Ayudantía 4.

1.- a) $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$

$$|(\alpha y_1+t^2)-(\alpha y_2+t^2)| \leq L|y_1-y_2|$$

$$|\alpha y_1-\alpha y_2| \leq L|y_1-y_2| \to |\alpha||y_1-y_2| \leq L|y_1-y_2|$$

$$L=|\alpha| \checkmark$$

Notar que esta constante es válida para cualquier región. Luego, existe una única sol. en la región R.

b) $L=\left|\dfrac{\partial f(t,c)}{\partial y}\right|$, C el valor que maximiza la derivada.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 2\alpha y$$

$$L(c) = 2\alpha c$$

Aquí, podríamos tomar $C=5$, luego $L=10\alpha$. Sin embargo, esta constante L es local, con $C=6$ se tiene una cte. diferente y así sucesivamente.

Luego, solo se puede asegurar que existe una solución que inicia en $t=0$ y termina en algún $t=K$, $0<K<1$. Pero no se puede asegurar que exista en todo el intervalo $[0,1]$.

2- a) $h = 0.25 \quad x \in [0,1]$ $\quad y(0) = y_0 = 2$

0	.25	.5	.75	1
i=0	1	2	3	4

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad , \quad f(x,y) = 10(1-y)$$

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot 10 \cdot (1 - y_{i-1})$$

i=1 $\quad y_1 = y_0 + h \cdot 10(1 - y_0) = 2 + 10 \cdot 0.25 \cdot (1-2) = -0.5$

i=2 $\quad y_2 = y_1 + h \cdot 10(1 - y_1) = -0.5 + 10 \cdot 0.25(1+0.5) = 3.25$

i=3 $\quad y_3 = y_2 + h \cdot 10(1 - y_2) = 3.25 + 10 \cdot 0.25(1 - 3.25) = -2.375$

i=4 $\quad y_4 = y_3 + h \cdot 10(1 - y_3) = -2.375 + 10 \cdot 0.25(1 + 2.375) = 6.0625$

b) $y_i = y_{i+1} - h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$y_i = y_{i+1} - h \cdot 10(1 - y_{i+1}) = y_{i+1} - 10h + 10h\, y_{i+1}$$

$$\hookrightarrow y_{i+1} = \frac{y_i + 10h}{1 + 10h}$$

i=0 $\quad y_1 = \dfrac{y_0 + 10h}{1 + 10h} = \dfrac{2 + 10 \cdot 0.25}{1 + 10 \cdot 0.25} \approx 1.31$

i=1 $\quad y_2 = \dfrac{y_1 + 10h}{1 + 10h} = \dfrac{1.31 + 2.5}{3.25} \approx 1.17$

i=2 $\quad y_3 = \dfrac{y_2 + 10h}{1 + 10h} = \dfrac{1.17 + 2.5}{3.25} \approx 1.13$

i=3 $\quad y_4 = \dfrac{y_3 + 10h}{1 + 10h} = \dfrac{1.13 + 2.5}{3.25} \approx 1.12$

c) La solución corresponde a $y(x) = e^{-10x} + 1$, Comparando:

X	y(x)	F.Euler	B.Euler
0	2	2	2
.25	1.08	-0.5	1.31
.5	1.01	3.25	1.17
.75	1.00	-2.38	1.13
1	1.00	6.06	1.12

Se observa un comportamiento errático en F.E., esto se debe a que la función es stiff (Pendiente muy pronunciada).
B.E posee comportamiento mas ajustado.

3.- $y_i = y_{i+1} - f(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot h$

$y_i = y_{i+1} - h \cdot (4y_{i+1} - y_{i+1}^2 + 4y_{i+1}^3) = y_{i+1} - 4h\,y_{i+1} + h\,y_{i+1}^2 - 4h\,y_{i+1}^3$

$y_i = (1-4h)\,y_{i+1} + h\,y_{i+1}^2 - 4h\,y_{i+1}^3$

No se puede despejar y_{i+1}, no es lineal.

Es posible utilizar método de newton para encontrar soluciones de la expresión:

$Z = y_{i+1} \rightarrow$ Valor que se quiere encontrar.

$f(z) = (1-4h)Z + hZ^2 - 4hZ^3 - y_i$ $\quad f'(z) = 1 - 4h + 2hZ - 12hZ^2$

Newton's method:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \rightarrow Z_{n+1} = Z_n - \frac{(1-4h)Z_n + hZ_n^2 - 4hZ_n^3 - y_i}{1 - 4h + 2hZ_n - 12hZ_n^2}$$

Entonces, para calcular y_1 por ejemplo, utilizaremos y_0 como initial guess e iteraremos el N.M. hasta cierta tolerancia. Repetir para cada y_i.