Guía de ejercicios 1 CC2

Sebastián Acevedo

September 2019

1

Un problema de valor propio generalizado es de la siguiente forma:

$$A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$$

a) Considere que B es una matriz no singular, modifique el algoritmo Power Iteration para encontrar los valores propios generalizados.

2

Una matriz estocástica por la derecha es una matriz que cumple con $a_{ij} \geq 0$ y $\sum_{i=0}^{n} A_{i,k} = 1$, i.e. sus elementos de cada fila suman 1.

a) Demuestre que $\lambda = 1$ es un valor propio de una matriz estocástica y encuentre el vector propio asociado.

b) Demuestre que cualquier valor propio de una matriz estocástica cumple con $\lambda \leq 1$

3

Considere una matriz B de la forma:

$$B = I + A + A^2 + A^3 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

Donde A es una matriz de valores propios λ y vectores propios $\mathbf{v}$ son conocidos y ademas sus valores propios cumplen con $|\lambda| < 1$.

a) Demuestre que $\mu = \frac{1}{1-\lambda}$ es un valor propio de B y encuentre el vector propio asociado.

b) Exprese la matriz B en términos de sus valores y vectores propios.

4

Se define como valores y vectores propios izquierdo de A a los escalares *lambda* y vectores filas $\mathbf{v}$ que cumplen con la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}A = \lambda\mathbf{v}$$

a) Construya un algoritmo que encuentre los valores y vectores propios izquierdos de una matriz A.

Desarrollo

1

Multiplicando por B^{-1} por la izquierda tenemos:

$$B^{-1}A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El cual es un problema de valores propios comun y corriente. A la hora de hacer Power Iteration se debe manejar bien la inversa, por lo que en lugar de encontrar $x_i = B^{-1}\,A\,u_{i-1}$, tendremos que resolver un sistema de ecuaciones lineales.

```
def PowerIteration(A):
    x=Initial Guess
    for i in range (n):
        u=x/norm(x)
        x=solve(B,A*u)
```

2

a) Podemos aprovechar que la matriz es estocástica para intentar sumar los elementos de cada fila, sabiendo que esto nos dará 1. Para sumar los elementos de las filas de una matriz, basta multiplicar por un vector de unos por la derecha.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces que si v es el vector de unos, entonces se da que $A\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Luego, eso es lo mismo que $A\,\mathbf{v} = 1\,\mathbf{v}$. Por lo tanto 1 es valor propio asociado al vector de unos.

b) Comenzando de la ecuación $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, analizemos la i-ésima fila:

$$a_{i1}\,v_1 + a_{i2}\,v_2 + ... + a_{in}\,v_n = \lambda\,v_i$$

Sea $v_k = \max(|v_1|, |v_2|, ..., |v_n|)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{k1}\,v_1 + a_{k2}\,v_2 + ... + a_{kn}\,v_n &= \lambda\,v_k \\ |a_{k1}\,v_1 + a_{k2}\,v_2 + ... + a_{kn}\,v_n| &= |\lambda|\,|v_k| \\ a_{k1}\,|v_1| + a_{k2}\,|v_2| + ... + a_{kn}\,|v_n| &\geq |\lambda|\,|v_k| \\ a_{k1}\,|v_k| + a_{k2}\,|v_k| + ... + a_{kn}\,|v_k| \geq a_{k1}\,|v_1| + a_{k2}\,|v_2| + ... + a_{kn}\,|v_n| &\geq |\lambda|\,|v_k| \\ (a_{k1} + a_{k2} + ... + a_{kn})|v_k| &\geq |\lambda|\,|v_k| \\ (a_{k1} + a_{k2} + ... + a_{kn}) &\geq |\lambda| \\ 1 &\geq |\lambda| \end{aligned}$$

3

a) Sabiendo que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, podemos entonces multiplicar la ecuación dada por $\mathbf{v}$ para intentar encontrar los valores propios.

$$B\mathbf{v} = I\mathbf{v} + A\mathbf{v} + A^2\mathbf{v} + A^3\mathbf{v} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} A^i\mathbf{v}$$

$$B\mathbf{v} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} + \lambda^2\mathbf{v} + \lambda^3\mathbf{v} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\mathbf{v}$$

$$B\mathbf{v} = \lim_{n->\infty} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i\mathbf{v} = \lim_{n->\infty} \frac{1-\lambda^{n-1}}{1-\lambda}\mathbf{v} = \frac{1}{1-\lambda}\mathbf{v}$$

b) Haciendo descomposición de valores propios tenemos:

$$B = V^{-1}\Lambda V$$

$$B = V^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1-\lambda_n} \end{bmatrix} V$$

Donde λ_i con $i \in [1, n]$ son los valores propios de la matriz A y V es la matriz de vectores propios de la matriz A

4

Transponiendo toda la ecuación tenemos:

$$A^T v^T = \lambda v^T$$

Lo cual no es más que un problema común de valores propios, el cual se puede resolver con Power Iteration.