Guía de ejercicios 1 CC2

Sebastián Acevedo

September 2019

1

El primer teorema del valor medio indica lo siguiente: Sea $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe c tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

a) Construya un algoritmo que reciba una función f, un intervalo $[a, b]$ y una cantidad de puntos de integración m y retorne c basado en la integración del punto medio.

b) Encuentre c para $f(x) = 1 + x - 20x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.

2

Considere la integral:

$$\int_0^1 x\ln(x)dx = -0.25$$

a) Use el método del trapecio para calcular esta integral, indicando todas las consideraciones necesarias.

b) Usando $m = 3$ y 6 calcule la tasa de convergencia (orden) del método del trapecio.

c) ¿Que método usaría para resolver la integral $\int_0^1 \sqrt{x}^{-1}$?

3

Al hacer un experimento con un resorte se registran los siguientes resultados:

x	F(x)
0.05	0.7
0.1	0.82
0.15	1.21
0.2	1.4
0.25	1.63
0.3	1.86
0.35	2

a) Aproxime la constante de elasticidad k si se sabe que:

$$\int_{x_a}^{x_f} F(x)dx = \frac{k\,(\Delta x)^2}{2}$$

Use al menos 3 puntos de integración con el método que estime conveniente.

4

Sea $y(x)$ la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(x) = x + \sin y(x),$$

Con $y(0) = \pi/2$ y $x \in [0, 2\pi]$

a) Integre a ambos lados de la ecuación diferencial, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, proponga un método numérico para aproximar sus integrales.

b) Use el método propuesto para encontrar $y(2\pi)$.

Desarrollos

1

a) Usando integración de punto medio se tiene:

```
integral=0
X=arange(a,b,m)
for i in range(m-1):
    integral+=f(0.5*(X[i]+X[i+1]))*(X[i+1]-X[i])
solve(f(c),integral/(b-a))
```

b) Usando solo dos puntos de integración:

$$\begin{aligned} f(0.5*(0+2))*(2-0) &= f(c)*(2-0) \\ 1+1-20 &= 1+c-20c^2 \\ 20c^2-c-19 &= 0 \\ c &= 1 \wedge c = -0.95 \end{aligned}$$

Como $c \in [0,2]$, entonces $c = 1$

2

El método del trapecio evalua cada par de puntos en la función f, por lo que no se debe indefinir en los extremos. Observando la función, vemos que al evaluar en 0 esta se indefine pues $ln(0) = \infty$. Analizando f(x) en el límite tenemos:

$$\lim_{x->0} x\ln(x) = \lim_{x->0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}}$$

el cual es un limíte indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Usando regla de L'hopital:

$$\lim_{x->0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x->0} -x = 0$$

Dado que si existe el límite $x\ln(x)$ en 0, podemos usar el método del trapecio, pero teniendo cuidado de que en lugar de evaluar $f(0)$ reemplazemos inmediatamente con 0.
Usando 2 puntos de integración, tenemos:

$$\int_0^1 x\ln(x)dx = (1-0)0.5(1\ln(1)+0) = 0$$

b) Con 6 puntos da -0.23468 y con 3 puntos da -0.17328, con errores de 0.0153171 y 0.0767132 respectivamente, con una tasa de 5.00. Dado que el número de puntos aumentó el doble entonces entonces el orden es 2.5

c) Dado que la función es asintótica en 0, lo mejor es no usar trapecio y en su lugar usar Riemann por la derecha o Punto Medio.

3

Utilizando punto medio:

$$\int_{0.05}^{0.35} F(x)dx = h(F(0.1) + F(0.2) + F(0.3)) = 0.1(0.82 + 1.4 + 1.86) = 0.408$$

Luego $k = 2 * 0.48/(0.35 - 0.05)^2 = 9.067$

4

Integrando a ambos lados en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} y'(x)dx = \int_0^{2\pi} xdx + \int_0^{2\pi} \sin(y)$$

Por teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$y(2\pi) - y(0) = \int_0^{2\pi} xdx + \int_0^{2\pi} \sin(y)$$

Como sólo conocemos $y(0)$, debemos usar un método que solo use este punto, por lo que podríamos aproximar la integral con Riemann por la izquierda.

b)

$$\begin{aligned} y(2\pi) - y(0) &= h(0 + sin(y(0))) \\ y(2\pi) &= 2\pi(0 + sin(y(0))) + y(0) \\ y(2\pi) &= 2\pi(0 + sin(\pi/2)) + \pi/2 \\ y(2\pi) &= 2\pi(0 + sin(\pi/2)) + \pi/2 \\ y(2\pi) &= 2\pi + \pi/2 = 2.5\pi \end{aligned}$$