Certamen N^{o}2 Computación Científica II
SCT - Sá.29.10.16

1. **Respuesta:**

(a) Los errores de cada método se obtendrán al tiempo $T = 1$ y se modelarán de la siguiente forma: $C\,\Delta t^{\alpha}$.

Método	Δt	Error $= \lvert y_{\text{exact}}(1) - y_{m_i}^{(-1)}\rvert$	$\log_{10}(\text{Error})$
1	1	0.003403	-2.468138051
1	1/3	0.001635	-2.786482243
2	1	0.008162	-2.08820341
2	1/3	0.000119	-3.924453039
3	1	0.319776	-0.495154134
3	1/3	0.10716	-0.969967295

Tabla 1: Errores en el tiempo $T = 1$

Ahora se obtendrá la estimación de C y α para cada método por medio de una regresión lineal en escala logarítmica, por lo tanto la ecuación lineal queda de la siguiente forma: $\log_{10}(\text{Error}) = \underbrace{\log_{10}(C)}_{\widehat{C}} + \alpha\,\log_{10}(\Delta t)$.

Método	$\widehat{C}$	α
1	-2.468138051	0.667218635
2	-2.08820341	3.84860161
3	-0.495154134	0.995162458

Tabla 2: Orden de cada método

El orden de cada método se indica en la tercera columna de la Tabla 2.

(b) Claramente el módulo 2 es el más conveniente dado que tiene el mayor orden que indica que no necesita un Δt tan pequeño para obtener un error my bajo.

(c) Para obtener tiempo de computación de cada módulo se necesita obtener el Δt necesario de cada módulo tal que el error sea menor o igual que 10^{-7}, para obtener Δt se puede despejar de las ecuaciones obtenidas en la parte **(a)**. Es decir de $10^{-7} = C\,\Delta t^{\alpha}$ obtenemos $\Delta t = \sqrt[\alpha]{\dfrac{10^{-7}}{C}}$. Además podemos obtener el número de pasos temporales como $N = \lceil 1/\Delta t \rceil$. En la siguiente Tabla se organizan los resultados.

Método	Δt	N	Tiempo de Computación
1	$1.61373E-07$	6196827	$6196827\,\tau$
2	0.052935268	19	$19\,\tau$
3	$2.90759E-07$	3439271	$3439271\,\tau$

Tabla 3: Tiempo de computación

2. **Respuesta:**

(a)

Se considerará la siguiente notación $U_j \approx u(x_j)$. De la pregunta se puede obtener que $U_0 = 0$ y $U_n = 0$. La aproximación de la segunda derivada se puede hacer con diferencias finitas:

$$u''(x_j) = \frac{U_{j+1} - 2\,U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2} + \mathrm{O}(\Delta x^2)$$

donde $\Delta x = \frac{6}{n}$. Reemplazando en la ecuación diferencial y omitiendo términos de error se obtiene:

$$-(0.1)^2\,\frac{U_{j+1} - 2\,U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2} + x_j^2\,U_j = \lambda\,U_j, \quad \forall j = 1 : n-1$$

Ahora se definirá el vector $\vec{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}\rangle^T$ y la matriz tridiagonal D_n de la siguiente forma:

$$D_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y de la matriz diagonal $X_n = \mathrm{diag}(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n-1}^2)$, con lo cual obtenemos la siguiente ecuación vectorial:

$$\frac{-(0.1)^2}{\Delta x^2}\,D_n\,\vec{U} + X_n\,\vec{U} = \lambda\,\vec{U}$$

lo cual puede simplificarse como:

$$\underbrace{\left(\frac{-(0.1)^2}{\Delta x^2}\,D_n + X_n\right)}_{A}\,\vec{U} = \lambda\,\vec{U}$$

por lo tanto el algoritmo para encontrar soluciones no nulas de la ecuación diferencial se convierte en la búsqueda de valores y vectores propios de la matriz A. Lo vectores propios de A corresponden a las soluciones no nulas y los valores propios a los λ, respectivamente.

El algoritmo se reduce a los siguientes pasos:

I) Recibir input n

II) Construir las matrices D_n y X_n

III) Formar la matriz $A = \frac{-(0.1)^2}{\Delta x^2}\,D_n + X_n$

IV) Obtener los valores y vectores propios de A.

V) Output: La salida son los valores y vectores propios respectivamente.

3. **Respuesta:**

(a) Sea $q_1(t) = q(t)$ y $q_2(t) = q'(t) = q_1'(t)$. Entonces, se tienen las ecuaciones:

$$q_1'(t) = q_2(t) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} Lq_2'(t) + Rq_2(t) + \frac{1}{C}q_1(t) &= 0 \\ q_2'(t) &= -\frac{1}{LC}q_1(t) - \frac{R}{L}q_2(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Las cuales quedan expresadas en un sistema dinámico como:

$$\begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ -\frac{1}{LC}q_1(t) - \frac{R}{L}q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Con condiciones iniciales $\vec{\mathcal{Q}}_0 = \begin{bmatrix} Q_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$.

(b) Reemplazando los valores de R, L y C en el sistema dinámico, se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Donde la matriz jacobiana del sistema tiene valores propios $\lambda_1 = -3 + \sqrt{\frac{34}{4}} \approx -0.085$ y $\lambda_2 = -3 - \sqrt{\frac{34}{4}} \approx -5.915$ (valores propios reales y negativos). La condición de estabilidad para el Método de Euler es $|1 + \Delta t\lambda| < 1$, la que puede ser desarrollada como:

$$\begin{aligned} |1 + \Delta t\lambda| &< 1 \\ -1 < 1 + \Delta t\lambda &< 1 \\ -2 < \Delta t\lambda &< 0 \\ -\frac{2}{\lambda} > \Delta t &> 0 \end{aligned}$$

Con λ_1, el paso del tiempo queda acotado por $\Delta t < -23.662$, mientras que con λ_2 se tiene la cota $\Delta t < 0.338$. Luego, λ_2 establece una cota superior para el paso del tiempo.

(c) Considerar valores de R, L, C tal que $R^2 \geq 4\dfrac{L}{C}$. El sistema dinámico es:

$$\begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Luego, los valores propios de la matriz Jacobiana están dados por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\lambda - \frac{R}{L} \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda\left(-\lambda - \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\right) \\ \lambda_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\right) \\ \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\right) \end{aligned}$$

Ahora se verificará que para $R^2 \geq 4\frac{L}{C}$, los valores propios λ_1 y λ_2 son siempre reales y negativos.

- Considerar el primer caso donde $R^2 = 4\frac{L}{C}$, que puede reescribirse como $\frac{R^2}{L^2} = \frac{4}{LC}$ al multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{L^2}$, con lo que $\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} = 0$. Entonces, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L}$, valores reales y negativos.
- Considerar el segundo caso donde $R^2 > 4\frac{L}{C}$, lo que quiere decir que $\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} > 0$ y los valores propios son reales. Luego, para que λ_1 sea negativo debe cumplirse que $\frac{R}{L} > \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}$ lo que se verifica al reescribir la desigualdad como $\sqrt{\frac{R^2}{L^2}} > \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}$ que siempre es verdadero. λ_2 siempre es un valor negativo.

Ya que los valores propios son reales y negativos, la misma desigualdad del Método de Euler de la pregunta anterior puede ser usada. El valor λ_2 será usado para establecer una cota, ya que entrega un valor más acotado para Δt. Finalmente, $\Delta t < \alpha$, con α dado por:

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{4L}{R} & \text{si } R^2 = 4\dfrac{L}{C} \\ \\ RC - \sqrt{R^2C^2 - 4LC} & \text{si } R^2 > 4\dfrac{L}{C} \end{cases}$$

4. **Respuesta:**

(a) Utilizando Diferencias Finitas, se discretizarán la primera y segundas derivadas como:

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} \approx \frac{w_{i+1,j} - w_{i+1,j}}{2\Delta r} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta r^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} \approx \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta \theta^2} \tag{7}$$

Reemplazando en la EDP:

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i}\frac{w_{i+1,j} - w_{i+1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2}\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta \theta^2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2r_i\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{i-1,j} + \left(-\frac{1}{2r_i\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{i+1,j} + \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2\Delta\theta^2}\right) w_{i,j} - \frac{1}{r_i^2\Delta\theta^2} w_{i,j-1} - \frac{1}{r_i^2\Delta\theta^2} w_{i,j+1} = 0$$

(b) Considerar $N_\theta = \frac{\frac{\pi}{2}}{\Delta\theta}$ y $N_r = \frac{3-1}{\Delta r} = \frac{2}{\Delta r}$. Para las condiciones de Dirichlet, la discretización es:

$$u(1,\theta_j) = u(r_1,\theta_j) = w_{1,j} = 2 \qquad \forall j \in \{0,1,\ldots,N_\theta\} \tag{8}$$

$$u(3,\theta_j) = u(r_{N_r+1},\theta_j) = w_{N_r+1,j} = 3 \qquad \forall j \in \{0,1,\ldots,N_\theta\} \tag{9}$$

Para la condiciónes de Neumann, la discretización es:

$$u_\theta(r_i,0) = u_\theta(r_i,\theta_0) = \frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{\Delta\theta} = \sin\left(\frac{r_i\pi}{4}\right) \qquad \forall i \in \{1,\ldots,N_r+1\} \tag{10}$$

$$u_\theta\left(r_i,\frac{\pi}{2}\right) = u_\theta(r_i,\theta_{N_\theta}) = \frac{w_{i,N_\theta} - w_{i,N_\theta-1}}{\Delta\theta} = \cos(r_i\pi) - 1 \qquad \forall i \in \{1,\ldots,N_r+1\} \tag{11}$$

(c) Con el caso particular $\Delta r = 1$ y $\Delta\theta = \frac{\pi}{8}$, entonces $N_r = 2$, $N_\theta = 4$, $i \in \{1,2,3\}$ y $j \in \{0,1,2,3,4\}$. Luego, los puntos interiores son $w_{2,1}$, $w_{2,2}$ y $w_{2,3}$. El sistema de ecuaciones para encontrar los puntos interiores está compuesto por las ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{2r_2\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{1,1} + \left(-\frac{1}{2r_2\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{3,1} + \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_2^2\Delta\theta^2}\right) w_{2,1} - \frac{1}{r_2^2\Delta\theta^2} w_{2,0} - \frac{1}{r_2^2\Delta\theta^2} w_{2,2} = 0 \tag{12}$$

$$\left(\frac{1}{2r_2\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{1,2} + \left(-\frac{1}{2r_2\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{3,2} + \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_2^2\Delta\theta^2}\right) w_{2,2} - \frac{1}{r_2^2\Delta\theta^2} w_{2,1} - \frac{1}{r_2^2\Delta\theta^2} w_{2,3} = 0 \tag{13}$$

$$\left(\frac{1}{2r_2\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{1,3} + \left(-\frac{1}{2r_2\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) w_{3,3} + \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_2^2\Delta\theta^2}\right) w_{2,3} - \frac{1}{r_2^2\Delta\theta^2} w_{2,2} - \frac{1}{r_2^2\Delta\theta^2} w_{2,4} = 0 \tag{14}$$

Los valores conocidos del sistema son $w_{1,1} = w_{1,2} = w_{1,3} = 2$ y $w_{3,1} = w_{3,2} = w_{3,3} = 3$ por ser condiciones de Dirichlet. Del mismo modo, expresiones para $w_{2,0}$ y $w_{2,4}$ pueden obtenerse a partir de las condiciones de Neumann (Ecuaciones (10) y (11)):

$$\begin{aligned} \frac{w_{2,1} - w_{2,0}}{\Delta\theta} &= \sin\left(\frac{r_2\pi}{4}\right) \\ \frac{w_{2,1} - w_{2,0}}{\frac{\pi}{8}} &= \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ \frac{w_{2,1} - w_{2,0}}{\frac{\pi}{8}} &= 1 \\ w_{2,1} - w_{2,0} &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{2,4} - w_{2,3}}{\Delta\theta} &= \cos(r_2\pi) - 1 \\ \frac{w_{2,4} - w_{2,3}}{\frac{\pi}{8}} &= \cos(2\pi) - 1 \\ \frac{w_{2,4} - w_{2,3}}{\frac{\pi}{8}} &= 0 \\ w_{2,4} - w_{2,3} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplzando valores conocidos, el sistema de ecuaciones puede expresarse matricialmente:

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{16}{\pi^2} & 2+\frac{32}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^2} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{16}{\pi^2} & 2+\frac{32}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{16}{\pi^2} & 2+\frac{32}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^2} \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{2,0} \\ w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{\pi}{8} \\ \frac{21}{4} \\ \frac{21}{4} \\ \frac{21}{4} \\ 0
\end{bmatrix}
$$