Valores y Vectores Propios

En caso de encontrar un error o posible mejora, no dude en mencionarlo en clases o por email. ¡Gracias!

(S)cientific (C)omputing (T)eam
ILI-286 DI-UTFSM Chile

v0.22

Contenido

Definición

Sea A una matriz cuadrada en $\mathbb{R}^{n \times n}$.
Diremos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ son valor y vector propios si:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

Observación

- $\lambda = 0$ SI puede ser un valor propio.
- $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ NO puede ser un vector propio.

Propiedad

Si λ es valor propio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Demo

Como λ es valor propio, se tiene

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda\, I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la matriz $A - \lambda\, I$ tiene que ser singular, por tanto $\det(A - \lambda\, I) = 0$.
OBS1: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es un polinomio en λ de grado n y se llama polinomio característico de A.
OBS2: Las raíces de $p_A(\lambda)$ constituyen los valores propios de A.

Propiedad

Si $\mathbf{v}$ es vector propio de A
entonces, $c\,\mathbf{v}$, $c \neq 0$, también es vector propio.

Demo

$$\begin{aligned} A(c\,\mathbf{v}) &= c\,(A\,\mathbf{v}) \\ &= c\,(\lambda\mathbf{v}) \\ &= \lambda(c\,\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Propiedad

Si A tiene valor propio λ y vector propio $\mathbf{v}$
entonces $B = c\,A$, $c \neq 0$ tiene valor propio $c\,\lambda$ y vector propio $\mathbf{v}$

Demo

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} &= (c\,A)\mathbf{v} = c\,(A\,\mathbf{v}) \\ &= c\,(\lambda\mathbf{v}) = (c\,\lambda)\mathbf{v} \end{aligned}$$

Propiedad

Si A tiene valor propio λ y vector propio $\mathbf{v}$
entonces $B = Q^{-1}AQ$, tiene valor propio λ y vector propio $Q^{-1}\mathbf{v}$

Demo

$$\begin{aligned} B(Q^{-1}\mathbf{v}) &= (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\mathbf{v}) \\ &= Q^{-1}AQQ^{-1}\mathbf{v} = Q^{-1}A\mathbf{v} \\ &= Q^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(Q^{-1}\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Propiedad

Si A tiene valor propio λ y vector propio $\mathbf{v}$
entonces, si A es invertible, $B = A^{-1}$ tiene valor propio $1/\lambda$ y vector propio $\mathbf{v}$

Demo

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} &\iff A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda\mathbf{v}) \\ &\iff \mathbf{v} = \lambda(A^{-1}\mathbf{v}) \\ &\iff \frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v} \\ &\iff A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v} \end{aligned}$$

Propiedad

Si A tiene valor propio λ y vector propio $\mathbf{v}$
entonces $B = A + s\ I$, $s \neq 0$ tiene valor propio $\lambda + s$ y vector propio $\mathbf{v}$

Demo

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} &= (A + s\ I)\mathbf{v} = A\,\mathbf{v} + s\mathbf{v} \\ &= \lambda\mathbf{v} + s\mathbf{v} \\ &= (\lambda + s)\mathbf{v} \end{aligned}$$

Propiedad Importantísima

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica ($A = A^T$) entonces:

- Todos los valores propios son reales:

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, .., n\}$$

- Vectores propios con valores propios distintos son ortogonales:

$$\lambda_i \neq \lambda_j \implies \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$$

Demo

...

Propiedad Práctica

El determinante de una matriz es igual al producto de sus valores propios.

Demo

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)\\ &= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)\end{aligned}$$

entonces, al evaluar en $\lambda = 0$ se tiene $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$

¿Cual es el procedimiento para calcular valores propios?

- Calcular polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Calcular las raíces de $p_A(\lambda)$ resolviendo $p_A(\lambda) = 0$. Se obtienen λ_1, ..., λ_n.
- Se reemplaza el valor obtenido para cada λ_i en el sistema $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ para un vector desconocido v_i. Se escoge una representación conveniente para el vector v_i basado en la restricción anterior.

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Calcular polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$p_A(\lambda) = \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda, & 3 \\ 2, & 2-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6$$

- Calcular las raíces de $p_A(\lambda)$ resolviendo $p_A(\lambda) = 0$. Se obtienen λ_1, ..., λ_n.

$$0 = p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \iff \lambda = 4 \text{ o } \lambda = -1$$

- Se reemplaza el valor obtenido para cada λ_i en el sistema $(A - \lambda_i I)v_i$ para un vector desconocido v_i. Se escoge una representación conveniente para el vector v_i basado en la restricción anterior.

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = -1$, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}$$

$$\iff 2x = -3y$$

Podemos elegir el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4$, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array}$$

$$\iff x = y$$

Podemos elegir el vector propio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 4$

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Valores propios no nulos ($\det(A) = 1 \neq 0$)
- Valores propios reales ($A = A^T$).
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^2$.

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Valores propios no nulos ($\det(A) = -1 \neq 0$)
- Valores propios reales ($A = A^T$).
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^2$.

Valores Propios

Ejemplo 3

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Valores propios no nulos ($\det(A) = -1 \neq 0$).
- Valores propios reales ($A = A^T$).
- $p_A(\lambda) = (-\lambda)^2 - 1^2 = 0 \iff \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^2$.

Valores Propios

Ejemplo 4

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Valores propios no nulos ($\det(A) = +1 \neq 0$).
- Valores propios no necesariamente reales ($A \neq A^T$).
- $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_1 = \mathbf{i}$ y $\lambda_2 = -\mathbf{i}$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y NO forman base de $\mathbb{R}^2$.

Valores Propios

Ejemplo 5

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Valores propios no nulos ($\det(A) = 1 \neq 0$)
- Valores propios no necesariamente reales ($A \neq A^T$).
- $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 1$
- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios NO son ortogonales y NO forman base de $\mathbb{R}^2$.

Valores Propios

Ejemplo 6

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Al menos un valor propio nulo ($\det(A) = 0$)
- Valores propios reales ($A = A^T$).
- $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^2$.

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Al menos un valor propio nulo ($\det(A) = 0$)
- Valores propios reales ($A = A^T$).
- $p_A(\lambda) = (-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^2$.

Valores Propios

Ejemplo 8

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Al menos un valor propio nulo ($\det(A) = 0$)
- Valores propios no necesariamente reales ($A \neq A^T$).
- $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios NO son ortogonales, pero SI forman base de $\mathbb{R}^2$.

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Valores propios no nulos ($\det(A) = 1 \times 3 \times 2 \neq 0$)
- Valores propios no necesariamente reales ($A \neq A^T$).
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$
- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Vectores propios son ortogonales y forman base de $\mathbb{R}^3$.

Calcule valores y vectores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 8.00 & 0.50 & 2.20 & 7.00 & 2.90 & 7.50 & 7.20 & 5.40 & 3.00 & 2.90 \\ 8.40 & 9.50 & 5.80 & 0.20 & 4.50 & 4.60 & 4.60 & 0.20 & 0.20 & 7.80 \\ 4.20 & 2.00 & 0.80 & 2.90 & 6.70 & 2.40 & 9.60 & 6.20 & 4.70 & 8.90 \\ 4.20 & 1.50 & 3.50 & 9.60 & 2.00 & 0.20 & 8.30 & 4.90 & 2.80 & 3.20 \\ 3.30 & 8.50 & 4.50 & 9.90 & 6.50 & 3.40 & 6.60 & 9.20 & 3.10 & 2.30 \\ 7.70 & 5.90 & 1.40 & 9.70 & 4.20 & 7.10 & 9.00 & 8.80 & 7.20 & 4.80 \\ 1.20 & 1.40 & 6.90 & 6.60 & 6.90 & 9.40 & 3.60 & 8.80 & 8.20 & 5.70 \\ 7.20 & 9.60 & 2.50 & 6.40 & 1.60 & 1.50 & 0.40 & 7.70 & 6.90 & 4.70 \\ 4.20 & 7.20 & 1.60 & 6.00 & 2.00 & 9.30 & 5.00 & 7.90 & 6.10 & 0.20 \\ 0.90 & 0.70 & 1.60 & 3.90 & 7.10 & 4.70 & 2.50 & 7.90 & 7.50 & 4.30 \end{bmatrix}$$

Respuesta

- Resulta impráctico (y con mucha imprecisión) calcular el determinante. Sin embargo, simetría aún se puede testear fácilmente.
- Se requiere técnicas numéricas para determinar los valores y vectores propios.