Ayudantía 3
Computación Científica II

Profesor: Ariel Sanhueza
Ayudante: Javier Levio Silva

01 de octubre de 2018

1. Considere la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

   (a) Calcule el valor de la integral de forma analítica.

   (b) Elija un método de integración numérica, y calcule el valor de la integral utilizando 3 evaluaciones de la función. (Considere 3 cifras significativas)

   (c) Muestre el error obtenido.

2. Al realizar un experimento con un resorte se registran los siguientes datos:

$x[m]$	F $[N]$
0,05	0,70
0,10	0,82
0,15	1,21
0,20	1,40
0,25	1,63
0,30	1,86
0,35	2,00

Cuadro 1: Fuerza necesaria para estirar el resorte una distancia x.

   (a) Aproxime la constante de elasticidad del resorte, k. Si se sabe que:

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F(x)\,dx = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}$$

   Utilice al menos 3 puntos de integración para la variable x con el método que considere más conveniente. Justifique su respuesta. (*Hint: Recall Hook's Law*)

   (b) Defina un algoritmo que reciba una expresión para la fuerza junto a la posición inicial y final del resorte, y calcule la constante de elasticidad del mismo.

3. [1] El cálculo de área es una de las primeras aplicaciones que uno aprende cuando estudia integración. Luego las aplicaciones empiezan a diversificarse, por ejemplo: sólidos de revolución, trabajo, etc. Uno de los resultados más interesantes de cálculo integral es el Teorema de Green, el cual se enuncia de la siguiente forma:

   Sea C una curva en el plano orientada positivamente, suave por partes, cerrada simple y sea D la región encerrada por C. Si $L(x,y)$ y $M(x,y)$ son funciones definidas en la región abierta que contiene a D y tienen derivadas parciales continuas en D, entonces,

$$\oint_C (L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\,dx\,dy$$

[1] Pregunta de Certamen

donde el camino de integración en C es contra-reloj.

En particular, este teorema se puede utilizar para el cálculo del área de la región D encerrada por la curva paramétrica C.

Considere que la curva paramétrica C se define de la siguiente forma:

$$C = \begin{cases} \langle x_1(s), y_1(s) \rangle, & 0 \leq s \leq s_1 \\ \langle x_2(s), y_2(s) \rangle, & s_1 < s \leq s_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \langle x_i(s), y_i(s) \rangle, & s_{i-1} < s \leq s_i \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \langle x_m(s), y_m(s) \rangle, & s_{m-1} < s \leq 1 \end{cases}$$

donde $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{m-1} < 1$.

(a) Explique cómo se puede utilizar el teorema de Green para encontrar el área de la región D. Fundamente su respuesta. *Hint: You may use $L(x, y) = x$ and $M(x, y) = 0$!!*

(b) Construya un algoritmo que utilice el método de integración numérica del punto medio para obtener el área de la región D. Considere como parámetro la curva paramétrica C, la cantidad de puntos de integración por cada segmento y $\langle x_i'(s), y_i'(s) \rangle$ para $i = 1 : m$. Se debe explicar claramente la integral que se está calculando.