Quiz 1 - ILI286
Primavera 2017 - Mi 13.09.17

Nombre: PAUTA Rol: ____________

Responda las siguientes preguntas de forma personal. **Tiempo Máximo:** 25 minutos.

1. **[30 puntos]** Considere la matriz A, con valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) **[10 puntos]** ¿Qué valor/es propio/s obtendrá si utiliza *Power Iteration* sobre la matriz A?

(b) **[10 puntos]** Considere I, la matriz identidad de 2×2. ¿Qué valor/es propio/s obtendrá si utiliza *Power Iteration* sobre la matriz $A - 5\,I$?

(c) **[10 puntos]** Considere I, la matriz identidad de 2×2. ¿Qué valor/es propio/s obtendrá si utiliza *Power Iteration* sobre la matriz $(A^{-1} + 5\,I)^{-1}$?

2. **[70 puntos]** Considere A una matriz de $n \times n$, con entradas reales, simétrica y con ceros en la diagonal principal. Los valores propios de esta matriz no se repiten y satisfacen $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$.

Obtener numéricamente el valor propio λ_1 de A con *Power Iteration* no es factible, debido a que este valor no es necesariamente el valor propio dominante. Tal vez, si se usa *Power Iteration* sobre la matriz A desplazada en un *shift* conveniente sea más efectivo, ya que los valores propios quedarán ordenados por magnitud al ser todos positivos o todos negativos, pero el valor propio dominante de esta nueva matriz no será exactamente el valor propio λ_1 que se requiere determinar.

Construya un algoritmo que haga uso del *Teorema del Círculo de Gerschgorin* para encontrar un *shift* conveniente sobre la matriz A y que obtenga numéricamente el valor propio λ_1.

Hint: **Teorema:** Sea A una matriz de $n \times n$ con entradas a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. Cada valor propio λ de A pertenece por lo menos a uno de los discos $|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$.

1) a) * La matriz A tiene valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$
* Power Iteration obtendrá $\lambda_1 = 3$

b) * La matriz $A - 5I$ tiene valores propios $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -6$
* Power Iteration obtendrá $\lambda_2 = -6$

c) * La matriz $(A^{-1} + 5I)^{-1}$ tiene valores propios $\lambda_1 = \left(\frac{1}{3} + 5\right)^{-1} = \left(\frac{16}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{16}$ y $\lambda_2 = (-1+5)^{-1} = \frac{1}{4}$
* Power Iteration encontrará $\lambda_2 = \frac{1}{4}$

2) Cada valor propio pertenece a por lo menos uno de los discos:

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$$

En este caso $a_{ii} = 0 \ \forall i$, por lo tanto

$$|\lambda| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$$

Desarrollando el valor absoluto, según la definición:

$$-\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \leq \lambda \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$$

Considerar $\max_{i} \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ el radio más grande de un disco, el cual puede ser obtenido calculando la norma infinita de A (solo en este caso porque $a_{ii}=0$). Entonces, TODO valor propio queda acotado por

$$-\max_{i}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \leq \lambda \leq \max_{i}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$$

$$-\|A\|_\infty \leq \lambda \leq \|A\|_\infty$$

Sumando $\|A\|_\infty$ a la desigualdad:

$$0 \leq \tilde{\lambda} \leq 2\|A\|_\infty$$

Luego todos los valores propios son positivos y están ordenados por magnitud. $\tilde{\lambda}$ es valor propio de la matriz $(A+\|A\|_\infty I_n)$ y satisface $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \|A\|_\infty$, con $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2 > \ldots > \tilde{\lambda}_n$.

Usando Power Iteration se obtiene $\tilde{\lambda}_1$, el valor propio dominante de esta matriz. Al restarle $\|A\|_\infty$ se obtiene numericamente λ_1.

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 + \|A\|_\infty$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 - \|A\|_\infty$$