Certamen N°2 ILI-286
SCT - Sá.18.11.17

Nombre:______________________________ Rol:____________________

Instrucciones: *Usted tiene 120 minutos para responder el Certamen.*
Usted tiene que mostrar todo su trabajo para obtener todos los puntos.
Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o ***sin nombre*** *reciben 0 puntos.* Copy-and-Paste *de algoritmos reciben 0 puntos. ¡Buena Suerte!*

1. Considere un resorte flexible que se suspende verticalmente desde un soporte rígido que se conecta en su extremo libre a un bloque de masa m, tal como se muestra en la Figura 1.

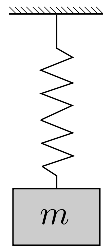


Figura 1: Bloque de masa m conectado a un resorte.

La *Ley de Hooke* afirma que existe una fuerza F restauradora que se opone al movimiento del resorte con magnitud $F = k\,x$, con k una constante de elasticidad (siempre positiva) y x un desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio del resorte. Ahora, considere que el resorte no es un resorte ideal, sino que se va perdiendo su flexibilidad en el tiempo. Suponga que inicialmente el resorte tiene una constante de elasticidad $k(0) = k_0$. Esta constante variará de acuerdo a la ecuación (1), por lo que la fuerza restauradora también cambiará en el tiempo.

Cuando no hay interacción de ninguna fuerza el sistema masa-resorte, la *segunda ley de Newton* establece la ecuación (2), que describe el desplazamiento del bloque en el sistema con respecto a la posición de equilibrio y que está sometido a una resistencia con el aire que es proporcional a la velocidad con una constante β asociada. Además, se dice que el sistema está sobreamortiguado cuando $\beta^2 > 4\,m\,k$.

$$\frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,k(t) \tag{1}$$

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k(t)\,x(t) - \beta\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Para responder a las siguientes preguntas, considere que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

(a) [**4 puntos**] ¿Qué esperaría que ocurra con la constante de elasticidad $k(t)$ a medida que $t \to \infty$? Dibuje un gráfico $k(t)$ vs t que explique la situación.

(b) [**8 puntos**] Construya un algoritmo basado en *Backward Euler* que determine numéricamente el valor que tendrá la constante de elasticidad en un tiempo $T_1 > 0$. Debe especificar claramente los parámetros de su algoritmo.

(c) [**9 puntos**] Suponga que el resorte se encuentra en $t = 0$ en la posición x_0 con respecto a la posición de equilibrio, desplazándose con una velocidad v_0 y que el sistema masa-resorte está sobreamortiguado. Obtenga los valores propios del sistema dinámico asociado a la ecuación (2) en $t = 0$. ¿Qué esperaría que ocurriera con los valores propios para un tiempo $t > 0$?.

(d) [**9 puntos**] Considerando la respuesta de la pregunta **(c)**, ¿es posible usar algún método visto en clases para determinar numéricamente $x(t)$ sobre un tiempo $t \in [0, T_2]$? Si su respuesta es afirmativa, escoja un método, construya el algoritmo asociado y justifique si existen restricciones para utilizar este método. En caso que no se pueda utilizar algún método bajo ninguna circunstancia, explique la razón.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: $\boxed{}$

Nombre:______________________________ Rol:____________________

2. Considere el siguiente BVP:

$$\begin{aligned} z''(x) &= z(x) + \cos(x) && (3)\\ z'(0) &= 1 && (4)\\ z(2\pi) &= \frac{z'(2\pi)}{2} && (5)\\ x &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Se desea estudiar diferentes métodos numéricos para poder obtener una aproximación numérica de $z(x)$ para $x \in [0, 2\,\pi]$.

Al utilizar el método de diferencias finitas sabemos que podemos obtener una aproximación de segundo orden para $z''(x)$, sin embargo solo conocemos una aproximación de primer orden para $z'(0)$ y $z'(2\,\pi)$. Lo cual al final del día hace que el método sea de primer orden.

Por otro lado, tenemos nuestra buena amiga $S(x)$, i.e. una Spline cúbica. Como sabemos, $S(x)$ está definida por segmentos y además se requiere que sea contínua, diferenciable y contínua en su segunda derivada en todo el dominio. De otra forma no sería una Spline y solo sería una función definida por segmentos. Lo interesante de la Spline es que podemos obtener la expresión algebraica de su primera y segunda derivada sin requerir construir alguna aproximación especial.

(a) [**15 puntos**] Para poder obtener un método de segundo orden con diferencias finitas, es necesario construir una aproximación *forward* de segundo orden para $z'(0)$. Es posible mediante series de Taylor encontrar una aproximación de segundo orden con tres puntos $x, x+h$ y $x+2h$. Demuestre mediante series de Taylor que la siguiente aproximación es orden $\mathcal{O}(h^2)$:

$$f'(x_i) \approx \frac{-3\,w_i + 4\,w_{i+1} - w_{i+2}}{2h}, \tag{6}$$

donde w_i es la estimación para $f(x_i)$, $h = x_{i+1} - x_i$ y $x_i = i\,\dfrac{2\,\pi}{N}$. Lo mismo es posible para $z'(2\,\pi)$ pero se omitirá por ahora.

(b) [**15 puntos**] Explique como podemos utilizar una Spline $S(x)$ solo con 2 trozos para resolver el BVP indicado anteriormente. Asegúrese de definir explícitamente el problema a resolver completamente. Si fuera necesario, indique que ecuación debe minimizar, que restricción deben cumplirse y las incógnitas a determinar. No intente resolver el problema, solo escriba explícitamente lo que tiene que resolver.
Hint: Never forget $S_i(x) = a_i + b_i\,(x - y_i) + c_i\,(x - y_i)^2 + d_i\,(x - y_i)^3$ *on* $[y_i, y_{i+1}]$.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: $\boxed{}$

Nombre:____ Rol:________________________________

3. Considere el siguiente BVP:

$$u^{(3)}(x) + u'(x) = -\sin(x) \tag{7}$$

$$u(0) = 1 \tag{8}$$

$$u'(0) = 2 \tag{9}$$

$$u(\pi) = -1 \tag{10}$$

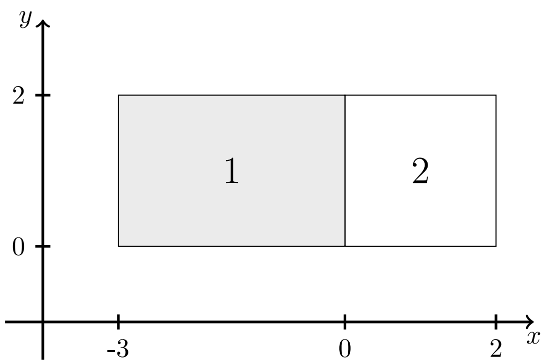
(a) [**10 puntos**] Una forma de obtener numéricamente una solución para la EDO sería utilizar diferencias finitas, pero es necesario conocer previamente una fórmula para la tercera derivada. Es por esto, que si se integra el problema se obtiene una EDO de segundo orden que podría resolverse con fórmulas vistas en clases. Integre la Ecuación (7) y proponga un algoritmo para encontrar numéricamente los valores de $u(x_i)$, con $x_i = i\frac{\pi}{n}$. Debe utilizar n como parámetro de su algoritmo.

(b) [**15 puntos**] Proponga un algoritmo numérico para determinar el dominio en que $u^{(4)}(x)$ es positiva. Es decir, debe retornar la lista de x_i donde $u^{(4)}(x_i) > 0$, considerando una discretización equiespaciada.
Importante: No debe usar o calcular directamente una aproximación de diferencias finitas de la cuarta derivada para responder a esta pregunta.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: $\boxed{}$

NOMBRE:____ ROL:____________________________

4. Considere el estado estacionario de la ecuación de calor, para el corte transversal de dos materiales que están en contacto el uno con el otro por uno de sus lados. El material 2 posee una fuente de calor externa, mientras que el material 1 no presenta fuentes externas. La temperatura en el lado compartido es igual para ambos materiales.



$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) &= 0 && && (11)\\
v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) &= x\,y && && (12)\\
u(-3,y) &= 100 && 0<y<2 && (13)\\
u(0,y) &= v(0,y) && 0<y<2 && (14)\\
v(2,y) &= 50 && 0<y<2 && (15)\\
u(x,0) &= g(x) && -3<x<0 && (16)\\
u(x,2) &= g(x) && -3<x<0 && (17)\\
v(x,0) &= g(x) && 0<x<2 && (18)\\
v(x,2) &= g(x) && 0<x<2 && (19)
\end{aligned}
$$

donde $g(x) = -10\,(-7+x)$.

(a) **[25 puntos]** Construya un algoritmo que determine el perfil de la temperatura en estado estacionario en la unión de los dos materiales. El algoritmo debe recibir N_{x1}, N_{x2} y N_y como la cantidad de puntos en: eje x-material 1, eje x-material 2 y eje y, respectivamente.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: