Ayudantía Integración Numérica

vlizana

April 12, 2018

1 Riemann

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \sum f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

problema: Δx debe ser muy pequeño para tener una buena aproximación.

2 Newton-Cotes

Aproximar utilizando polinomios:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum p(x_i, x_{i+1}, \dots)$$

2.1 Midpoint

polinomios de grado 0 (constantes).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$$

Error de midpoint

$$\frac{b-a}{24}\Delta x^2 f''(c); \quad c \in [a, b]$$

2.2 Trapezoid

polinomios de grado 1 (lineales).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\right)$$

Error de trapezoid

$$\frac{b-a}{12}\Delta x^2 f''(c); \quad c \in [a,b]$$

2.3 Simpson

polinomios de grado 2 (cuadráticos). Estos toman 3 puntos, ya que por dos puntos pasan infinitas parábolas, por lo tanto el numero total de puntos debe ser impar.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{3} \right)$$

Error de simpson

$$\frac{b-a}{180}\Delta x^4 f^{(4)}(c); \quad c \in [a,b]$$

2.4 Gaussian Quadrature

Misma idea que la interpolación de Chebyshev, si uno tiene la capacidad de elegir los puntos en los que puede evaluar, ¿cuáles son los mejores puntos de evaluación? (menor error con menor cantidad de evauaciones).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum w_i f(x_i)$$

en donde los w_i corresponden a los pesos de cada punto, puede verse como una especie de Midpoint con rectángulos de ancho variable. Los pesos no dependen de la función, si no que solo de la cantidad de puntos a utilizar.

Inicialmente solo funciona entre -1 y 1, sin embargo se puede extender a cualquier intervalo.

Error cuadratura Gaussiana

La cuadratura Gaussiana puede calcular la integral exacta de cualquier polinomio de grado $2n-1$ con n evaluaciones.

3 Preguntas

Ejercicio 1.-

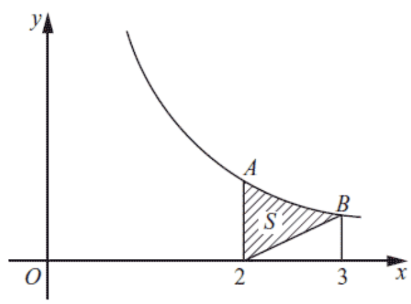
Dada la siguiente ecuación

$$y = \frac{5}{3x^2 - 2}$$

1. Complete la tabla adjunta. Escriba los valores de y con dos decimales.

x	2	2.25	2.5	2.75	3
y	0.5	0.38			0.2

2. Use la regla del trapecio utilizando los valores de su tabla para encontrar el valor de la integral $\int_2^3 \frac{5dx}{3x^2-2}$



La figura anterior muestra parte de la curva con ecuación $y = \frac{5}{3x^2-2}, x > 1$. Se muestra además una región sombreada que es limitada por la curva, una linea entre B y (2,0) además de una linea paralela al eje y que une (2,0) con A.

3. Usando su respuesta de la parte 2 encuentre una aproximación numérica del área S.

Respuesta

1. Se evalúa en la función y se obtiene lo siguiente:

x	2	2.25	2.5	2.75	3
y	0.5	0.38	0.30	0.24	0.2

2. Utilizando la regla del trapecio tenemos:
$\int_2^3 \frac{5dx}{3x^2-2} \approx \frac{0.25}{2}[0.5 + 2(0.38 + 0.30 + 0.24) + 0.2] = 0.3175 \approx 0.32$

3. Sabemos que el área bajo la curva entre 2 y 3 es calcular la integral anterior. Ahora usando la tabla podemos calcular el área del triangulo.

   $AreaS = 0.3175 - \frac{(1)(0.2)}{2} = 0.2175$

Ejercicio 2.-

El método de Monte Carlo es otra forma de estimar el valor numérico de integrales. El método se basa en el cálculo de probabilidades, por ejemplo, si graficamos $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el primer cuadrante obtenemos:

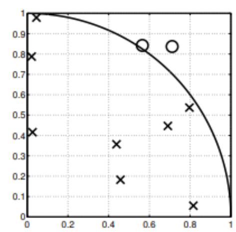


Figura 1: Línea sólida: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\times$ puntos bajo $f(x)$ y $\circ$ para puntos sobre $f(x)$

Donde las $\times$ y $\circ$ fueron generados aleatoriamente en $[0,1]^2$ con una distribución uniforme. En este caso sabemos que tenemos una probabilidad de $\pi/4$ (área bajo la curva sobre el área total) de acertar bajo la línea sólida. En la figura se observa que hay 8 $\times$s bajo la línea sólida de un total de 10, por lo que $\pi/4$ es aproximadamente $8/10 = 0.8$ (i.e. $\pi \approx 3.2$).

1. Considere ahora que se obtuvo la siguiente tabla en función del número de evaluaciones.

Número de Evaluaciones	Valor Estimado
10^1	3.2
10^2	3.112
10^3	3.1192
10^4	3.14568
10^5	3.140104

   Determine el orden del método.

2. Estime el valor de π por medio de integración numérica utilizando 10 puntos equiespaciados y calcule el error asociado.

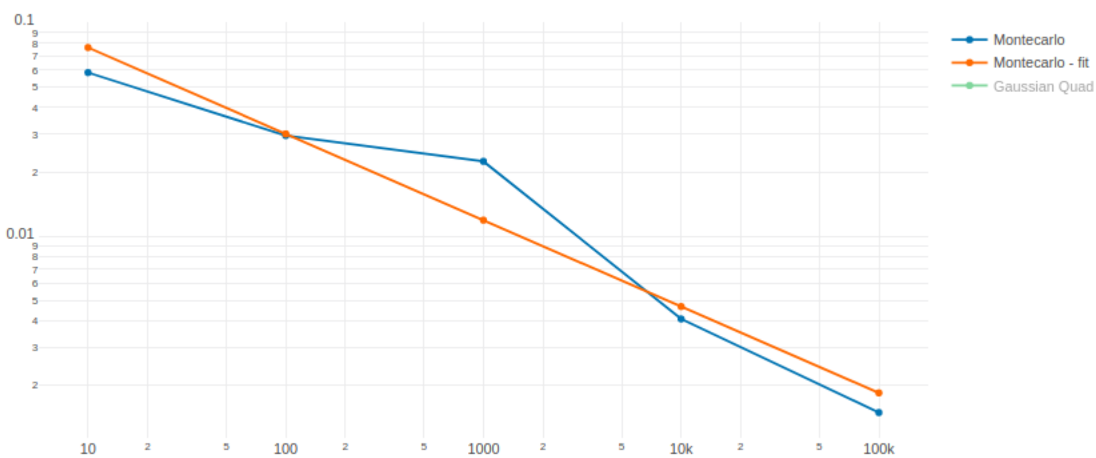
Respuesta

El orden del método en general viene dado por el comportamiento del error en función de la cantidad de puntos. En general, tenemos algo de la forma $e \leqslant cn^{-k}$, en donde n es la cantidad de puntos y k el órden del método. Utilizamos logaritmo para despejar:

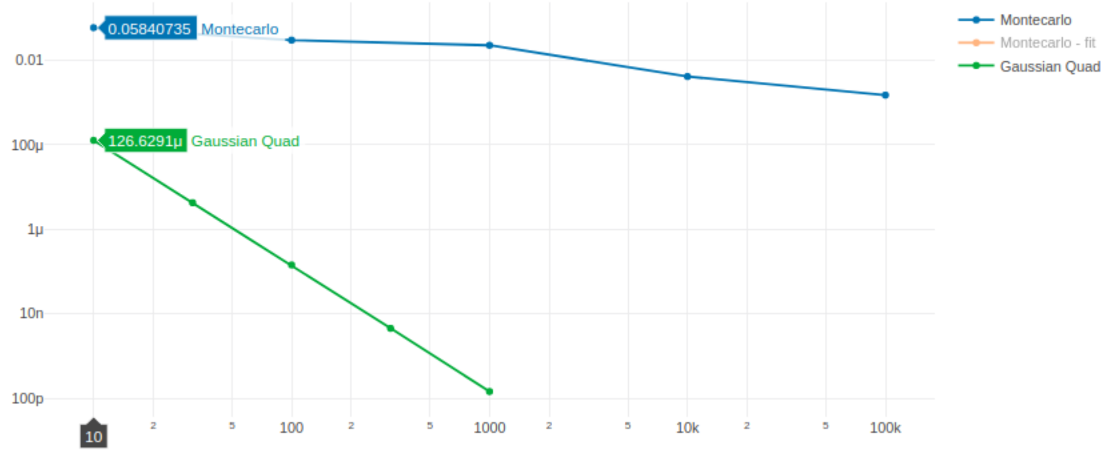
$$\log_{10}(e) = -k \cdot \log_{10}(n) + \log_{10}(c)$$

Entonces los logaritmos de los errores deberían comportarse como una recta, de la cual nos interesa la pendiente. Bastaría con tomar dos puntos aunque también se puede hacer mínimos cuadrados.

La pendiente en este caso utilizando mínimos cuadrados es ≈ -0.4, por lo que el orden del método es 0.4.



Utilizando cuadratura Gaussiana el error ya es mucho menor con 10 puntos, y la pendiente es mucho más pronunciada.



Ejercicio 3.-

Se tiene la siguiente integral:

$$u(y) = \int_0^y \left(\frac{(1 - cos^2(x))e^{cos(x)}}{sec(x)sin(x)} \right) dx, \quad y \in [0, \infty[$$

1. ¿Cual es el valor y para que $u(y) = 1$?
2. Si asumimos ahora que:

$$u(y) = \int_0^y f(x)dx$$

   ¿Como podemos el valor de y para $u(y) = c$? Cree la función *find_value(c, f, m)* donde:

   (a) c: El valor a encontrar.

   (b) f: La función de la integral.

   (c) m: El número de puntos.

   Que devuelva el valor y necesario para que $u(y) = c$. Puede usar pseudo-código o escribir un algoritmo.

Respuesta

1. Tenemos la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
u(y) &= \int_0^y \left(\frac{(1-cos^2(x))e^{cos(x)}}{sec(x)sin(x)} \right) dx, \quad y \in [0, \infty[\\
u(y) &= \int_0^y \left(\frac{cos(x)(1-cos^2(x))e^{cos(x)}}{sin(x)} \right) dx \\
u(y) &= \int_0^y \left(\frac{cos(x)sin^2(x)e^{cos(x)}}{sin(x)} \right) dx \\
u(y) &= \int_0^y \left(cos(x)sin(x)e^{cos(x)} \right) dx
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio $v = cos(x), dv = -sin(x), x = 0 \rightarrow v = 1, x = y \rightarrow v = cos(y)$:

$$
\begin{aligned}
u(y) &= -\int_1^{cos(y)} (ve^v)\, dv \\
u(y) &= \int_{cos(y)}^1 (ve^v)\, dv
\end{aligned}
$$

Integrando por parte con $a = v, da = dv, db = e^v, b = e^v$:

$$
\begin{aligned}
u(y) &= ve^v \Big|_{cos(y)}^1 - \int_{cos(y)}^1 e^v dv \\
u(y) &= (e^1 - cos(y)e^{cos(y)}) - e^v \Big|_{cos(y)}^1 \\
u(y) &= (e^1 - cos(y)e^{cos(y)}) - (e^1 - e^{cos(y)}) \\
u(y) &= e^1 - cos(y)e^{cos(y)} - e^1 + e^{cos(y)} \\
u(y) &= e^{cos(y)} - cos(y)e^{cos(y)} \\
u(y) &= e^{cos(y)}(1 - cos(y))
\end{aligned}
$$

Nos damos cuenta que para que la expresión de 1, si evaluamos en $y = \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$u(y) = 1 = e^{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$u(y) = 1 = e^{0}(1-0)$$
$$u(y) = 1 = 1(1)$$
$$u(y) = 1 = 1$$

Si bien no es difícil encontrar cuanto es el valor de y, si puede ser para encontrar $u(y) = c$. Para esto, acudimos a la pregunta 2.

2. Depende de cada estudiante la implementación. Este podria ser un ejemplo:

   Data: c, f, m
   Result: y
   $u(y) = c$
   $g(y) = c - \int_0^y f(x)dx$
   programar punto medio,trapecio o simpson para resolver $\int_0^y f(x)dx$ con m puntos.
   buscar cero de $g(y)$, por ejemplo con biseccón.
   retornar y

   Algorithm 1: Encontrar y tal que $u(y) = c$