Introducción al Método de Elementos Finitos

Cristopher Arenas
cristopher.arenas@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María
Computación Científica II - ILI286

v0.9

Introducción

Método de Elementos Finitos (FEM)

Es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complejas utilizado en diversos problemas de ingeniería y física. Está pensado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. [a]

[a] https://es.wikipedia.org/wiki/Método_de_los_elementos_finitos

1. Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Considerar $F(x) = u(x)\,v(x)$, entonces:

$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'\mathrm{d}x = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$$

Desarrollando la derivada del producto de la integral:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$$

Reordenando términos se obtiene una fórmula vista con anterioridad en cursos de matemáticas.

2. Integración por partes:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x$$

Considerar

- Ω un dominio acotado y suave.
- $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- $u, v \in \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales de clase $C^1(\bar{\Omega})$.
- n un vector unitario normal a $\partial\Omega$.

3. Teorema de Strokes:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \,\mathrm{d}A = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot n \,\mathrm{d}s$$

4. Teorema de la Divergencia:

$$\int_{\Omega} (\text{div}\,\mathbf{F}) v \,\mathrm{d}A + \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla v \,\mathrm{d}A = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot n) v \,\mathrm{d}s$$

Usando el Teorema de la Divergencia con $\mathbf{F} = \nabla u$, se obtiene una fórmula vista con anterioridad en cursos de matemáticas.

5. Primera Identidad de Green

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \,\mathrm{d}A = \int_{\partial\Omega} v \,\partial_n\, u \,\mathrm{d}s - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}A$$

6. Segunda Identidad de Green

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \mathrm{d}A = \int_{\partial\Omega} (v\,\partial_n u - u\,\partial_n v) \mathrm{d}s$$

- A continuación, se presentará el Método de Elementos Finitos en 1D y 2D para ecuaciones diferenciales elípticas con condiciones de Dirichlet.
- Es necesarrio convertir las ecuaciones a una forma llamada **formulación débil** o **formulación variacional**.

FEM 1D

Considerar la Ecuación Diferencial Elíptica en 1D, válida para $\Omega = [a, b]$:

$$\begin{aligned} -u''(x) + \alpha\, u(x) &= f(x) \\ u(a) &= u_a \\ u(b) &= u_b \end{aligned}$$

La formulación débil de la EDO consiste en encontrar $u(x)$ tal que:

$$\begin{aligned} u(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b, \\ \int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \alpha\, u(x)v(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

¿Cómo se obtiene la formulación débil de la EDO?

Considerar la EDO:

$$-u''(x) + \alpha\, u(x) = f(x)$$

La EDO se debe multiplicar por una función $v(x)$ (?)

$$-u''(x)\, v(x) + \alpha\, u(x)\, v(x) = f(x)\, v(x)$$

Luego, integrando sobre el dominio Ω, resulta:

$$\int_a^b -u''(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b \alpha\, u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$$

Utilizando integración por partes sobre la primera integral del lado izquierdo:

$$\int_a^b -u''(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u'(x)\,v(x)\Big|_a^b + \int_a^b u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

No se tiene información de $u'(x)$ en $\partial\Omega$, escoger entonces una función $v(x)$ tal que $v(a) = v(b) = 0$. Entonces:

$$\int_a^b -u''(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

- $v(x)$ se conoce como **función de prueba**.
- $v(x)$ no es una incógnita del problema, puesto que es algo que se escoge *virtualmente* para poder escribir la formulación débil.
- ¿La función de prueba tiene alguna restricción asociada?

FEM 1D

Reemplazando el valor de la integral anterior, se obtiene la formulación débil para la EDO:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \alpha\, u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

- ¿Qué se ha ganado y perdido con la formulación débil?
  - Ganado: bajar los requerimientos de las derivadas en $u(x)$.
  - Perdido: el sentido clásico.
- Las condiciones de borde deben incluirse en el espacio de funciones a utilizar.

Espacio de funciones cuadrado integrables

El espacio infinito dimensional de funciones $L^2[a,b]$ se define como:

$$L^2[a,b] = \left\{ f(x) \in [a,b] : \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

El cual tiene asosciado el producto interno (inner product):

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) \, f_2(x) \, \mathrm{d}x$$

y las propiedades:

1. $\langle f_1, f_2 \rangle \geq 0$.
2. $\langle \alpha \, f_1 + \beta \, f_2, z \rangle = \alpha \, \langle f_1, z \rangle + \beta \, \langle f_2, z \rangle$, para escalares α y β.
3. $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle$.
4. Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en $L^2[a,b]$ si $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$

Considerar el subespacio $H^1[a,b] \subset L^2[a,b]$.

Espacio de Sobolev

Considerar el espacio de Solobev denotado por $H^1[a,b]$ como:

$$H^1[a,b] = \left\{ v \in L^2[a,b] : \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \in L^2[a,b] \right\}$$

Un subespacio de $H^1[a,b]$ de interés es el subespacio $H_0^1[a,b]$:

Subespacio $H_0^1[a,b]$

$$H_0^1[a,b] = \{ v \in H^1[a,b] : v(x) = 0 \text{ en } x = a \text{ y } x = b \}$$

Luego, es necesario que la función de prueba $v(x) \in H_0^1[a,b]$.

Volviendo a la formulación débil, se tiene que encontrar $u(x) \in H^1[a,b]$ tal que:

$$
\begin{aligned}
u(a) &= u_a, \\
u(b) &= u_b, \\
\int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \alpha\, u(x)v(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

con $v(x) \in H_0^1[a,b]$.

Considerar $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ una partición equiespaciada de $\Omega = [a, b]$. Sea x_j un punto de la partición con $j = 0, \ldots n$.

- Cada punto x_j, con $j = 0, \ldots, n$ recibe el nombre de **nodo**.
- Sea $u \in H^1[a, b]$. $u(x_j)$ recibe el nombre de **valor nodal** de la función $u(x)$.

Considerar $V \subset H_0^1[a,b]$ el subespacio de funciones lineales v tales que:

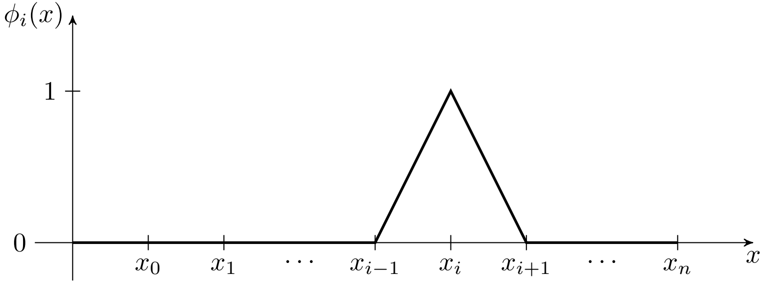
- v es de clase $C^0([a,b])$.
- $v\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}$ es un polinomio lineal, $i = 1, \ldots, n-1$.
- $v(a) = v(b) = 0$.

Se tienen $n-1$ funciones de prueba para $v(x) \in V$, las cuales corresponden a $\phi_i(x)$ con $i = 1, \ldots n-1$ y deben cumplir para cada x_j:

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

FEM 1D

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- Un **elemento** corresponde al intervalo $I_e = [x_{e-1}, x_e]$, donde e es un entero en el rango $1, \ldots, n$.
- Al considerar el dominio $\Omega = [a, b]$ como la unión de todos los elementos, la función $u(x)$ puede ser reconstruida como combinación lineal de la base $C = \{\phi_0(x), \ldots \phi_n(x)\}$, es decir:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \, \phi_i(x)$$

- Notar que en esta combinación lineal se cumple:

$$u(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i \, \phi_i(x_i) = c_i$$

Luego, c_i corresponde al **valor nodal** del nodo x_i.

- Para los valores en la frontera:

$$u(x_0) = \sum_{i=0}^{n} c_0 \, \phi_i(x_0) = c_0 = u(a) = u_a$$
$$u(x_n) = \sum_{i=0}^{n} c_n \, \phi_i(x_n) = c_n = u(b) = u_b$$

¿cómo se pueden determinar los valores de c_i para $i = 1, 2, \ldots, n-1$?

Formulación Débil o Variacional

Encontrar $u(x) \in H^1[a,b]$ tal que:

$$u(a) = u_a,$$
$$u(b) = u_b,$$
$$\int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \alpha\, u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

con $v(x) \in H_0^1[a,b]$.

Sea la partición equiespaciada $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y considerar:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, \phi_i(x)$$
$$v(x) = \phi_k(x) \text{ para } k = 1, 2, \ldots n-1$$

FEM 1D

Reemplazando en la formulación débil, se obtiene una expresión para una función de prueba $\phi_k(x)$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\,\phi_i(x)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_k(x)\mathrm{d}x + \alpha\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\,\phi_i(x)\right)\phi_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\phi_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\left(\int_a^b \phi_i'(x)\,\phi_k'(x)\mathrm{d}x + \alpha\int_a^b \phi_i(x)\,\phi_k(x)\mathrm{d}x\right) = \int_a^b f(x)\,\phi_k(x)\mathrm{d}x$$

El Método de Elementos Finitos, se reduce a encontrar los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ utilzando ecuaciones provistas por **cada función de prueba**.

FEM 1D

Considerar la EDO:

$$-u''(x) + \alpha\, u(x) = f(x), \text{ con } u(a) = u_a, u(b) = u_b$$

El Método de Elementos Finitos se reduce a encontrar $c_0, c_1, \ldots, c_n$ para las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left(\int_a^b \phi_i'(x)\, \phi_1'(x) \mathrm{d}x + \alpha \int_a^b \phi_i(x)\, \phi_1(x) \mathrm{d}x \right) = \int_a^b f(x)\, \phi_1(x) \mathrm{d}x$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left(\int_a^b \phi_i'(x)\, \phi_2'(x) \mathrm{d}x + \alpha \int_a^b \phi_i(x)\, \phi_2(x) \mathrm{d}x \right) = \int_a^b f(x)\, \phi_2(x) \mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left(\int_a^b \phi_i'(x)\, \phi_{n-1}'(x) \mathrm{d}x + \alpha \int_a^b \phi_i(x)\, \phi_{n-1}(x) \mathrm{d}x \right) = \int_a^b f(x)\, \phi_{n-1}(x) \mathrm{d}x$$

Donde $c_i \approx u(x_i)$ en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, una partición equiespaciada.

Para una partición equiespaciada, las integrales tienen los valores:

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{\Delta x}{6}$$

$$\int_a^b (\phi_i(x))^2\mathrm{d}x = \frac{2\,\Delta x}{3}$$

$$\int_a^b \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\Delta x}$$

$$\int_a^b (\phi_i'(x))^2\mathrm{d}x = \frac{2}{\Delta x}$$

con $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Ejercicio: considere el BVP

$$
\begin{aligned}
-y''(x) &= y(x) \\
y(0) &= 1 \\
y(\pi/2) &= 3
\end{aligned}
$$

Encuentre una solución numérica para $y(x_j)$ usando el método de elementos finitos.

Considerar la Ecuación Diferencial Elíptica, válida para un dominio Ω

$$\begin{aligned} -\Delta\, u(x,y) + \alpha\, u(x,y) &= f(x,y) \\ u(\partial\Omega) &= \hat{u} \end{aligned}$$

¿Cómo se puede utilizar el Método de Elementos Finitos en esta EDP?

- El Método de Elementos Finitos en 2D es análogo al caso 1D.
- Es necesario convertir el problema a una formulación variacional o débil.

Considerar $v(x,y)$ una función de prueba. Multiplicando la EDP por esta función e integrando sobre el dominio Ω:

$$\int_\Omega -\Delta\, u(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A + \int_\Omega \alpha\, u(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A = \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A$$

Luego, utilizando la Primera Identidad de Green sobre la primera integral del lado izquierdo:

$$-\int_\Omega \Delta\, u(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A = -\int_{\partial\Omega} v(x,y)\, \partial_n\, u(x,y)\, \mathrm{d}s + \int_\Omega \nabla\, u(x,y)\, \nabla\, v(x,y)\, \mathrm{d}A$$

Escogiendo una función de prueba $v(x,y)$ tal que $v(\partial\Omega) = 0$, se tiene:

$$-\int_\Omega \Delta\, u(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A = \int_\Omega \nabla\, u(x,y)\, \nabla\, v(x,y)\, \mathrm{d}A$$

FEM 2D

Reemplazando la integral anterior, se obtiene la formulación débil para la EDP:

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)\, \nabla v(x,y)\, \mathrm{d}A + \int_\Omega \alpha\, u(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A = \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A$$

- Se tienen los subespacios análogos en 2D para $L^2[\Omega]$, $H^1[\Omega]$ y $H_0^1[\Omega]$.
- $u(x,y) \in H^1[\Omega]$ y $v(x,y) \in H_0^1[\Omega]$.
- ¿Cuáles son las elecciones para $u(x,y)$ y $v(x,y)$?

FEM 2D

Formulación Débil o Variacional

Encontrar $u(x,y) \in H^1[\Omega]$ tal que:

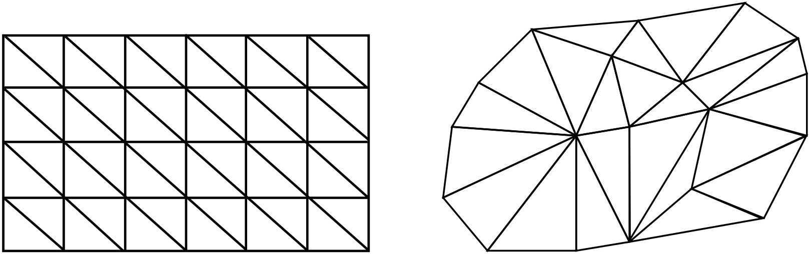
$$u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \partial\Omega$$
$$\int_\Omega \nabla\, u(x,y)\, \nabla\, v(x,y)\, \mathrm{d}A + \int_\Omega \alpha\, u(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A = \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y)\, \mathrm{d}A$$

con $v(x,y) \in H_0^1[\Omega]$.

Considerar la siguiente elección para $u(x,y) \in H^1[\Omega]$ y $v(x,y) \in H_0^1[\Omega]$ es:

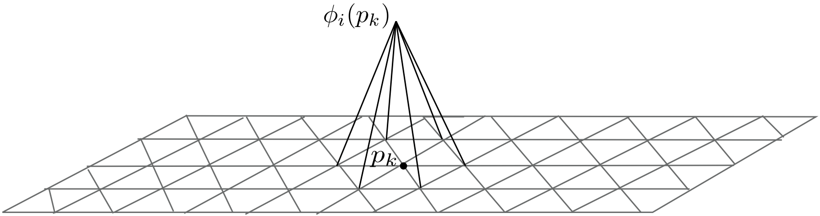
$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{?} c_i\, \phi_i(x,y)$$
$$v(x,y) = \phi_k(x,y) \text{ para } k = 1, 2, \ldots ?$$

FEM 2D
Triangulación del dominio



Considerar el nodo $p_k = (x_i, y_k)$. Se define la función $\phi_i(p_k)$ como:

$$\phi_i(p_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$



FEM 2D

- Un **elemento** en 2D consiste en un triángulo, formado por la unión de tres puntos.
- Suponer que en la malla triangular existen M elementos y N nodos, donde un nodo puede ser compartido por varios elementos. Además, Q de estos nodos se encuentran en la frontera del dominio y $P = N - Q$ son nodos interiores.
- La función $u(x, y)$ puede ser reconstruida como combinación lineal de la base $D = \{\phi_0(x, y), \ldots, \phi_N(x, y)\}$:

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{N} c_i \, \phi_i(x, y)$$

- Por otra parte, la función de prueba es:

$$v(x, y) = \phi_k(x, y) \text{ para } k = 1, 2, \ldots P$$

FEM 2D

Considerar la EDP:

$$-\Delta u(x,y) + \alpha\, u(x,y) = f(x,y), \text{ con } u(\partial\Omega) = \hat{u}$$

El Método de Elementos Finitos se reduce a encontrar $c_0, c_1, \ldots, c_N$ para las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \left(\int_\Omega \phi_i'(x,y)\, \phi_1'(x,y) \mathrm{d}A + \alpha \int_\Omega \phi_i(x,y)\, \phi_1(x,y) \mathrm{d}A \right) = \int_\Omega f(x,y)\, \phi_1(x,y) \mathrm{d}A$$

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \left(\int_\Omega \phi_i'(x,y)\, \phi_2'(x,y) \mathrm{d}A + \alpha \int_\Omega \phi_i(x,y)\, \phi_2(x,y) \mathrm{d}A \right) = \int_\Omega f(x,y)\, \phi_2(x,y) \mathrm{d}A$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \left(\int_\Omega \phi_i'(x,y)\, \phi_P'(x,y) \mathrm{d}A + \alpha \int_\Omega \phi_i(x,y)\, \phi_P(x,y) \mathrm{d}A \right) = \int_\Omega f(x,y)\, \phi_P(x,y) \mathrm{d}A$$

¿Qué consideraciones hay que tener con las integrales?

Referencias

- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Chapter 7: Boundary Value Problems.
- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Second Edition, Pearson, 2012. Chapter 8: Partial Differential Equations.
- Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory, Sandro Salsa, First Edition, Springer, 2009.
- The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Susanne C. Brenner - L. Ridgway Scott, Third Edition, Springer, 2008.
- A gentle introduction to the Finite Element Method, Francisco-Javier Sayas, 2005