PRE-CERTAMEN N°3 ILI-286
SCT - JU.14.12.17

NOMBRE:____ ROL:______________________________

Instrucciones: *Usted tiene 120 minutos para responder el Certamen.*
Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.
Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o ***sin nombre*** *reciben 0 puntos.* Copy-and-Paste *de algoritmos reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!*

1. Considere el problema de valor frontera:

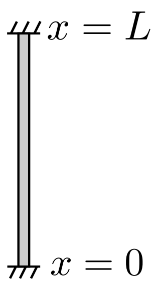
$$u_{xx}(x) = \lambda\, x\, u(x) \tag{1}$$
$$u(-1) = 0 \tag{2}$$
$$u(1) = 0 \tag{3}$$

Para responder a las siguientes preguntas considere $x_j = \dfrac{2\,j}{n} - 1$ para $j = \{0, \ldots, n\}$.

(a) Muestre cómo se pueden encontrar numéricamente soluciones no nulas para $u(x_j)$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Exprese su resultado algebráicamente y déjelo expresado en función de n.

(b) Proponga un algoritmo numérico visto en clases para determinar la soluciones numéricas no nulas para $u(x_j)$, para $j = 1, \ldots, n-1$, asociadas al k-ésimo valor de λ mayor en magnitud, con $k \leq n-1$. **Importante:** No debe resolver, pero debe explicar todas las consideraciones necesarias para utilizar el algoritmo propuesto, los resultados que obtendrá el algoritmo y cómo entregará a partir del algoritmo los valores solicitados.

2. La tasa de cambio del potencial en una barra elástica delgada de largo $L\,[m]$ que ha sido fijada en ambos extremos es constante. Esta situación está modelada por la ecuación diferencial (4) con k una constante positiva, junto con las condiciones (5) y (6).



$$\frac{\mathrm{d}^2 U(x)}{\mathrm{d}x^2} = k \tag{4}$$
$$U(0) = 0 \tag{5}$$
$$U(L) = 0 \tag{6}$$

Figura 1: Barra elástica fijada en ambos extremos.

A continuación se le solicita que resuelva numéricamente el problema de valor frontera asociado con el *método de elementos finitos*.

(a) Convierta el problema de valor frontera a la formulación débil, requerida por el *método de elementos finitos*. Escriba todas las consideraciones o supuestos necesarios para esta formulación.

(b) Considere una partición equiespaciada de $n+1$ nodos, denotados por $x_j = \dfrac{L}{n}$. ¿Cuáles son las consideraciones que debe tener en cuenta para encontrar numéricamente el potencial de la barra en los nodos x_j con el *método de elementos finitos*?

(c) Uno de los términos de la formulación débil corresponde a la integral (7), donde $\phi_k(x)$ es la conocida *hat function*.

$$\int_0^L k\, \phi_k(x)\, \mathrm{d}x \tag{7}$$

Utilice un método de integración numérica que obtenga el valor de esta integral **sin error**. Justifique su respuesta.

(d) Proponga un algoritmo basado en el *método de elementos finitos* que determine el punto x_j de la barra donde se alcanza el máximo potencial.

3. Considere un código fuente que intenta resolver el siguiente problema de Poisson unidimensional:

$$u_{xx} = \int_{-\infty}^{x} \sigma(s) e^{-s^2}\, ds \tag{8}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{9}$$

El código posee implementadas las rutinas `solveByFiniteDiffLinear(...)` y `solveByFiniteDiffNonlinear(..)`. Ambas funciones reciben como argumento el número de puntos de discretización n, las condiciones de borde como u_0 y u_{n+1} y el lado derecho del problema de Poisson como función, si es que puede evaluarse directamente. Evidentemente cada rutina intentará resolver de distinta forma el problema, dependiendo de la dependencia lineal de $u(x)$.

(a) Construya una rutina `solveRHS(...)` que implemente un método numérico que permita manejar el lado derecho del problema de Poisson de forma cómoda para el programador.

(b) Elija sólo una de las dos rutinas existentes en el código con la que resolverá el problema de Poisson presentado. Justifique su elección mediante el desarrollo del problema mediante diferencias finitas mostrando claramente la linealidad o no linealidad del problema a resolver. Finalmente muestre cómo usará la rutina construída en **(a)** para la rutina que acaba de elegir.

4. Considere un dominio $\Omega = [0,1]^2$ donde se quiere resolver la ecuación de calor con coeficiente de difusión $d = 0.1$, i.e. $u_t(x,y,t) = d\,\Delta u(x,y,t)$, con las siguientes condiciones de borde: $u(x,0,t) = u(x,1,t) = u(0,y,t) = 0$ y $u(1,y,t) = y\,(1-y)\beta$. Construya un algoritmo que determine $\beta \in \mathbb{R}$ tal que asegure que $u(0.7, 0.5, 5) = 1$.