Ayudantía 12

1.- $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$, $x \in [0, l_0]$, $t \in [0,T]$
$u(x,0) = f(x)$
$u_x(0,t) = 0$
$u(l_0,t) = 0$

a) Enfoque Crank-Nicholson:

$$u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}}{h^2}\right)$$

Con: $x_i = ih$, $t_j = jk$, $w_{ij} = u(ih, jk)$, $h = \frac{l_0}{n}$, $k = \frac{T}{m}$
Además:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k}$$ Backward difference.

Reemplazando en la EDP.

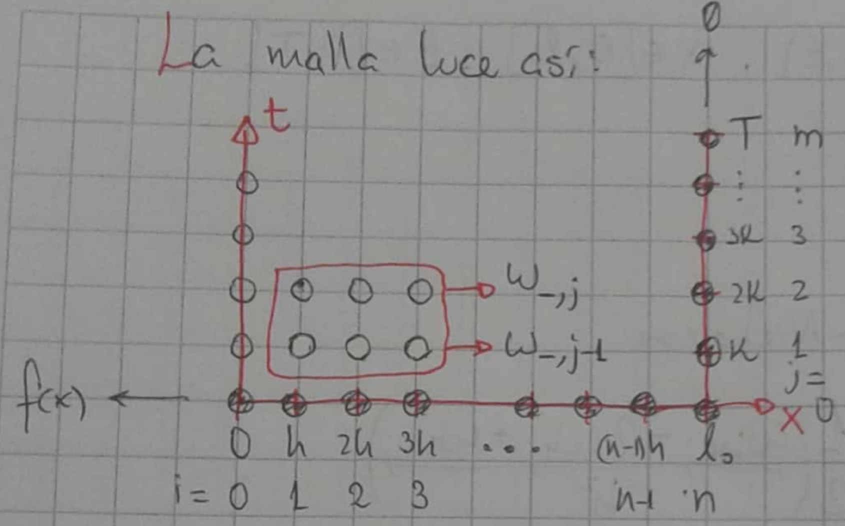
$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} = \frac{\alpha^2}{2h^2}\left[w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}\right] \Big/ \sigma = \frac{\alpha^2 k}{2h^2}$$

Luego, agrupamos tiempos iguales (j a un lado, j-1 al otro)

(5) $$-\sigma w_{i+1,j} + (2\sigma + 1)\cdot w_{ij} - \sigma w_{i-1,j} = \sigma w_{i+1,j-1} + (1 - 2\sigma) w_{i,j-1} + \sigma w_{i-1,j-1}$$

Así tenemos un esquema para encontrar valores $w_{i,j}$ a partir de tiempos anteriores.

La malla luce así:



Luego, en el borde izquierdo se tiene información de la derivada.

$$u_x(0,t) = 0 \simeq \frac{w_{1,j} - w_{0,j}}{h} \quad \text{Forward difference.}$$

$$\rightarrow w_{0,j} \approx w_{1,j} \quad (6)$$

Así, reemplazando en la expresión (5) con $i=1$.

$$-\sigma w_{2,j} + (2\sigma+1) w_{1,j} - \sigma w_{0,j} = \sigma w_{2,j-1} + (1-2\sigma) w_{1,j-1} + \sigma w_{0,j-1}$$

Reemplazando (6).

$$-\sigma w_{2j} + 2\sigma w_{1j} = \sigma w_{2j-1} + (1-\sigma) w_{1,j-1}$$

Luego, matricialmente el sistema:

PÁG. SIGUIENTE →

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & (2\sigma+1) & -\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sigma & (2\sigma+1) & -\sigma & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sigma & (2\sigma+1) \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ \vdots \\ w_{n-1,j} \end{bmatrix}}^{\vec{w}_j} = \overbrace{\begin{bmatrix} (1-\sigma) & \sigma & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma & (1-2\sigma) & \sigma & 0 \cdots & 0\,0\,0 \\ 0 & \sigma & (1-2\sigma) & \sigma\, 0 & \cdots 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \sigma & (1-2\sigma) \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ w_{3,j-1} \\ \vdots \\ w_{n-1,j-1} \end{bmatrix}}^{\vec{w}_{j-1}} + \sigma \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

> Esquema es implícito.

> Con $j=1$, se tendrá que vector $\vec{w}_{j-1}$ posee los valores de $f(x_i)$

> Aquí deberían ir valores de borde. Pero en este caso, son nulos.

> El algoritmo es de la forma:

```
for j in range(1, m):
    w_j = solve(A, B w_{j-1})
```

b) Para encontrar cuando la varilla no excede los β grados Celsius basta con añadir código luego del solve, de la forma:

```
    time = j
    T_max = max(w_j)
    if T_max <= β:
        break
    ...
return time
```

2.- a) $u_{tt}(x,t) = c\, u_{xx}(x,t)\ ,\ x \in [0,1]\ ,\ t \in [0,T]\ (5)$

$u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x)\ (6)$

$u_t(x,0) = 0\ (7)$

$u(1,t) - u(0,t) = 0\ (8)$

Utilizando la discretización:

$$h = \frac{1}{n}\ ,\ k = \frac{T}{m}\ ,\ x_i = i \cdot h\ ,\ t_j = j \cdot k$$

$$w_{ij} = u(x_i, t_j).$$

Con diferencias finitas:

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{k^2} = c\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2}\right) \Big/ \ \sigma^2 = \frac{ck^2}{h^2}$$

Multiplicando por k^2 a ambos lados de la ecuación.
Despejando $w_{i,j+1}$:

$$w_{i,j+1} = \sigma^2 w_{i+1,j} + (2 - 2\sigma^2) w_{ij} + \sigma^2 w_{i-1,j} - w_{i,j-1}\ (9)$$

Como ya sabemos, la formulación anterior tiene un problema en $j=0$. Al no conocer $w_{i,-1}$ se realiza una estimación utilizando la derivada temporal en $t=0$.

$$u_t(x_i, 0) = 0 \simeq \frac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2k}$$ Central difference.

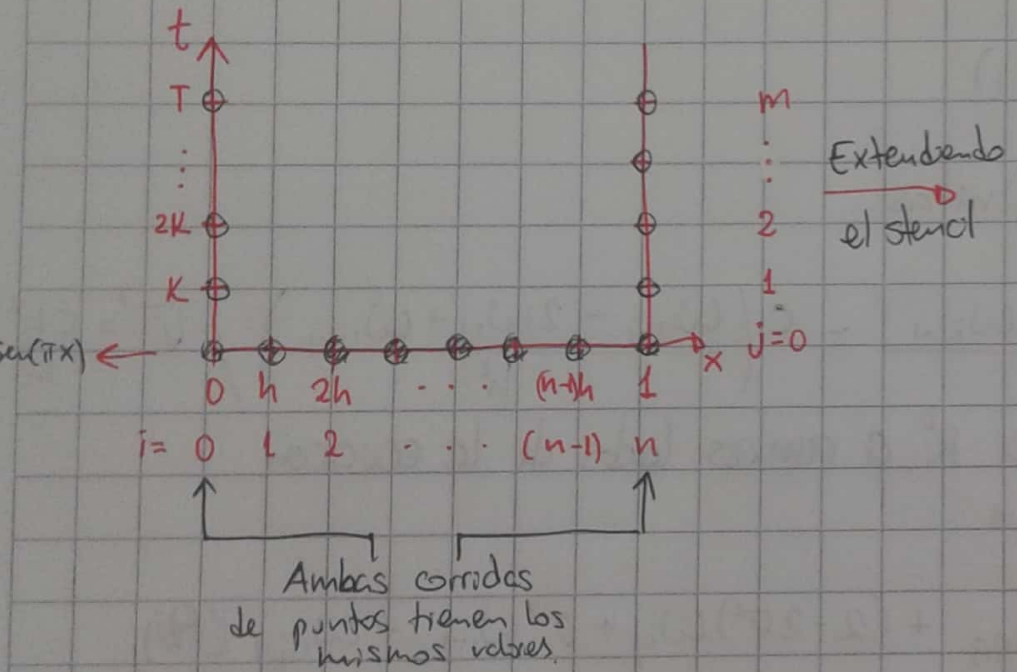
$$\rightarrow w_{i,-1} \approx w_{i,1}$$

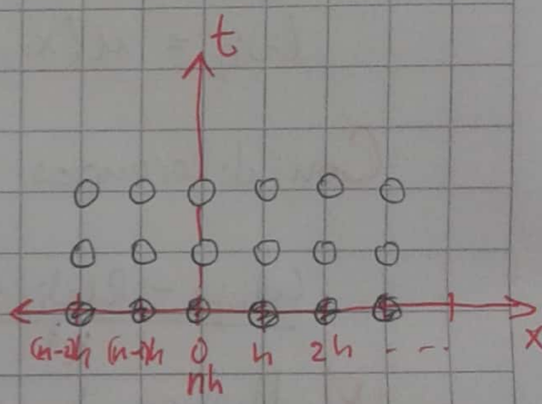
Así, reemplazando en la expresión (9) con $j=0$

$$\omega_{i,1} = \sigma^2 \omega_{i+1,0} + (2-2\sigma^2)\omega_{i,0} + \sigma^2 \omega_{i-1,0} - \omega_{i,-1} \to -\omega_{i,1}$$

$$\omega_{i,1} = \frac{\sigma^2}{2}\omega_{i+1,0} + \frac{(2-2\sigma^2)}{2}\omega_{i,0} + \frac{\sigma^2}{2}\omega_{i-1,0}$$

Además, con $i=1$ o $i=n-1$ se necesita información en los bordes. En la ecuación (8) se tienen condiciones periódicas.





Luego, para considerar las condiciones periódicas se considera un stencil "cilíndrico" donde borde izquierdo y derecho se unen. De esta manera pasamos de tener (n-1) incógnitas por tiempo, a n incógnitas.

~~Resumiendo~~ Recopilando, primero consideramos el sistema con $j=0$ $(t=0)$.

$\boxed{j = 0}$

A la izquierda de $w_{0,0}$ está $w_{n-1,0}$

$$
\begin{bmatrix} w_{0,1} \\ w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ \vdots \\ w_{n-1,1} \end{bmatrix}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
(1-\sigma^2) & \sigma^2/2 & 0 & \cdots & 0 & \sigma^2/2 \\
\sigma^2/2 & (1-\sigma^2) & \sigma^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2/2 & (1-\sigma^2) & \sigma^2/2 & \cdots & 0 \\
 & & & & & \\
\sigma^2/2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\ \sigma^2/2 & (1-\sigma^2)
\end{bmatrix}}_{A_0}
\underbrace{\begin{bmatrix} w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{n-1,0} \end{bmatrix}}_{\vec{w}_0}
$$

A la derecha de $w_{n-1,0}$ está $w_{0,0}$

$\boxed{j \geq 1}$

$$
\begin{bmatrix} w_{0,j+1} \\ w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{n-1,j+1} \end{bmatrix}
=
\overbrace{\begin{bmatrix}
(2-2\sigma^2) & \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \\
\sigma^2 & (2-2\sigma^2) & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma^2 & (2-2\sigma^2) & \sigma^2 & \cdots & 0 \\
 & & & & & \\
\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 & \sigma^2 & (2-2\sigma^2)
\end{bmatrix}}^{A}
\overbrace{\begin{bmatrix} w_{0,j} \\ w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n-1,j} \end{bmatrix}}^{\vec{w}_j}
-
\overbrace{\begin{bmatrix} w_{0,j-1} \\ w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{n-1,j-1} \end{bmatrix}}^{\vec{w}_{j-1}}
$$

Algoritmo:

$h = 1/n$, $k = T/m$, $\sigma^2 = ck^2/h^2$, $\vec{x} = \text{range}(0, 1, h)$

$\vec{w}_0 = \text{sen}(\pi \vec{x})$

$A_0 = \text{fill\_A}_0(\sigma^2)$

$A = \text{fill\_A}(\sigma^2)$

$\vec{w}_j = A_0 \cdot \vec{w}_0$, $w_{j-1} = \vec{w}_0$

for j in range$(1, m)$:

  $\vec{w}_{j+1} = A \cdot \vec{w}_j - w_{j-1}$

  $\vec{w}_{j-1} = \vec{w}_j$

  $\vec{w}_j = \vec{w}_{j+1}$

return $\vec{w}_j$