Pre-Certamen N°1 ILI-286
SCT - Mi.11.10.17

Nombre:______________________________ Rol:______________________________

Instrucciones: *Usted tiene 120 minutos para responder el Certamen.*
Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.
Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o ***sin nombre*** *reciben 0 puntos.* Copy-and-Paste *de algoritmos reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!*

1. ¡El *Scientific Computing Team* desea inmiscuirse en el mundo atómico!. La misión es medir información de sistemas cuánticos. Formalmente dada una función de onda adecuada y discretizada $\boldsymbol{\psi}_i$, podemos medir información del sistema si aplicamos su operador a la onda y recuperamos la onda escalada por un coeficiente. Es decir, al aplicar A a $\boldsymbol{\psi}_i$ queremos recuperar $\boldsymbol{\psi}_i$ escalada por un coeficiente, por ejemplo $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1 \dots n$. Por supuesto $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (a) Muestre cuáles son las condiciones necesarias para poder encontrar niveles de energía E_i cuando se aplica el operador Hamiltoniano discretizado $\hat{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a la función de onda discreta $\boldsymbol{\psi}_i$. Donde los niveles de energía E_i son los escalamientos de $\boldsymbol{\psi}_i$ obtenidos al aplicar el operador $\hat{H}$ a $\boldsymbol{\psi}_i$.

   (b) Proponga un algoritmo para encontrar el nivel de energía de mayor magnitud asumiendo que el operador $\hat{H}$ es simétrico.

Nombre:____ Rol:__________________________________

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no-singular y $B_k = A_{1:k,1:k}$, una sub-matriz de A. Considere que usted tiene acceso a un hardware especializado que permite obtener rápidamente el producto de la matriz A por un vector $\mathbf{x}$, llamando a la función afun($\mathbf{x}$). Construya un algoritmo que reciba como parámatro el número entero k mayor que 0 y menor o igual que n, y que que use afun($\mathbf{x}$) para obtener el valor propio dominante de B_k.

NOMBRE:____ ROL:____________________________

3. Recordando la tarea 2 donde se utilizó la función de Bessel del primer tipo:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x\sin(\theta) - n\,\theta\right).$$

Construya un algoritmo que obtenga la siguiente expresión:

$$F(x,n) = \int_0^x t^n\, J_n(t)\, dt.$$

Considere $n \in \mathbb{N}$ y mayor que 0, y $x > 0$.

NOMBRE:______________________________ ROL:______________________

4. En una cierta fábrica, un componente de una supermaquinaria muy moderna tiene una probabilidad de fallar, el cuál tiene asociado una *función densidad de probabilidad* $\rho(t)$, conocida en todo instante de tiempo. Cuando falle, deberá cambiarse por un nuevo componente, que se rige por la misma densidad de probabilidad de fallo que el componente anterior. Cuando el nuevo componente falle, será reemplazado por otro componente y así sucesivamente.

   A continuación, se requiere determinar la probabilidad de necesitar un reemplazo de un componente en un cierto instante de tiempo $t \geq 0$. Para lo cual, se debe determinar la función de densidad $h(t)$ dada por la ecuación (1):

$$h(t) = \rho(t) + \int_0^t h(s)\,\rho(t-s)\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

   Esta probabilidad es la suma de la probabilidad de que la falla ocurra en el tiempo t más la probabilidad de que se tenga que reponer el componente en un instante de tiempo s seguido de una falla del componente después de $t-s$ unidades de tiempo.

   Construya un algoritmo que determine numéricamente $h(t_j)$, con $t_j = j\dfrac{T_{max}}{n}$ para $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Debe utilizar n y T_{max} como un parámetros de su algoritmo.