Guía de ejercicios 3 CC2

Sebastián Acevedo

September 2019

1

Demuestre que la Cuadratura Gaussiana posee una precisión de $2n-1$, utilizando el polinomio de Legendre de grado n en el intervalo $[-1,1]$.

2

Se tiene la función $p(x) = f(x) + \epsilon(x)$ donde $f(x)$ es la data pura y $\epsilon(x)$ es un error de medición. Lamentablemente solo tenemos a nuestra disposición $p(x)$ pero nos interesa recuperar $f(x)$. Lo ínico que se sabe es que $\epsilon(x)$ es una función de error que sigue una distribución $N(0,)$. Considere el siguiente operador integral propuesto para reducir el efecto de $\epsilon(x)$:

$$I_a(x) = \int_{x-a}^{x+a} p(y)dy$$

a) Construya un algoritmo que aproxime numéricamente la integral propuesta con un error absoluto permitido γ.

b) Se sabe que $f(x)$ tiene un máximo en el valor x_0. Construya un algoritmo que encuentre el máximo de $I_a(x)$ en función de a para $a \in [1e-5, 1]$

3

Considere que se quiere aproximar la integral $\int_{-10}^{50}$. Se sabe que $|\frac{d^2 f(x)}{dx^2}| \leq 0.4e12$ y $|\frac{d^4 f(x)}{dx^4}| \leq 3e16$.

a) Estime el valor de h tal que la cota superior menor del error para el método del punto medio sea 10^{-12}.

b) Suponga que se puede estimar el tiempo requerido por el método del punto medio como $T = 10\lceil \frac{1}{h} \rceil [ns]$. Estime T en horas.

c) Estime T en horas, pero esta vez usando el método de Simpson usando la misma cota que en la pregunta a).

Desarrollos

1

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $2n-1$. Si lo dividimos por el n-ésimo polinomio de Legendre tenemos:

$$\frac{P(x)}{p_n(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{p_n(x)}$$
$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x)$$

Donde $S(x)$ es el cuociente de la división polinómica y $R(x)$ el residuo. Como dividimos un polinomio de grado $2n-1$ por uno de grado n, tanto $S(x)$ y $R(x)$ tienen grado $n-1$ o menor (división de potencias).
Integrando a ambos lados tenemos:

$$\int_{-1}^{1} P(x) = \int_{-1}^{1} S(x)p_n(x) + \int_{-1}^{1} R(x)$$

Donde $S(x)$ puede ser escrito como una combinación lineal de los polinomios de Legendre de grado $n-1$ y menor, esto es $\sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x)$. Así:

$$\int_{-1}^{1} P(x) = \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x) p_n(x) + \int_{-1}^{1} R(x)$$

Como los polinomios de Legendre son ortogonales, entonces $p_i(x)p_n(x) = 0$. Luego se tiene que $\int_{-1}^{1} P(x) = \int_{-1}^{1} R(x)$. Como es posible interpolar exactamente un polinomio de grado $n-1$ con n puntos, la cuadratura gaussiana interpolará perfectamente $P(x)$ y $R(x)$.

2

a) Estrategia: Hacer cuadratura, calcular error y si es menor a γ hacer la cuadratura otra vez con un punto más. Como no hay información sobre $f(x)$ se puede usar cualquier método de cuadratura. Usaremos cuadratura gaussiana ya que nos asegura la mejor estimación.

Primero debemos hacer el cambio de variables:

$$\int_{a}^{b} f(x) = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})$$
$$\int_{x-a}^{x+a} p(y)dy = \frac{x+a-x+a}{2} \int_{-1}^{1} p(\frac{x+a-x+a}{2}t + \frac{x+a+x-a}{2})dt$$
$$\int_{x-a}^{x+a} p(y) = a \int_{-1}^{1} p(at+x)dt$$

Luego nuestro código sería de la siguiente manera:

```
while(error>=gamma):
    n+=1
    I=\sum_0^n w_ip(x_i)
    error=|I_i-I_{i-1}|
return I
```

b) El máximo se encuentra derivando e igualando a 0.

$$\frac{d}{dx}\int_{x-a}^{x+a} p(y) = p(x+a) - p(x-a) = 0 \tag{1}$$

Luego basta con usar un método de búsqueda de ceros para encontrar una raiz.

3

a) Error de punto medio=$\frac{b-a}{24}h^2 f''(c)$. Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{50+10}{24}h^2 0.4 * 10^{12} &= 10^{-12} \\ 10^{12}h^2 &= 10{-}12 \\ h &= 10^{-12} \end{aligned} \tag{2}$$

b) $T = 10\lceil 10^{12} \rceil = 10^1 3[ns] = 2.777[h]$

c) Error de regla de simpson=$\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(c)$. Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{50+10}{180}h^4 3 * 10^{16} &= 10^{-12} \\ 10^{16}h^4 &= 10{-}12 \\ h &= 10^{-7} \end{aligned} \tag{3}$$

Luego $T = 10\lceil 10^7 \rceil = 10^8[ns] = 27.777e - 5[h]$