QUIZ 2

Juro o prometo que la totalidad del trabajo que entregue en esta evaluación corresponde a mi trabajo individual y es el fruto de mi esfuerzo y estudio

Nombre, Firma y Fecha: Cesar Contreras Z, , 13-01-2020

1) (a) Lo primero que debemos hacer es hacer un cambio de variable de manera de reducir el orden de la ecuación diferencial, de la siguiente forma (usando la 1ª ecuacion para ejemplificar)

cancelando masas →
$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{1}{\cancel{m_1}}\left(-G\cdot \cancel{m_1}\cdot m_2 \frac{r_1-r_2}{\|r_1-r_2\|_2^3} - G\cancel{m_1} m_3 \frac{r_1-r_3}{\|r_1-r_3\|_2^3}\right)$$

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = -G\left(m_2 \frac{r_1-r_2}{\|r_1-r_2\|_2^3} + m_3 \frac{r_1-r_3}{\|r_1-r_3\|_2^3}\right)$$

planteando cambio de variable → sea $\frac{dr_1}{dt} = V_1$, entonces tendremos las ecuaciones:

$$(1).\quad \frac{dV_1}{dt} = -G\left(m_2 \frac{r_1-r_2}{\|r_1-r_2\|_2^3} + \underbrace{\cancel{m_3 \frac{r_1-r_3}{\|r_1-r_3\|_2^3}}}_{0}\right)$$

$$(2).\quad \frac{dr_1}{dt} = V_1$$

por tanto, tendremos 6 ecuaciones a partir de las 3 iniciales, las cuales son (anotando las 4 faltantes mas (1) y (2))

$$(3)\quad \frac{dV_2}{dt} = -G\left(m_1 \frac{r_2-r_1}{\|r_2-r_1\|_2^3} + \underbrace{\cancel{m_3 \frac{r_2-r_3}{\|r_2-r_3\|_2^3}}}_{0}\right)$$

$$(4)\quad \frac{dr_2}{dt} = V_2$$

(5) $\frac{dv_3}{dt} = -G\left(m_1 \frac{r_3-r_1}{\|r_3-r_1\|_2^3} + m_2 \frac{r_3-r_2}{\|r_2-r_3\|_2^3}\right)$

(6) $\frac{dr_3}{dt} = v_3$

$\therefore$ el IVP queda, con $m_3 = 0$

(*) solo considera lado derecho no el $\frac{dv_i}{dt}$ //

(1) $\frac{dv_1}{dt} = -G\left(m_2 \frac{r_1-r_2}{\|r_1-r_2\|_2^3}\right)$

(2) $\frac{dr_1}{dt} = v_1$

(3) $dv_2 = -G\left(m_1 \frac{r_2-r_1}{\|r_2-r_1\|_2^3}\right)$ m_3

(4) $\frac{dr_2}{dt} = v_2$

(5) $\frac{dv_3}{dt} = -G\left(m_1 \frac{r_2-r_1}{\|r_2-r_1\|_2^3} + m_2 \frac{r_3-r_2}{\|r_2-r_3\|_2^3}\right)$

(6) $\frac{dr_3}{dt} = v_3$

* sea $F_i(y,t) = \begin{pmatrix} (1) \\ (3) \\ (5) \\ (2) \\ (4) \\ (6) \end{pmatrix}$

representa el vector de ~~fxn~~ ecuaciones dif en la variable $i \in \{x, y\}$

- $r_1 = (x_1, y_1)$
- $r_2 = (x_2, y_2)$
- $r_3 = (x_3, y_3)$

- $v_1 = (0, 0)$
- $v_2 = (0, 0)$
- $v_3 = (0, 0)$

//

(b) Para implementar RK-4 consideramos una aproximación de euler ya implementada, y lo hacemos primero para X y luego para Y, siendo nuestro $F(y,t)$ nuestro vector de ecuaciones:

$$RK4(F(y,t),\ \overset{\text{tamaño de paso o } \Delta t}{h},\ \underbrace{r_0,\ v_0}_{\text{vectores iniciales}},\ \overset{\text{t hasta el cual calcularemos}}{T}):$$

$t = [r_0, v_0]$

for i in range(T/h):

$K_1 = F(t_i, y_i)$ → Aproximamos con euler explicito

$K_2 = F(t_i + h/2,\ y_i + \frac{h}{2} k_1)$ → Aprox con euler exp

$K_3 = F(t_i + h/2,\ y_i + \frac{h}{2} K_2)$ → Aprox con euler exp.

$k_4 = F(t_i + h,\ y_i + h k_3)$ → Aprox con euler exp.

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2K_2 + 2k_3 + K_4)$

$y_i = y_{i+1}$

return y_i

$F(y,t)$ = vector de funciones

$T = 500$

$r_{ox} = [x_1, x_2, x_3]$

$r_{oy} = [y_1, y_2, y_3]$

$v_{ox} = [0, 0, 0]$

$v_{oy} = [0, 0, 0]$

$h = 0{,}1$

AUX1 = $RK4(F(y,t), h, r_{ox}, v_{ox}, T)$

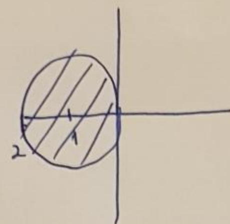
AUX2 = $RK4(F(y,t), h, r_{oy}, v_{oy}, T)$

Euler exp. $\to O(h)$

$y_0 = \text{dato}$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$

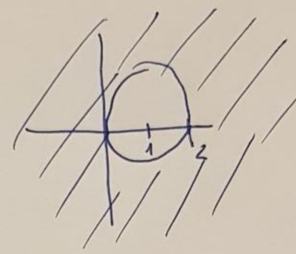
$h = t_{i+1} - t_i = \Delta t$



Euler impl. $\to O(h)$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(t_i, y_{i+1})$

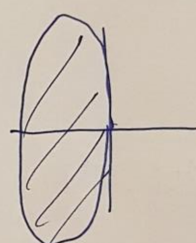
$\vec{H}(\vec{w}) = \vec{w} - (\vec{y}_i + h\vec{F}(t_i, \vec{w}))$



RK-2 $\to O(h^2)$

$k_1 = y_i + \frac{h}{2} \vec{F}(t_i, y_i) \to$ estimación con Euler

$y_{i+1} = y_i + h\vec{F}(t_i + \frac{h}{2}, k_1)$



RK-4 $\to O(h^4)$

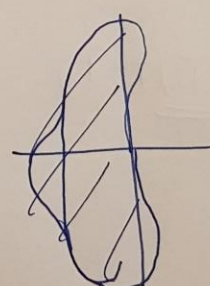
$k_1 = F(t_i, y_i)$

$k_2 = F(t_i + h/2, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

$k_3 = F(t_i + h/2, y_i + \frac{h}{2} k_2)$

$k_4 = F(t_i + h, y_i + h k_3)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



$$|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

convergencia

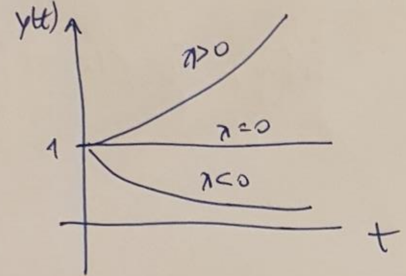
$$|y(t_1) - y_1| \leq \frac{Ch^k}{L}(\exp(L(t_1 - a)) - 1))$$

estabilidad

→ derivada en ese punto

$$\dot{y} = \lambda y \quad , \; y(0) = 1$$

sol. real → $y(t) = \exp(\lambda t)$



$* \; |1 + \lambda h| < 1$ para $\lambda < 0$
en euler.

para vectoriales

$$H(\vec{w}) = \vec{w} - \vec{y_i} + h\vec{F}(t_i, \vec{w})$$

• $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

~~con w~~

$$\dot{\vec{y}} = \vec{F}(\vec{y}) = \vec{F}(\vec{y_0}) + \underline{\underline{\vec{J}_F(\vec{y_0})}}(\vec{y} - \vec{y_0})$$