

1. [100 puntos] Usted se encuentra lanzando una piedra en un río desde un barranco que tiene 15 [m] de altura. Además, ha medido con un cronómetro que la piedra hace contacto con el agua 4.5[s] después de haberla lanzado. Usted sabe, de sus cursos de física, que la altura de la piedra se ve afectada por la gravedad de la Tierra, la cual puede aproximar en el valor $g = 9.8[m/s^2]$ por lo que se tiene la relación $y''(t) = -g$, donde $y(t)$ es la altitud que alcanza la piedra en el tiempo t .

(a) [5 puntos] Escriba el Problema de Valor Frontera asociado al contexto explicado anteriormente.

$$y''(t) = -g$$

$$y(0) = 15$$

$$y(4.5) = 0$$

- (b) [95 puntos] Escriba un **pseudocódigo** que implemente un algoritmo numérico apropiado para estimar el instante de tiempo en que la piedra lanzada alcanza la máxima altitud posible. Deberá detallar ecuaciones, iteraciones, sistemas lineales a resolver y/o todo lo que sea necesario para resolver este problema.

Algoritmo 1 Método del Disparo

Input: un número de puntos n , la aceleración g

```
1:  $h = 4.5/n$ 
2:  $F(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -g \end{bmatrix}$ 
3:  $y_0(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ 
4:  $G(v) = v[n] - 4.5$ 
5:  $Y = \text{array}(n+1, 2)$ 
6:  $W = \text{array}(n+1, 2)$ 
7:  $s = \text{randomNumber}$ 
8:  $p = \text{randomNumber}$ 
9:  $Y[0] = y_0(s)$ 
10:  $W[0] = y_0(p)$ 
11: for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
12:    $Y[i+1] = \text{StableODESolverStep}(Y[i], F(y_1, y_2), h)$ 
13:    $W[i+1] = \text{StableODESolverStep}(W[i], F(y_1, y_2), h)$ 
14: end for
15: while  $G(Y)G(W) \geq 0$  do
16:    $p = \text{randomNumber}$ 
17:    $W[0] = y_0(p)$ 
18:   for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
19:      $W[i+1] = \text{StableODESolverStep}(W[i], F(y_1, y_2), h)$ 
20:   end for
21: end while
22:  $\alpha = \text{biseccion}(G, [s, p])$ 
23:  $Y[0] = y_0(\alpha)$ 
24: for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
25:    $Y[i+1] = \text{StableODESolverStep}(Y[i], F(y_1, y_2), h)$ 
26:   if  $Y[i] < Y[i+1]$  then
27:      $max = h(i+1)$ 
28:   end if
29: end for
Output:  $max$ 
```

1. [100 puntos] Usted se encuentra lanzando una piedra en un río desde un barranco que tiene 15 [m] de altura. Además, ha medido con un cronómetro que la piedra hace contacto con el agua 4.5[s] después de haberla lanzado. Usted sabe, de sus cursos de física, que la altura de la piedra se ve afectada por la gravedad de la Tierra, la cual puede aproximar en el valor $g = 9.8[m/s^2]$ por lo que se tiene la relación $y''(t) = -g$, donde $y(t)$ es la altitud que alcanza la piedra en el tiempo t .

(a) [5 puntos] Escriba el Problema de Valor Frontera asociado al contexto explicado anteriormente.

$$y''(t) = -g$$

$$y(0) = 15$$

$$y(4.5) = 0$$

- (b) [95 puntos] Escriba un **pseudocódigo** que implemente un algoritmo numérico apropiado para estimar el instante de tiempo en que la piedra lanzada alcanza la máxima altitud posible. Deberá detallar ecuaciones, iteraciones, sistemas lineales a resolver y/o todo lo que sea necesario para resolver este problema.

Algoritmo 2 Diferencias Finitas

Input: un número de puntos n , la aceleración g

```
1:  $h = 4.5/n$ 
2:  $A = \text{ZerosArray}(n-1, n-1)$ 
3:  $b = \text{ZerosArray}(n-1, 1)$ 
4:  $\gamma = 1/h^2$ 
5: for  $i = 0, 1, \dots, n-2$  do
6:    $b[i] = -g$ 
7:    $A[i][i] = -2\gamma$ 
8:   if  $i > 0$  then
9:      $A[i-1][i] = \gamma$ 
10:  end if
11:  if  $i < n-2$  then
12:     $A[i+1][i] = \gamma$ 
13:  end if
14: end for
15:  $b[0] = b[0] - 15\gamma$ 
16:  $x = \text{solveLinearSystem}(A, b)$ 
17: for  $i = 0, 1, \dots, n-2$  do
18:   if  $x[i] < x[i+1]$  then
19:      $max = h(i+1)$ 
20:   end if
21: end for
```

Output: max
