Ayudantía Certamen II

CC-Team

26 de julio de 2018

1. Initial Value Problem

Problemas de la forma

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

Podemos evaluar la función y sin conocerla utilizando integración numérica.

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{y}(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$
$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$
$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

1.1. Método de Euler

Aproximar la integral usando Riemann.

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta t f(t_0, y(t_0))$$
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \Delta t f(t_i, y(t_i))$$

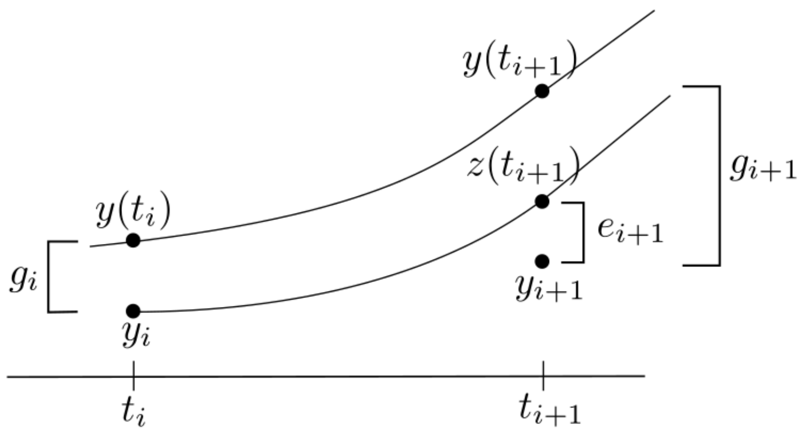
Vectorialmente:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \Delta t F(t_i, y(t_i))$$

1.1.1. Errores

Error Global de Truncamiento $g_i = |y_i - y(t_i)|$ (diferencia entre solución correcta y aproximación).

Error Local de Truncamiento $e_{i+1} = |y_{i+1} - z(t_{i+1})|$, en donde z corresponde a y desplazada para pasar por y_i (diferencia entre solución correcta en un paso y aproximación).



1.1.2. Error de Euler

$$
\begin{aligned}
y(t_{i+1}) = y(t_i + h) &= y(t_i) + h\dot{y}(t_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(c) \\
&= y(t_i) + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(c) \\
&= y_{i+1} + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(c) \\
\Rightarrow |y(t_{i+1}) - y_{i+1}| &= \left|\frac{h^2}{2}\ddot{y}(c)\right|
\end{aligned}
$$

1.1.3. Backward Euler

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \Delta t F(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$$

Como no conocemos los valores en el instante de tiempo siguiente hay que resolver un sistema de ecuaciones:

$$Solve(y_{i+1} - hF(y_{i+1}) = y_i)$$

1.2. Runge-Kutta

1.2.1. RK2

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(t_0) \\
k &= y_i + \frac{h}{2}F(t_i, y_i) \\
y_{i+1} &= y_i + hF\left(t_i + \frac{h}{2}, k\right)
\end{aligned}
$$

1.2.2. RK4

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(t_0) \\
k_1 &= F(t_i, y_i) \\
k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= F(t_i + h, y_i + hk_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}F\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)
\end{aligned}
$$

1.3. Estabilidad Lineal

El problema

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \lambda y(t) \\
y(0) &= 1
\end{aligned}
$$

tiene como solución $y(t) = e^{\lambda t}$.

Si aplicamos Euler:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\
&= y_0 + h\lambda y_0 \\
&= (1 + h\lambda)y_0 \\
y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) \\
&= (1 + h\lambda)y_1 \\
&= (1 + h\lambda)^2 y_0 \\
y_n &= (1 + h\lambda)^n y_0
\end{aligned}
$$

Para que el sistema sea estable se debe cumplir que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$
$$\Rightarrow |1 + h\lambda| < 1$$

a lo que se llama **región de estabilidad**. La región depende del método.

Consideremos ahora el caso general:

$$\dot{y}(t) = F(t_i, y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

Localmente se comporta como

$$\dot{y}(t) = Jy(t)$$
$$y(0) = y_0$$

en donde J es la matriz jacobiana de F en el punto a evaluar. Si aplicamos Euler:

$$y_{i+1} = y_i + hF(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + hJy_i$$
$$y_{i+1} = (I + hJ)y_i$$

Para que sea estable se debe cumplir que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$
$$\Rightarrow \rho(I + hJ) < 1$$

en donde ρ es el radio espectral de la matriz, su valor propio de mayor magnitud.

2. BVP

EDOs de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} = f(x, y(x), y'(x))$$
$$y(a) = y_a$$
$$y(b) = y_b$$

2.1. Shooting Method

Resolver estilo IVP:

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$
$$y(a) = y_a$$
$$y'(a) = ?$$

El problema consiste en encontrar la pendiente correcta con tal de que la curva pase por y_b. El sistema dinámico queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f \end{pmatrix}$$
$$y_1(a) = y_a$$
$$y_2(a) = ?$$

Se define $F(\alpha) = \hat{y}_1(b, \alpha) - y_1(b)$, en donde $\hat{y}_1(b, \alpha)$ es el valor de y_1 en $t = b$ suponiendo que $y_2(a) = \alpha$ ($= y'(a)$, la pendiente en el punto inicial). Este α se puede encontrar mediante búsqueda de ceros.

2.2. Finite Differences

Consiste en generar reglas que deben cumplir los puntos sobre la curva (un punto se relaciona con sus vecinos a través de la derivada), lo que se traduce al final en un sistema de ecuaciones lineales.

- **Forward Difference:**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$
$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

- **Backward Difference:**

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$
$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

- **Central Difference:**

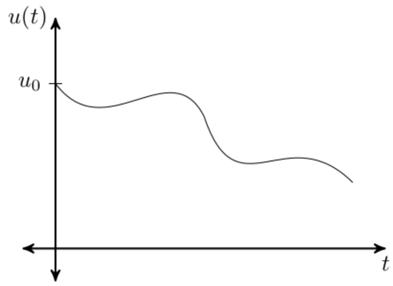
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

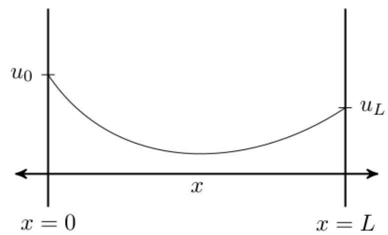
- **Central Difference - Segundo Orden:**

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$
$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

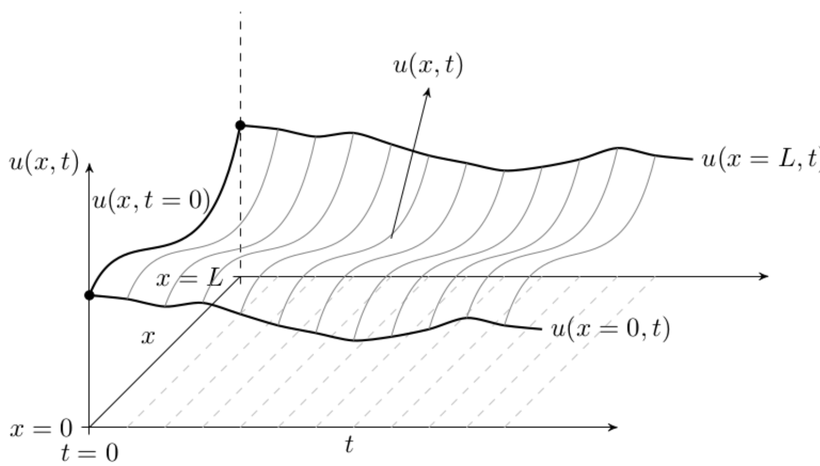
3. PDEs

Hasta ahora se han visto:





Sin embargo, una función puede variar en el espacio y el tiempo, o en varias dimensiones en general.



4. PDEs Elípticas

Las PDEs lineales bidimensionales de segundo orden se clasifican según los coeficientes de las derivadas de orden superior:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

- Elípticas: $b^2 - 4ac < 0$, $\rightarrow$ Generalmente tiene aplicaciones espaciales.
- Parabólicas: $b^2 - 4ac = 0$, $\rightarrow$ Mayormente utilizada para ecuación de calor y difusión.
- Hiperbólicas: $b^2 - 4ac > 0$, $\rightarrow$ Principalmente usada en ecuación de onda.

4.1. Tipos de Elípticas

- Laplace:

$$\Delta u = 0$$
$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

- Poisson:

$$\Delta u = f(x,y)$$
$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

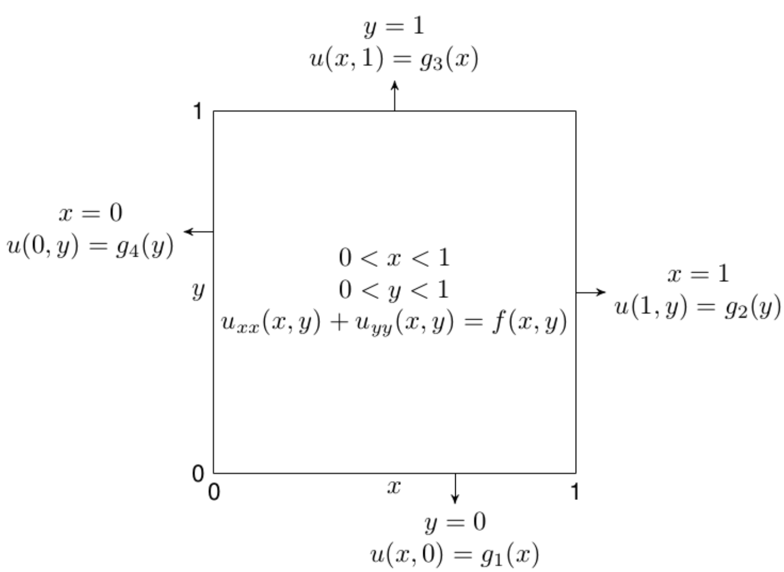
- Helmholtz:

$$\Delta u = \lambda u(x,y)$$
$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \lambda u(x,y)$$

4.1.1. Condiciones de Borde

- Dirichlet: $u(x_0, y) = g(y)$.
- Neumann: $u_x(x_0, y) = g(y)$.
- Robin: $\alpha u(x_0, y) + \beta u_x(x_0, y) = g(y)$.

4.1.2. Esquema



4.2. Diferencias Finitas

Ya habíamos visto las discretizaciones de diferencias finitas, las cuales prácticamente no cambian:

- **Forward Difference:**

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} + O(h)$$
$$f_x(x_i, y_j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h} + O(h)$$

- **Backward Difference:**

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{f(x,y) - f(x-h,y)}{h} + O(h)$$
$$f_x(x_i, y_j) = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h} + O(h)$$

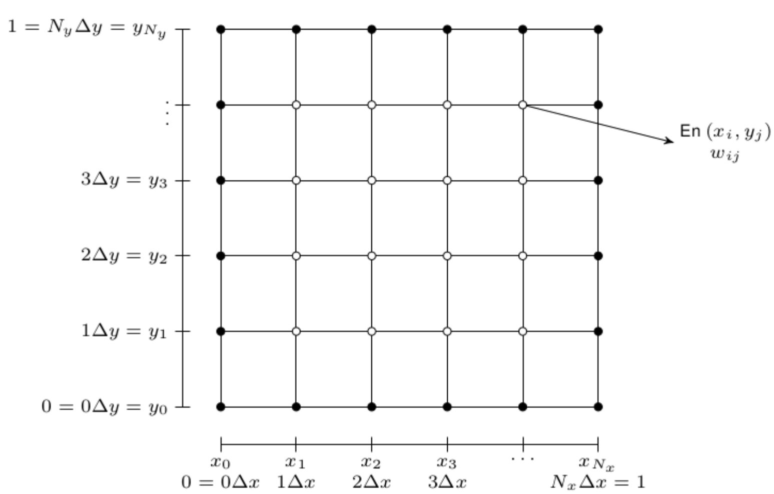
- **Central Difference:**

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} + O(h^2)$$
$$f_x(x_i, y_j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} + O(h^2)$$

- **Central Difference - Segundo Orden:**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = \frac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2} + O(h^2)$$
$$f_{xx}(x_i, y_j) = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

4.2.1. Esquema



5. Ejercicios

Pregunta 1.-

Demuestre que las funciones

$$u(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$$
$$u(x,y) = \frac{x^4}{6} - x^2y^2 + \frac{y^4}{6}$$

son armónicas (son soluciones a la ecuación de Laplace).

Respuesta

La conocida ecuación de Laplace es:

$$\Delta u = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Basta con obtener las derivadas parciales:

- Primera función:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y - 2y$$

- Segunda función:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^3}{3} - 2xy^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2x^2 - 2y^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y^3}{3} - 2yx^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y^2 - 2x^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 - 2y^2 + 2y^2 - 2x^2$$

Pregunta 2.-

1. Se tiene la siguiente IVP.

$$\begin{aligned} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t^2,\ t > 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{aligned}$$

   Escriba el problema de valor inicial como un sistema de primer orden y utilice el método de euler para generar las expreciones que permitan calcular $x(t_{n+1})$ y $x'(t_{n+1})$.

2. Deshaciéndose de y(t), muestre que el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - 2x(t) \\ y'(t) = t^2 - y(t) \end{cases}$$

   Tiene la misma solución que la IVP anterior, sabiendo que x(0) = 1 y x'(0) = 0. ¿Cual es el valor para y(0) ?

3. Aplique el método de Newton al sistema de la pregunta 2. Formule las ecuaciones que permitan calcular $x(t_{n+1})$ e $y(t_{n+1})$ en términos de $x(t_n)$ e $y(t_n)$.

4. Muestre que la aproximación de $x(t_2)$ producidas por los métodos de la pregunta 1 y 3 son idénticas cuando se utiliza el mismo valor de h.

Respuesta

1. El sistema de ecuación queda como:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ t^2 - 2u - 3v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   El método de Euler queda como:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_n \\ t_n^2 - 2u_n - 3v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Aca $t_n = nh$, debido a que el tiempo será igual al numero de iteraciones por el delta.

2. Diferenciando la primera ecuación y sustituyendo y' por la segunda tenemos:

$$x'' = y' - 2x' = (t^2 - y) - 2x'$$

   Sustituyendo de la primera ecuación $y(t) = x'(t) + 2x(t)$ tenemos $x''(t) = t^2 - 3x'(t) - 2x(t)$. Evaluando en $t = 0$ tenemos que $y(0) = x'(0) + 2x(0) = 2$

3. El método de Euler queda como:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_n - 2x_n \\ t_n^2 - 2y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Pregunta 1: $u_1 = u_0 + hv_0 = 1,$
$v_1 = v_0 + h(t_0^2 - 3v_0 - 2u_0) = -2h$
$u_2 = u_1 + hv_1 = 1 - 2h^2$

Pregunta 2: $x_1 = x0 + h(y_0 - 2x_0) = 1,$
$y_1 = y_0 - 2h = 2 - 2h,$
$x_2 = 1 + h(y_1 - 2x_1) = 1 - 2h^2$

Pregunta 3.-

Proponga un algoritmo basado en diferencias finitas para resolver el siguiente problema de valor de frontera no lineal:

$$\begin{aligned} y''(x) = y(x) - y^2(x) \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 4 \\ 1 \geq x \geq 4 \end{aligned}$$

Debe mostrar el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ y la matriz jacobiana explícitamente.

Respuesta

Discretizando la ecuación tenemos:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} - y_i + y_i^2 = 0$$

o bien

$$y_{i-1} - (2 + \Delta x^2)y_i + \Delta x^2 y_i^2 + y_{i+1} = 0$$

Con esto ya podemos armar nuestro $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$F\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - (2 + \Delta x^2)y_1 + \Delta x^2 y_1^2 + y_2 \\ y_1 - (2 + \Delta x^2)y_2 + \Delta x^2 y_2^2 + y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} - (2 + \Delta x^2)y_{n-1} + \Delta x^2 y_{n-1}^2 + y_n \end{bmatrix}$$

Con $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$ y $y_n = y(x_n) = y(1) = 4$. Además, el jacobiano queda como:

$$J\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta x^2 y_1 - (2 + \Delta x^2) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\Delta x^2 y_2 - (2 + \Delta x^2) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\Delta x^2 y_{n-1} - (2 + \Delta x^2) & 1 \end{bmatrix}$$

Con eso solo nos queda aplicar el método de Newton multivariado:

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y^k + \Delta w \\ J(y^k)\Delta w &= -F(y^k) \end{aligned}$$

Partiendo de un vector inicial, por ejemplo $y^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 4 \end{bmatrix}^T$