Ayudantía 4 - Initial Value Problem

vlizana

April 27, 2018

1 Ejercicios

1.1 Pregunta 1

Reescriba la siguiente IVP

$$x''(t) + x(t)x'(t) + 4x(t) = t^2, t > 0,$$
$$x(0) = 0, x'(0) = 1,$$

Como un sistema de primer orden y utilice el método de Euler con $h = 0.01$ para calcular el valor aproximado para u(0.2) y v(0.2).

Solución

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ t^2 - u(4+v) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con h = 0.1, $u'_0 = 1$ y $v'_0 = 0$ (Se obtiene de las ODEs)
$n = 0 : t_1 = 0.1$

$$u_1 = u_0 + 0.1u'_0 = 0.1,$$
$$v_1 = v_0 + 0.1v'_0 = 1,$$
$$u'_1 = 1.0, v'_1 = -0.49,$$

$n = 1 : t_2 = 0.2,$

$$u_2 = 0.2,\ v_2 = 0.951$$

1.2 Pregunta 2

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo simple es la siguiente:

$$l\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta(t) = -g\sin(\theta(t))$$
$$\theta(0) = \theta_0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(0) = 0$$

1. Convierta la ecuación en un sistema dinámico.
2. Obtenga la matriz Jacobiana del sistema.
3. Determine analíticamente los valores propios de la matriz jacobiana y determine cuando son puramente reales y puramente imaginarios.

Solución

1. Usamos las funciones

$$\theta_1(t) = \theta(t)$$
$$\theta_2(t) = \theta_1'(t)$$

con lo que el sistema queda

$$\theta_1' = f_1(\theta_1, \theta_2) = \theta_2$$
$$\theta_2' = f_2(\theta_1, \theta_2) = -\frac{g}{l}\sin(\theta_1)$$

2. La matriz jacobiana es la siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\theta_1} & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\theta_2} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\theta_1} & \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\theta_1) & 0 \end{pmatrix}$$

3. De la ecuación de valores propios:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\theta_1) & -\lambda \end{pmatrix} = 0 = \lambda^2 + \frac{g}{l}\cos(\theta_1(t))$$
$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{g}{l}\cos(\theta_1(t))}$$

Entonces los valores propios serán reales cuando $\cos(\theta_1(t)) \leqslant 0$ e imaginarios cuando $\cos(\theta_1(t)) > 0$.

1.3 Pregunta 3

En *planilandia* el líder supremo τ ha decidido colocar guardias que impedirán a todo habitante de esta hermosa ciudad visitar el exterior. Para esto, τ a propuesto que las posiciones para sus guardias seguirán las siguientes ecuaciones de valor inicial no-autónomo definido para $t \in [0, T]$:

$$x'(t) = \frac{-x(t)y(t)}{20} + y^2(t)\sin(t) \tag{1}$$
$$y'(t) = \frac{x^2(t)}{20} - x(t)y(t)\sin(t) \tag{2}$$
$$x(0) = \cos(\theta) \tag{3}$$
$$y(0) = \sin(\theta) \tag{4}$$

Con $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Donde $x(t)$ e $y(t)$ reflejan la posición (x, y) de un guardia en el tiempo. El humilde y valiente ρ desea ayudar a su querido pueblo, por lo que desea saber cual es el trayecto de los guardias.

1. Ayude a ρ en su heroica tarea. Para esto, demuestre que estas dos ecuaciones pueden acoplarse y que los guardias se mueven a través de una figura conocida por usted. Puede usar como información el dato que le ha confiado el espía $\overline{\pi}$, el cual dice que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. sera la posición inicial de los guardias.
   Hint 1 :Can you see something in common? What is needed in (1) that's exists on (2)? What is needed in (2) that's exists on (1)? Hint 2: Recall $\frac{d}{dx}(f^2(x)) = 2f(x)f'(x)$.
2. Gracias a la valiosa información y ayuda de los aldeanos cuadrados, triángulos y los hermanos rombos pinchudos, se ha filtrado el dato de que solo un guardia estará de turno en la noche X, por lo que los habitantes de *planilandia* desean saber la ubicación del guardia para poder escapar. Debido a que no saben como hacerlo, han requerido de su ayuda. ρ le ha propuesto convertir el problema en un sistema autónomo, y que realice 3 iteraciones para saber la posición del guardia en ese momento y dar la señal a los aldeanos para escapar y ser libres.

Respuesta

1. Multiplicamos (1) por x, (2) por y:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{-x(t)y(t)}{20} + y^2(t)\sin(t) && / \cdot x(t) \\
y'(t) &= \frac{x^2(t)}{20} - x(t)y(t)\sin(t) && / \cdot y(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x'(t)x(t) &= \frac{-x^2(t)y(t)}{20} + x(t)y^2(t)\sin(t) \\
y'(t)y(t) &= \frac{x^2(t)y(t)}{20} - x(t)y^2(t)\sin(t)
\end{aligned}
$$

Sumando las 2 ecuaciones vemos que se cancelan todos los términos, quedándonos :

$$x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) = 0$$

Usando la regla de derivación $\dfrac{d(f(x)^2)}{dx} = 2f(x)f'(x)$:

$$x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) = 0 \qquad / \cdot 2$$

$$2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$$

$$(x^2(t))' + (y^2(t))' = 0$$

Antiderivando tenemos:

$$(x^2(t))' + (y^2(t))' = 0 \qquad \Big/ \int$$

$$x^2(t) + y^2(t) = C$$

Reemplazando en las condiciones iniciales:

$$x^2(0) + y^2(0) = C$$

$$cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = C$$

$$C = 1$$

Por lo tanto la ecuación queda como:

$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

Lo cual observamos que es la ecuación de un círculo de radio 1.

2. Hacemos que $z(t) = t$, por lo que nuestra ecuación quedaría como:

$$x'(t) = \frac{-x(t)y(t)}{20} + y^2(t)\sin(z(t)) \tag{1}$$
$$y'(t) = \frac{x^2(t)}{20} - x(t)y(t)\sin(z(t)) \tag{2}$$
$$z'(t) = 1$$

Definimos nuestra función F la cual recibirá un vector como *input*:

Usando Euler tenemos que:

$$y_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.70710678 \\ 0.70710678 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algorithm 1 F function for euler

function $\mathrm{F}(y0)$
  $sol = []$
  $sol[0] \leftarrow (-y0[0] * y0[1]/20 + y0[1] * *2 * sin(y0[2]))$
  $sol[1] \leftarrow (y0[1] * *2/20 - y0[0] * y0[1] * sin(y0[2]))$
  $sol[2] \leftarrow (1)$
  return sol
end function

$$y_1 = y_0 + h * F(y_0) = \begin{pmatrix} 0.70710678 \\ 0.70710678 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 * \begin{pmatrix} -0.025 \\ 0.025 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0.70710678 \\ 0.70710678 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0025 \\ 0.0025 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0.70460678 \\ 0.70960678 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Repitiendo el proceso tenemos:

$$y_2 = \begin{pmatrix} 0.70713384 \\ 0.70713288 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 0.71456785 \\ 0.69969885 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto deben evitar la posición $(0.71456785, 0.69969885)$ en el segundo 0.3. Además, saben la dirección del guardia con las primeras 3 iteraciones, por lo que el resto del pueblo puede escapar a sus espaldas.