Ayudantía 5

1.- a) $u'(t) = (1-\mu)u(t)$, $u(0) = u_0$, $\mu \in \mathbb{R}$

$K_1 = h f(t_n, u_n)$ $\quad K_2 = h f(t_n + h, u_n + K_1)$

$u_{n+1} = u_n + \alpha K_1 + (1-\alpha) K_2$ $\quad \mu > 1$

$f(t_n, u_n) = (1-\mu) u_n$

Definiremos $\lambda = 1-\mu$ por conveniencia con $\lambda < 0$.

$f(t_n, u_n) = \lambda u_n$.

Luego, construyendo el método definido.

$K_1 = h \cdot \lambda u_n \quad K_2 = h\lambda(u_n + h\lambda u_n)$

$$= h\lambda u_n + (h\lambda)^2 u_n$$

$$= u_n [h\lambda + (h\lambda)^2]$$

$$u_{n+1} = u_n + \alpha h \lambda u_n + (1-\alpha) u_n [h\lambda + (h\lambda)^2]$$

$$= u_n + \cancel{\alpha h \lambda u_n} + [h\lambda + (h\lambda)^2] u_n - \alpha [\cancel{h\lambda} + (h\lambda)^2] u_n$$

$$u_{n+1} = u_n [1 + h\lambda + (1-\alpha)(h\lambda)^2]$$

Entonces, la estabilidad del método depende del término en corchetes. Este debe ser < 1 en módulo.

$$|1 + h\lambda + (1-\alpha)(h\lambda)^2| < 1$$

$$-1 < 1 + h\lambda + (1-\alpha)(h\lambda)^2 < 1$$

b) Considerando $\alpha = 1$.

$|1 + h\lambda| < 1 \rightarrow$ Región de est. de Euler

c) Considerando $\alpha = 0.5$

$\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right| < 1 \rightarrow$ Región de est. de RK-2

2.- a) $L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2} + R\dfrac{dq(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}q(t) = 0 \rightarrow q''(t) = -\dfrac{R}{L}q'(t) - \dfrac{1}{CL}q(t)$

$y_1(t) = q(t) \quad y_2(t) = q'(t) \quad y_3(t) = q''(t)$

$y_1'(t) = y_2(t) \qquad y_2'(t) = y_3(t)$

$$F(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\frac{R}{L}y_2(t) - \frac{1}{CL}y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/CL & -R/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i-1}) \\ y_2(t_{i-1}) \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} y_2(t_{i-1}) \\ -\frac{R}{L}y_2(t_{i-1}) - \frac{1}{CL}y_1(t_{i-1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1(t_{i-1}) \\ y_2(t_{i-1}) \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/CL & -R/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t_{i-1}) \\ y_2(t_{i-1}) \end{bmatrix}$$

Para que el método sea estable, los valores propios de la matriz jacobiana deben cumplir que:

$$|1 + h\underbrace{\lambda_i}_{\text{valores propios.}}| < 1 \quad , \forall i$$

$$\det\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1/CL & -R/L-\lambda \end{bmatrix} = \frac{R}{L}\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{CL}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}}{2} \quad , \quad \text{Con } R = 6,\ L = 1,\ C = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 - 2}}{2} = \frac{-6 + \sqrt{34}}{2} \approx -0.08$$

$$\lambda_2 = \frac{-6 - \sqrt{34}}{2} \approx -5.92$$

Siendo la región de estabilidad:

$$|1 + h\lambda_i| < 1 \rightarrow -2 < h\lambda_i < 0$$

Evaluando λ_1 y λ_2:

$$0 < h < \frac{-2}{-0.08} \qquad 0 < h < \frac{-2}{-5.92}$$

$$0 < h < 25 \qquad 0 < h < 0.338$$

Así, h debe ser menor a $\frac{1}{3}$ para que el método sea estable.

c) Si se encuentra sobreamortiguado:

$$R^2 \geq \frac{4L}{C} \rightarrow \frac{R^2}{L^2} \geq \frac{4}{LC} \rightarrow \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \geq 0$$

Luego, los ~~valores~~ valores propios de la matriz jacobiana son reales. Analizando la forma de los valores propios es claro que el valor propio que acota al sistema es λ_2.

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Finalmente, reemplazando en la región de estabilidad:

$$0 < h < \frac{-2}{\lambda_2} \rightarrow 0 < h < \frac{-4}{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}} \rightarrow 0 < h < \frac{4}{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}$$

3.- a) La estabilidad lineal se obtiene al considerar:

$$f(t,y) = \lambda y(t).$$

Así:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\overset{h}{\Delta t}}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1}) = y_n\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) + \frac{\lambda h}{2} y_{n+1}$$

$$\rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)}$$

Luego, la región de estabilidad:

$$\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| < 1$$

b) Transformando a un sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) \\ a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Así, la regla del trapecio:

$$\begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\left[A \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} \right]$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}(AY_i + AY_{i+1}) = Y_i + \frac{h}{2}AY_i + \frac{h}{2}AY_{i+1}$$

$$Y_{i+1} - \frac{h}{2}AY_{i+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)Y_i$$

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)Y_{i+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)Y_i$$

$$Y_{i+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)Y_i$$

Este último paso requiere que:

$(I - \frac{h}{2}A)$ sea no singular (Invertible).

$$\det\left(I - \frac{h}{2}A\right) \neq 0$$

De no cumplirse, podría realizarse una estimación con mínimos cuadrados.

c) def IVP_trapezoid $(a, b, n, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$:

```
    Y = vector(2, n+1)
    Y[0][0] = Y[1][0] = 1
    A = matrix(2,2)
    A[0][0] = a11   A[0][1] = a12
    A[1][0] = a21   A[1][1] = a22
    h = (b-a)/n
    M1 = identity(2) + h/2 * A
    M2 = identity(2) - h/2 * A
    if M2 non singular:
        for i in range(n):
            Solve(M2, M1*Y[:][i]) -> Y[:][i+1]
        end for.
        return Y.
    elif M2 is singular:
        for i in range(n):
            LeastSquares(M2, M1*Y[:][i]) -> Y[:][i+1]
        end for
        return Y.
```

Scanned by CamScanner