Guía de ejercicios 6 CC2

Sebastián Acevedo

Octubre 2019

1

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + y(t) = sin(t)$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 1$$

a) Exprese la ecuación en su weak form.

b) Proponga un algoritmo que resuelva la ecuación de elementos finitos con 3 nodos.

2

En un experimento se usaron 3 métodos m para resolver un IVP de la forma $\dot{y} = f(t, y)$ y condición $y(0) = 0$, consiguiendo los siguientes resultados de dos experimentos con paso de tiempo distinto:

t_n	$y_{exacto}(t_n)$	$y_{metodo1}(t_n)$	$y_{metodo2}(t_n)$	$y_{metodo3}(t_n)$
0	1	1	1	1
1	2.319776	2.316373	2.311614	2.000000

t_n	$y_{exacto}(t_n)$	$y_{metodo1}(t_n)$	$y_{metodo2}(t_n)$	$y_{metodo3}(t_n)$
0	1	1	1	1
0.3333	1.317071	1.383500	1.387034	1.333333
0.6666	1.855900	1.851951	1.855817	1.753314
1	2.319776	2.321411	2.319657	2.212616

a) Determine el orden de cada método. Recuerde que el orden de un método de resolución de IVP es el α para el cual el error de aproximación puede ser exprezado como $c\Delta t^{\alpha}$

b) Indique cual método considera más conveniente desde el punto de vista del orden.

c) Considerando que todos los métodos se demoran una unidad de timepo τ en un paso temporal. ¿Cuánto se demorara cada método en obtener una aproximación con un error menor o igual a 10^{-7} ?.

Desarrollos

1

Se multiplica por un $\sigma_k(t)$ y se integra en el dominio de la función:

$$
\begin{aligned}
y''(t) + y(t) &= \sin(t) \\
y''(t)\sigma_k(t) + y(t)\sigma_k(t) &= \sin(t)\sigma_k(t) \\
\int_0^1 y''(t)\sigma_k(t)dt + \int_0^1 y(t)\sigma_k(t)dt &= \int_0^1 \sin(t)\sigma_k(t)dt \\
y'(t)\sigma_k(t)/_0^1 - \int_0^1 y'(t)\sigma_k'(t)dt + \int_0^1 y(t)\sigma_k(t)dt &= \int_0^1 \sin(t)\sigma_k(t)dt \\
- \int_0^1 y'(t)\sigma_k'(t)dt + \int_0^1 y(t)\sigma_k(t)dt &= \int_0^1 \sin(t)\sigma_k(t)dt
\end{aligned}
$$

Considerando $y(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i\sigma_i(t)$:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \sum_{i=0}^{n+1} c_i\sigma_i'(t)\sigma_k'(t)dt + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n+1} c_i\sigma_i(t)\sigma_k(t)dt &= \int_0^1 \sin(t)\sigma_k(t)dt \\
-\sum_{i=0}^{n+1} \int_0^1 c_i\sigma_i'(t)\sigma_k'(t)dt + \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^1 c_i\sigma_i(t)\sigma_k(t)dt &= \int_0^1 \sin(t)\sigma_k(t)dt
\end{aligned}
$$

Expandiendo para $k = 1$, solo "sobreviviran" los factores con $i = 0$, $i = 1$ y $i = 2$, pues el resto se estarán multiplicando por 0:

$$
\begin{aligned}
& c_0\left(-\int_0^1 \sigma_0'(t)\sigma_1'(t)dt + \int_0^1 \sigma_0(t)\sigma_1(t)dt\right) + c_1\left(-\int_0^1 \sigma_1'(t)\sigma_1'(t)dt + \int_0^1 \sigma_1(t)\sigma_1(t)dt\right) \\
& + c_2\left(-\int_0^1 \sigma_2'(t)\sigma_1'(t)dt + \int_0^1 \sigma_2(t)\sigma_1(t)dt\right) = \int_0^1 \sin(t)\sigma_1(t)dt \\
& \to c_0(1/\Delta t + \Delta/6) + c_1(-2/\Delta t + 2\Delta t/3) + c_2(1/\Delta t + \Delta/6) = \int_0^1 \sin(t)\sigma_1(t)dt \\
& \to c_1\alpha + c_2\beta + c_3\alpha = g_1
\end{aligned}
$$

Para $k = 2$ se tiene entonces $c_2\alpha + c_3\beta + c_4\alpha = g_2$ y para $k = 3$ se tendrá $c_2\alpha + c_3\beta + c_4\alpha = g_3$. Las incognitas son c_0, c_1, c_2, c_3 y c_4, y solo tenemos 3 ecuaciones. Esto porque aun hace falta añadir las condiciones de borde.

Se tiene que $y(0) = c_0\sigma_0(0) = c_0 = 0$. También se tiene $y(1) = c_4\sigma_4(1) = c_4 = 1$.

Luego, se tiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 - 1 \end{bmatrix}$$

El cual puede ser resuelto con PALU, Cholesky, métodos iterativos, etc. Notar que gran parte del desarrollo puede ser saltado y empezar directamente con las ecuaciones finales.

2

Se tiene que el error $e = c\Delta t^{\lambda}$. Usando los datos de las tablas con $t_n = 1$ es posible despejar las constantes c y λ.

- Método 1: Con $\Delta t = 1$ el error es de $|2.319776 - 2.316373| = 0.003403$. Con Con $\Delta t = 0.3333$ el error es de $|2.319776 - 2.321411| = 0.001635$. Con estos datos se tiene la siguiente ecuación.

  $$0.003403 = c * 1^{\lambda}$$
  $$0.001635 = c * 0.333^{\lambda}$$

  Aplicando logaritmo se tiene:

  $$\log(0.003403) = \log(c) + \lambda \log(1)$$
  $$\log(0.001635) = \log(c) + \lambda \log(0.3333)$$

  Resolviendo la ecuación se tiene $\lambda = 0.6665$.

- Método 2: Con $\Delta t = 1$ el error es de $|2.319776 - 2.311614| = 0.008162$ Con Con $\Delta t = 0.3333$ el error es de $|2.319776 - 2.319657| = 0.000119$. Con estos datos se tiene la siguiente ecuación.

  $$0.008162 = c * 1^{\lambda}$$
  $$0.000119 = c * 0.333^{\lambda}$$

  Aplicando logaritmo se tiene:

  $$\log(0.008162) = \log(c) + \lambda \log(1)$$
  $$\log(0.000119) = \log(c) + \lambda \log(0.3333)$$

  Resolviendo la ecuación se tiene $\lambda = 3.848$.

- Método 3: Con $\Delta t = 1$ el error es de $|2.319776 - 2.000000| = 0.319776$ Con Con $\Delta t = 0.3333$ el error es de $|2.319776 - 2.212616| = 0.10716$. Con estos datos se tiene la siguiente ecuación.

  $$0.319776 = c * 1^{\lambda}$$
  $$0.10716 = c * 0.333^{\lambda}$$

Aplicando logaritmo se tiene:

$$\log(0.319776) = \log(c) + \lambda \log(1)$$
$$\log(0.10716) = \log(c) + \lambda \log(0.3333)$$

Resolviendo la ecuación se tiene $\lambda = 0.995$.

b) Queremos un λ grande de manera que el error se haga pequeño a medida que $Deltat$ tambien sea pequeño (un numero pequeño elevado a un numero grande es un numero más pequeño!). Es por esto que se elige el método 2.

c)

- Se tiene que $0.003403 = 0.003403\Delta t^{0.6665} < 10^{-7}$. Aplicando logaritmo se tiene $\log(0.003403) + 0.6665 \log(\Delta t) < -7 \log(10)$. Resolviendo se tiene que $\Delta t < 1.21e-9$. Conociendo Δt, podemos saber que se harán $\lceil \frac{1}{\Delta t} \rceil$ pasos y cada paso se demorará τ. Por lo que se tiene que tardará $\lceil \frac{1}{1.21e-9} \rceil \tau = 8.26e8\tau$.
- $\log(0.008162) + 3.848 \log(\Delta t) < -7 \log(10)$. Resolviendo se tiene $\Delta t < 0.026$. Por lo que se tiene que tardará $\lceil \frac{1}{0.026} \rceil \tau = 39\tau$.
- $\log(0.319776) + 0.995 \log(\Delta t) < -7 \log(10)$. Resolviendo se tiene $\Delta t < 1.516e-7$. Por lo que se tiene que tardará $\lceil \frac{1}{1.516e-7} \rceil \tau = 6.59e6\tau$.