Ecuaciones Diferenciales Parciales

Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v0.34b

EDPs Hiperbólicas

Se llamará EPD hiperbólica a una EDP que tiene la forma:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

y se cumple $B^2 - 4\,A\,C > 0$. O bien, teniendo una forma más general, que es posible reducirla a un caso equivalente al anterior.

- Se asocian con una evolución en el tiempo.
- Su evolución, en general, se asocia a ondas que se mueven.

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [a, b]$. Considerar la ecuación de onda:

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= c^2\, u_{xx}(x,t) \\
u(x,0) &= f(x) \\
u_t(x,0) &= g(x) \\
u(a,t) &= l(t) \\
u(b,t) &= r(t)
\end{aligned}
$$

¿Qué función $u(x,t)$ es solución de la EDP anterior?

Considerar la *ecuación de advección* con coeficiente constante a:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + a\,u_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

donde u es una velocidad de advección.

- La solución exacta de esta ecuación es $u(x,t) = f(x - a\,t)$.
- ¿Cómo se puede interpretar esta solución?

Diferencias Finitas

Reemplazar una derivada por una diferencia de ciertos valores que sea aproximadamente equivalente. El problema contínuo se reemplaza por un problema finito consistente en un número finito de ecuaciones involucrando los valores de las aproximaciones utilizadas sobre valores discretos de función incógnita u.

Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas

¿Cómo puede aplicarse diferencias finitas para la ecuación de onda?

$$u_{tt}(x,t) = c^2\, u_{xx}(x,t)$$

Se tienen las aproximaciones:

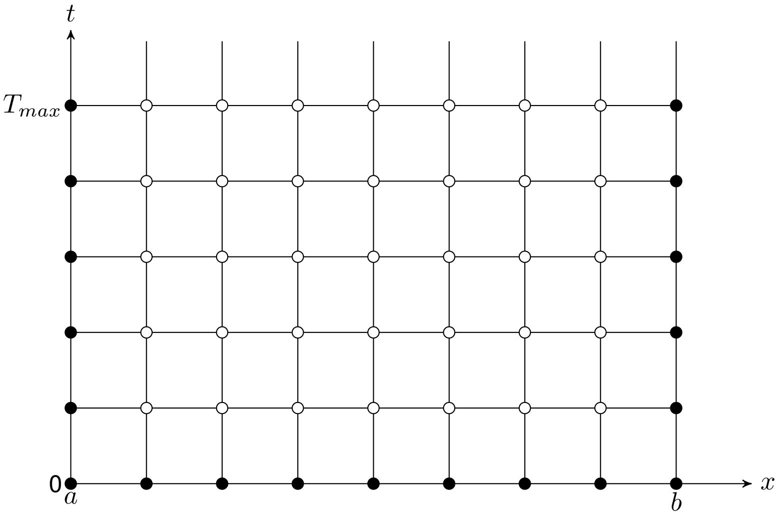
$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2\,u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$
$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - 2\,u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

No se busca resolver la ecuación en todos los puntos, sino únicamente en los puntos de la discretización. Esto es, los valores:

$$\begin{aligned} w_{i,n} \approx u(x_i, t_n) \quad & i \in \{0, 1, \ldots, N_x\} \\ & n \in \{0, 1, \ldots, N_t\}. \end{aligned}$$

Existen por lo tanto $(N_x + 1) \times (N_t + 1)$ incógnitas que se deben encontrar.

Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas



Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas

A diferencia de las ecuaciones elípticas, no se resolverán todas las incógnitas simultáneamente, sino que se hará *evolucionar* la solución:

$$
\begin{array}{cc}
w_{0,0}, w_{1,0}, w_{2,0}, \ldots, w_{N_x,0} & (t = t_0) \\
\downarrow & \\
w_{0,1}, w_{1,1}, w_{2,1}, \ldots, w_{N_x,1} & (t = t_1 = t_0 + \Delta t) \\
\downarrow & \\
w_{0,2}, w_{1,2}, w_{2,2}, \ldots, w_{N_x,2} & (t = t_2 = t_1 + \Delta t) \\
\downarrow & \\
\vdots & \\
\downarrow & \\
w_{0,N_t}, w_{1,N_t}, w_{2,N_t}, \ldots, w_{N_x,N_t} & (t = t_{N_t})
\end{array}
$$

Esquema Explícito

Utilizar las fórmulas diferencias finitas para la segunda derivada:

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2\,u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$
$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - 2\,u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

o utilizando la variable $w_{i,n}$:

$$u_{xx}(x_i,t_n) \approx \frac{w_{i+1,n} - 2\,w_{i,n} + w_{i-1,n}}{\Delta x^2}$$
$$u_{tt}(x_i,t_n) \approx \frac{w_{i,n+1} - 2\,w_{i,n} + w_{i,n-1}}{\Delta t^2}$$

Reemplazando en la Ecuación de onda, se tiene:

$$\frac{w_{i,n+1} - 2\,w_{i,n} + w_{i,n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{w_{i+1,n} - 2\,w_{i,n} + w_{i-1,n}}{\Delta x^2} \right)$$

Sea $\sigma = \dfrac{c\,\Delta t}{\Delta x}$. Reescribiendo la expresión anterior y reordenando términos:

$$w_{i,n+1} = \sigma^2\, w_{i+1,n} + (2 - 2\,\sigma^2) w_{i,n} + \sigma^2\, w_{i-1,n} - w_{i,n-1}$$

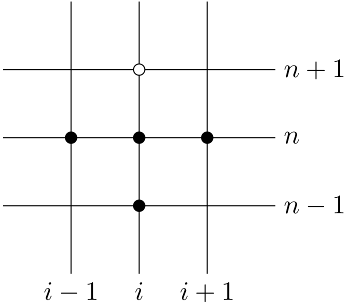
Diferencias Finitas para EDPs Hiperbólicas
Esquema Explícito

El esquema explícito para la ecuación de onda es:

$$w_{i,n+1} = \sigma^2\, w_{i+1,n} + (2 - 2\,\sigma^2) w_{i,n} + \sigma^2\, w_{i-1,n} - w_{i,n-1}$$

con $\sigma = \dfrac{c\,\Delta t}{\Delta x}$.

Stencil:



Para iniciar el método y calcular los puntos $w_{i,1}$ se tiene la ecuación:

$$w_{i,1} = \sigma^2 \, w_{i+1,0} + (2 - 2\,\sigma^2) w_{i,0} + \sigma^2 \, w_{i-1,0} - w_{i,-1}$$

Utilizando la condición $u_t(x, t_0) = g(x)$ y una aproximación de segundo orden, se obtiene:

$$\frac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2\,\Delta t} = g(x_i)$$

Despejando $w_{i,-1}$:

$$w_{i,-1} = w_{i,1} - 2\,\Delta t \, g(x_i)$$

Esta variable $w_{i,-1}$ puede utilizarse en el cálculo de los puntos $w_{i,1}$:

$$
\begin{aligned}
w_{i,1} &= \sigma^2\, w_{i+1,0} + (2 - 2\,\sigma^2) w_{i,0} + \sigma^2\, w_{i-1,0} - w_{i,-1} \\
w_{i,1} &= \sigma^2\, w_{i+1,0} + (2 - 2\,\sigma^2) w_{i,0} + \sigma^2\, w_{i-1,0} - w_{i,1} + 2\,\Delta t\, g(x_i) \\
w_{i,1} &= \frac{\sigma^2}{2}\, w_{i+1,0} + (1 - \sigma^2) w_{i,0} + \frac{\sigma^2}{2}\, w_{i-1,0} + \Delta t\, g(x_i)
\end{aligned}
$$

Agregando notación vectorial:

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{N_x-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}) \end{bmatrix}$$

Además, se define la matriz tridiagonal A:

$$A = \begin{bmatrix} 2-2\,\sigma^2 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma^2 & 2-2\,\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma^2 & 2-2\,\sigma^2 \end{bmatrix}$$

El esquema numérico explícito para el primer paso es:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} A\,\mathbf{w}_0 + \Delta t \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{N_x-2}) \\ g(x_{N_x-1}) \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} l(t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_0) \end{bmatrix}$$

Y para los siguientes pasos:

$$\mathbf{w}_{n+1} = A\,\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1} + \sigma^2 \begin{bmatrix} l(t_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

Ventajas

- Simple de programar.
- Bajo costo computacional.

Desventajas

- Método explícito requiere que $\dfrac{c\,\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ para ser estable (condición CFL).
- Discretización temporal está condicionada a la discretización espacial.
- Error de aproximación: $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Preguntas

- ¿Qué tan bien funcionan los métodos? ¿Se puede tomar cualquier combinación de Δt y Δx?
- ¿Cómo se puede implementar de manera eficiente el método descrito?
- ¿Cómo se extienden los métodos para la ecuación de ondas en 2 dimensiones, $u_{tt}(x,y,t) = c^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t))$?
- ¿Cómo se podrían implementar otras codiciones de frontera (Neumann, Robin, Periódicas)?
- ¿Qué pasaría si se trabajara en coordenadas cilíndricas o esféricas?

Referencias

Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Chapter 8: Partial Differential Equations.