Guía de ejercicios CC2

Sebastián Acevedo

Diciembre 2019

1

Para la EDP parabólica $u_t(x,t) = Du_{xx}$ con $u(x,0) = f(x), u(a,t) = 0, u(b,t) = 0$ se tiene la siguiente solución:

$$\mathbf{w}_{j+1} = \begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\sigma & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma & 1-2\sigma & \sigma \\ 0 & \dots & 0 & \sigma & 1-2\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{N-1,j} \end{bmatrix} = A\mathbf{w}_j$$

Donde $u(x_i, t_j) = w_{i,j}$ para $i = 0, ..., N$ y $j = 0, 1, ...$

a) Demueste que $\mathbf{w}_j = A^j \mathbf{w}_0$

b) Sea $\mathbf{e}_j = \mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{w}_j$ el cual representa el error entre dos pasos. Demuestre que $\mathbf{e}_j = A^j e_0$.

c) Suponga que el vector $\mathbf{e}_0$ es una combinación lineal de los vectores propios de A, es decir $\mathbf{e}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mathbf{v}_k$. Demuestre que $\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k^j \mathbf{v}_k$, donde λ_k es el k-ésimo valor propio de A.

d) Si la magnitud de todos los valores propios de A es igual o menor a 1 el esquema computacional es estable. Proponga un algoritmo que verifique que la matriz A permite un esquema computacionalmente estable.

2 Desarrollos

2.1 1

a) Se tiene que $\mathbf{w}_{j+1} = A\mathbf{w}_j$, por lo tanto se puede hacer la siguiente sucesión de igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= A\mathbf{w}_0 \\
\mathbf{w}_2 &= A\mathbf{w}_1 = A^2\mathbf{w}_0 \\
\mathbf{w}_3 &= A\mathbf{w}_2 = A^3\mathbf{w}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_j &= A\mathbf{w}_{j-1} = A^j\mathbf{w}_0
\end{aligned}$$

Se puede ver facilmente entonces que se cumple el patrón.

Alternativamente tambien se puede demostrar con inducción:

Paso inicial: Se tiene que $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{w}_0$, lo cual cumple con la hipotesis.
Paso inductivo: Suponiendo que la hipótesis se cumple para un elemento j-ésimo, demostraremos que el paso $j+1$-ésimo tambien cumple:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{j+1} &= A\mathbf{w}_j \\
\mathbf{w}_{j+1} &= A\,A^j\mathbf{w}_0 \\
\mathbf{w}_{j+1} &= A^{j+1}\mathbf{w}_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_j &= \mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{w}_j \\
\mathbf{e}_j &= A^{j+1}\mathbf{w}_0 - A^j\mathbf{w}_0 \\
\mathbf{e}_j &= A^j(A\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0) \\
\mathbf{e}_j &= A^j(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0) \\
\mathbf{e}_j &= A^j e_0
\end{aligned}$$

c) Se tiene que $\mathbf{e}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k\mathbf{v}_k = V\mathbf{c}$, donde V es la matriz colección de vectores propios y $\mathbf{c}$ un vector con los c_k. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_j &= A^j\mathbf{e}_0 \\
\mathbf{e}_j &= A^jV\mathbf{c} \\
\mathbf{e}_j &= V\Lambda^jV^{-1}V\mathbf{c} \\
\mathbf{e}_j &= V\Lambda^j\mathbf{c} \\
\mathbf{e}_j &= \sum_{k=1}^{N-1} c_k\lambda_k^j\mathbf{v}_k
\end{aligned}$$

Donde Λ es la matriz en cuya diagonal se encuentran los valores propios de A.

PD: Recordar que en el tercer certamen entra toda la materia, por lo que ejercicios que mezclen varios temas son especialmente útiles de estudiar.