Ecuaciones Diferenciales Parciales

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v0.32b

EDP Elíptica

Se llamará EPD elíptica a una EDP que tiene la forma:

$$A\, u_{xx} + B\, u_{xy} + C\, u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

y se cumple $B^2 - 4\, A\, C < 0$. O bien, teniendo una forma más general, que es posible reducirla a un caso equivalente al anterior.

1. Ecuación de Laplace

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

2. Ecuación de Poisson

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

3. Ecuación de Helmholtz

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \lambda\, u(x,y)$$

- En general, no se asocian al tiempo, sino únicamente al espacio.
- No requieren condiciones iniciales, sino únicamente de frontera.
- Principio del máximo:

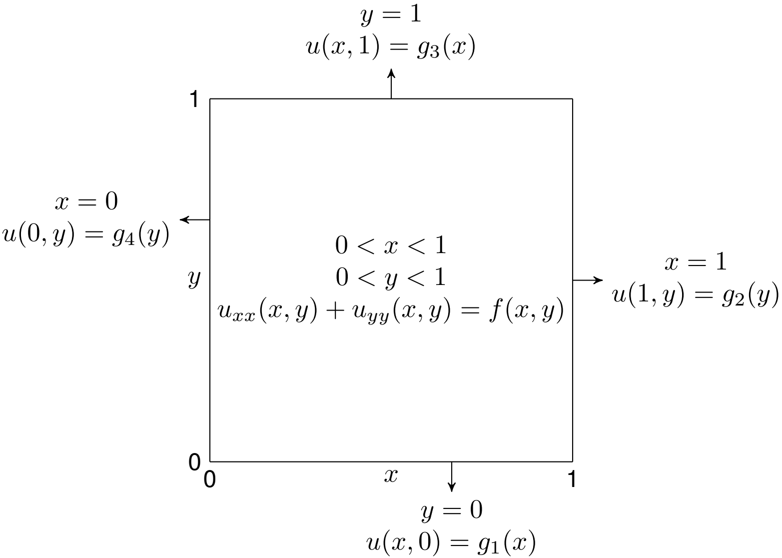
$$\max_{x\in\Omega} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

- Habitualmente se buscan soluciones en dominios acotados.

Problema Genérico: Sea $u(x, y)$ una función incógnita que depende de las variables x e y, definidas en $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.
El problema a resolver asociado a esta incógnita será la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet:

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= f(x, y) \\
u(x, 0) &= g_1(x) \\
u(1, y) &= g_2(y) \\
u(x, 1) &= g_3(x) \\
u(0, y) &= g_4(y)
\end{aligned}
$$

Introducción

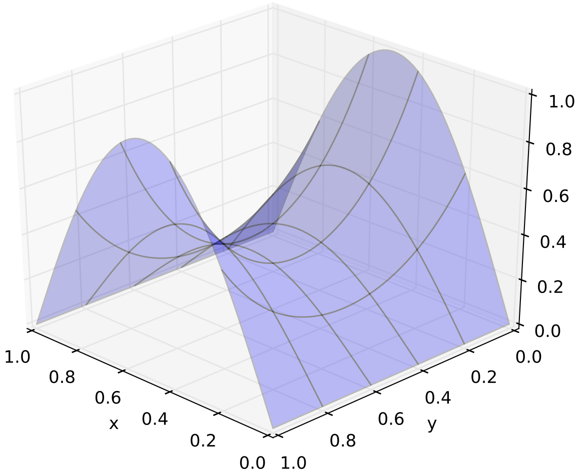


Introducción

Problema concreto:

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) &= x \\
u(x,0) &= \sin(\pi\, x) \\
u(1,y) &= 0 \\
u(x,1) &= \sin(\pi\, x) \\
u(0,y) &= 0
\end{aligned}
$$

Introducción



Diferencias Finitas

Reemplazar una derivada por una diferencia de ciertos valores que sea aproximadamente equivalente.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{Forward Difference} \qquad \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \qquad \text{Backward Difference} \qquad \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h} \qquad \text{Central Difference} \qquad \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} \approx \frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2} \qquad \mathcal{O}(h^2)$$

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

¿Cómo puede aplicarse diferencias finitas cuando se trata de derivadas en varias variables?

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f(x,y) - f(x-h,y)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2\,h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{f(x+h,y) - 2\,f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Notación: puede usarse Δx en lugar de h.

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

¿Cómo puede aplicarse diferencias finitas cuando se trata de derivadas en varias variables?

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} + \mathcal{O}(k) \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{f(x,y)-f(x,y-k)}{k} + \mathcal{O}(k) \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2\,k} + \mathcal{O}(k^2) \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{f(x,y+k)-2\,f(x,y)+f(x,y-k)}{k^2} + \mathcal{O}(k^2)
\end{aligned}
$$

Notación: puede usarse Δy en lugar de k.

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Volviendo al problema genérico para el dominio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) &= f(x,y) \\ u(x,0) &= g_1(x) \\ u(1,y) &= g_2(y) \\ u(x,1) &= g_3(x) \\ u(0,y) &= g_4(y) \end{aligned}$$

¿Cómo se aplica el método de diferencias finitas en la EDP Elíptica?

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Discretizando $[0, 1]$ de manera regular en $N_x + 1$ puntos para la variable x, de manera que $\Delta x = \frac{1-0}{N_x}$, se tiene:

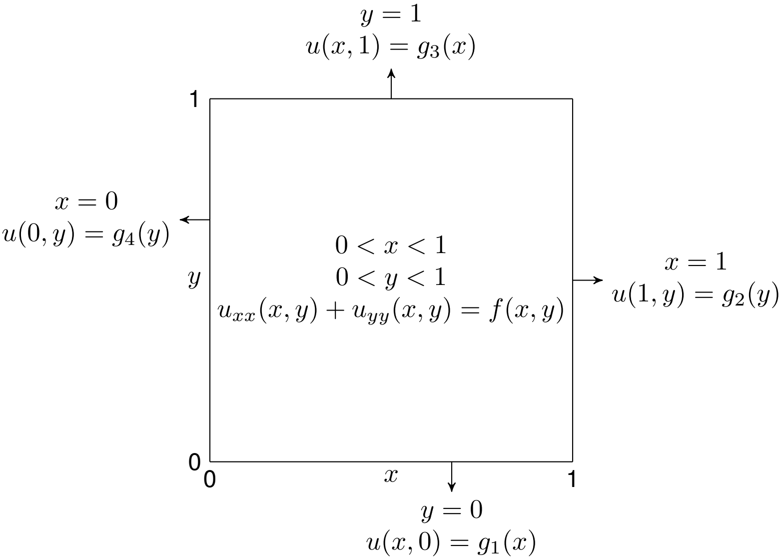
$$x_i = x_0 + i\,\Delta x,\ i \in \{0, 1, 2, \ldots, N_x\}$$

Similarmente, para la variable y, se define $\Delta y = \frac{1-0}{N_y}$ discretizando $[0, 1]$ en $N_y + 1$ puntos y se tiene:

$$y_j = y_0 + j\,\Delta y,\ j \in \{0, 1, 2, \ldots, N_y\}$$

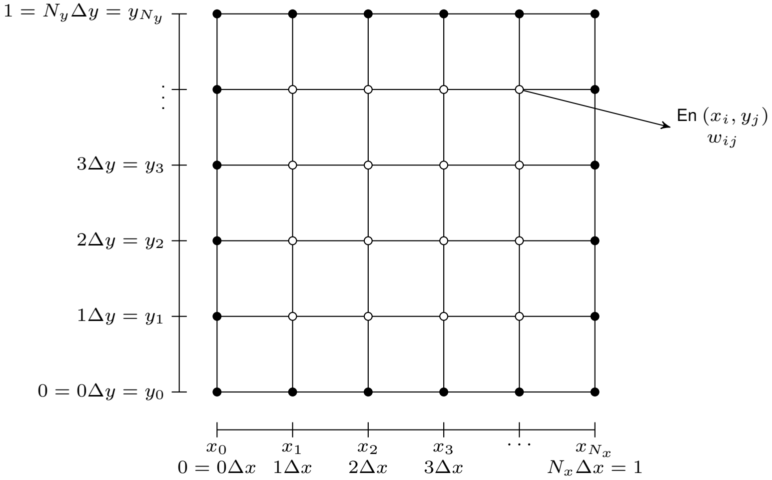
Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Esquema Continuo



Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Esquema Discreto



No se busca resolver la ecuación en todos los puntos, sino únicamente en los puntos de la discretización. Esto es, en los valores $w_{i,j}$:

$$w_{i,j} = u(x_i, y_j) = u(i\Delta x, j\Delta y) \text{ para } \begin{aligned} i &\in \{0, 1, 2, \ldots, N_x\} \\ j &\in \{0, 1, 2, \ldots, N_y\} \end{aligned}$$

Por tanto, existen $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ incógnitas que se deben encontrar.

Pregunta:

- ¿Qué relación existe entre los $w_{i,j}$, las derivadas y la EDP?

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Utilizando diferencias finitas, se puede obtener:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-\Delta x, y) - 2\,u(x,y) + u(x+\Delta x, y)}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y-\Delta y) - 2\,u(x,y) + u(x, y+\Delta x)}{(\Delta y)^2}$$

Usando la notación $u(x_i, y_j) = u(i\Delta x, j\Delta y) = w_{i,j}$:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i-1,j} - 2\,w_{i,j} + w_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j-1} - 2\,w_{i,j} + w_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Para $0 < i < N_x$, $0 < j < N_y$, se satisface la EDP:

$$u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$$

Reemplazando las aproximaciones de diferencias finitas se obtiene:

$$\frac{w_{i-1,j} - 2\,w_{i,j} + w_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,j-1} - 2\,w_{i,j} + w_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = f(x_i, y_j)$$

Considerar $\delta = \frac{1}{\Delta x^2}$, $\gamma = \frac{1}{\Delta y^2}$ y $\xi = -(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2})$, la expresión puede ser reescrita como:

$$\delta\, w_{i-1,j} + \gamma\, w_{i,j-1} + \xi\, w_{i,j} + \delta\, w_{i+1,j} + \gamma\, w_{i,j+1} = f(x_i, y_j)$$

¿Qué ocurre con los casos $i = 0$, $i = N_x$, $j = 0$, $j = N_y$?

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Discretizando las condiciones de frontera:

$$\begin{array}{lcll}
u(x,0)=g_1(x) & \Rightarrow & u(x_i,0)=w_{i,0}=g_1(x_i) & i\in\{0,1,\ldots,N_x\}\\
u(1,y)=g_2(y) & \Rightarrow & u(1,y_j)=w_{N_x,j}=g_2(y_j) & j\in\{0,1,\ldots,N_y\}\\
u(x,1)=g_3(x) & \Rightarrow & u(x_i,1)=w_{i,N_y}=g_3(x_i) & i\in\{0,1,\ldots,N_x\}\\
u(0,y)=g_4(y) & \Rightarrow & u(0,y_j)=w_{0,j}=g_4(y_j) & j\in\{0,1,\ldots,N_y\}
\end{array}$$

¿Cómo se pueden obtener los valores de $w_{i,j}$?

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

Considerar $N_x = N_y = 3$. El siguiente sistema lineal debe resolverse:

$$
\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\gamma&0&0&\delta&\xi&\delta&0&0&\gamma&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\gamma&0&0&\delta&\xi&\delta&0&0&\gamma&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\gamma&0&0&\delta&\xi&\delta&0&0&\gamma&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\gamma&0&0&\delta&\xi&\delta&0&0&\gamma&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{0,0}\\ w_{1,0}\\ w_{2,0}\\ w_{3,0}\\ w_{0,1}\\ w_{1,1}\\ w_{2,1}\\ w_{3,1}\\ w_{0,2}\\ w_{1,2}\\ w_{2,2}\\ w_{3,2}\\ w_{0,3}\\ w_{1,3}\\ w_{2,3}\\ w_{3,3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_1(x_0)\\ g_1(x_1)\\ g_1(x_2)\\ g_1(x_3)\\ g_4(y_1)\\ f(x_1,y_1)\\ f(x_2,y_1)\\ g_2(y_1)\\ g_4(y_2)\\ f(x_1,y_2)\\ f(x_2,y_2)\\ g_2(y_2)\\ g_3(x_0)\\ g_3(x_1)\\ g_3(x_2)\\ g_3(x_3)
\end{bmatrix}
$$

Considerar $N_x = N_y = 3$. El siguiente sistema lineal debe resolverse:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\gamma & 0 & \delta & \xi & \delta & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \gamma & 0 & \delta & \xi & \delta & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \delta & \xi & \delta & 0 & \gamma & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \delta & \xi & \delta & 0 & \gamma \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{0,1} \\ w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \\ w_{0,2} \\ w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{3,2} \\ w_{1,3} \\ w_{2,3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_1(x_1) \\ g_1(x_2) \\ g_4(y_1) \\ f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_1) \\ g_2(y_1) \\ g_4(y_2) \\ f(x_1, y_2) \\ f(x_2, y_2) \\ g_2(y_2) \\ g_3(x_1) \\ g_3(x_2)
\end{bmatrix}$$

A continuación, se implementará un algoritmo para resolver el problema concreto, definido para el dominio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) &= x \\ u(x,0) &= \sin(\pi\, x) \\ u(1,y) &= 0 \\ u(x,1) &= \sin(\pi\, x) \\ u(0,y) &= 0 \end{aligned}$$

```
import numpy as np
from numpy.linalg import solve

# Define Boundary Conditions
f  = lambda x,y : x
g1 = lambda x : np.sin(np.pi*x)
g2 = lambda x : 0
g3 = lambda x : np.sin(np.pi*x)
g4 = lambda x : 0

# Define Domain
x_min, x_max = 0., 1.
y_min, y_max = 0., 1.
```

```python
# Define Discretization Parameters
Nx = 10
Ny = 10

# Discretize x and y
x = np.linspace(x_min, x_max, Nx+1)
y = np.linspace(y_min, y_max, Ny+1)

# Define the discretization parameters
dx = x[1]-x[0]
dy = y[1]-y[0]
```

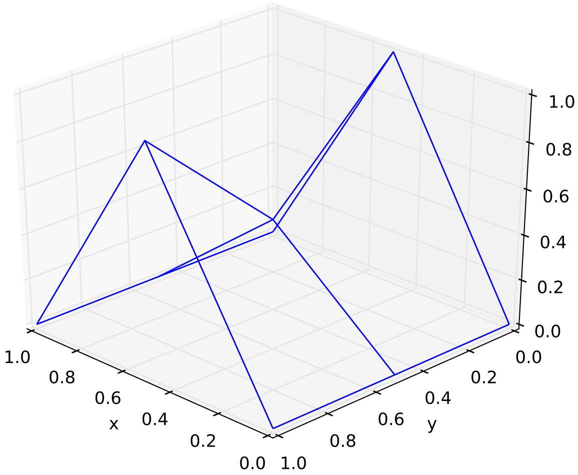
```python
# Create the matrix and the right hand size vector
A = np.zeros([(Nx+1)*(Ny+1), (Nx+1)*(Ny+1)])
b = np.zeros([(Nx+1)*(Ny+1), 1])

# Define global indexing
def index(i, j, nCols=(Ny+1)):
  return j + i*nCols
```

```
for i in xrange(Nx+1):
  for j in xrange(Ny+1):
    k = index(i,j)
    if j==0: # y=ymin
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g1(x[i])
    elif i==Nx: # x=xmax
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g2(y[j])
    elif j==Ny: # y=ymax
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g3(x[i])
    elif i==0:  # x=xmin
      A[k,k] =  1.
      b[k] = g4(y[j])
    else:
      A[k, k] = -2./dx**2 - 2./dy**2
      A[k,index(i+1,j)] =  1./dx**2
      A[k,index(i-1,j)] =  1./dx**2
      A[k,index(i,j-1)] =  1./dy**2
      A[k,index(i,j+1)] =  1./dy**2
      b[k] = f(x[i], y[j])
```

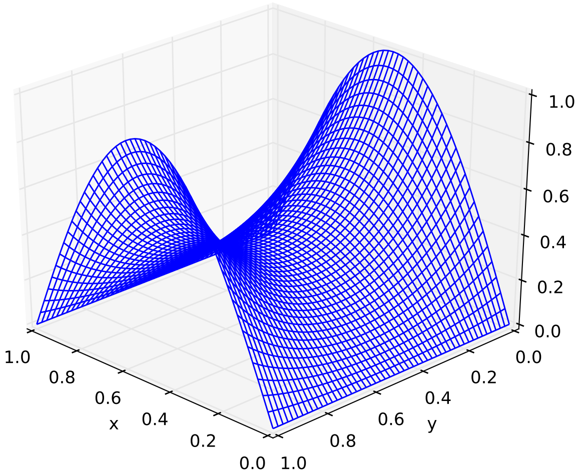
```
# Solve the linear system
w = solve(A, b)
```

Diferencias Finitas para EDPs Elípticas

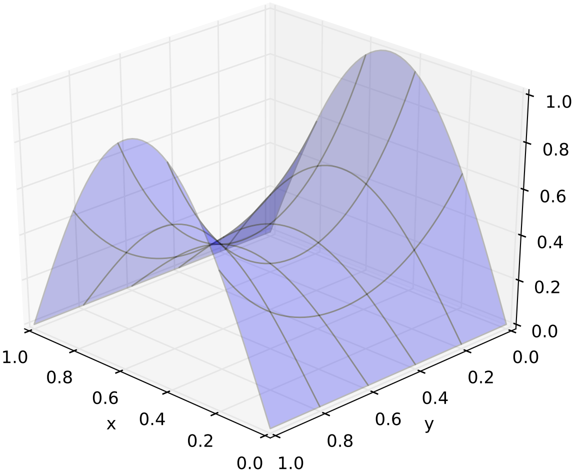
Algoritmo



Diferencias Finitas para EDPs Elípticas
Algoritmo



Diferencias Finitas para EDPs Elípticas
Algoritmo



Preguntas

- ¿Cómo se puede construir una EDP? i.e, ¿cómo se obtiene $f(.,.)$ y $g_k(.)$?
- ¿Cómo se podrían implementar otras condiciones de frontera (Neumann, Robin)?
- ¿Qué cambios son necesarios para resolver otras EDPs elípticas, como la Ecuación de Helmholtz?
- ¿Existe alguna relación entre $f(.,.)$ y las condiciones de frontera $g_k(.)$ de Dirichlet?

Referencias

Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012.
Chapter 8: Partial Diferential Equations.