Pauta Certamen N°1 ILI-286
SCT - Sá.14.10.17

1. El problema planteado está definido de la forma

$$\mathbf{v}\,A = \lambda_l\,\mathbf{v}.$$

Recordando que $\mathbf{v}$ es vector fila podemos trasponer y conjugar el problema:

$$A^*\mathbf{v}^* = \lambda_l^*\mathbf{v}^*,$$

el cual es un problema de valores propios sobre la matriz $A^*$. El siguiente algoritmo toma en cuenta esta transformación.

**Algoritmo 1** Left Power Iteration

**function** $\mathrm{LPI}(A, \mathbf{x}_0)$
  $(\mathbf{u}_{\mathrm{dom}}, \lambda_{\mathrm{dom}}) \leftarrow \mathrm{PI}(A^*, \mathbf{x}_0)$
  **return** $(\mathbf{u}^*_{\mathrm{dom}}, \lambda^*_{\mathrm{dom}})$
**end function**

donde $\mathrm{PI}(\cdot)$ es el algoritmo Power Iteration y $\mathbf{x}_0$ es el initial guess.

**Puntajes**

10 puntos por enunciar que los valores y vectores propios de $A^*$ son los valores y vectores propios de $A$ pero traspuestos conjugados y proponer el traspuesto conjugado del problema.
10 puntos por seleccionar un algoritmo numérico para encontrar $\mathbf{u}_{\mathrm{dom}}$ y $\lambda_{\mathrm{dom}}$
5 puntos por trasponer el resultado obtenido para encontrar lo pedido.

2. **(a)**
   - Matriz $A_1$: se usará Power Iteration sobre la matriz $A_1$, ya que sus valores están ordenados por magnitud y se obtendrá $\lambda_1 = 5$.
   - Matriz $A_2$: se usará Power Iteration sobre la matriz $A_2$, ya que sus valores están ordenados por magnitud y se obtendrá $\lambda_1 = 1$.
   - Matriz $A_3$: se usará Power Iteration sobre la matriz $A_3$. Aunque los valores no están ordenados por magnitud, el valor propio dominante es $\lambda_5$, el cual es mayor al valor más positivo $\lambda_1$. Se obtendrá $\lambda_5 = -4.32340428$.
   - Matriz $A_4$: se usará Inverse Power Iteration sobre la matriz $A_4$ con shift $s = 10$ para obtener $\lambda_1 = 5.75851194$.

   **Puntajes**

   2 puntos por respuesta correcta en cada matriz.

   **(b)**
   - Matriz $A_1$: se usará Inverse Power Iteration con shift $s = 0$ sobre la matriz $A_1$. Se obtendrá el valor propio $\lambda_5 = 1$.
   - Matriz $A_2$: se usará Inverse Power Iteration con shift $s = 0$ sobre la matriz $A_2$. Se obtendrá el valor propio $\lambda_5 = -0.19107781$.
   - Matriz $A_3$: se usará Inverse Power Iteration sobre la matriz $A_3$ con un shift $\varepsilon > 0$ muy cercano a cero. Se obtendrá el valor propio $\lambda_2 = 0$.
   - Matriz $A_4$: se usará Inverse Power Iteration sobre la matriz $A_4$ con un shift $\varepsilon > 0$ muy cercano a cero. Se obtendrá el valor propio $\lambda_3 = 0$.

   **Puntajes**

   3 puntos por respuesta correcta en cada matriz.

   **(c)** Es necesario encontrar un shift $s$ tal que los valores propios queden ordenados por magnitud. Considerar el valor propio $\lambda_1$, el cual se encuentra en almenos uno de los discos de Gerschgorin, es decir, se cumple:

$$-R_i \leq \lambda_1 - a_{ii} \leq R_i \tag{1}$$

para algún $i \in 1, \ldots, 5$ y $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Al considerar cualquier disco $i$-ésimo que cumpla con (1) y restar $R_i$ en la inecuación, se tiene:

$$-2\,R_i \leq \lambda_1 - a_{ii} - R_i \leq 0 \tag{2}$$

Debido a que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5$, entonces al desplazar todos los valores propios en $s = -a_{ii} - R_i$, la desigualdad se mantiene y $\lambda_5 - a_{ii} - R_i$ es el valor propio dominante de la matriz $A_j + s\,I_5$, con $j \in 1, \ldots, 4$. Usando Power

Iteration sobre esta matriz se encuentra el valor $\lambda_5 - a_{ii} - R_i$, el cual puede ser llevado al valor $\lambda_5$ desplazandolo en un shift $s_2 = a_{ii} + R_i$.

**Puntajes**

5 puntos si se encuentra una cota para los valores propios.
5 puntos si se establece un *shift* válido para encontrar $\lambda_5$ mediante alguno de los métodos señalados.

3. **(a)** Considerando $\mathbf{l}(s) = \langle \cos(s), \sin(a), 0 \rangle,\ s \in [0, 2\pi]$ se tiene que $\mathbf{l}'(s) = \langle -\sin(s), \cos(s), 0 \rangle$, luego reemplazando se obtiene:

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{l}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{H}(\mathbf{l}(s)) \cdot \mathbf{l}'(s)\, ds \tag{3}$$

$$= \int_0^{2\pi} -\mathbf{H}_x(\mathbf{l}(s)) \sin(s) + \mathbf{H}_y(\mathbf{l}(s)) \cos(s)\, ds \tag{4}$$

**Puntajes**

5 puntos si el desarrollo explícitamente queda en función de $s$ luego de haber reemplazado la parametrización de curva y desarrollado regla de la cadena.

**(b)** El orden de convergencia puede estimarse mediante dos pares de datos $(e_i, h_i)$, por ejemplo los elegidos en la Tabla 1. Si se modela el error como $e = Ch^p$, donde las incógnitas son $C$ y el órden $p$, basta con plantear y resolver el sistema

| $i$ | $e_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.235309 | 1.570796 |
| 7 | 0.000151 | 0.049087 |

Tabla 1: Errores $e_i = I_{i+1} - I_i$, con sus $h$ respectivos

lineal en base logarítmica.

$$\log(e_2) = \log(C) + p\log(h_2)$$
$$\log(e_7) = \log(C) + p\log(h_7)$$

luego, $C \approx 9.02897214e-02$ y $p \approx 2.12115377$. La estimación puede mejorarse si se consideran todos los datos, en ese caso el sistema quedará sobre determinado y deberá usarse mínimos cuadrados para encontrar $C$ y $p$.

**Puntajes**

3 puntos por modelar los errores y plantear ecuaciones relacionadas.
10 puntos por estimar el orden de convergencia, ya sea utilizando dos pares de error y $h$ o bien resolviendo un sistema de mínimos cuadrados.
2 puntos por enunciar que la estimación al considerar todos los puntos provoca un sistema sobredeterminado.

**(c)** Para obtener la medición se propone el siguiente algoritmo: Una vez obtenido el modelo de error como $e = Ch^p$ se puede realizar una búsqueda de ceros en la función $f(h) = Ch^p - 10^{-14}$, el valor obtenido $h^*$ es el tamaño de intervalo necesario para la medición, luego se puede inferir qué medición se necesita en función del intervalo original.

**Algoritmo 2** Encontrar la medición con error de $10^{-14}$

**function** GetMeasureStep
  $h^* \leftarrow \text{bisection}(f(h))$
  **return** $\log_2(\frac{\pi}{h*}) + 1$
**end function**

El resultado aproximado es, con $h^* \approx 10^{-7}$, en la medición $i = 25$. Note que no es necesario un algoritmo numérico en caso de despejar directamente los valores, pero debe establecerse el desarrollo correctamente para encontrar la medición $i$.

**Puntajes**

5 puntos por proponer un algoritmo justificado para resolver la estimación o plantear la ecuación correspondiente
5 puntos por encontrar aproximadamente el valor.

4. **(a)** El siguiente algoritmo calcula la integral $I_a(x)$ tomando como parámetros de entrada $x$, $a$, una tolerancia $\gamma$ y la función $p(x)$. Se utilizará la regla del trapecio para calcular la integral, aunque algún otro método visto en clases también puede ser empleado.

**Algoritmo 3** Cálculo de $I_a(x)$

**function** OperadorIntegral$(x, a, \gamma, p)$<br>
    $m = 1$<br>
    $I_{i+1} = \text{trapecio}(x - a, x + a, p, m)$<br>
    $e_i = \infty$<br>
    **while** $e_i \geq \gamma$ **do**<br>
        $I_i = I_{i+1}$<br>
        $m = m + 1$<br>
        $I_{i+1} = \text{trapecio}(x - a, x + a, p, m)$<br>
        $e_i = |I_{i+1} - I_i|$<br>
    **end while**<br>
    **return** $I_{i+1}$<br>
**end function**

**Puntajes**

2 puntos por establecer parámetros de entrada correctamente.
3 puntos por proponer un método numérico apropiado para calcular la integral.
3 puntos por determinar el error absoluto.
2 puntos por entregar el resultado de $I_a(x)$ que cumpla con el criterio de error solicitado.
**0 puntos en la pregunta** si se utiliza la función $f(x)$ o $\varepsilon(x)$ directamente.

**(b)** Para encontrar el máximo de $I_a(x)$ se debe derivar la expresión:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x-a}^{x+a} p(y)\mathrm{d}y = p(x+a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+a) - p(x-a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-a) = p(x+a) - p(x-a)$$

Sea $F(x, a) = p(x + a) - p(x - a)$. El máximo de $I_a(x)$ se obtiene encontrando un cero para $F(x, a)$. Se usará $x_0$ como *initial guess*, ya que el máximo debería manterse alrededor de ese valor para pequeñas variaciones de $a$. El output correspondería al valor $\alpha$ tal que $F(\alpha, a) = 0$

**Puntajes**

8 puntos por argumentar cómo se determinará el máximo de $I_a(x)$.
7 puntos por proponer un método numérico para encontrar el máximo.