Ayudantía BVP

vlizana

10 de mayo de 2018

1. BVP

EDOs de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} = f(x, y(x), y'(x))$$
$$y(a) = y_a$$
$$y(b) = y_b$$

1.1. Shooting Method

Resolver estilo IVP:

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$
$$y(a) = y_a$$
$$y'(a) = ?$$

El problema consiste en encontrar la pendiente correcta con tal de que la curva pase por y_b. El sistema dinámico queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f \end{pmatrix}$$
$$y_1(a) = y_a$$
$$y_2(a) = ?$$

Se define $F(\alpha) = \hat{y}_1(b, \alpha) - y_1(b)$, en donde $\hat{y}_1(b, \alpha)$ es el valor de y_1 en $t = b$ suponiendo que $y_2(a) = \alpha$ ($= y'(a)$, la pendiente en el punto inicial). Este α se puede encontrar mediante búsqueda de ceros.

1.2. Finite Differences

Consiste en generar reglas que deben cumplir los puntos sobre la curva (un punto se relaciona con sus vecinos a través de la derivada), lo que se traduce al final en un sistema de ecuaciones lineales.

- **Forward Difference:**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$
$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

- **Backward Difference:**

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$
$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

- **Central Difference:**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

- **Central Difference - Segundo Orden:**

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$
$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

2. Ejercicios

2.1. Análisis de Estabilidad

Considere el siguiente IVP: $\ddot{y}(t) + \alpha^2 y(t) = 0$, con $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = \alpha$.

1. Realice un cambio de variables de tal forma que se obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales.
2. Seleccione un ODE-solver numérico (por ejemplo: Euler, Backward-Euler, RK2, RK4, etc) que sea **estable** para el problema anterior. Debe indicar claramente la razón de la elección y el Δt máximo a utilizar.
3. Determine $y(1)$ numéricamente. *Hint: ¡Utilice el máximo Δt posible!*

Respuesta

1. Utilizamos el clásico cambio de variable:

$$y_1(t) = y(t); \quad y_1(0) = 0$$
$$y_2(t) = \dot{y}(t); \quad y_2(0) = \alpha$$

Buscamos un problema de la forma:

$$\vec{y}\,' = \vec{F}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

Que en este caso sería:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\alpha^2 y_1(t) \end{pmatrix}$$

2. Para hacer el análisis de estabilidad lineal necesitamos primero linealizar obteniendo el jacobiano.

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios vienen dados por:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{-\alpha^2} = \pm\alpha \mathrm{i}$$

Ahora buscamos algun método estable para el sistema lineal $\vec{y}\,' = J_F \vec{y}$.

- **Euler:**

$$\begin{aligned}\vec{y}^{\,i+1} &= \vec{y}^{\,i} + \Delta t \cdot \vec{F}(\vec{y}^{\,i}) \\ &= \vec{y}^{\,i} + \Delta t \cdot J_F \cdot \vec{y}^{\,i} \\ &= (I + \Delta t \cdot J_F) \cdot \vec{y}^{\,i}\end{aligned}$$

  Para que el error disminuya debe cumplirse que $\rho(I+\Delta t \cdot J_F) < 1$, o de manera equivalente, $|1+\Delta t \cdot \lambda_i| < 1,\ \forall i$. Entonces en este caso necesitamos que:

$$\begin{aligned}|1 \pm \Delta t\ \alpha \mathrm{i}| &< 1 \\ \sqrt{1+\Delta t^2 \alpha^2} &< 1 \\ 1+\Delta t^2\alpha^2 &< 1 \\ \Delta t^2 \alpha^2 &< 0\end{aligned}$$

  Por lo tanto Euler siempre diverge para este problema.

- **Backward-Euler:**

$$\begin{aligned}\vec{y}^{\,i+1} &= \vec{y}^{\,i} + \Delta t \cdot \vec{F}(\vec{y}^{\,i+1}) \\ \vec{y}^{\,i+1} - \Delta t \cdot J_F \cdot \vec{y}^{\,i+1} &= \vec{y}^{\,i} \\ (I - \Delta t \cdot J_F) \cdot \vec{y}^{\,i+1} &= \vec{y}^{\,i}\end{aligned}$$

  Para que el error disminuya debe cumplirse que $\rho(I-\Delta t \cdot J_F) > 1$, o de manera equivalente, $|1-\Delta t \cdot \lambda_i| > 1,\ \forall i$. Entonces en este caso necesitamos que:

$$\begin{aligned}|1 \pm \Delta t\ \alpha \mathrm{i}| &> 1 \\ \sqrt{1+\Delta t^2 \alpha^2} &> 1 \\ 1+\Delta t^2\alpha^2 &> 1 \\ \Delta t^2 \alpha^2 &> 0\end{aligned}$$

  Por lo que Backward-Euler converge para cualquier Δt (ya que no puede ser 0).

- El mayor Δt posible en este caso es 1 ya que el valor inicial es 0. Usando Backward-Euler:

$$\begin{aligned}\vec{y}^{\,i+1} - \vec{F}(\vec{y}^{\,i+1}) &= \vec{y}^{\,i} \\ \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2^{(1)} \\ -\alpha^2 y_1^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1^{(1)} - y_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} + \alpha^2 y_1^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

  De la primera ecuación, $y_1^{(1)} = y_2^{(1)}$. De la segunda:

$$\begin{aligned}y_1^{(1)} + \alpha^2 y_1^{(1)} &= \alpha \\ y_1^{(1)}(1+\alpha^2) &= \alpha \\ y_1^{(1)} &= \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = y(1)\end{aligned}$$

2.2. BVP - 1

Considere el siguiente BVP:

$$\begin{aligned}u'''(x) + u'(x) &= -\sin(x) \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 2 \\ u(\pi) &= -1\end{aligned}$$

1. Una forma de obtener numéricamente una solución para la ODE es utilizar diferencias finitas, pero es necesario conocer previamente una fórmula para la tercera derivada. Es por esto, que si se integra el problema se obtiene una EDO de segundo orden que usted podra resolver. Integre la ODE y proponga un algoritmo para encontrar numéricamente los valores de $u(x_i)$, con $x_i = i\frac{\pi}{n}$. Use n como parámetro de su algoritmo.

2. Proponga un algoritmo numérico para determinar el dominio en que $u''''(x)$ es positiva. Es decir, debe retornar la lista de x_i donde $u''''(x_i) > 0$, considerando una discretización equiespaciada. *Hint: You should not directly use or calculate an approximation of finite differences of the fourth derivative to answer this question.*

Respuesta

1. Considerar $u_i \approx u(x_i)$, con $i \in \{0, \ldots, n\}$, donde cada u_i es una incógnita del problema. En total se tienen $n+1$ incógnitas para determinar. Integrando la Ecuación Diferencial se obtiene:

$$u''(x) + u(x) = \cos(x) + C$$

con C una constante de integración y con las mismas condiciones de frontera $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$ y $u(\pi) = -1$. Para $0 < i < n$ se satisface esta ecuación diferencial, y usando fórmulas de diferencias finitas se tienen $n-1$ ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + u_i - C &= \cos(x_i) \\ \frac{1}{h^2}u_{i-1} + \left(1 - \frac{2}{h^2}u_i\right) + \frac{1}{h^2}u_{i+1} - C &= \cos(x_i) \\ \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \alpha u_{i+1} - C &= \cos(x_i) \end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior aparece C como una nueva incógnita. Dos ecuaciones adicionales se obtienen al discretizar las condiciones de frontera $u(0) = 1$ y $u(\pi) = -1$:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_n &= -1 \end{aligned}$$

Contabilizando, hasta el momento se tienen $n+2$ incógnitas entre los valores u_i y la incógnita C y $n+1$ ecuaciones. La ecuación restante se obtiene discretizando la condición de frontera faltante. Es así, como se tiene :

$$u'(0) = 2 \rightarrow \frac{u_1 - u_0}{h} = 2$$

Finalmente, resolviendo un sistema de $n+2$ ecuaciones y $n+2$ incógnitas, se encontrarán los valores de u_i para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ \cos(x_1) \\ \vdots \\ \cos(x_{n-1}) \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Derivando la ecuación diferencial se obtiene la ecuación:

$$u''''(x) + u''(x) = -\cos(x)u''''(x) = -u''(x) - \cos(x)$$

Sea $v_i \approx u''''(x_i)$, luego para cada x_i , con $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se cumple la ecuación anterior. Usando diferencias finitas sobre la segunda derivada para estimar $u''(x)$ y los valores encontrados en la pregunta anterior, se determinan numéricamente los valores de v_i:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(x_1) + \alpha u_0 \\ \cos(x_2) \\ \vdots \\ \cos(x_{n-2}) \\ \cos(x_{n-1}) + \alpha u_n \end{bmatrix}$$

2.3. BVP - 2

El importante científico investigador *Plankibarra*, luego de un día de trabajar arduamente resolviendo problemas científicos degusta uno de sus postres favoritos: la jalea. Luego de un enorme momento de procrastinación y ocio, se da cuenta de que la superficie de la jalea al ser golpeada con un toque de la cuchara se rige bajo la siguiente ecuación diferencial ordinaria, valida entre 0 y X_{max}:

$$\begin{aligned} \varepsilon\, y''(x) + (1+\varepsilon)\, y'(x) + y(x) = 0, \qquad & 0 < \varepsilon < 1 \\ y(0) = 0 & \\ y(X_{max}) = 1 & \end{aligned}$$

Ayude al científico *Plankibarra* a saber el movimiento que sigue su jalea a medida que varia ε (*magical coefficient*). Para esto, proponga un método para resolver el BVP. Además, el investigador esta interesado en saber que sucede con su ecuación si $\varepsilon << 1$, por lo que debe responder que sucede con la ODE si se da esta condición.

Respuesta

El problema puede ser resuelto usando *shooting method* o *finite differences*. En este caso, se usará el método del disparo para resolver el problema:

Algorithm 1 Solve_Jelly_BVP

```
1: function JBVP(F, y1, e)
2:     y1 ← fun_search_zero(y2, ε, F)
3:     y2 ← finding_root(initial_guess, fun_search_zero, ε)
4:     y^{i+1} ← y^i + h · F(y^i)
5: end function
```

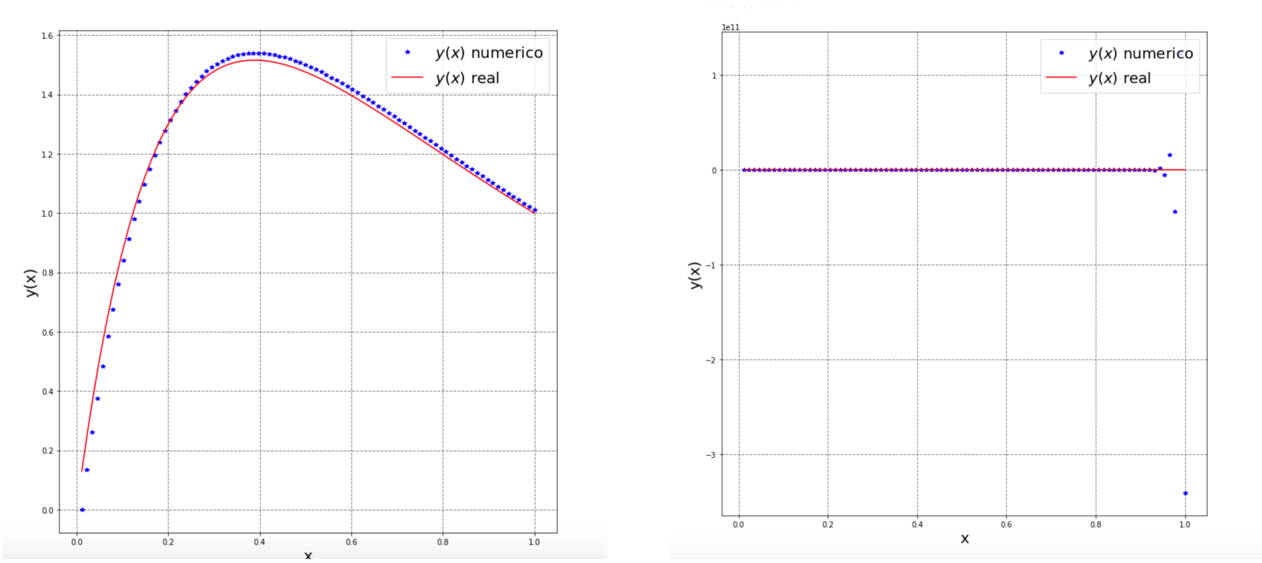
Donde JBVP es básicamente usar el método de Euler con búsqueda de ceros. Explicándolo de forma más detallada, tenemos:

$$y''(x) = -\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\, y'(x) - \frac{y(x)}{\varepsilon}$$

Hacemos el cambio $y_1 = y$, $y_2 = y'$ y derivamos:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y'(x) = y_2 \\ y_2'(x) &= y''(x) = -\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\, y_2(x) - \frac{y_1(x)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Ordenando nos queda:



(a) y_2 : 11.869661..., $\varepsilon = 0.189$

(b) y_2 : -2.06795153..., $\varepsilon = 0.03$

Figura 1: Diferentes ε para la misma curva.

$$
\begin{aligned}
&y_1'(x) = y_2(x)\\
&y_2'(x) = -\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\, y_2(x) - \frac{y_1(x)}{\varepsilon}\\
&y_1(0) = 0\\
&y_2(0) = \alpha
\end{aligned}
$$

Por lo tanto debemos buscar el parámetro α que haga que nuestra ecuación nos de como resultado $y_1(X_{max}) = 1$. El problema se resuelve a través de una búsqueda de ceros.

Si $\varepsilon << 1$ Nos damos cuenta que la segunda derivada desaparece, quedándonos una ODE de primer orden con dos condiciones iniciales. Dado que es de primer orden, no puede coincidir con las 2 condiciones de borde a la vez, por lo que si $\varepsilon \approx 0$ la ecuación diverge: