Guía de ejercicios 7 CC2

Sebastián Acevedo

Diciembre 2019

1

La temperatura en estado estacionario de la cuarta parte de un anillo circular de radio interno 1[cm] y radio externo 3[cm] se modela con la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\begin{aligned}
-\Delta u(r,\theta) &= 0 \\
u(1,\theta) &= 2 \\
u(3,\theta) &= 3 \\
u_\theta(r,0) &= \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right) \\
u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(r\pi) - 1
\end{aligned}$$

Con $r \in [1,3]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y Δ correspondiente al operador laplaciano en coordenadas polares:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Para las siguientes preguntas utilice la siguiente notación para la discretización de la EDP: $w_{i,j} = u(r_i, \theta_j) = u(i\Delta r, j\Delta\theta)$.

a Realice una discretización de la EDP usando diferencias finitas centradas de segundo orden.

b) Realice una discretización de las condiciones de frontera.

c) Considere $\Delta r = 1$ y $\Delta\theta = \frac{\pi}{8}$. Determine un sistema de ecuaciones en forma matricial que permita resolver la discretización de la EDP.

2

Sea $u(r,t)$ la concentración de cierto componente químico dentro de una partícula de radio R_{max}. Considere $r \in [0, R_{max}]$ y $t > 0$ para la siguiente ecuación que gobierna la difusión de la concentración al interior de la partícula:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r})$$

con, para $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial r} = 0$$
$$u(R_{max}, t) = \alpha(1 - e^{-t})$$
$$u(r, 0) = 0$$

Para la discretización, utilice la notación $u_{i,n} = u(r_i, t_n)$, donde $r_i = i\Delta r = i\frac{R_{max}}{n}$ y $t_n = n\Delta t$.

a) Indique cual problema continuo hay que resolver para conocer el estado estacionario del problema. Compruebe además que la solución constante α es la solución del problema estacionario.

b) Realice la discretización de la condición inicial.

c) Realice la discretización de las condiciones de borde.

d) Demuestre que el esquema explícito utilizando diferencias finitas centradas para la EDP está dado por:

$$u_{i,n+1} = (1 + \frac{1}{i})\sigma\, u_{i+1,n} + (1 - 2\sigma)u_{i,n} + (1 - \frac{1}{i})\sigma\, u_{i-1,n}$$

donde $\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta r^2}$

Desarrollos

1 1

a)

$$-\Delta u(r,\theta) = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Discretizando:

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i}\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2}\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta \theta^2} = 0$$

b)

$$w_{0,j} = 2$$
$$w_{M,j} = 3$$
$$\frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{\Delta\theta} = \sin(\frac{r_i \pi}{4})$$
$$\frac{w_{i,N} - w_{i,N-1}}{\Delta\theta} = \cos(r_i\pi) - 1$$

Con M el último punto en la discretización de r y corresponde a $\frac{3-1}{\Delta r}$ y N el último punto en la discretización de θ y corresponde a $\frac{\pi/2}{\Delta\theta}$.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{\Delta\theta} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta\theta^2} & 0 & \frac{1}{\Delta r^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2\Delta r} & -\frac{2}{\Delta r^2}-\frac{1}{4}\frac{2}{\Delta\theta^2} & \frac{1}{\Delta r^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2\Delta r} & 0 & \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta\theta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta\theta^2} & 0 & \frac{1}{\Delta r^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2\Delta r} & -\frac{2}{\Delta r^2}-\frac{1}{4}\frac{2}{\Delta\theta^2} & frac1\Delta r^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2\Delta r} & 0 & \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta\theta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta\theta^2} & 0 & \frac{1}{\Delta r^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2\Delta r} & -\frac{2}{\Delta r^2}-\frac{1}{4}\frac{2}{\Delta\theta^2} & frac1\Delta r^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2\Delta r} & 0 & \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta\theta^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta\theta} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta\theta} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{0,1} \\ w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{0,2} \\ w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{0,3} \\ w_{1,3} \\ w_{2,3} \\ w_{0,4} \\ w_{1,4} \\ w_{2,4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2 \\ \sin(\frac{2\pi}{4}) \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ \cos(2\pi)-1 \\ 3
\end{bmatrix}
$$

c) Notar que $r_i = 1, 2, 3$ y $\theta_j = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$.

2

a) En un estado estacionario no hay variación en el tiempo, por lo tanto $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Entonces el problema que estamos resolviendo es $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$, lo cual es una ecuación diferencial de segundo orden que puede ser resuelto como un BVP. Como la derivada de una constante es 0, es facil comprobar que la constante α es solución de la ecuación. Considerando que el estado estacionario sucede cuando t tiende a infinito, α tambien cumple con las condiciones de borde.

b) $u_{r_i,0} = 0$

c)

$$\frac{u_{1,n} - u_{0,n}}{\Delta r} = 0$$
$$u_{M,0} = 0$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} &= D\left(\frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r}\frac{u_{i+1,n} - u_{i-1,n}}{2\Delta r}\right) \\
u_{i,n+1} &= D\Delta t\left(\frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{\Delta r^2} + \frac{2\Delta r}{r_i}\frac{u_{i+1,n} - u_{i-1,n}}{2\Delta r^2}\right) + u_{i,n} \\
u_{i,n+1} &= \sigma\left(u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n} + \frac{\Delta r}{r_i}(u_{i+1,n} - u_{i-1,n})\right) + u_{i,n} \\
u_{i,n+1} &= \sigma\left(u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n} + \frac{\Delta r}{i\Delta r}(u_{i+1,n} - u_{i-1,n})\right) + u_{i,n} \\
u_{i,n+1} &= \sigma\left(u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n} + \frac{1}{i}(u_{i+1,n} - u_{i-1,n})\right) + u_{i,n} \\
u_{i,n+1} &= (1 + \frac{1}{i})\sigma\, u_{i+1,n} + (1 - 2\sigma)u_{i,n} + (1 - \frac{1}{i})\sigma\, u_{i-1,n}
\end{aligned}$$