Solución Ayudantía 6

1.- a) • Para utilizar shooting method debemos trasformar el BVP en IVP, dependiente de la función $u(x)$.

• Cambio de variable:

$$y_1(x) = u(x), \quad y_2(x) = u'(x), \quad y_3(x) = u''(x)$$
$$y_1'(x) = y_2(x), \quad y_2'(x) = y_3(x)$$

• Debemos parametrizar valor inicial desconocido.

$$y_1(0) = 0, \quad \underline{y_2(0) = \alpha}, \quad y_1(1) = 1$$

• Reemplazando en (1) y despejando 2^{da} derivada:

$$f_0(y_3(x)) + f_1(y_2(x)) + y_1(x) = 1$$

$$\rightarrow f_0(y_3(x)) = 1 - y_1(x) - f_1(y_2(x))$$

$$\xrightarrow[\text{biyectiva}]{f_0 \text{ es}} y_3(x) = f_0^{-1}\left(1 - y_1(x) - f_1(y_2(x))\right)$$

• En el último paso anterior necesitamos de la inversa de $f_0(\cdot)$, esto es razonable ya que f_0 es biyectiva. De no encontrarse disponible una versión analítica de esta, se puede aproximar de la sig. manera:

$$\text{Zero\_finder}(f_0(\beta) - x) \xrightarrow{\beta} f_0^{-1}(x)$$

• Luego, resolver por shooting method se escribirá el sist. dinámico:

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_1(x_i) \\ y_2(x_i) \end{bmatrix} \quad Y_i' = \begin{bmatrix} y_2(x_i) \\ f_0^{-1}\left(1 - y_1(x_i) - f_1(y_2(x_i))\right) \end{bmatrix}$$

b) • Para encontrar el valor óptimo de α se usará bisección pero antes debemos encontrar valores candidatos válidos para el algoritmo.

• Elegir dos números random α_1 y α_2.
• Definir función a encontrar cero. Esta corresponde a diferencia entre el valor de la aproximación en $x=1$ y el valor real $y_1(1)=1$.

$$e(\hat{y}_b) = \hat{y}_b - 1 \quad (*)$$

• Realizar estimaciones del IVP con α_1 y α_2 respectivamente.
• Evaluar cada estimación en $e(\cdot)$, verificar que multiplicación de evaluaciones sea negativa, de no serlo generar otro número random y estimar IVP, reemplazando una estimación de los 2 anteriores. Repetir.
• Con dos estimaciones válidas, realizar bisección en intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$. La función a evaluar corresponde a estimar el IVP con un valor de α, y luego calcular el error en el borde con $(*)$.
• Con $\hat{\alpha}$ valor encontrado por bisección, estimar IVP y retornar solución.

2.- a) • Como existe una integral es necesario que el método para estimarla sea compatible con nodos de diferencias finitas.
  • Usaremos trapecio.

• Discretizando:

$$u(ih) = u_i \quad , \quad h = x_{i+1} - x_i$$

Forw. Diff.

$$u'(ih) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad , \quad \int_0^{ih} u(y)\,dy \approx \frac{h}{2}\left[u_0 + u_i + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} u_j\right]$$

• Así, la ecuación (4) discretizada:

$$\frac{u_i-u_{i-1}}{h}+2u_i+5\frac{h}{2}\left[u_0+u_i+2\sum u_j\right]=1 \;/\cdot h$$

$$u_i-u_{i-1}+2hu_i+\frac{5h^2}{2}u_0+\frac{5h^2}{2}u_i+5h^2\sum u_j=h$$

• Agrupando:

$$u_i\cdot\left(1+2h+\frac{5h^2}{2}\right)-u_{i-1}+\frac{5h^2}{2}u_0+5h^2\sum u_j=h \quad (**)$$

b) • Utilizando la malla: $h=1$

	0	1	2	3	4	5
$i=$	0	1	2	3	4	5

● : conocido

○ : desconocido (a calcular)

• Evaluando (**) en la malla:

i=1) $$u_1\underbrace{\left(1+2h+\frac{5h^2}{2}\right)}_{\sigma}-u_0+\frac{5h^2}{2}u_0=h \;/\; u_0=0$$

$$u_1\sigma=h$$

i=2) $$u_2\sigma-u_1+\underbrace{5h^2}_{\phi}u_1=h \to u_1(\phi-1)+u_2\sigma=h$$

i=3) $$u_3\sigma-u_2+\phi u_1+\phi u_2=h$$
$$u_1\phi+u_2(\phi-1)+u_3\sigma=h$$

i=4) $$u_4\sigma-u_3+\phi u_1+\phi u_2+\phi u_3=h$$
$$u_1\phi+u_2\phi+u_3(\phi-1)+u_4\sigma=h$$

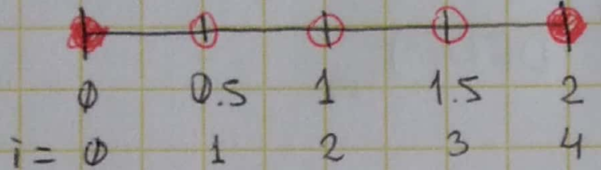
i=5) $$u_5\sigma-u_4+\phi u_1+\phi u_2+\phi u_3+\phi u_4=h$$
$$u_1\phi+u_2\phi+u_3\phi+u_4(\phi-1)+u_5\sigma=h$$

• De manera matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (0-1) & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0-1) & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0-1) & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0-1) & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ h \\ h \\ h \end{bmatrix}$$

c) • Resolver con forward substitution.

3.- • Discretizar (6) con $h = \Delta x = 0.5$.



$$y''(ih) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

• Luego el problema discretizado:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = (2+ih)\, y_i^2 \quad / \cdot h^2$$

$$y_{i+1} - 2y_i - (2+ih)h^2 y_i^2 + y_{i-1} = 0$$

• Como existe un término cuadrático, el sistema no es lineal.

• Definir sistema no lineal:

$$F(\vec{y}) = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 - (2.5)\cdot 0.25\, y_1^2 + \overset{1}{y_0} \\ y_3 - 2y_2 - (3)\cdot 0.25\, y_2^2 + y_1 \\ \underset{4}{y_4} - 2y_3 - (3.5)\cdot 0.25\, y_3^2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

- Utilizaremos Newton Multivariado: $\vec{y}^n$: vector n-ésima iteración.

$$\vec{y}^{n+1} = \vec{y}^n - DF^{-1}(\vec{y}^n)\,F(\vec{y}^n)$$

- $DF(\vec{y}^n)$ Corresponde a la matriz jacobiana de $F(\vec{y}^n)$.

- Para no calcular inversa de $DF(\vec{y}^n)$ se modifica la expresión a:

$$\vec{y}^{n+1} - \vec{y}^n = -DF^{-1}(\vec{y}^n)\,F(\vec{y}^n) \quad / \quad \Delta\vec{y}^n = \vec{y}^{n+1} - \vec{y}^n$$

$$\Delta\vec{y}^n = -DF^{-1}(\vec{y}^n)\,F(\vec{y}^n) \quad / \cdot DF(\vec{y}^n)_{izq}$$

$$\underline{DF(\vec{y}^n)\,\Delta\vec{y}^n = -F(\vec{y}^n)}$$

↳ Sistema lineal → calcular Δ y calcular $\vec{y}^{n+1} = \Delta\vec{y}^n + \vec{y}^n$.

- Volviendo al ejercicio; calculemos $DF(\vec{y})$:

$$DF(\vec{y}) = \begin{bmatrix} -2 - 2\cdot 2.5\cdot 0.25\,y_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-6\cdot 0.25\,y_2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-7\cdot 0.25\,y_3 \end{bmatrix}$$

- Así, basta iterar n veces y encontrar una estimación de $\vec{y}$, utilizando en cada paso un solver de sistemas lineales.