

3. El Sr. Tony Stark está trabajando en obtener una nueva versión de su traje de IronMan para la película de los *Avengers 3*. Dentro de su trabajo ha realizado investigaciones en Machine Learning, específicamente en Deep Learning. Dentro de los desafíos que ha encontrado es resolver un problemas de valores propios **generalizados**. Lamentablemente, el Sr. Stark nuncá tuvo la posibilidad de tomar el curso Computación Científica II en la UTFSM y no sabe como proceder para encontrar valores y vectores propios. El problema que tiene el Sr. Stark es encontrar  $\lambda$  y  $\vec{v} \neq \vec{0}$  de tal forma que:

$$A\vec{v} = \lambda B\vec{v}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B$  es no singular.

*Hint: These are very generalized eigenvalues, just look at the problem and think!*

- (a) Considere que  $B$  es una matriz tridiagonal y diagonal dominante. Modifique el algoritmo *Power Iteration* para encontrar el valor y vector propios dominantes.

Multiplicando por  $B^{-1}$  por la izquierda tenemos:

$$B^{-1}A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El cual es un problema de valores propios común y corriente. A la hora de hacer Power Iteration se debe manejar bien la inversa, por lo que en lugar de encontrar  $x_i = B^{-1}A u_{i-1}$ , tendremos que resolver un sistema de ecuaciones lineales.

```
def PowerIteration(A):
    x=Initial Guess
    for i in range (n):
        u=x/norm(x)
        x=solve(B,A*u)
```

9. El primer teorema de valor medio para integrales definidas indica lo siguiente: Sea  $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces existe  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ .

- (a) Construya un algoritmo que reciba una función  $f$ , el intervalo  $[a, b]$ ,  $m$  (número de puntos de integración) y determine  $c$  basado en la integración del punto medio.
- (b) Encuentre  $c$  para  $f(x) = 1 + x - 20x^2$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .

a) Usando integración de punto medio se tiene:

```
integral=0
X=arange(a,b,m)
for i in range(m-1):
    integral+=f(0.5*(X[i]+X[i+1]))*(X[i+1]-X[i])
solve(f(c),integral/(b-a))
```

b) Usando solo dos puntos de integración:

$$\begin{aligned} f(0.5 * (0 + 2)) * (2 - 0) &= f(c) * (2 - 0) \\ 1 + 1 - 20 &= 1 + c - 20c^2 \\ 20c^2 - c - 19 &= 0 \\ c = 1 \wedge c &= -0.95 \end{aligned}$$

Como  $c \in [0, 2]$ , entonces  $c = 1$

7. Consideré la siguiente ecuación integro diferencial definida en  $x = [0, 5]$ :

$$\frac{d}{dx}(u(x)) + 2u(x) + 5 \int_0^x u(y) dy = 1 \\ u(0) = 0$$

*Hint: It would be a good idea to select the mesh and the integration nodes at the same location.*

(a) Utilice el método de diferencias finitas para discretizar la ecuación integro diferencial.

$$(1) \quad u'(x) + 2u(x) + 5 \int_0^5 u(y) dy = 1 \quad ; \quad u(0) = 0$$

$$U_{jh} = U_i$$

$$\dot{U}_{jh} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$$

$$\int_0^5 u(y) dy \approx \frac{h}{2} \left[ U_0 + U_1 + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} U_j \right] \rightarrow \text{Regla del Trapecio}$$

$$(1) \quad \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + 2U_i + \frac{5h}{2} \left[ U_0 + U_1 + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} U_j \right] = 1 / h$$

$$U_i - U_{i-1} + 2hU_i + \frac{5h^2}{2} U_0 + \frac{5h^2}{2} U_i + 5h^3 \sum_{j=1}^{i-1} U_j = h \\ U_i \left( 1 + 2h + \frac{5h^2}{2} \right) - U_{i-1} + \frac{5h^2}{2} U_0 + 5h^3 \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} U_j = h$$

(b) Construya explícitamente la aproximación en una malla de 5 puntos.



$$i=1 \quad U_1 \left( 2h + \frac{5h^2}{2} + 1 \right) + U_0 \left( \frac{5h^2}{2} - 1 \right) = h \Rightarrow (U_1 - C) = h$$

$$i=2 \quad U_2 - C + U_1 \left( 5h^2 - 1 \right) = h$$

$$i=3 \quad U_3 - U_2 + 5h^2 U_1 + 5h^2 U_2 = h \Rightarrow U_3 - C + U_2 \left( 5h^2 - 1 \right) + U_1 5h^2 = h$$

i=4

$$U_4 - U_3 + 5h^2 U_2 + 5h^2 U_1 + 5h^2 U_3 = h \Rightarrow U_4 - C + U_3 \left( 5h^2 - 1 \right) + U_2 5h^2 + U_1 5h^2 = h$$

$$i=5 \quad U_5 + U_4 \left( 5h^2 - 1 \right) + U_4 5h^2 + U_3 5h^2 + U_2 5h^2 + U_1 5h^2 = h$$

$$5h^2 = k$$

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ h \\ h \\ h \end{bmatrix}$$

(c) Explique claramente como se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido en (b).

Se puede resolver con Forward substitution (no confundir con F.D.F.)

10. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria:  $u'(x) - u(x) \cos(u(x)) = \cos(4x)$  con condiciones de borde periódicas, es decir  $u(0) = u(2\pi)$  para  $x \in [0, 2\pi]$ .

- (a) Construya un algoritmo que obtenga una aproximación de  $u(x_j)$  para  $x_j = j \frac{2\pi}{n}$  con  $j = 1, \dots, n$ . Recuerde que  $u(0) = u(2\pi)$ .  $n$  debe ser un parámetro de su algoritmo.

AyUDAnTIA 2019-2 N° 5 Geranio 3

Para resolver el IVP construiremos un sistema de ecuaciones no lineales basadas en el método de Euler, esto es  $u(\frac{x_{j+1}-u(x_j)}{h}) - u(x_j) \cos(u(x_j)) = \cos(4x_j)$ .

$$\begin{bmatrix} u(x_1) - u(x_0) - h(u(x_0) \cos(u(x_0)) - 4 \cos(x_0)) \\ u(x_2) - u(x_1) - h(u(x_1) \cos(u(x_1)) - 4 \cos(x_1)) \\ u(x_3) - u(x_2) - h(u(x_2) \cos(u(x_2)) - 4 \cos(x_2)) \\ \vdots \\ u(x_n) - u(x_{n-1}) - h(u(x_{n-1}) \cos(u(x_{n-1})) - 4 \cos(x_{n-1})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tienen  $n + 1$  variables y  $n$  ecuaciones, por lo que hace falta añadir la condición periódica, o sea  $u(x_0) - u(x_n) = 0$ , con  $x_0 = 0$  y  $x_n = 2\pi$ .

$$\begin{bmatrix} u(x_1) - u(x_0) - h(u(x_0) \cos(u(x_0)) - 4 \cos(x_0)) \\ u(x_2) - u(x_1) - h(u(x_1) \cos(u(x_1)) - 4 \cos(x_1)) \\ u(x_3) - u(x_2) - h(u(x_2) \cos(u(x_2)) - 4 \cos(x_2)) \\ \vdots \\ u(x_n) - u(x_{n-1}) - h(u(x_{n-1}) \cos(u(x_{n-1})) - 4 \cos(x_{n-1})) \\ u(x_0) - u(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (0) \end{bmatrix}$$

Luego reemplazando  $h$  por  $\frac{2\pi}{n}$  y  $x_j$  por  $j \frac{2\pi}{n}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} u(\frac{2\pi}{n}) - u(0) - h(u(0) \cos(u(0)) - 1) \\ u(\frac{4\pi}{n}) - u(\frac{2\pi}{n}) - h(u(\frac{2\pi}{n}) \cos(u(\frac{2\pi}{n})) - \cos(\frac{8\pi}{n})) \\ u(\frac{6\pi}{n}) - u(\frac{4\pi}{n}) - h(u(\frac{4\pi}{n}) \cos(u(\frac{4\pi}{n})) - \cos(\frac{16\pi}{n})) \\ \vdots \\ u(2\pi) - u((n-1)\frac{2\pi}{n}) - h(u((n-1)\frac{2\pi}{n}) \cos(u((n-1)\frac{2\pi}{n})) - \cos((n-1)\frac{8\pi}{n})) \\ u(0) - u(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego se propone como algoritmo para resolver el sistema no lineal el método de Newton Multivariado.

# 3.13

viernes, 13 de marzo de 2020 17:48

13. Un circuito eléctrico RLC en serie está compuesto por una resistencia de  $R[\Omega]$ , un capacitor de capacitancia  $C[F]$  y una bobina de inductancia  $L[H]$ . En el tiempo  $t = 0$ , el circuito se encuentra cargado con una carga  $Q_0[C]$  y circula una corriente  $I_0[A]$ .

La Segunda Ley de Kirchhoff establece la ecuación diferencial ordinaria:

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (38)$$

Además, se considerará que este circuito está sobre amortiguado si  $R^2 \geq \frac{4L}{C}$ .

- (a) Transforme la EDO a un sistema dinámico.  
 (b) Considere  $R = 6[\Omega]$ ,  $L = 1[H]$  y  $C = 2[F]$ . ¿Cuál es el máximo valor de  $\Delta t$  que asegura que el Método de Euler será estable?  
 (c) Considere que el circuito eléctrico está sobreamortiguado. ¿Cuál es el máximo valor de  $\Delta t$  que asegura que el Método de Euler será estable? Exprese su resultado en términos de  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

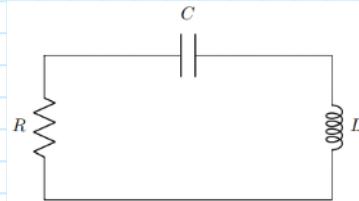


Figura 7: Circuito RLC en serie.

$$1) L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\begin{aligned} y_1 &= q & \dot{y}_1 &= \dot{q} = y_2 \\ y_2 &= \dot{q} & \ddot{y}_2 &= \ddot{q} \end{aligned}$$

$$y_2 = -\frac{R}{L} y_2 - \frac{1}{CL} y_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{1}{CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix}$$

Con Euler explícito:  $|1 + h\lambda_i| < 1$ ,  $\forall i$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ -\frac{1}{2} & -6 - \lambda_i \end{bmatrix} = -\lambda_i(-6 - \lambda_i) + \frac{1}{2}$$

$$6\lambda_i + \lambda_i^2 + \frac{1}{2} / -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 2}}{2} = \frac{-6 + \sqrt{34}}{2}, \frac{-6 - \sqrt{34}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -0,08, -5,92$$

$$h \in \left]0, \frac{1}{3} \right[ \cup \lambda_2$$

$$c) R^2 \geq \frac{4L}{C}$$

$$\frac{R^2}{L^2} \geq \frac{4}{CL}$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}$$

$$0 < h < \frac{2}{\lambda_2}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R-\lambda}{L} \end{bmatrix} = \lambda \frac{R}{L} + \lambda^2 + \frac{1}{CL}$$

$$0 < h < \frac{4}{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}}$$

19. Considera nuestro viejo péndulo con roce del curso FIS-110 como el de la Figura 10. El sistema puede expresarse en función de la variación del ángulo  $\theta$  del péndulo como:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)) + b\dot{\theta}(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(T) = \theta_T \quad (60)$$

donde  $b > 0$  es el coeficiente de roce,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $L$  el largo de la cuerda. Cuando el roce es nulo, el péndulo oscila libremente y esperamos una solución periódica  $\theta(t)$ . Ante la presencia de roce esperamos que la solución decaiga con el tiempo hasta el equilibrio, en donde la velocidad y aceleración angular son nulas.

- (a) Despreciando el roce y suponiendo que usted sostiene el péndulo al inicio a un ángulo de  $\theta_0$ , plantee un algoritmo utilizando **diferencias finitas** para encontrar la **velocidad angular inicial** con la que debe inicializar el péndulo tal que luego de un tiempo  $T$  el péndulo alcance un ángulo de  $\theta_T$ .

$$\text{Con } b=0 \quad (\text{sin Roce}): \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \quad |$$

Si  $\sin(\theta) \approx \theta$ : D.F.

$$\ddot{\theta} = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \Rightarrow \theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1} = -\frac{g}{L} h^2 \sin(\theta)$$

$$\frac{gh^2}{L} = C \Rightarrow \theta_{i+1} - 2\theta_i + C \sin(\theta) + \theta_{i-1} = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } v \\ \text{LDS} \\ \text{BDRFS} \end{array} \rightarrow F(\vec{\theta}) = \begin{bmatrix} \theta_2 - 2\theta_1 + C \sin(\theta_1) + \theta_0 \\ \theta_3 - 2\theta_2 + C \sin(\theta_2) + \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_T - 2\theta_{m-1} + C \sin(\theta_{m-1}) + \theta_{m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2}, -\frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{4h^2}, \frac{1}{4h^2}, \dots, \frac{1}{4h^2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} J(\vec{\theta}) = \begin{bmatrix} -2 + C \cos(\theta_1), 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 1, -2 + C \cos(\theta_2), 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, -2 + C \cos(\theta_3), 1, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, 0, 0, \dots, 1, -2 + C \cos(\theta_{m-1}) \end{bmatrix}$$

$$J F(\vec{\theta}_k) \cdot \Delta \vec{\theta} = -F; \quad \Delta \vec{\theta} = \vec{\theta}_{k+1} - \vec{\theta}_k$$

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_1(t) \\ \theta_2(t) &= \dot{\theta}_1(t) \end{aligned}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{g}{L} \sin(\theta_1) \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(\theta_1), 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(\theta_1) & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{L} \cos(\theta_1)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{g}{L} \cos(\theta_1)}$$

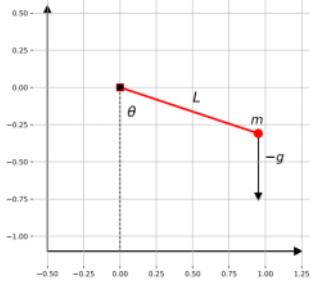


Figura 10: Esquema de péndulo. Note que la masa no aparece en el análisis posterior.

### 3.23

viernes, 13 de marzo de 2020 10:59

23. Consideré el siguiente problema de valor inicial no-autónomo definido para  $t \in [0, T]$ :

$$y'_1(t) = -\frac{y_1(t)y_2(t)}{20} + y_2^2(t) \sin(t) \quad (69)$$

$$y'_2(t) = \frac{y_1^2(t)}{20} - y_1(t)y_2(t) \sin(t) \quad (70)$$

con  $y_1(0) = \cos(\theta)$  y  $y_2(0) = \sin(\theta)$  con  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

- (a) Demuestre que las órbitas del sistema dinámico se mueven en un círculo, además determine el radio del círculo.

Hint 1: Multiply equation (69) by  $y_1(t)$  and multiply (70) by  $y_2(t)$ , add them up and integrate.

Hint 2: Recall  $\frac{d}{dx}(f^2(x)) = 2f(x)f'(x)$ .

- (b) Convierta el IVP no-autónomo en un IVP autónomo.

Hint 1: How can we build an ODE from a known solution? Say  $y_3(t) = t$ .

- (c) Determine una cota inferior para valor propio menor de la matriz Jacobiana obtenida de su IVP autónomo obtenido en la pregunta anterior.

- (d) [Problema computacional] Construya la siguiente curva paramétrica en 2D  $\langle y_1(t), y_2(t) \rangle$ , para  $t \in [0, 1000]$ .

- (e) [Problema computacional] Construya la siguiente curva paramétrica en 3D  $\langle y_1(t), y_2(t), t \rangle$ , para  $t \in [0, 1000]$ .

- (f) [Problema computacional] Determine  $\theta$  y  $T$  tal que al dibujar las órbitas se cubra todo el círculo.

a)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 \cdot y_1 &= -\frac{y_1^2 y_2}{20} + y_1 y_2^2 \text{sen}(t) \\ \dot{y}_2 \cdot y_2 &= \frac{y_1^2 y_2}{20} - y_1 y_2^2 \text{sen}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 y_1 + \dot{y}_2 y_2 &= 0 \quad | \cdot 2 \\ 2 \dot{y}_1 y_1 &= -2 \dot{y}_2 y_2 \quad | \int \\ y_1^2 + C_1 &= -y_2^2 - C_2 \\ y_1^2 + y_2^2 &= C_3 \quad |_{t=0} \\ \cos(u)^2 + \text{sen}(u)^2 &= C_3 = 1 \\ y_1^2 + y_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

b)

Convierta el IVP no-autónomo en un IVP autónomo.

Hint 1: How can we build an ODE from a known solution? Say  $y_3(t) = t$ .

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= -\frac{y_1(t)y_2(t)}{20} + y_2^2(t) \sin(t) \\ y'_2(t) &= \frac{y_1^2(t)}{20} - y_1(t)y_2(t) \sin(t) \\ y'_3 &= 1 \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2, y_3) \\ f_2(y_1, y_2, y_3) \\ f_3(y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

- c) Determine una cota inferior para valor propio menor de la matriz Jacobiana obtenida de su IVP autónomo obtenido en la pregunta anterior.

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\frac{y_2}{20}, -\frac{y_1}{20} + 2y_2 \text{sen}(y_3), y_2^2 \end{pmatrix}$$

24. Sea la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\y'(0) + y(0) &= 2 \\y'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1\end{aligned}$$

- (a) Exprese el problema como sistema de ecuaciones diferenciales.  
 (b) Con  $\Delta t = \pi/8$ , proponga un método numérico para resolver la ecuación diferencial.

ASUMO:  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 

a) BVP con Dif. finitas

$$y'' + y = 0 \Rightarrow \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = 0$$

$$y_0 + y_0 = 2 \Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{h} + y_0 = \frac{y_1 + y_0(1 - \frac{1}{h})}{h} = 2$$

$$y_m + y_m = 1 \Rightarrow \frac{y_m - y_{m-1}}{h} + y_m = \frac{y_m(1 + \frac{1}{h}) - y_{m-1}}{h} = 1$$

$$\alpha \cdot y_{i+1} \quad \beta y_i \quad \gamma \cdot y_{i-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{h^2} \quad \beta = 1 - \frac{2}{h^2} \quad \gamma = \frac{1}{h^2}$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h}, 0, \dots, 0 \\ \frac{1}{h^2}, 1 - \frac{2}{h^2}, \frac{1}{h^2}, 0, \dots, 0 \\ 0, \frac{1}{h^2}, 1 - \frac{2}{h^2}, \frac{1}{h^2}, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 1 - \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2} \\ 0, 0, \dots, 0, -\frac{1}{h}, 1 + \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h}, 0, \dots, 0 \\ \frac{1}{h^2}, 1 - \frac{2}{h^2}, \frac{1}{h^2}, 0, \dots, 0 \\ 0, \frac{1}{h^2}, 1 - \frac{2}{h^2}, \frac{1}{h^2}, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 1 - \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2} \\ 0, 0, \dots, 0, -\frac{1}{h}, 1 + \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

- (a) Exprese el problema como sistema de ecuaciones diferenciales.  
 (b) Con  $\Delta t = \pi/8$ , proponga un método numérico para resolver la ecuación diferencial.

$$\Delta t = \frac{\pi}{8} \Rightarrow t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow t = \left[0, \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}\right] = \left[0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\pi^2}, \frac{8}{\pi}, 0, 0, 0 \\ \frac{64}{\pi^2}, 1 - \frac{128}{\pi^2}, \frac{64}{\pi^2}, 0, 0 \\ 0, \frac{64}{\pi^2}, 1 - \frac{128}{\pi^2}, \frac{64}{\pi^2}, 0 \\ 0, 0, \frac{64}{\pi^2}, 1 - \frac{128}{\pi^2}, \frac{64}{\pi^2} \\ 0, 0, 0, -\frac{8}{\pi}, 1 + \frac{8}{\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(\frac{\pi}{8}) \\ y(\frac{\pi}{4}) \\ y(\frac{3\pi}{8}) \\ y(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{5 \times 5} \cdot x_s = b_s \Rightarrow P_4LU$$

El Grafeno es un nuevo material que ha revolucionado la industria mundial debido a sus múltiples aplicaciones. Una de sus propiedades relevantes es su alta conductividad del calor. Un importante laboratorio (IL) de ensayo de materiales le ha solicitado a los alumnos de CC2 de la USM realizar una simulación computacional para analizar la conductividad de una varilla de Grafeno de largo  $l_0$  con una constante conductividad  $\alpha^2$  y una duración máxima del experimento de  $T$  unidades de tiempo. Considera que el flujo de calor a través de la varilla puede modelarse con la siguiente EDP:  $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$  definida en  $0 \leq x \leq l_0$  y  $0 \leq t \leq T$  con las siguientes condiciones:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_x(0, t) = 0$  y  $u(l_0, t) = 0$ , respectivamente y donde  $u(x, t)$  representa la temperatura de la varilla en la posición  $x$  al tiempo  $t$ . IL está interesado en conocer el tiempo en que la temperatura máxima de la varilla no excede los  $\beta$  grados.

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in [0, l_0], \quad t \in [0, T] \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_x(0, t) &= 0 \quad u(l_0, t) = 0 \end{aligned}$$

El método de Crank-Nicolson se usa a menudo en problemas difusivos. Por ejemplo, en el caso de difusión lineal,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cuya discretización mediante Crank-Nicolson es:

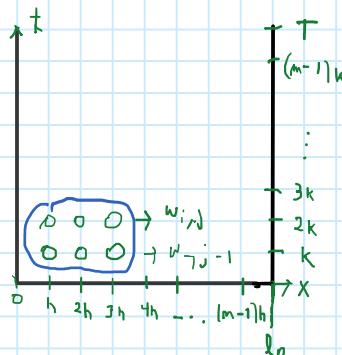
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2} ((u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n))$$

$$u_{xx} \approx \frac{1}{h^2} \left( \underbrace{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}_{h^2} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \underbrace{w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}}_{h^2} \right); \quad h = \frac{l_0}{m} = \Delta x \\ K = \frac{T}{m} = \Delta t$$

$$w_{i,j} - w_{i,j-1} = \frac{\alpha^2 \cdot K}{2h^2} \left( w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1} \right) \quad \left| C = \frac{\alpha^2 K}{2h^2} \right.$$

$$w_{i,j} - C w_{i+1,j} + C w_{i,j-1} - C w_{i-1,j} = w_{i,j-1} - 2C w_{i,j-1} + C w_{i+1,j-1} + C w_{i-1,j-1}$$

$$(1) \quad w_{i,j} (1 + 2C) - C w_{i+1,j} - C w_{i-1,j} = w_{i,j-1} (1 - 2C) + C w_{i+1,j-1} + C w_{i-1,j-1}$$



$$w_{1,j} \approx w_{0,j} \\ \text{red text: } \cancel{(1)}_{i=1} \quad w_{1,j} (1 + 2C) - C w_{2,j} - C w_{0,j} = w_{2,j-1} (1 - 2C) + C w_{2,j-1} + C w_{0,j-1} \\ w_{1,j} (1 + C) - C w_{2,j} = w_{1,j-1} (1 - C) + C w_{2,j-1}$$

$$A \xrightarrow{w_i} = B \quad w_{i-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1+C & -C & 0 & \dots & 0 \\ -C & 1+2C & -C & \dots & 0 \\ 0 & -C & 1+2C & C & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -C & 1+2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ w_{3,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-C & C & 0 & \dots & 0 \\ C & 1-2C & C & \dots & 0 \\ 0 & C & 1-2C & C & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C & 1-2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ w_{3,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} +$$

6. Consideré el dominio  $\Omega$  indicado en la Figura 12 y su frontera  $\partial\Omega$  también indicada en la misma figura. En la Figura 12 se propone una discretización del dominio donde los círculos representan la discretización de la frontera y los triángulos representan la discretización de los puntos interiores.

El problema a discutir es la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad (1)$$

$$u(\partial\Omega) = 0 \quad (2)$$

Nuestro interés es encontrar aproximaciones numéricas de  $u(x,y)$  en los puntos interiores indicados en la Figura 12 y  $\lambda$ .

(a) Obtenga una discretización del Laplaciano en los puntos interiores indicados en la Figura 12.

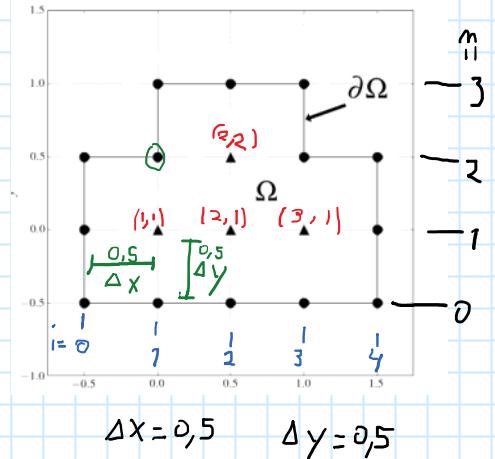
## EDP - Elliptix

$$\Delta U(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$$

$$u_{xx} = \frac{w_{i+1,m} - 2w_{i,m} + w_{i-1,m}}{\Delta x^2} \quad \left| \quad u_{yy} = \frac{w_{i,m+1} - 2w_{i,m} + w_{i,m-1}}{\Delta y^2} \right.$$

$$u = w_{i,m}$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \subseteq 4 = \frac{1}{\Delta y^2}$$



$$(1) : -4(w_{i+1,m} - 2w_{i,m} + w_{i-1,m} + w_{i,m+1} - 2w_{i,m} + w_{i,m-1}) = \lambda w_{i,m}$$

$$-4w_{i+1,m} - 4w_{i-1,m} - 4w_{i,m+1} - 4w_{i,m-1} + 16w_{i,m} = \lambda w_{i,m}$$

Evaluamos en los puntos  $\Delta$ :  $(1,1)$ ,  $(2,1)$ ,  $(3,1)$ ,  $(2,3)$

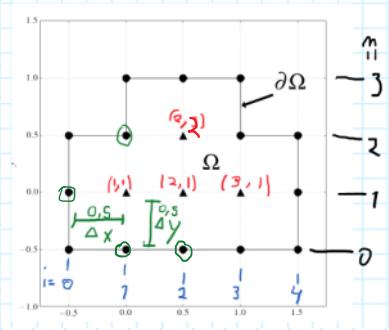
$$(1,1) \Rightarrow -4w_{2,1} - 4w_{\cancel{2},1}^0 - 4w_{1,2}^0 - 4w_{1,0}^0 + 16w_{1,1} = \lambda w_{1,1} \\ -4w_{2,1} + 16w_{1,1} = \underline{\lambda w_{1,1}}$$

$$(2,1) \Rightarrow -4w_{3,1} - 4w_{1,1} - 4\cancel{w}_{2,2} - 4\cancel{w}_{2,0} + 16w_{2,1} = \lambda w_{2,1}$$

$$-4w_{3,1} - 4w_{1,1} - 4w_{2,2} + 16w_{2,1} = \lambda w_{2,1} /$$

$$(3,1) \Rightarrow -4w_{4,1} - 4w_{2,1} - 4w_{3,2} - 4w_{3,0} + 16w_{3,1} = \lambda w_{3,1} \\ -4w_{2,1} + 16w_{3,1} = \lambda w_{3,1}$$

$$(2,2) \Leftrightarrow -4w_{3,2} - 4w_{1,2} - 4w_{2,3} - 4w_{2,1} + 16w_{2,2} = \lambda w_{2,2} \\ - 4w_{2,1} + 16w_{2,2} = \lambda w_{2,2}$$



(b) Construya explícitamente las ecuaciones discretas y representela matricialmente.

(c) Explique claramente (no resuelva!) que algoritmo necesita para encontrar *todas* las soluciones no nulas de  $u(x, y)$  y sus  $\lambda$ 's respectivos dada la discretización sugerida en la Figura 12.

$$b) \quad \left[ \begin{array}{cccc} 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 16 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 16 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \\ w_{2,2} \end{array} \right] = \lambda \left[ \begin{array}{c} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \\ w_{2,2} \end{array} \right]$$

c) El sistema se puede resolver como un problema de valores y vectores propios

$$A \vec{w} = \lambda \vec{w}$$

AYUDANTIA 7  
2019

8. La temperatura en estado estacionario de la cuarta parte de un anillo circular de radio interno  $1\text{[cm]}$  y radio externo  $3\text{[cm]}$  se modela con la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$-\Delta u(r, \theta) = 0 \quad (95)$$

$$u(1, \theta) = 2 \quad \quad \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \quad \quad (96)$$

$$u(3, \theta) = 3 \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (97)$$

$$u_\theta(r, 0) = \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right) \quad 1 < r < 3 \quad (98)$$

$$u_\theta \left( r, \frac{\pi}{2} \right) = \cos(r\pi) - 1 \quad \quad \quad 1 < r < 3 \quad \quad \quad (99)$$

(100)

o en coordenadas polares:

Donde  $\Delta$  es el operador laplaciano en coordenadas polares:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (101)$$

Para las siguientes preguntas realizará una discretización de la EDP utilizando el método de diferencias finitas, donde debe asumir que  $w_{i,j} = u(r_i, \theta_j) = u(i\Delta r, j\Delta\theta)$ .

- (a) Realice una discretización de la EDP (Ecuación (95)) utilizando diferencias centradas de segundo orden. Consideré un caso general para puntos interiores y distintos valores  $\Delta r$  y  $\Delta\theta$ .

(b) Realice una discretización de las condiciones de frontera de la EDP (Ecuaciones (96), (97), (98), (99)).

(c) Ahora considere el caso particular donde  $\Delta r = 1$  y  $\Delta\theta = \frac{\pi}{8}$ . Determine un sistema de ecuaciones en forma matricial con los puntos desconocidos de la discretización.

三

$$-\Delta u(r, \theta) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Discretizando:

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta \theta^2} = 0$$

б)

$$\begin{aligned} w_{0,j} &= 2 \\ w_{M,j} &= 3 \\ \frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{\Delta\theta} &= \sin\left(\frac{r_i\pi}{4}\right) \\ \frac{w_{i,N} - w_{i,N-1}}{\Delta\theta} &= \cos(r_i\pi) - 1 \end{aligned}$$

Con  $M$  el último punto en la discretización de  $r$  y corresponde a  $\frac{3\pi-1}{\Delta r}$  y  $N$  el último punto en la discretización de  $\theta$  y corresponde a  $\frac{\pi/2}{\Delta \theta}$ .

c) Notar que  $r_i = 1, 2, 3$  y  $\theta_j = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$

14. Consideré la clásica ecuación de onda con condición de Dirichlet nula:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \quad (122)$$

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad (123)$$

$$u_t(x, 0) = x \quad (124)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (125)$$

Se ha resuelto numéricamente la ecuación de onda mediante diferencias finitas para varios tiempos entre  $t = 0$  y  $t = 1$ . Los resultados han variado en función de la elección de  $\Delta x = (M + 1)^{-1}$  y  $\Delta t = (N + 1)^{-1}$  como se puede ver en la Figura 14. La Tabla 11 muestra para cada experimento  $p$  la cantidad de puntos  $M$  y  $N$

a) Se aprecia una EDP hiperbólica, pero en la figura de la derecha se ve instable al ver irregularidades.

Si se utiliza el método explícito se tiene que cumplir:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad \frac{c \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \Rightarrow \frac{2 \Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

$$c^2 = 4 \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0,5$$

$$c = 2$$

b)  $\Delta x = \frac{1}{M+1}$      $\Delta t = \frac{1}{N+1}$      $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{M+1}{N+1} \leq 0,5$

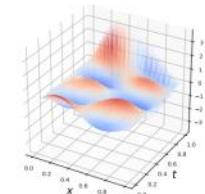
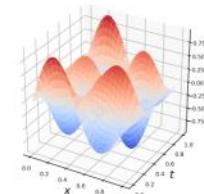


Figura 14: Dos soluciones numéricas de la ecuación de onda (122) para dos configuraciones distintas de parámetros. ¡Note la diferencia entre ellas!

utilizados para discretizar el espacio y el tiempo respectivamente.

- (a) Describa de forma precisa el fenómeno que se aprecia en las figuras. ¿A qué se debe este fenómeno? ¿Qué condición debe cumplirse?

- (b) Encierre en la Tabla 11 aquel o aquellos cuocientes que resulten en una resolución numérica estable de la ecuación (122).

| $M \backslash N$ | 200    | 230    | 260    | 290    | 320    | 350    | 380    | 410    | 440    | 470    | 500    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 100              | 0.5025 | 0.4372 | 0.3870 | 0.3471 | 0.3146 | 0.2877 | 0.2651 | 0.2457 | 0.2290 | 0.2144 | 0.2016 |
| 120              | 0.6020 | 0.5238 | 0.4636 | 0.4158 | 0.3769 | 0.3447 | 0.3176 | 0.2944 | 0.2744 | 0.2569 | 0.2415 |
| 140              | 0.7015 | 0.6104 | 0.5402 | 0.4845 | 0.4393 | 0.4017 | 0.3701 | 0.3431 | 0.3197 | 0.2994 | 0.2814 |
| 160              | 0.8010 | 0.6970 | 0.6169 | 0.5533 | 0.5016 | 0.4587 | 0.4226 | 0.3917 | 0.3651 | 0.3418 | 0.3214 |
| 180              | 0.9005 | 0.7835 | 0.6935 | 0.6220 | 0.5639 | 0.5157 | 0.4751 | 0.4404 | 0.4104 | 0.3843 | 0.3613 |
| 200              | 1.0000 | 0.8701 | 0.7701 | 0.6907 | 0.6262 | 0.5726 | 0.5276 | 0.4891 | 0.4558 | 0.4268 | 0.4012 |
| 220              | 1.0995 | 0.9567 | 0.8467 | 0.7595 | 0.6885 | 0.6296 | 0.5801 | 0.5377 | 0.5011 | 0.4692 | 0.4411 |
| 240              | 1.1990 | 1.0433 | 0.9234 | 0.8282 | 0.7508 | 0.6866 | 0.6325 | 0.5864 | 0.5465 | 0.5117 | 0.4810 |
| 260              | 1.2985 | 1.1299 | 1.0000 | 0.8969 | 0.8131 | 0.7436 | 0.6850 | 0.6350 | 0.5918 | 0.5541 | 0.5210 |
| 280              | 1.3980 | 1.2165 | 1.0766 | 0.9656 | 0.8754 | 0.8006 | 0.7375 | 0.6837 | 0.6372 | 0.5966 | 0.5609 |
| 300              | 1.4975 | 1.3030 | 1.1533 | 1.0344 | 0.9377 | 0.8575 | 0.7900 | 0.7324 | 0.6825 | 0.6391 | 0.6008 |

X  $\frac{M+1}{N+1} \leq 0,5$