Ecuaciones Diferenciales Parciales

Introducción

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v0.33b

Introducción

Ecuación Diferencial Parcial

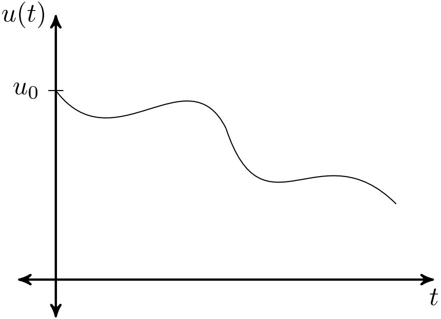
Es una ecuación que involucra variables multidimensionales (al menos 2 dimensiones) y sus derivadas.

- Las EDOs (ODEs) permiten representar sistemas dinámicos unidimensionales, por ejemplo, cantidades que varian en el tiempo.
- Las EDPs (PDEs) permiten representar sistemas dinámicos multidimensionales, por ejemplo, cantidades que varían simultáneamente en espacio y/o tiempo.

Introducción

Initial Value Problem (IVP)

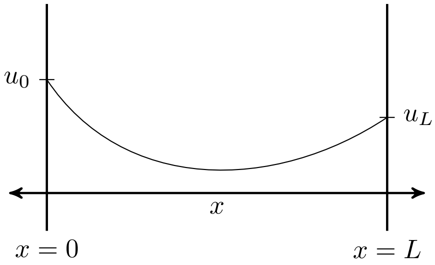
$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = f(t,u)$$
$$u(t=0) = u_0$$



Introducción

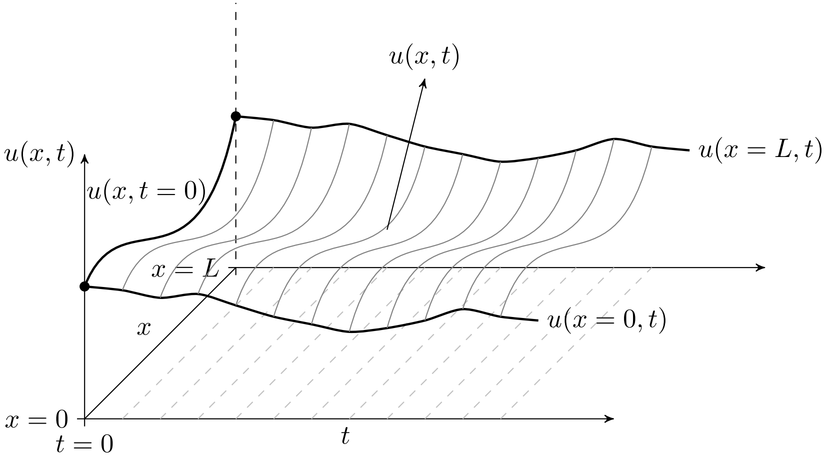
Boundary Value Problem (BVP)

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = f(x, u, u_x)$$
$$u(x = 0) = u_0$$
$$u(x = L) = u_L$$



Introducción

Initial Boundary Value Problem (IBVP)



Introducción

Algunos problemas que requieren el cálculo de EDPs:

- Respuesta sísmica de un edificio a un terremoto.
- Propagación del calor en un material.
- Propagación de un contaminante en un río o lago.
- Propagación de olas generadas por un tsunami.
- Creación y propagación de fracturas.
- Deformación de vasos sanguíneos que originan aneurismas.
- Modelos biológicos: corazón, pulmones, músculos.
- ...

Clasificación de EDPs

Una EDP lineal de segundo orden tiene la forma:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

Las EDPs se clasifican en:

- Elípticas: $B^2 - 4\,A\,C < 0$
- Parabólicas: $B^2 - 4\,A\,C = 0$
- Hiperbólicas: $B^2 - 4\,A\,C > 0$

¿Por qué esta clasificación tan arbitraria?

Clasificación de EDPs

Recordar, las fórmas cuadráticas:

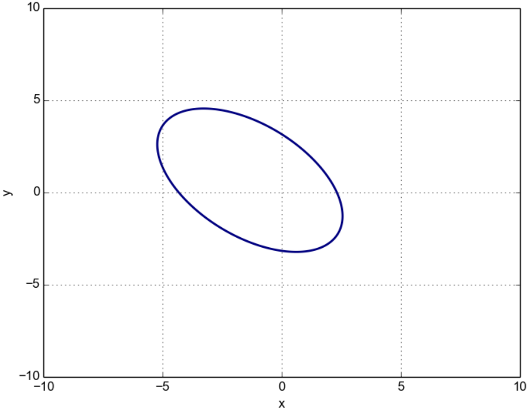
$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + G = 0$$

las cuales se clasifican en:

- Elipse: $B^2 - 4\,A\,C < 0$
- Parábola: $B^2 - 4\,A\,C = 0$
- Hipérbola: $B^2 - 4\,A\,C > 0$

Clasificación de EDPs

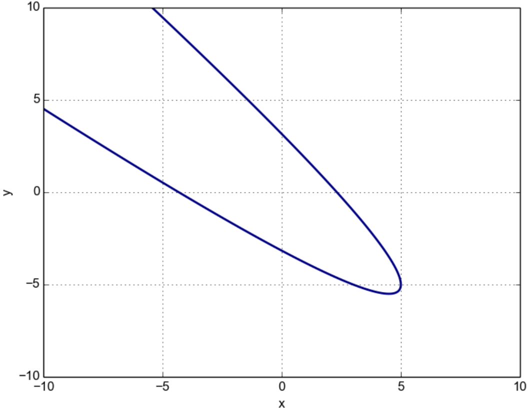
Forma cuadrática Elíptica



$$A = 1, B = 1, C = 1, D = 2, E = 0, G = -10$$

$$B^2 - 4\,A\,C = -3 < 0$$

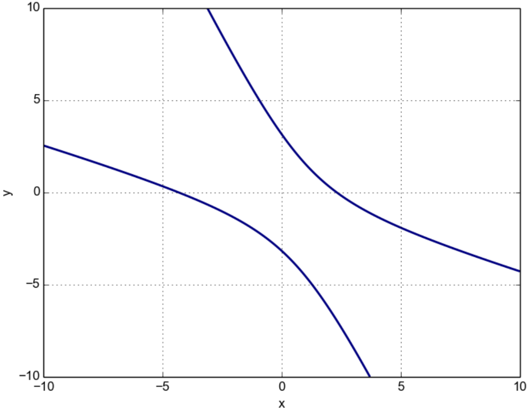
Clasificación de EDPs
Forma cuadrática Parabólica



$$A = 1, B = 2, C = 1, D = 2, E = 0, G = -10$$

$$B^2 - 4\,A\,C = 0$$

Clasificación de EDPs
Forma cuadrática Hiperbólica



$$A = 1, B = 3, C = 1, D = 2, E = 0, G = -10$$

$$B^2 - 4\,A\,C = 5 > 0$$

Clasificación de EDPs

- La clasificación de las formas cuadráticas permite separarlas en familias que comparten características.
- Se facilita así su estudio, análisis y comprensión.
- Con las EDPs pasa lo mismo. Existen 3 grandes familias, de propiedades y características diferentes.

1. Ecuación de Laplace

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

2. Ecuación de Poisson

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

3. Ecuación de Helmholtz

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \lambda\, u(x,y)$$

- En general, no se asocian al tiempo, sino únicamente al espacio.
- No requieren condiciones iniciales, sino únicamente de frontera.
- Principio del máximo:

$$\max_{x\in\Omega} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

- Habitualmente se buscan soluciones en dominios acotados.

Sea $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. ¿Qué función $u(x, y)$ satisface a la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0 \\
u(x, 0) = u(x, 1) &= \sin(\pi\, x) \\
u(0, y) = u(1, y) &= 0
\end{aligned}
$$

1. Ecuación de Difusión

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

2. Ecuación de Advección-Difusión

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + b\, u_x(x,t) = 0$$

- Se asociaan con una evolución en el tiempo, además de cambios en el espacio.
- En general las soluciones son disipativas, es decir, los valores máximos disminuyen en el tiempo.

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [0, 1]$. ¿Qué función $u(x, y)$ satisface a la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \\
u(x,0) &= x^2 \\
u(0,t) &= 0 \\
u(1,t) &= 1
\end{aligned}
$$

1. Ecuación de Onda

$$u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) = 0$$

- Se asocian con una evolución en el tiempo, además de cambios en el espacio.
- Las soluciones no son necesariamente disipativas. Esto es, los valores máximos no necesariamente disminuyen en el tiempo.

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [0, 1]$. ¿Qué función $u(x, y)$ satisface a la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t) \\
u(x,0) &= x^2 \\
u_t(x,0) &= 0 \\
u(0,t) &= 0 \\
u(1,t) &= 1
\end{aligned}
$$

Condiciones Iniciales y de Frontera

Para resolver una EDP, es necesario especificar algunos valores conocidos. Estas son las condiciones iniciales o condiciones de frontera.

Condiciones Iniciales

Se especifica el valor inicial de la variable temporal:

$$u(x, t = 0) = f(x)\ \forall x \in \Omega$$

Condiciones de Frontera

Se especifica el comportamiento de la incógnita del problema en la frontera para todo instante de tiempo:

$$u(x, t) = f(x, t)\ \forall x \in \partial\Omega$$

1. **Dirichlet:** se especifica el valor de la incógnita en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$u(x,t) = f(x,t) \ \forall x \in \partial\Omega$$

2. **Neumann:** se especifica la derivada del valor de la incógnita en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, n} = f(x,t) \ \forall x \in \partial\Omega$$

3. **Robin:** se especifica una combinación de la incógnita y su derivada en la frontera del problema en todo instante de tiempo.

$$a\, u(x,t) + b\, \frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, n} = f(x,t) \ \forall x \in \partial\Omega, \text{ con } a \text{ y } b \text{ escalares}$$

Resumen

- Según su ecuación, las EDPs se pueden clasificar en elípticas, parabólicas o hiperbólicas.
- Las condiciones de frontera pueden ser Dirichlet, Neumann o Robin.
- Una EDP temporal (de evolución) requiere condiciones iniciales.

Resumen

Para obtener soluciones numéricas se estudiará:

- Resolución de EDP Elípticas utilizando el método de diferencias finitas.
- Resolución de EDP Elípticas utilizando el método de elementos finitos
- Resolución de EDP Parabólicas utilizando el método de diferencias finitas.
- Resolución de EDP Hiperbólicas utilizando el método de diferencias finitas.

Resumen

Preguntas

- ¿Cómo está conectado esto con lo que se ha visto anteriormente en el curso?
- ¿Tiene esto alguna relación con sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Tiene esto alguna relación con problemas de valores propios?
- ¿Es esto un IVP o BVP?

Referencias

- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Chapter 8: Partial Differential Equations.