QUIZ 8 - ILI286
PRIMAVERA 2017 - MI 06.12.17

NOMBRE: PAUTA ROL: ______

Responda las siguientes preguntas de forma personal. **Tiempo Máximo:** 40 minutos.

Sea $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ una partición **equiespaciada** y $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$.

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{\Delta x}{6} \tag{2}$$

$$\int_a^b (\phi_i(x))^2\mathrm{d}x = \frac{2\,\Delta x}{3} \tag{3}$$

$$\int_a^b \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\Delta x} \tag{4}$$

$$\int_a^b (\phi_i'(x))^2\mathrm{d}x = \frac{2}{\Delta x} \tag{5}$$

1. **[40 puntos]** Demuestre la ecuación (3).
2. **[60 puntos]** Considere la Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$-u''(x) = 3\,u(x) \tag{6}$$
$$u(0) = 3 \tag{7}$$
$$u(2) = 1 \tag{8}$$

Construya un algoritmo basado en el *Método de Elementos Finitos* que determine puntos $x_i \in [0, 2]$ tales que $\dfrac{1}{u(x_i)} < \alpha$, con $\alpha$ un parámetro del algoritmo. Queda a su criterio la elección de $x_i$, pero debe explicitarla. Además, deberá indicar todas las ecuaciones, restricciones, sistemas lineales y/o otros elementos que considere relevantes en su respuesta.

1) $$\int_a^b (\phi_i(x))^2 dx = \int_{x_0}^{x_{i-1}} (\phi_i(x))^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i(x))^2 dx + \int_{x_{i+1}}^{x_n} (\phi_i(x))^2 dx$$

$$= 0 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 dx + 0$$

Sea $z = \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, entonces $dz = \dfrac{1}{(x_i - x_{i-1})} dx$

$$\Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 dx = \int_{z_0}^{z_1} z^2 (x_i - x_{i-1})\, dz = (x_i - x_{i-1}) \frac{z^3}{3}\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{(x_i - x_{i-1})}{3}\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^3\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{\Delta x}{3}$$

Sea $w = \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$, entonces $dw = \dfrac{1}{(x_{i+1} - x_i)} dx$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 dx = \int_{w_0}^{w_1} w^2 (x_{i+1} - x_i)\, dw = (x_{i+1} - x_i) \frac{w^3}{3}\Big|_{w_0}^{w_1} = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{3}\left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right)^3\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{\Delta x}{3}$$

$$\therefore \int_a^b (\phi_i(x))^2 dx = 0 + \frac{\Delta x}{3} + \frac{\Delta x}{3} + 0 = \frac{2\Delta x}{3} \quad \square$$

2) $-u''(x) = 3u(x)$

$u(0) = 3$

$u(2) = 1$

Primero, es necesario llevar la EDO a la formulación débil:

$$-\int_0^2 u''(x)v(x)\,dx - 3\int_0^2 u(x)v(x)\,dx = 0$$

Escoger $v(x) \in H_0^1[0,2]$, entonces mediante integración por partes:

$$-\int_0^2 u''(x)v(x)\,dx = \cancelto{0}{-u'(x)v(x)\Big|_0^2} + \int_0^2 u'(x)v'(x)\,dx$$

Reemplazando; se obtiene la formulación débil:

$u(0) = 3$

$u(2) = 1$

$$\int_0^2 u'(x)v'(x)\,dx - 3\int_0^2 u(x)v(x)\,dx = 0$$

para $u(x) \in H^1[0,2]$, $v(x) \in H_0^1[0,2]$.

Escogiendo

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x)$$

$$v(x) = \phi_K(x) \quad \text{para } K = 1, \dots, n-1$$

Se obtienen las ecuaciones válidas para una partición equiespaciada:

$$u(x_0) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x_0) = c_0 \cdot \phi_0(x_0) = c_0 = 3$$

$$u(x_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x_n) = c_n \cdot \phi_n(x_n) = c_n = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\left(\int_0^2 \phi_i'(x)\phi_K'(x)\,dx - 3\int_0^2 \phi_i(x)\phi_K(x)\,dx\right) = 0, \quad \text{para } K = 1, \dots, n-1$$

con $x_i = \frac{2i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

Sea

$$\beta = \int_0^2 \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\,dx - 3\int_0^2 \phi_i(x)\phi_{i+1}\,dx \qquad i=0,\dots,n$$

$$\mu \int_0^2 (\phi_i'(x))^2\,dx - 3\int_0^2 (\phi_i(x))^2\,dx$$

Se debe resolver el siguiente sistema lineal, de $n-1$ ecuaciones y $n-1$ incógnitas

$$\begin{bmatrix} \mu & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \mu & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \mu & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \mu & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -\beta c_n \end{bmatrix}$$

Donde $c_i \approx u(x_i)$. Finalmente el algoritmo debe entregar todos los valores $x_i$ tales que $c_i > \dfrac{1}{\alpha}$.