Introducción

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v1.0

¿Qué es la Computación Científica?

Computación Científica

Es la colección de herramientas, técnicas y teorías requeridas para resolver modelos matemáticos en ciencia e ingeniería usando un computador.

- Antes de los computadores, ya existía un desarrollo de técnicas y teorías matemáticas para modelar problemas en ciencia e ingeniería.
- Se le conoce como **Análisis Numérico** al conjunto de técnicas y teorías desarrolladas en matemáticas.
- Con la llegada de los computadores, los métodos del Análisis Numérico **se adaptaron** para ser usados en computadores.
- Implica que se tomaron en cuenta factores como:
  - Lenguajes de programación
  - Sistemas Operativos
  - Manejo de grandes cantidades de datos
  - Correctitud de programas

Computación Científica

¿Qué implica la **computación** científica?

- El computador realizará cálculos por nosotros.
- Operaciones elementales: adición y multiplicación.
- Resultados serán **aproximaciones**.
- Buen diseño de algoritmos y técnicas.
- Análisis de estabilidad.
- ...

¿Porqué queremos hacer computación científica?

- Para simular fenómenos de la naturaleza.
- Para diseñar prototipos virtuales en alguna área de la ingeniería.
- ...

Computación Científica

Anteriormente en Computación Científica I:

- Repaso de Álgebra Lineal
- Aritmética de punto flotante
- Ceros de Funciones 1D (Bisección, FPI, Secante, ...)
- Sistemas de Ecuaciones: métodos directos (PA=LU, Cholesky)
- Sistemas de Ecuaciones: métodos iterativos (Jacobi, GS, SOR, GC, NM, ...)
- Interpolación Polinomial (Lagrange, Diferencias Divididas, ...)
- Mínimos Cuadrados (QR, GMRes)

Computación Científica II

- Valores y Vectores Propios
- Integración Numérica
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: IVP, BVP
- Ecuaciones Diferenciales Parciales: Elípticas, Parabólicas, Hiperbólicas.

Matriz Identidad

La matriz I_n de $n \times n$ es **matriz identidad** si posee elementos I_{ij} tal que:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, si } i = j \\ 0 & \text{, si } i \neq j \end{cases}$$

Se cumple que $AI_n = I_nA = A$, $\forall A$ matriz de $n \times n$.

Matriz Inversa

Considerar una matriz cuadrada A de $n \times n$. La **matriz inversa** de A, denotada por A^{-1} es una matriz de $n \times n$ que cumple con $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

- Si A tiene matriz inversa, se dice que es **invertible** o **no singular**.
- Si A no tiene matriz inversa, se dice que es **no invertible** o **singular**.

Algunas propiedades de la inversa:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}$, con $\alpha \neq 0$
- $(A^{n})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$
- $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}adj(A)$, donde $adj(a)$ es la adjunta de A.

Matriz Traspuesta

Considerar la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de $m \times n$. La **matriz traspuesta** de A, denotada por A^T es una matriz de $n \times m$, cuyos coeficientes cumplen con $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

- Si $A = A^T$, se dice que A es **simétrica**.

Algunas propiedades de la traspuesta:

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Matriz Traspuesta Conjugada

Considerar la matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ de $m \times n$. La **matriz traspuesta conjugada** de A, denotada por A^* es una matriz de $n \times m$, cuyos coeficientes cumplen con $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{31}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{32}} \end{bmatrix}$$

Observación

El complejo conjugado de un escalar z, escrito como z^* o $\overline{z}$, es obtenido negando su parte imaginaria. Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{z} = z$.

- Si $A = A^*$, se dice que A es **hermitiana**.
- Si $A^* = A^{-1}$, se dice que A es **unitaria**.

Algunas propiedades de la traspuesta conjugada:

- $(A^*)^* = A$
- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(AB)^* = B^* A^*$
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$
- $A^* = A^T$, si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Referencias

- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012.