Ejercicios Certamen 2

vlizana

May 10, 2018

1 Pregunta

Considere el siguiente IVP:

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= by'(x) + a\sin(y(x)) \\
y(0) &= 0 \\
y'(0) &= 0 \\
a, b &> 0
\end{aligned}
$$

Mediante el análisis de estabilidad lineal muestre que resolver este IVP mediante *Forward Euler* es inestable para cualquier valor de a y b.

Respuesta

Reescribamos el IVP como un sistema de IVP de la forma $\mathbf{y}(u, v)$ tal que $\mathbf{y}' = F(\mathbf{y})$:

$$
\begin{aligned}
u' &= v \\
v' &= bv + a\sin(u) \\
u(0) &= v(0) = 0
\end{aligned}
$$

El Jacobiano de F evaluado en la condición inicial es $J_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a\cos(u) & b \end{pmatrix}\Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. Los valores propios de J_F se obtienen resolviendo $\lambda^2 - b\lambda - a = 0$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - 4a}) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 4a})
\end{aligned}
$$

Se puede observar que λ_2 es siempre positivo, por lo que nunca podremos modificar h para que esté en la región de estabilidad de *Forward Euler* . Por otra parte λ_1 a lo menos es 0 (si $a = 0$), o bien es $\frac{b}{2}$.

2 Pregunta

Luego de un exitoso escape para ser libres, los ex-habitantes de *planilandia* se dirigen rumbo a *tridilandia*, un lugar maravilloso y lleno de nuevas experiencias y lugares sin explorar. Sin embargo, τ se ha dado cuenta del escape de sus habitantes y pretende esclavizarlos nuevamente con sus murallas de dos dimensiones. Nuestro valiente compañero ρ junto al espía $\overline{\pi}$ han previsto este acontecimiento, proyectando una ruta mediante la siguiente BVP para poder traspasar la muralla a través de un pequeño agujero:

$$\ddot{x}(t) = 2\cos(t) - \dot{x}(t)$$
$$x(0) = x(\pi) = 0$$

1. Puesto que solo conocen el final del trayecto y no la velocidad con la pueden ir los aldeanos, ρ ha propuesto que pueden resolver el problema usando *shooting method*. Proponga un algoritmo mediante Método del Disparo para resolver el BVP. Muestre claramente los pasos necesarios.

2. Puesto que hay algunos aldeanos que no recuerdan o desconocen como funciona este método (como los hermano rombos pinchudos, hábiles en fuerza pero débiles pensando), el espía $\overline{\pi}$ cree que es mejor explicarles esto con un lenguaje que todos entienden: ecuaciones y matrices. Para esto, usaremos *finite differents* para resolver el problema de los aldeanos. Mediante diferencias finitas discretice el problema y arme el sistema de ecuaciones.

3. Una vez entendido el plan, los aldeanos quieren una pequeña simulación de como deben realizar el trayecto. Para esto, resuelva el sistema para $n = 3$, es decir, 3 puntos de estimación entre $y(0)$ e $y(\pi)$.

Respuesta

1. El algoritmo debe incluir el cambio de variable típico $u = y$, $v = \dot{y}$. Luego el BVP se transforma en un sistema de ODE de la forma:

   $$\dot{u} = v$$
   $$\dot{v} = 2\cos(t) - v$$

   El método del disparo exige definir una función $F(s)$, donde s es la pendiente que necesita la solución para caer al final del intervalo en $y(\pi)$. Luego podemos definir $F(s) = solve([u', v'] = f(u, v, t), [0, s])$, es decir, resolver el sistema de ODE con una condición inicial para u y para v. Esto define una búsqueda de ceros y deben mencionar qué algoritmo usar y qué condiciones se necesitan (ej. en bisección, se necesita que entre dos s iniciales exista un cambio de signo, es decir $F(s_1)F(s_2) < 0$

2. Usando diferencias finitas:

$$\begin{aligned}
\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} + \frac{w_{i+1} - w_i}{h} &= 2\cos(t) \\
w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} + h(w_{i+1} - w_i) &= 2h^2 \cos(t) \\
w_{i-1} + (-2-h)w_i + (1+h)w_{i+1} &= 2h^2 \cos(t)
\end{aligned}$$

3. La primera ecuación del sistema, con $i = 1$ es:

$$(-2-h)w_1 + (1+h)w_2 = 2h^2 \cos(h) - w_0$$

La tercera ecuación, con $i = 3$, de manera análoga es:

$$w_2 + (-2-h)w_3 = 2h^2 \cos(3h) - (1+h)w_4$$

La segunda ecuación corresponde a la forma genérica de la ecuación. Notar que el lado derecho evaluado es siempre de la forma $2\cos(ih)$, lo cual es consistente con que $h = \frac{\pi}{4}$. Matricialmente el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} -2-h & 1+h & 0 \\ 1 & -2-h & 1+h \\ 0 & 1 & -2-h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h^2 \cos(h) \\ 2h^2 \cos(2h) \\ 2h^2 \cos(3h) \end{pmatrix}$$

3 Pregunta

Considere el siguiente BVP:

$$\begin{aligned}
z''(x) &= z(x) + \cos(x) \\
z'(0) &= 1 \\
z(2\pi) &= \frac{z'(2\pi)}{2} \\
x &\in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Se desea estudiar diferentes métodos numéricos para poder obtener una aproximación numérica de $z(x)$ para $x \in [0, 2\pi]$. Al utilizar el método de diferencias finitas sabemos que podemos obtener una aproximación de segundo orden para $z''(0)$, sin embargo solo conocemos una aproximación de primer orden para $z'(0)$ y $z'(2\pi)$, lo cual al final del día hace que el método sea de primer orden.

Para poder obtener un método de segundo orden con diferencias finitas, es necesario construir una aproximación *forward* de segundo orden para $z'(0)$. Es posible mediante series de Taylor encontrar una aproximación de segundo orden con tres puntos x, $x+h$ y $x+2h$. Demuestre mediante series de Taylor que la siguiente aproximación es de orden $O(h^2)$:

$$f'(x_i) = \frac{-3w_i + 4w_{i+1} - w_{i+2}}{2h},$$

donde w_i es la estimación para $f(x_i)$, $h = x_{i+1} - x_i$ y $x_i = i\frac{2\pi}{N}$. Lo mismo es posible para $z'(2\pi)$ pero se omitirá por ahora.

Respuesta

Las series de Taylor en los puntos $x_0 + h$ y $x_0 + 2h$ son:

$$\begin{aligned} f(x_i + h) &= f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + O(h^3) \\ f(x_i + 2h) &= f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2} f''(x_i) + O(h^3) \end{aligned}$$

Despejando $f''(x_i)$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} -h^2 f''(x_i) &= 2f(x_i) + 2hf'(x_i) - 2f(x_{i+1}) + O(h^3) \\ -h^2 f''(x_i) &= \frac{f(x_i) + 2hf'(x_i) - f(x_{i+2})}{2} + O(h^3) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 4f(x_i) + 4hf'(x_i) - 4f(x_{i+1}) &= f(x_i) + 2hf'(x_i) - f(x_{i+2}) + O(h^3) \\ 2hf'(x_i) &= -3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}) + O(h^3) \\ f'(x_i) &= \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h} + O(h^2). \end{aligned}$$

Queda demostrado que $\dfrac{-3w_i + 4w_{i+1} - w_{i+2}}{2h}$ es una estimación para $f'(x_i)$ y que es de segundo orden.