1.- $-\Delta u(x,y) = -u(x,y)$,

$u(x,y) = xy$, $\forall (x,y) \in \partial\Omega$

$$-\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right) = -u(x,y)$$

a) • La EDP es elíptica ya que: $A=-1, B=0, C=-1$

$$\Delta = 0^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) = -4 < 0$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = u_{xx}(x,y) = u_{xx}(i\Delta x+1, j\Delta y+1) \, , \; w_{ij} = u(i\Delta x+1, j\Delta y+1)$$

$$u_{xx}(i\Delta x+1, j\Delta y+1) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

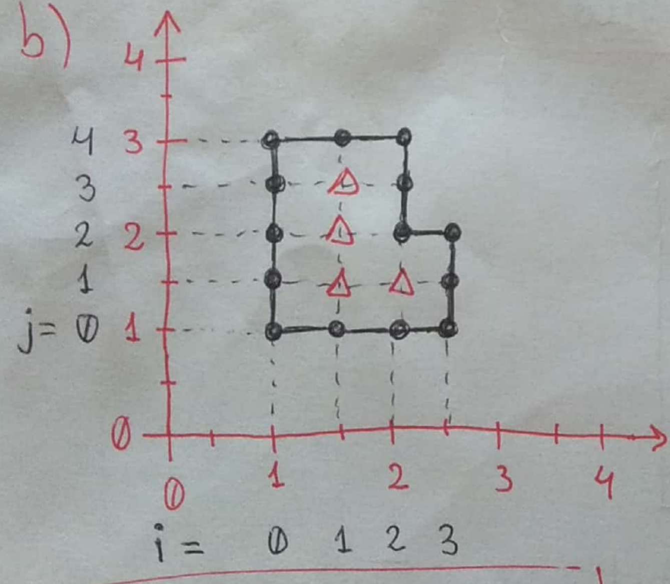
$$u_{yy}(i\Delta x+1, j\Delta y+1) \approx \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

• En el borde:

$u(i\Delta x+1, j\Delta y+1) = i\Delta x + j\Delta y + ij\Delta x\Delta y + 1$

$w_{ij} = i\Delta x + j\Delta y + ij\Delta x \Delta y + 1$ (I)

b)



• Se necesitan 4 ecuaciones para 4 incógnitas con $\Delta x = \Delta y = 0.5$.

• La EDP discretizada:

$$\frac{w_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \left(\frac{-2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}\right) w_{ij} + \frac{w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{w_{i,j-1}}{\Delta y^2} - w_{ij} = 0$$

$\delta = \frac{1}{\Delta x^2}$, $\eta = \frac{1}{\Delta y^2}$

$\xi = \left(\frac{-2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - 1\right)$

$\rightarrow \delta w_{i+1,j} + \xi w_{ij} + \delta w_{i-1,j} + \eta w_{i,j+1} + \eta w_{i,j-1} = 0$

$i=1, j=1$

$$\delta w_{2,1} + \xi w_{1,1} + \delta w_{0,1} + \eta w_{1,2} + \eta w_{1,0} = 0$$

$i=2, j=1$

$$\delta w_{3,1} + \xi w_{2,1} + \delta w_{1,1} + \eta w_{2,2} + \eta w_{2,0} = 0$$

$i=1, j=2$

$$\delta w_{2,2} + \xi w_{1,2} + \delta w_{0,2} + \eta w_{1,3} + \eta w_{1,1} = 0$$

* Todos los valores encerrados son de la frontera y por lo tanto conocidos.

$i=1,\ j=3$

$$\delta w_{2,3} + \xi w_{1,3} + \delta w_{0,3} + \gamma w_{1,4} + \gamma w_{1,2} = 0$$

- Los valores conocidos se pueden calcular evaluando la expresión (I), de esta manera el sistema matricial:

(Antes del sist. matricial se despejarán las ecuaciones para mayor claridad).

$$\xi w_{1,1} + \delta w_{2,1} + \gamma w_{1,2} = -\delta w_{0,1} - \gamma w_{1,0} \to \alpha_1$$

$$\xi w_{2,1} + \delta w_{1,1} = -\delta w_{3,1} - \gamma w_{2,2} - \gamma w_{2,0} \to \alpha_2$$

$$\xi w_{1,2} + \gamma w_{1,3} + \gamma w_{1,1} = -\delta w_{2,2} - \delta w_{0,2} \to \alpha_3$$

$$\xi w_{1,3} + \gamma w_{1,2} = -\delta w_{2,3} - \delta w_{0,3} - \gamma w_{1,4} \to \alpha_4$$

$$\begin{bmatrix} \xi & \delta & \gamma & 0 \\ \delta & \xi & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \xi & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

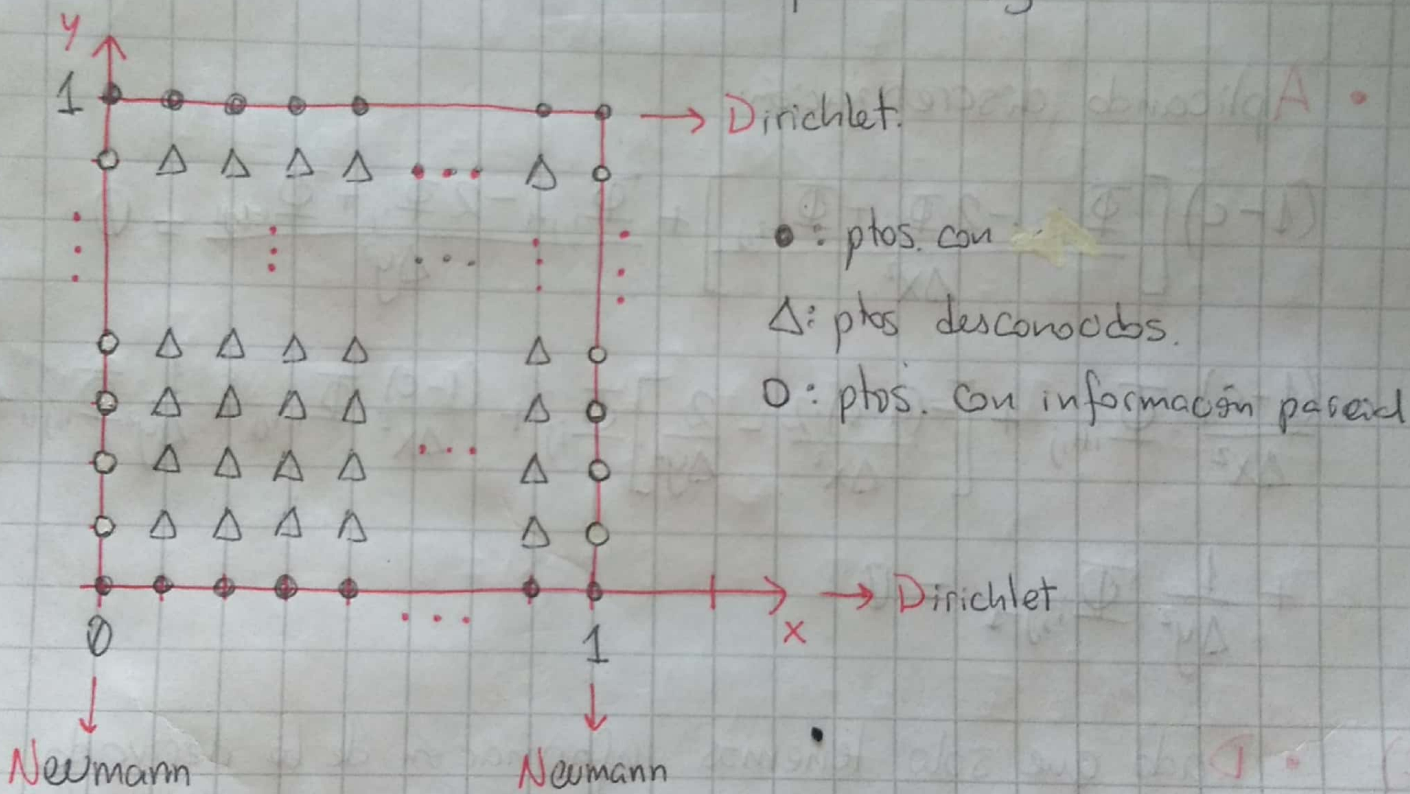
c) Resolver con algoritmo de sist. lineales. Eliminación Gaussiana por ejemplo.

Solución Ayudantía 9

2.- $(1-c)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$, $\Phi_x(0,y) = 0$, $\Phi_x(1,y) = 0$

$\Phi(x,0) = 0$, $\Phi(x,1) = f(x)$

a) • Para el diagrama se utilizará la región $[0,1]\times[0,1] = \Omega$ que es donde se delimita la frontera según las condiciones.



• Checkear cuando EDP es elíptica.

> Sabemos que:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + F(\ldots) = 0$$

$$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow \text{Elíptico.}$$

> En nuestro caso: $A = (1-c)$, $B = 0$, $C = 1$

$$0^2 - 4\cdot(1-c)\cdot 1 = 4c - 4 < 0 \rightarrow \boxed{c < 1}$$

b) $$\Phi_{xx}(i\Delta x, j\Delta y) \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\Phi_{yy}(i\Delta x, j\Delta y) \approx \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

• Aplicando discretización:

$$(1-c)\left[\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right] + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\frac{(1-c)}{\Delta x^2}\Phi_{i+1,j} + \left[\frac{(c-1)\cdot 2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}\right]\Phi_{ij} + \frac{(1-c)}{\Delta x^2}\Phi_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta y^2}\Phi_{i,j+1}$$

$$+ \frac{1}{\Delta y^2}\Phi_{i,j-1} = 0$$

c) • Dado que solo tenemos información de la derivada respecto a x, es necesario obtener el valor del borde como una aproximación:

$$\Phi_x(0, j\Delta y) \approx \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{0,j}}{\Delta x} \quad (\mathrm{I})$$

* En el borde izquierdo de Ω usamos forward difference.

$$\Phi_x(1, j\Delta y) \approx \frac{\Phi_{m,j} - \Phi_{m-1,j}}{\Delta x} \quad (\mathrm{II})$$

* En el borde derecho usamos backward difference

* Considerando m puntos en la horizontal.

• Desde (I) podemos despejar $\Phi_{0,j}$

$$\Phi_{0,j} = \Phi_{1,j} + \Delta x \cdot \Phi_x(0, j\Delta y)$$

$$\Phi_{0,j} = \Phi_{1,j} + \Delta x \cdot 0 \rightarrow \boxed{\Phi_{0,j} = \Phi_{1,j}}$$

• Desde (II) podemos despejar $\Phi_{m,j}$:

$$\Phi_{m,j} = \Phi_{m-1,j} + \Delta x \cdot \Phi_x(1, j\Delta y)$$

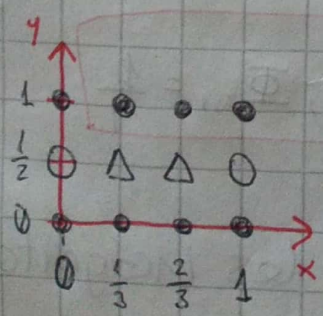
$$\boxed{\Phi_{m,j} = \Phi_{m-1,j}}$$

d) • Las condiciones de frontera en y son de Dirichlet, por lo tanto ~~de~~ la discretización es directa.

$$\boxed{\Phi_{i,0} = 0} \qquad \boxed{\Phi_{i,n} = f(x)}$$

* Considerando n puntos en la vertical.

e) • Considerando $\Delta x = \frac{1}{3}$ y $\Delta y = \frac{1}{2}$ la región Ω luce:



• Considerando $c = \frac{1}{3}$ la EDP es elíptica.

• Construyendo el sistema para los puntos no-conocidos:

$$\frac{(1-1/3)}{(1/3)^2}=\frac{2/3}{1/9}=6\ ,\ \frac{(1/3-1)\cdot 2}{(1/9)}-\frac{2}{1/4}=-20\ ,\ \frac{1}{1/4}=4$$

borde izq.

$i=1,\ j=1$ | $6\,\Phi_{2,1}-20\,\Phi_{1,1}+6\,\Phi_{0,1}+4\,\Phi_{1,2}+4\,\Phi_{1,0}=0$

* Reemplazando valores conocidos:

$$6\,\Phi_{2,1}-20\,\Phi_{1,1}+6\,\Phi_{1,1}+4f(\Delta x)=0$$

$$6\,\Phi_{2,1}-14\,\Phi_{1,1}=-4f(\Delta x)=-4f(1/3)=-4\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)-4$$

$$6\,\Phi_{2,1}-14\,\Phi_{1,1}=-4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)-4=-2$$

$i=2,\ j=1$ | $6\,\Phi_{3,1}-20\,\Phi_{2,1}+6\,\Phi_{1,1}+4\,\Phi_{2,2}+4\,\Phi_{2,0}=0$

borde der.

$$6\,\Phi_{2,1}-20\,\Phi_{2,1}+6\,\Phi_{1,1}+4f(2\Delta x)=0$$

$$-14\,\Phi_{2,1}+6\,\Phi_{1,1}=-4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)-4=-2$$

- Finalmente, el sistema:

$$\begin{bmatrix}-14 & 6\\ 6 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{1,1}\\ \Phi_{2,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}\rightarrow \boxed{\Phi_{1,1}=\frac{1}{4}\ ,\ \Phi_{2,1}=\frac{1}{4}}$$

f) • Los términos que acompañan a las incógnitas:

$$\frac{(1-c)}{(1/3)^2}=9(1-c)\ ,\ \frac{(c-1)\cdot 2}{(1/3)^2}-\frac{2}{(1/2)^2}=2(9c-13)$$

• Luego, las ecuaciones:

$\underline{i=1,\ j=1}$ $\quad \rho(1-c)\Phi_{2,1} + 2(\rho c - 13)\Phi_{1,1} + \rho(1-c)\Phi_{1,1} = -2$

$$(\rho c - 17)\Phi_{1,1} + \rho(1-c)\Phi_{2,1} = -2$$

$\underline{i=2,\ j=1}$ $\quad \rho(1-c)\Phi_{2,1} + 2(\rho c - 13)\Phi_{2,1} + \rho(1-c)\Phi_{1,1} = -2$

$$\rho(1-c)\Phi_{1,1} + (\rho c - 17)\Phi_{2,1} = -2$$

• Así, el sistema:

$$\begin{bmatrix} (\rho c - 17) & \rho(1-c) \\ \rho(1-c) & (\rho c - 17) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\underline{c=1}$

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\Phi_{11} = -\frac{1}{4},\ \Phi_{21} = -\frac{1}{4}}$$

• Con $c=1$, el problema es parabólico.

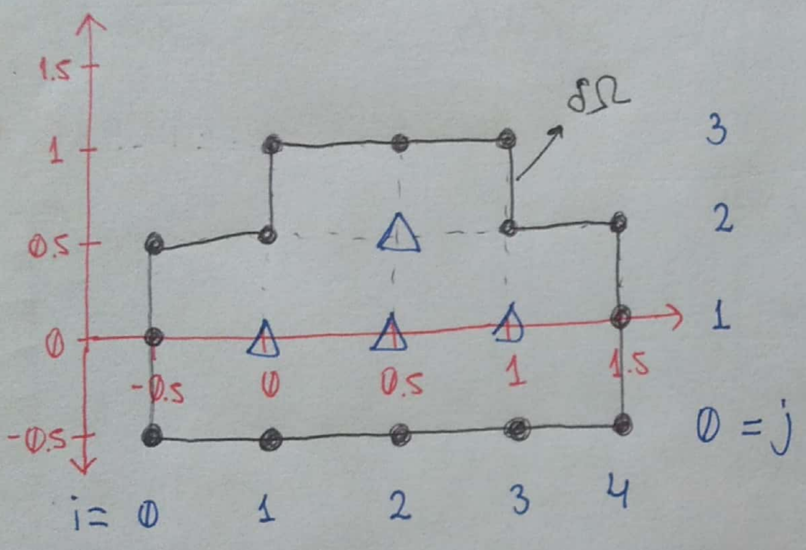
3.- Al igual que la pregunta 1., el problema es un EDP elíptico.

a) Las discretizaciónes corresponden a:

$$u_{xx}(x,y) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad u_{yy}(x,y) \approx \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$w_{ij} = u(-0.5 + i\Delta x, -0.5 + j\Delta y), \quad i \in \{0,1,2,3,4\}$$
$$j \in \{0,1,2,3\}$$

$$\Delta x = 0.5, \quad \Delta y = 0.5$$



- En el problema se requiere calcular el valor de u en los puntos interiores y además el valor de λ.
- Considerando lo anterior, y las discretizaciones, la EDP:

$$-\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right] = \lambda w_{ij}$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} = 4 = \frac{1}{\Delta y^2}$$

$$-4w_{i+1,j} + 16w_{ij} - 4w_{i-1,j} - 4w_{i,j+1} - 4w_{i,j-1} = \lambda w_{ij}$$

b) Luego, construyendo las ecuaciones para los puntos interiores.

$i=1, j=1$

$$-4w_{2,1} + 16w_{1,1} - 4w_{0,1} - 4w_{1,2} - 4w_{1,0} = \lambda w_{1,1}$$

- Los valores destacados pertenecen a $\delta\Omega$ y valen 0. Así:

$-4\omega_{2,1} + 16\omega_{1,1} = \lambda\omega_{1,1}$

$\underline{i=2,\ j=1}$ | $-4\omega_{3,1} + 16\omega_{2,1} - 4\omega_{1,1} - 4\omega_{2,2} - 4\omega_{2,0} = \lambda\omega_{2,1}$

$-4\omega_{3,1} + 16\omega_{2,1} - 4\omega_{1,1} - 4\omega_{2,2} = \lambda\omega_{2,1}$

$\underline{i=3,\ j=1}$ | $-4\omega_{4,1} + 16\omega_{3,1} - 4\omega_{2,1} - 4\omega_{3,2} - 4\omega_{3,0} = \lambda\omega_{3,1}$

$16\omega_{3,1} - 4\omega_{2,1} = \lambda\omega_{3,1}$

$\underline{i=2,\ j=2}$ | $-4\omega_{3,2} + 16\omega_{2,2} - 4\omega_{1,2} - 4\omega_{2,3} - 4\omega_{2,1} = \lambda\omega_{2,2}$

$16\omega_{2,2} - 4\omega_{2,1} = \lambda\omega_{2,2}$

- De manera matricial:

$$\begin{bmatrix} 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 16 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \omega_{31} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \omega_{31} \\ \omega_{22} \end{bmatrix}$$

c) El sistema posee la forma $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, el cual corresponde a un problema de valores y vectores propios.

- Para encontrar los puntos desconocidos y λ es necesario utilizar {Power iteration, inv. power iteration, NSI, UQR}.
- Como se desean encontrar todas las posibles soluciones entonces. NSI o UQR son recomendables.