Solución Ayudantía 5

1.- $u'(t) = (1-\mu)\cdot u(t)$, $u(0) = u_0$, $\mu \in \mathbb{R}$

$K_1 = h\cdot f(t_n, u_n)$, $K_2 = hf(t_n + h, u_n + K_1)$,

$u_{n+1} = u_n + \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, $\mu > 1$

a) • Para reconocer la región de estabilidad definiremos por conveniencia $\lambda = (1-\mu)$, y realizaremos una iteración del método propuesto. ($\lambda < 0$, ya que $\mu > 1$).

$$f(t_n, u_n) = \lambda u_n$$

$$K_1 = h\lambda u_n \qquad K_2 = h\cdot\lambda(u_n + K_1) = h\cdot\lambda(u_n + h\lambda u_n)$$
$$= h\cdot\lambda u_n + h^2\lambda^2 u_n$$
$$K_2 = u_n(h\lambda + h^2\lambda^2)$$

$$u_{n+1} = u_n + \alpha h\lambda u_n + (1-\alpha)u_n(h\lambda + h^2\lambda^2)$$
$$= u_n + \cancel{\alpha h\lambda u_n} + u_n(h\lambda + h^2\lambda^2) - \cancel{u_n\alpha h\lambda} - u_n\alpha h^2\lambda^2$$
$$= u_n\left[1 + h\lambda + h^2\lambda^2 - \alpha h^2\lambda^2\right]$$

$$u_{n+1} = u_n\left[1 + h\lambda + (1-\alpha)h^2\lambda^2\right]$$

• Luego, la región de estabilidad estará dada por la expresión entre corchetes, cuyo módulo deber ser menor que uno.

$$|1 + h\lambda + (1-\alpha)h^2\lambda^2| < 1$$

$$-1 < 1 + h\lambda + (1-\alpha)h^2\lambda^2 < 1$$

b) Considerando $\alpha = 1$

$|1 + h\lambda| < 1 \rightarrow$ Región de estabilidad del método de Euler.

c) Considerando $\alpha = 0.5$

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right| < 1 \rightarrow$$ Región de estabilidad de método RK-2.

2.- a) • Dado que la ecuación diferencial depende la carga en el tiempo, se utilizará la siguiente notación y cambios de variable.

$$y_1(t) = q(t), \quad y_2(t) = q'(t), \quad y_3(t) = q''(t)$$

$$y_1'(t) = y_2(t), \qquad y_2'(t) = y_3(t)$$

• Así, la ecuación (5) y despejando $q''(t)$ para construir el sist. de ecuaciones

$$L q''(t) + R q'(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \rightarrow q''(t) = -\frac{R}{L} q'(t) - \frac{1}{CL} q(t)$$

$$\rightarrow q''(t) = y_3(t) = y_2'(t) = -\frac{R}{L} y_2(t) - \frac{1}{CL} y_1(t)$$

• Luego, el sistema dinámico:

$$F(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\frac{R}{L} y_2(t) - \frac{1}{CL} y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

b) • Planteando el método de Euler.

$$\begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix}$$

• Así, la estabilidad se asegura si todos los valores propios de la matriz jacobiana cumplen:

$$|1 + h\lambda_i| < 1, \ \forall i, \ \lambda_i : \text{i-ésimo valor propio.}$$

• Calculando los valores propios.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1/CL & -R/L-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda \frac{R}{L} + \lambda^2 + \frac{1}{CL}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{1}{CL}}}{2} \quad (*)$$, con $R=6$, $L=1$ y $C=2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-2}}{2} \rightarrow \lambda_1 = \frac{-6+\sqrt{34}}{2} \approx -0.08$$

$$\rightarrow \lambda_2 = \frac{-6-\sqrt{34}}{2} \approx -5.92$$

• Evaluando en la región de estabilidad:

$$|1+h\lambda_i| < 1 \rightarrow -2 < h\lambda_i < 0$$

λ_1 | $-2 < h\cdot(-0.08) < 0 \rightarrow 0 < h < \frac{2}{0.08} \rightarrow 0 < h < 25$

λ_2 | $-2 < h\cdot(-5.92) < 0 \rightarrow 0 < h < 0.338$

• El máximo valor de h corresponde a $0.338-\varepsilon$, en la práctica definamoslo como $h_{max} = \frac{1}{3}$.

c) • Si se encuentra sobre amortiguado:

$$R^2 \geq \frac{4L}{C} \rightarrow \frac{R^2}{L^2} \leq \frac{4}{LC} \rightarrow \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \leq 0$$

• Considerando la expresión (*), se tiene que los valores propios serán del conjunto de los números reales.

• El valor propio que acota el valor de h corresponde al de mayor magnitud, como se observó en el item anterior.

• Considerando $R, L, C > 0$ entonces el valor propio que determina el valor de $h_{máx}$ corresponde a:

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

• Finalmente, reemplazando en la región de estabilidad:

$$-2 < h\lambda_2 < 0 \rightarrow 0 < h < \frac{-2}{\lambda_2} \rightarrow 0 < h < \frac{-4}{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}$$

$$0 < h < \frac{4}{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}} \rightarrow h_{max} = \frac{4}{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}} - \varepsilon$$

3.- a) • Considerando $f(t,y) = \lambda y(t)$, para realizar el análisis.

• Aplicando el método propuesto: $(h = \Delta t)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda y_{n+1}\right) = y_n \cdot \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) + y_{n+1}\left(\frac{h\lambda}{2}\right)$$

$$y_{n+1}\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right) = y_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) \rightarrow y_{n+1} = y_n\left[\frac{\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)}{\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)}\right]$$

• Luego, la región de estabilidad corresponde a:

$$\left|\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}\right| < 1$$

b) • Acomodando como un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) \\ a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

• Aplicando el método propuesto:

$$\begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\left(A \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} \right)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}\left(AY_i + AY_{i+1}\right) = Y_i + \frac{h}{2}AY_i + \frac{h}{2}AY_{i+1}$$

$$Y_{i+1} - \frac{h}{2}AY_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}AY_i$$

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)Y_{i+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)Y_i$$

$$Y_{i+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)Y_i \quad (**)$$

• Para que el sistema sea estable:

> $\left(I - \frac{h}{2}A\right)$ es no singular (tiene inversa)

> $\left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)$ tiene radio espectral menor a 1.

c) • Se define h como valor que permite cumplir condiciones anteriores.

• Se calculan matrices $A_1 = \left(I - \frac{h}{2}A\right)$ y $A_2 = \left(I + \frac{h}{2}A\right)$

• Notar que resolver $(**)$ es equivalente a:

$$A_1 Y_{i+1} = A_2 Y_i \longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Resolver para Y_{i+1} con método de sistemas lineales.

• Iterar n veces, en cada paso resolviendo sistema anterior.