S No se. Mmmm, ¿Puedo utilizar las condiciones de borde?

P Sí

S ¿Cómo las utilizo?

P Veamos, ¿Qué dicen las condiciones de borde?

S Dice: $y(0) = a$ y $y(1) = b$.

Problema de Valor de Frontera

P ¿Qué más conoces?

S Mmmm, ¡ah!, se me había olvidado, conozco: $y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1\, x + C_2$.

P ¿Qué podemos hacer?

S Ahora creo que estoy entendiendo, podemos generar un sistema de ecuaciones lineales:

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + C_1\, 0 + C_2 = C_2 = a$$

$$y(1) = \frac{1^2}{2} + C_1\, 1 + C_2 = \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = b$$

o mejor

$$C_2 = a$$

$$C_1 + C_2 = b - \frac{1}{2}$$

Con lo cual obtenemos:

$$C_2 = a$$

$$C_1 = b - \frac{1}{2} - a$$

Shooting Method (Método del Disparo)

- P Idea: Encontrar la solución de un BVP como si fuera un IVP.
- S No entiendo
- P Un BVP es:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= f(x, y(x), y'(x)) \\
y(0) &= c_0 \\
y(1) &= c_1
\end{aligned}
$$

  Ahora, considere $x \to t$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} &= f(t, y, \dot{y}) \\
y(0) &= c_0
\end{aligned}
$$

- S ¿Qué le ocurrió a la segunda condicione de borde?
- P La hemos omitido por ahora. Ahora considera que hacemos el cambio de variable $y_1(t) = y(t)$ y $y_2(t) = \dot{y}(t)$, entonces obtenemos:

Shooting Method (Método del Disparo)

P La hemos omitido por ahora. Ahora considera que hacemos el cambio de variable $y_1(t) = y(t)$ y $y_2(t) = \dot{y}(t)$, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= f(t, y_1, y_2) \\ y_1(0) &= c_0 \end{aligned}$$

S Mmmm, wait, no entiendo...¡Ah! ahora si, sigamos.
Entonces se construyó un sistema dinámico de segundo orden.

P Correcto. ¿Falta algo?

S A ver....., ¿Cómo inicializamos $y_2(0)$?

P Correcto, este es el problema. Lo podemos inicializar con α,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= f(t, y_1, y_2) \\ y_1(0) &= c_0 \\ y_2(0) &= \alpha \end{aligned}$$

S Listo entonces.

P ¿Seguro?

Shooting Method (Método del Disparo)

- S No se.
- P ¿Qué es α?
- S No se. Chuta, ¡¿Qué hacemos?!
- P Pensemos. ¿Qué sabemos?
- S Conocemos $y_1(0) = c_0$ y $y(1) = c_1$.
- P ¿Qué significa $y(1) = c_1$?
- S Significa que $y_1(1) = c_1$. ¿Pero cómo aseguramos eso? sólo conocemos $y_1(0)$.
- P Correcto, sólo conocemos $y_1(0)$, en este momento.
- S ¿Qué hacemos entonces?
- P ¿Que le parece la idea de elegir α de tal forma que que $y_1(1) - c_1 = 0$?
- S No entiendo
- P Suponga que usted genera un código en que el input es α y el output es $y_1(1) - c_1$. ¿Podría usted encontrar una raíz de su código? i.e. ¿Podría usted encontrar α de tal forma que el output es 0?
- S No se como hacer eso.
- P ¿Recuerda el método de la bisección?

Shooting Method (Método del Disparo)

- S Ah verdad, ¿Pero es posible utilizar el método de la bisección con un código?
- P Sí
- S Entonces el problema se reduce a encontrar un α.
- P Correcto
- S Y cuando encuentre el α, podría encontrar $y_1(t)$.
- P Exacto
- S Y cuando encuentre $y_1(t)$, lo que en realidad estaría obteniendo es $y(x)$.
- P Muy bien
- S Y si acabo de encontrar un $y(x)$ que satisface la ODE y las condiciones de borde $y(0) = c_0$ y $y(1) = c_1$ entonces acabo de encontrar la solución de mi BVP!
- P ¡Magistral!
- S Que interesante
- P Correcto, muy interesante. En conclusión, podemos resolver BVP con métodos ya aprendidos de IVP.

Finite Differences (Diferencias Finitas)

- P Ahora revisaremos otro método.
- S ¿Es realmente necesario?
- P Sí
- S OK
- P (Ver dibujo)
  Idea: Reconstruir $y(x)$ desde valores puntuales $y(x_i)$, donde en general lo único que tenemos es una estimación de $y(x_i)$ y la llamamos y_i. Nuevamente, los valores conocidos son en los bordes, i.e. $y(0) = c_0 = y_0$ y $y(1) = c_1 = y_n$.
- S ¿Pero como podemos usar y_i si eso es precisamente lo que queremos encontrar?
- P Correcto, lo que haremos ahora es encontrar las condiciones que y_i deben satisfacer y luego podremos encontrar y_i.
- S No entiendo.
- P Veamos. ¿Cómo podemos aproximar $y'(x)$?
- S No se. Lo que si se es que: $y'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$.
- P Exacto. Pero acá queremos una aproximación y entender que es lo que la aproximacón significa.

Finite Differences (Diferencias Finitas)

P Dentro de las más conocidas tenemos:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{Central Difference}$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \text{Forward Difference}$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \text{Backward Difference}$$

S OK, pero si no me equivoco nosotros necesitamos una aproximación de la segunda derivada. ¿Quá hacemos entonces?

P Buen punto. Podemos calcular la segunda derivada como la derivada de la derivada:

$$y''(x) = \frac{\text{Forward Difference} - \text{Backward Difference}}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$y''(x) = \frac{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h}}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2\,y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Finite Differences (Diferencias Finitas)

S ¿Y como utilizamos eso?

P Considere el siguiente BVP: $y''(x) = 4\,y(x)$, $y(0) = 1$ y $y(1) = 3$.
(Ver dibujo)
Lo que nos da las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\text{En } x_0: && y(x_0) = 1 = y_0 \\
&\text{En } x_1: && y''(x_1) = 4\,y(x_1) \Rightarrow \frac{y_0 - 2\,y_1 + y_2}{h^2} = 4\,y_1 \\
&\text{En } x_2: && y''(x_2) = 4\,y(x_2) \Rightarrow \frac{y_1 - 2\,y_2 + y_3}{h^2} = 4\,y_2 \\
&\text{En } x_3: && y''(x_3) = 4\,y(x_3) \Rightarrow \frac{y_2 - 2\,y_3 + y_4}{h^2} = 4\,y_3 \\
&\text{En } x_4: && y(x_4) = 3 = y_4
\end{aligned}$$

S Uff, pero eso es muy complicado.

P En realidad no, pero hay que tener cuidado con mantener el orden.

S ¿Qué hago ahora? Estoy confundido

P Ahora ya tenemos las restricciones que y_i tienen que satisfacer. O mejor dicho, tenemos 5 ecuaciones y 5 incǵnitas. ¿Conoce algún método que pueda resolver ese problema?

Finite Differences (Diferencias Finitas)

S Por supuesto. Eso lo podría resolver con $PA = LU$, Cholesky, QR, SVD, Jacobi, Gauss-Seidel, SOR(ω), Gradiente Descendente, Gradiente Conjugado, GMRes. Si es que no llegaran a funcionar, podríamos usar precondicionadores.

P ¡Excelente respuesta!

S Pero la única duda que me queda es que tenemos incógnitas en el lado derecho e izquierdo de las ecuaciones, y también conocemos explícitamente los valores de frontera. ¿Qué hacemos?

P Simplificamos.

S OK, entonces quedaría algo como esto:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
\frac{1}{h^2} y_0 - \left(\frac{2}{h^2} + 4\right) y_1 + \frac{1}{h^2} y_2 &= 0 \\
\frac{1}{h^2} y_1 - \left(\frac{2}{h^2} + 4\right) y_2 + \frac{1}{h^2} y_3 &= 0 \\
\frac{1}{h^2} y_2 - \left(\frac{2}{h^2} + 4\right) y_3 + \frac{1}{h^2} y_4 &= 0 \\
y_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Finite Differences (Diferencias Finitas)

P ¡Excelente! ¿Puede simplificarlo aún más y considerar que las condiciones de borde son $y(0) = 1$ y $y(1) = 3$?

S Muy simple. Por ejemplo podemos multiplicar por h^2 y obtenemos:

$$\begin{aligned} -\left(2 + 4h^2\right) y_1 + y_2 &= -1 \\ y_1 - \left(2 + 4h^2\right) y_2 + y_3 &= 0 \\ y_2 - \left(2 + 4h^2\right) y_3 &= -3 \end{aligned}$$

Incluso más, si definimos $\delta = -(2 + 4h^2)$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \delta & 1 & 0 \\ 1 & \delta & 1 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

P ¡Muy bien!

Algunas preguntas para discutir en clases

- ¿Que ocurre si tenemos una relación no-lineal de $y''(x)$ con el shooting method?, i.e. $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$, $y(0) = c_0$ y $y(1) = c_1$.
- ¿Se puede utilizar RK4 para resolver BVP?
- ¿Podría usar FPI en el Shooting Method?
- ¿Por qué queremos aprender Finite Difference si ya sabemos el Shooting Method?
- ¿Cómo podrízamos resolver un problema de cuarto orden? Donde se proveen condiciones de borde de la función y de sus derivadas.
- ¿Cómo queda el sistema de ecuaciones lineales de Finite Difference cuando h se reduce?
- ¿Que ocurre si tenemos una relación no-lineal de $y''(x)$ con Finite Difference?, i.e. $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$, $y(0) = c_0$ y $y(1) = c_1$.
- ...