Ayudantía 6.

1.- a) $f_0\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right) + f_1\left(\frac{du(x)}{dx}\right) + u(x) = 1$, $u(0)=0$, $u(1)=1$.

Para utilizar shooting method, es necesario que transformemos el BVP en un IVP.

$y_1(x) = u(x)$ $\quad y_2 = u'(x)$ $\quad y_3(x) = u''(x)$

$y_1'(x) = y_2(x)$ $\quad y_2'(x) = y_3(x)$

$y_1(0) = 0$ $\quad y_2(0) = \alpha$ $\quad y_1(1) = 1$

$$f_0(y_3(x)) + f_1(y_2(x)) + y_1(x) = 1$$

$$f_0(y_3(x)) = 1 - f_1(y_2(x)) - y_1(x) \;/\; f_0^{-1}() \rightarrow f_0 \text{ es biyectiva.}$$

$$y_3(x) = f_0^{-1}(1 - f_1(y_2(x)) - y_1(x))$$

Luego, se debe encontrar α que minimice la diferencia entre la estimación, y el valor real en $x=1$.

obtenida al resolver el IVP

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_1(x_i) \\ y_2(x_i) \end{bmatrix} \qquad \dot{Y}_i = \begin{bmatrix} y_2(x_i) \\ f_0^{-1}(1 - f_1(y_2(x_i)) - y_1(x_i)) \end{bmatrix}$$

b) La principal complicación es el calculo de f_0^{-1}. Si no fuese posible conocer su forma analítica, entonces sería necesario calcular una aproximación. Una propuesta para realizarlo es lo siguiente:

```
def fo_inv(x):
    def fo_aux(α):
        return fo(α)-x
    return zero_finder(fo_aux)
```

```
def euler(y0, F, h, n):
    Y = vector(2, n+1)
    Y[:][0] = y0
    for i in range(n):
        Y[:][i+1] = Y[:][i] + hF(Y[0][:], Y[1][i])
    return Y[0]

def shoot_method(h):
    n = 1/h
    F(y1, y2) = [ y2
                  f0_inv(1 - f1(y2) - y1) ]
    y0(α) = [ 0
              α ]
    r1 = rand_number
    r2 = rand_number
    Y = euler(y0(r1), F, h, n)
    W = euler(y0(r2), F, h, n)
    G(v) = v[n] - 1
    while G(Y)*G(W) >= 1:
        r2 = rand_number
        W = euler(y0(r1), F, h, n)
    α̂ = biseccion(wrapper, [r1, r2])
    y0 = y0(α̂)
    Sol = euler(y0, F, h, n)
    return Sol
```

definir entre lineas.

```
def wrapper(α):
    y0 = y0(α)
    Y = euler(y0, F, h, n)
    return G(Y)
```

2.- a) $u'(x) + 2u(x) + 5\int_0^x u(y)\,dy = 1 \quad , \quad u(0) = 0$

Para discretizar la integral es necesario utilizar la Regla del Trapecio, para utilizar los mismos nodos que se utilizarán para aproximar la derivada.

La discretización:

$$u(ih) = u_i$$

$$u'(ih) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$\int_0^{ih} u(y)\,dy \approx \frac{h}{2}\left[u_0 + u_i + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} u_j\right]$$

Siendo la ecuación integro-diferencial:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 2u_i + \frac{5h}{2}\left[u_0 + u_i + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} u_j\right] = 1 \quad /\cdot h$$

$$u_i - u_{i-1} + 2h\,u_i + \frac{5h^2}{2}\left[u_0 + u_i + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} u_j\right] = h$$

$$-u_{i-1} + u_i\left(2h + \frac{5h^2}{2} + 1\right) + \frac{5h^2}{2}u_0 + 5h^2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} u_j = h$$

b) Utilizando 5 puntos:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i=0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \qquad h=1$$

$$i=1 \quad \underbrace{u_1\left(2h+\frac{5h^2}{2}+1\right)}_{\nabla} - u_0 + \frac{5h^2}{2}u_0 = h$$

$$u_1 \cdot \nabla = h$$

$$i=2 \quad u_2 \cdot \nabla - u_1 + \overbrace{5h^2}^{\phi} u_1 = h$$

$$u_1(\phi - 1) + u_2 \nabla = h$$

$$i=3 \quad u_3 \cdot \nabla - u_2 + \phi u_1 + \phi u_2 = h$$

$$u_1 \cdot \phi + u_2(\phi - 1) + u_3 \nabla = h$$

$$i=4 \quad u_4 \cdot \nabla - u_3 + \phi u_1 + \phi u_2 + \phi u_3 = h$$

$$u_1 \cdot \phi + u_2 \cdot \phi + u_3(\phi - 1) + u_4 \nabla = h$$

$$i=5 \quad u_1 \cdot \phi + u_2 \cdot \phi + u_3 \phi + u_4(\phi - 1) + u_5 \cdot \nabla = h$$

Luego, la forma matricial del sistema:

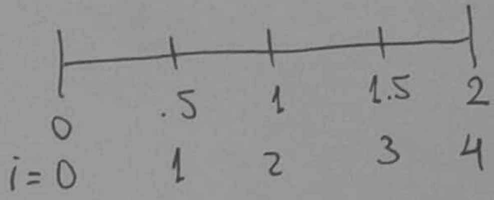
$$\begin{bmatrix} \nabla & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\phi-1) & \nabla & 0 & 0 & 0 \\ \phi & (\phi-1) & \nabla & 0 & 0 \\ \phi & \phi & (\phi-1) & \nabla & 0 \\ \phi & \phi & \phi & (\phi-1) & \nabla \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ h \\ h \\ h \end{bmatrix}$$

c) Se puede resolver con forward substitution.

3.- $y''(x) = (2+x)\,y^2 \quad , \; y(0) = 1 \; , \; y(2) = 4$

La discretización: $\quad y(ih) = y_i$

$$y''(ih) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$



Luego, el BVP:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = (2+ih)\,y_i^2 \quad / \cdot h^2$$

$$y_{i+1} - 2y_i - (2+ih)h^2\,y_i^2 + y_{i-1} = 0$$

Es claro que el sistema, no es lineal por lo que es necesario plantearlo de otra manera.

Con $h = 0.5$ se puede definir:

$$F(\vec{y}) = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 - (2+.5).5^2 \cdot y_1^2 + \overset{1}{y_0} \\ y_3 - 2y_2 - (2+2\cdot.5).5^2 \cdot y_2^2 + y_1 \\ \underset{4}{y_4} - 2y_3 - (2+3\cdot.5).5^2 \cdot y_3^2 + y_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Luego, es posible encontrar el vector $\vec{y}$ que satisface lo anterior por medio del método de Newton Multivariado.

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n - DF^{-1}(\vec{y}_n)\cdot F(\vec{y}_n) \;\rightarrow\; \underbrace{\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n}_{\Delta\vec{y}} = -DF^{-1}(\vec{y}_n)\cdot F(\vec{y}_n)$$

$$DF(\vec{y}_n)\,\Delta\vec{y} = -F(\vec{y}_n)$$

Donde $DF(\vec{y})$ corresponde a el jacobiano de F.

$$DF(\vec{y}) = \begin{bmatrix} -2-2(2+.5).5^2 y_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-2(2+2\cdot .5).5^2 y_2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-2(2+3\cdot .5).5^2 y \end{bmatrix}$$

De esta forma, basta iterar:

$$DF(\vec{y_n})\,\Delta\vec{y} = -F(\vec{y_n})$$

mediante un solver de sistemas lineales.