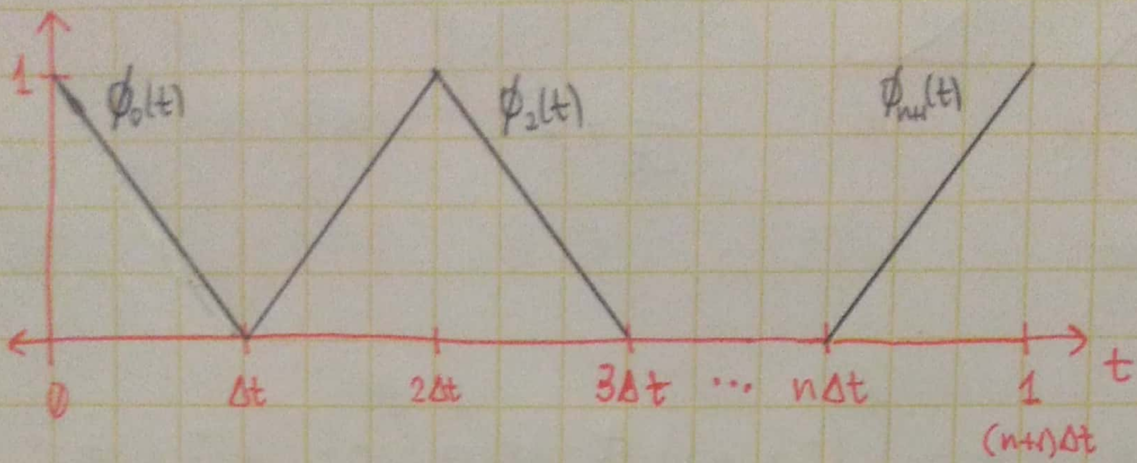
Solución Ayudantía 7

a)



b)

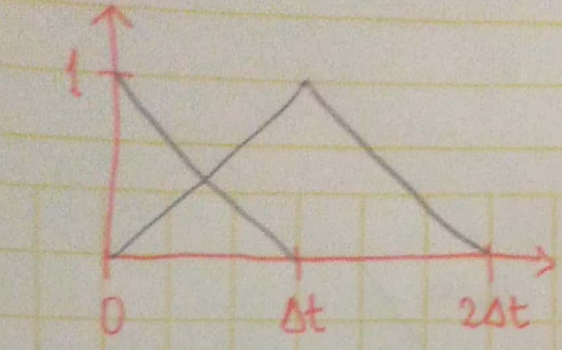
$$\phi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{i-1}}{\Delta t}, & t_{i-1} < t \leq t_i \\ \dfrac{t_{i+1} - t}{\Delta t}, & t_i < t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

Derivadas corresponden a pendientes de rectas.

$$\phi_i'(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\Delta t}, & t_{i-1} < t \leq t_i \\ \dfrac{-t}{\Delta t}, & t_i < t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c)
- La mult. de funciones continuas es no nula en solo un intervalo. $t \in [t_i, t_{i+1}]$.
- Las funciones hat son "idénticas" entre sí, y repartición de nodos es equiespaciada. => Todas las integrales de funciones contiguas dan el mismo valor.
- Elijamos la más fácil.



Intervalo no nulo.

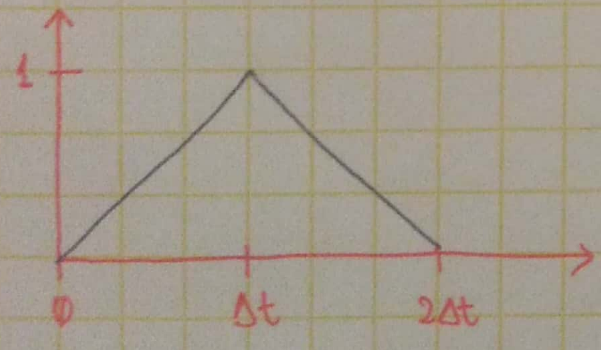
$\frac{t}{\Delta t}$ → Recta que sube.

$-\frac{t}{\Delta t}+1$ → Recta que baja.

$$\int_0^1 \phi_i(t)\phi_{i+1}(t)\,dt = \int_0^{\Delta t}\left(-\frac{t}{\Delta t}+1\right)\frac{t}{\Delta t}\,dt = \int_0^{\Delta t} \frac{-t^2}{\Delta t^2}+\frac{t}{\Delta t}\,dt$$

$$= \frac{-t^3}{3\Delta t^2}\Big|_0^{\Delta t} + \frac{t^2}{2\Delta t}\Big|_0^{\Delta t} = \frac{-\Delta t^3}{3\Delta t^2}+\frac{\Delta t^2}{2\Delta t} = \frac{-\Delta t}{3}+\frac{\Delta t}{2} = \boxed{\frac{\Delta t}{6}}$$

d)
- Esta vez la mult. de una función consigo misma es no nula en el intervalo $t\in[t_{i-1}, t_{i+1}]$.
- Además, existe simetría respecto a t_i.
- Nuevamente, elijamos caso simple.



- Considerando la simetría basta integrar de 0 a Δt y doblar el valor.

$\frac{t}{\Delta t}$ → Recta que sube.

$$\int_0^1 \phi_i(t)^2\,dt = 2\int_0^{\Delta t}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2 dt = \frac{2}{\Delta t^2}\int_0^{\Delta t} t^2\,dt = \frac{2}{\Delta t^2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{\Delta t}$$

$$= \frac{2}{\Delta t^2}\cdot\frac{\Delta t^3}{3} = \boxed{\frac{2\Delta t}{3}}$$

e) • Misma idea que c) pero considerando sus derivadas.

$$\int_0^1 \phi_i'(t)\phi_{i+1}'(t)\,dt = \int_0^{\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)\left(\frac{-1}{\Delta t}\right)dt = -\frac{1}{\Delta t^2}\int_0^{\Delta t} dt$$

$$= \frac{-1}{\Delta t^2}\cdot \Delta t = \boxed{\frac{-1}{\Delta t}}$$

f) • Misma idea que d) pero considerando derivada.
• Simetría se mantiene.

$$\int_0^1 \phi_i'(t)^2\,dt = 2\int_0^{\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 dt = \frac{2}{\Delta t^2}\int_0^{\Delta t} dt = \boxed{\frac{2}{\Delta t}}$$

2.- a) • Residuo debe ser ortogonal a la base:

$$\phi_k(t)\ ,\ k\in\{1,\dots,n\}\ /\ \phi_k(t)\in L^2[0,1]$$

$$\int_0^1 \left(\delta y''(t) - \gamma y(t) - f(t)\right)\phi_k(t)\,dt = 0$$

$$\boxed{\int_0^1 \left(\delta y''(t) - \gamma y(t)\right)\phi_k(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\phi_k(t)\,dt}$$

b) • Los siguientes pasos no son necesarios para la resolución algorítmica, pero los pongo por completitud.

$$\int_0^1 \delta y''(t)\phi_k(t)\,dt - \int_0^1 \gamma y(t)\phi_k(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\phi_k(t)\,dt$$

$$\delta y'(t)\phi_k(t)\Big|_0^1 - \delta\int_0^1 y'(t)\phi_k'(t)\,dt - \gamma\int_0^1 y(t)\phi_k(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\phi_k(t)\,dt$$

$$\phi_k(0) = \phi_k(1) = 0 \rightarrow \delta\, y'(t)\,\phi_k(t)\Big|_0^1 = 0$$

$$\delta \int_0^1 y'(t)\,\phi_k'(t)\,dt + \eta \int_0^1 y(t)\,\phi_k(t) = -\int_0^1 f(t)\,\phi_k(t)\,dt$$

- Considerando $y(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i\,\phi_i(t)$, $y'(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i\,\phi_i'(t)$

- En los extremos:

$$y(0) = \sum_{i=0}^{n+1} C_i\,\phi_i(0) = C_0\,\phi_0(0) = \boxed{C_0 = K_0}$$

$$y(1) = \sum_{i=0}^{n+1} C_i\,\phi_i(1) = C_{n+1}\,\phi_{n+1}(1) = C_{n+1} = K_1 \xrightarrow{n=3} \boxed{C_4 = K_1}$$

- Para C_1, C_2, C_3 se plantea:

$$\delta \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{4} C_i\,\phi_i'(t)\right)\phi_k'(t)\,dt + \eta \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{4} C_i\,\phi_i(t)\right)\phi_k(t)\,dt = -g_k$$

$$\sum_{i=0}^{4} C_i \left[\delta \int_0^1 \phi_i'(t)\,\phi_k'(t)\,dt + \eta \int_0^1 \phi_i(t)\,\phi_k(t)\,dt\right] = -g_k$$

- Expandiendo la expresión para $k = 1$.

$$C_0\left[\delta \int_0^1 \phi_0'(t)\,\phi_1'(t)\,dt + \eta \int_0^1 \phi_0(t)\,\phi_1(t)\,dt\right] + C_1\left[\delta \int_0^1 \phi_1'(t)\,\phi_1'(t)\,dt\right.$$

$$\left. + \eta \int_0^1 \phi_1(t)\,\phi_1(t)\,dt\right] + C_2\left[\delta \int_0^1 \phi_2'(t)\,\phi_1'(t)\,dt + \eta \int_0^1 \phi_2(t)\,\phi_1(t)\,dt\right] = -g_1$$

- Con $i = 3, 4$ las integrales son nulas ya que funciones a integrar no comparten intervalos no nulos.

• Reemplazando valores de integrales conocidos por pregunta 1.- :

$$C_0\underbrace{\left[\delta\left(\frac{-1}{\Delta t}\right)+\gamma\left(\frac{\Delta t}{6}\right)\right]}_{\alpha}+C_1\underbrace{\left[\delta\left(\frac{2}{\Delta t}\right)+\gamma\left(\frac{2\Delta t}{3}\right)\right]}_{\beta}+C_2\left[\delta\left(\frac{-1}{\Delta t}\right)+\gamma\left(\frac{\Delta t}{6}\right)\right]=-g_1$$

• Para $k=2,3$ se tiene:

$$C_1\cdot\alpha+C_2\cdot\beta+C_3\cdot\alpha=-g_2 \qquad k=2$$

$$C_2\cdot\alpha+C_3\cdot\beta+C_4\,\alpha=-g_3 \qquad k=3$$

• Así, el sistema:

$$\begin{aligned} C_0\alpha+C_1\beta+C_2\alpha&=-g_1\\ C_1\alpha+C_2\beta+C_3\alpha&=-g_2\\ C_2\alpha+C_3\beta+C_4\alpha&=-g_3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} C_1\beta+C_2\alpha&=-g_1-K_0\alpha\\ C_1\alpha+C_2\beta+C_3\alpha&=-g_2\\ C_2\alpha+C_3\beta&=-g_3-K_1\alpha \end{aligned}$$

Conocidos

$$\begin{bmatrix}\beta & \alpha & 0\\ \alpha & \beta & \alpha\\ 0 & \alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-g_1-K_0\alpha\\ -g_2\\ -g_3-K_1\alpha\end{bmatrix}$$

• Finalmente resolver con un solver lineal. Donde:

$C_1\approx y(0+\Delta t)$

$C_2\approx y(0+2\Delta t)$

$C_3\approx y(0+3\Delta t)$

• Considerando los nodos: