Certamen N^{o}1 Computación Científica II
SCT - Lu.05.09.16

Nombre:________________________________ Rol:________________________

Instrucciones: *Usted tiene 90 minutos para responder el Certamen.*
Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.
*Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o **sin nombre** reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!*

1. Un grafo se define como la tupla $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y E es el conjunto de arcos $\{(v_i, v_j), \ldots\}$. La matriz de Adyacencia del grafo G, llamada A_G, es una matriz de $n \times n$ con coeficientes a_{ij} que se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Considere el grado de un vértice v_i como $\delta_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. La matriz Laplaciana del grafo G, denominada L_G, es una matriz de $n \times n$ cuyos coeficientes l_{ij} se definen como:

$$l_{ij} = \begin{cases} \delta_i & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ahora considere que el grafo es simple, por lo que $(v_i, v_i) \notin E$ para todo i. Además, el grafo es no dirigido, por lo que si $(v_i, v_j) \in E$, entonces $(v_j, v_i) \in E$ para todo $i \neq j$. Desde el punto de vista de la matriz de adyacencia, se cumple que $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji}$.

(a) [**5 puntos**] Si $\delta_i = \alpha$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $\alpha \in \mathbb{N}$, y además, se sabe que la matriz A_G tiene valores propios λ_1, λ_2, …, λ_n. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz Laplaciana L_G en función de los valores propios de A_G? Hint: *think about the relation between A_G and L_G.*

(b) [**5 puntos**] El teorema del círculo de Gershgorin se puede utilizar para encontrar una cota para los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con coeficientes a_{ij}. Se definen discos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ con centro a_{ii} y radio $r_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Entonces los valores propios se encuentran en la unión de los n discos y se satisface la desigualdad $|a_{ii} - \lambda_i| \leq r_i$. Utilice este teorema para mostrar que todos los valores propios de la matriz A_G se encuentran acotados superiormente por $\delta_{\text{máx}} = \displaystyle\max_i \delta_i$, es decir, $\lambda_i \leq \delta_{\text{máx}}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(c) [**5 puntos**] El mayor valor propio de A_G, denotado por λ_1, puede ser encontrado mediante la expresión:

$$\lambda_1 = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T A_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

Utilizando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, con $\mathbf{1} = \langle 1, 1, \ldots, 1\rangle^T$ un vector de dimensión n, determine una cota inferior para el valor propio λ_1.

(d) [**10 puntos**] Una matriz A simétrica es semidefinida positiva si $x^T A x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que L_G es semidefinida positiva si y solo si $\mu_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, donde μ_i son los valores propios de L_G.

NOMBRE:____ ROL:__________________________________

2. Se define un coloreo de vértices de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ como una función $c : V \to \mathbb{N}$ tal que $c(v_i) \neq c(v_j)$ siempre que $(v_i, v_j) \in E$. El número cromático de un grafo G, denotado por $\chi(G)$, es el mínimo entero k tal que el grafo tiene un coloreo de k colores.

   Considerar la Matriz de Adyacencia A_G, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que satisfacen la relación $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Entonces, el número cromático del grafo $\chi(G)$ se encuentra acotado inferiormente por la relación:

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$$

   Esta desigualdad corresponde a la **cota de Hoffman para el coloreo de vértices**.

   (a) [**20 puntos**] Usted conoce varios métodos para encontrar valores y vectores propios de una matriz. Desafortunadamente, la relación que estaríamos esperando para algunos de estos métodos, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$, no se cumple necesariamente. Esto no significa que aquellos métodos no puedan ser usados. Construya un algoritmo que estime numéricamente la cota de Hoffman para el coloreo de vértices y explique como obtendrá los valores propios λ_1 y λ_n en su algoritmo. Solo podrá hacer uso de *Power Iteration*, *Inverse Power Iteration* y/o *Rayleigh Quotient Iteration* según estime necesario. Hint: *A convenient shift could be helpful..*

   (b) [**5 puntos**] Un caso especial en coloreo de grafos ocurrre cuando $\chi(G) = 2$. En este caso el grafo G recibe el nombre de *Grafo Bipartito* y se cumple que $\lambda_1 = -\lambda_n$. ¿Sigue funcionando el algoritmo propuesto en la pregunta anterior? **Justifique** su respuesta y proponga cambios si ya no funciona.

NOMBRE:____ ROL:____________________________

3. El primer teorema de valor medio para integrales definidas indica lo siguiente: *Sea* $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces existe* c *en* $[a, b]$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$.

   (a) [**15 puntos**] Construya un algoritmo que reciba una función f, el intervalo $[a, b]$, m (número de puntos de integración) y determine c basado en la integración del punto medio.

   (b) [**10 puntos**] Encuentre c para $f(x) = 1 + x - 20\, x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$.

NOMBRE:____ ROL:__________________________________

4. La siguiente ecuación diferencial ordinaria $y''(x) = x\,y(x)$ es conocida como la ecuación de Airy. Esta ecuación tiene 2 soluciones linealmente independientes, llamadas $\mathrm{Ai}(x)$ y $\mathrm{Bi}(x)$. Ver Figura 1 donde se grafican $\mathrm{Ai}''(x)$ y $\mathrm{Bi}''(x)$.

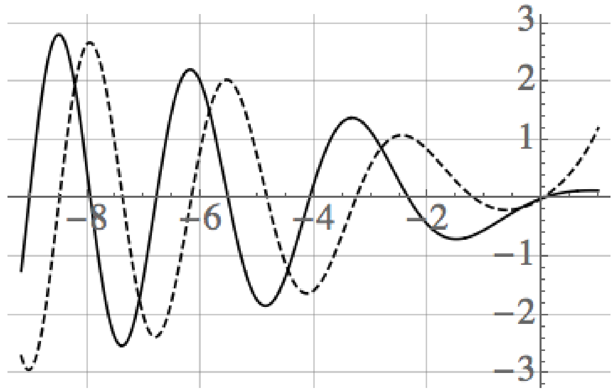

Figura 1: Funciones de Airy $\mathrm{Ai}''(x)$ (línea sólida) y $\mathrm{Bi}''(x)$ (línea punteada) en $x = [-9.165362310991792, 1]$

Además conocemos una representación integral de $\mathrm{Ai}(x)$ en variable compleja:

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}\left(z\,t + \frac{t^3}{3}\right)\right)\,dt$$

donde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, y su versión simplificada para variable real:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\left(\left(x\,t + \frac{t^3}{3}\right)\right)\,dt$$

(a) [25 puntos] Estime numéricamente la siguiente integral doble:

$$\int_{-9.165362310991792}^{1} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\left(\left(x\,t + \frac{t^3}{3}\right)\right)\,dt\,dx$$

de la mejor forma posible utilizando por lo menos 5 puntos de integración para la variable x y por lo menos 20 puntos de integración en la variable t (si fuera necesario).
Hint: *Read the question carefully, then read the question carefully, and finally think before computing anything. It may save you a lot of work read the plot.*