

CERTAMEN N°3 ILI-286
SCT - SÁ.16.12.17

NOMBRE: _____ ROL: _____

Instrucciones: *Usted tiene 120 minutos para responder el Certamen.*

Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.

*Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o **sin nombre** reciben 0 puntos.*

Copy-and-Paste de algoritmos reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!

1. **[30 puntos]** Proponga un algoritmo para obtener los momentos M_n de $f(x)$, donde $M_n = \int_0^1 f(x) x^n dx$ y la función $f(x)$ satisface la siguiente identidad:

$$x - f(x) \exp(f(x)) = -1/2.$$

Su algoritmo debe asegurar que el error obtenido al estimar la integral debe ser menor o igual a ε .

Hint: Just make sure you explain how you get every part that is needed to compute the moments.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta:

2. Considere una multitud de $(N+1)^2$ individuos ordenados convenientemente en un cuadrado de tamaño $L \times L$, donde cada persona etiquetada por (i, j) está posicionada en $x_i = i h$, $y_j = j h$ con $h = L/N$ y para $i \in \{0, \dots, N\}$ y $j \in \{0, \dots, N\}$. En este dominio, cada persona tiene una opinión respecto a un tema dada por el número escalar $p_{i,j}$. Considere $p_{i,j}$ tal que $p_{i,j} > 0$ representa una opinión positiva, $p_{i,j} < 0$ es una opinión negativa y $p_{i,j} = 0$ es una opinión neutra. Además, se conoce que cada individuo solo puede comunicarse con sus vecinos horizontales y verticales inmediatos.

Asuma que cada individuo trata de minimizar cualquier conflicto con sus vecinos y está dispuesto a tomar una opinión como el promedio de las opiniones de ellos, esto es:

$$p_{i,j} = \frac{1}{4}(p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1}) \quad (1)$$

Por último, solo en la frontera del dominio hay individuos con una opinión fija.

- (a) **[20 puntos]** Considere que debe votarse una moción sobre un tema contingente que considere las opiniones de todos. El voto será a favor de la moción si $p_{i,j} > 0$ y en contra si $p_{i,j} < 0$ y nulo si $p_{i,j} = 0$. Recuerde que los individuos de la frontera del dominio tienen una opinión fija, por lo que $p_{i,j} = \alpha_{i,j}$, para todo (i, j) en la frontera del dominio. $\alpha_{i,j}$ se define de la siguiente forma:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{para } j = 0 \text{ o } j = N \\ r(j) & \text{para } i = N \\ l(j) & \text{para } i = 0 \end{cases}$$

Construya un algoritmo que dada la opinión de los individuos en la frontera del dominio, determine si la moción será aprobada o rechazada, es decir, si la cantidad de votos a favor es mayor que la cantidad de votos en contra. Especifique claramente cuáles serán los parámetros, variables y ecuaciones de su algoritmo. No es necesario que construya la representación matricial asociada, pero sí debe indicar todos los tipos de ecuaciones asociadas, que está resolviendo y como lo resolverá.

Hint: Please don't get confused by the indexing for $p_{i,j}$ and $\alpha_{i,j}$, notice that i is related to the x -axis and j is related to the y -axis.

- (b) **[10 puntos]** Si el número de personas N es muy grande, se puede tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$, por consecuencia $h \rightarrow 0$ y p se convierte en una función continua de (x, y) :

$$\frac{p(x, y)}{h^2} = \frac{p(x+h, y) + p(x-h, y) + p(x, y+h) + p(x, y-h)}{4h^2} \quad (2)$$

Demuestre que en el límite cuando h tiende 0, el fenómeno está descrito mediante la Ecuación de Laplace.

Hint: Please don't cancel h^2 right away!

NOMBRE: _____ ROL: _____

NOMBRE: _____ ROL: _____

3. [30 puntos] Considere que la propagación de la onda acústica $u(x, y, t)$ está modelada por la ecuación de ondas $u_{tt}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t)$, definida en $\Omega = [0, 1]^2$. Esta onda ha sido inicializada con $u(x, y, 0) = h(x, y)$, pero lamentablemente no se tiene conocimiento de $h(x, y)$, sin embargo sí se conoce que $u(\partial\Omega, t) = 0$. Afortunadamente se ha podido medir el valor de $u_t(\Omega, t = t_k)$ y $u_t(\Omega, t = t_k + \Delta t)$, donde Δt es el intervalo de tiempo entre mediciones. Proponga un algoritmo que determine $u(\Omega, t_k)$.

Hint: You only need to list the equations that need to be solve but don't try to use a matrix representation. Justa make sure you list all the equation that are involved and how. An sketch of the domain and the problem may help.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta:

4. La segunda ley de Fick ayuda a predecir la concentración de cierto material a medida que se dispersa debido al transporte de átomos. Sea $\phi(x, t)$ la concentración de un material A y sea $D(x, t)$ el coeficiente de difusión del material. La segunda ley de Fick modela la difusión como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (3)$$

La difusión empieza cuando se deposita el material A con una concentración inicial $\phi(x, 0) = \sin(2\pi x)$. La difusión comienza a modificar la concentración, excepto en sus extremos donde se mantiene constante.

- (a) **[5 puntos]** Escriba matemáticamente las condiciones de borde del problema según la descripción dada. Por simplicidad considere el dominio de la placa en $x \in [0, 1]$.
- (b) **[5 puntos]** Asumiendo que $D(x, t) > 0, \forall(x, t)$, ¿Qué se espera del cambio de concentración ϕ respecto al tiempo cuando el proceso de difusión ha evolucionado por mucho tiempo?, luego, reescriba la segunda ley de Fick bajo este régimen.
- (c) **[5 puntos]** Considere $D(x, t) = D(t) = \exp(-t)$. Desarrolle la ley de Fick para este coeficiente de difusión, luego elija un método para resolver el problema mediante diferencias finitas, escriba la ecuación de evolución de un punto del material y dibuje el stencil asociado. Luego escriba las ventajas y desventajas de su método elegido.
Hint: Don't build the matrix representation here, just show the equation you get at one point in the grid.
- (d) **[5 puntos]** Considere $D(x, t) = D(x)$. Desarrolle la resolución de la ley de Fick para este coeficiente de difusión, luego elija un método para resolver el problema mediante diferencias finitas, escriba la ecuación de evolución de un punto del material y dibuje el stencil asociado. Luego escriba las ventajas y desventajas de su método elegido.
Hint: Don't build the matrix representation here, just show the equation you get at one point in the grid.
- (e) **[10 puntos]** Considere que el coeficiente de difusión ahora depende tanto de x como de t . Desarrolle la resolución de la ley de Fick mediante un método explícito y construya la representación matricial del problema.

NOMBRE: _____ ROL: _____