1.- Los polinomios de Legendre se definen como:

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i\, i!} \cdot \frac{d^i}{dx^i}\left[(x^2-1)^i\right]$$

Los cuales son ortogonales entre sí, para $0 \leq i \leq n$ y $x \in [-1,1]$.
Forman una base para los polinomios de grado n.

La cuadratura gaussiana utiliza la interpolación de Lagrange con las raíces del n-ésimo polinomio de Legendre.
Para demostrar su grado de precisión, demostraremos que se puede integrar un polinomio de grado $2n-1$ con n puntos.

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $2n-1$.
Si dividimos este polinomio por el n-ésimo polinomio de Legendre se obtiene:

$$\frac{P(x)}{p_n(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{p_n(x)} \rightarrow P(x) = S(x) \cdot p_n(x) + R(x)$$

Luego, como dividimos un polinomio de grado $2n-1$, por uno de grado n, es claro que tanto $S(x)$ como $R(x)$ tienen grado $n-1$ o menor.

Integrando la expresión entre -1 y 1, se obtiene:

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} S(x)\cdot P_n(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)\,dx$$

Donde $S(x)$ puede escribirse como una combinación lineal de los polinomios de Legendre de grado $n-1$ y menor.

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot P_i(x) \quad , \quad C_i \in \mathbb{R} \,/\, \forall i$$

Así:

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i P_i(x) P_n(x) dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_i \int_{-1}^{1} P_i(x) P_n(x) dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx$$

Como los polinomios de Legendre son ortogonales entre sí, entonces la sumatoria de integrales es nula.

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = 0 + \int_{-1}^{1} R(x)dx.$$

Finalmente, como es posible interpolar exactamente un polinomio de grado $n-1$ con n puntos, la cuadratura gaussiana integrará perfectamente $R(x)$ y en consecuencia $P(x)$.

2.- Realizando el cambio de intervalo:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}y + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) dy$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}(y+1)\right) dy$$

Evaluando las raíces del polinomio de Legendre en el cambio de variable: (Con 4 cifras significativas)

$\underline{i=1}$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-0,8611+1) \approx 0,1231 = x_1$

$\underline{i=2}$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-0,3400+1) \approx 0,5849 = x_2$

$\underline{i=3}$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(0,3400+1) \approx 1,1875 = x_3$

$\underline{i=4}$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(0,8611+1) \approx 1,6494 = x_4$

Luego, utilizando los valores de la tabla evaluamos el valores encontrados en la función.

$f(x_1) \approx 1,019$ $\qquad$ $f(x_2) \approx 1,420$

$f(x_3) \approx 2,427$ $\qquad$ $f(x_4) \approx 3,371$

Luego, por la definición de la cuadratura gaussiana:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{i=1}^{4} C_i \cdot f(x_i)$$

Donde las constantes C_i se encuentran en la tabla.

Así:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[C_1 \cdot f(x_1) + C_2 \cdot f(x_2) + C_3 \cdot f(x_3) + C_4 f(x_4) \right]$$

$$\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[0{,}3479 \cdot 1{,}019 + 0{,}6521 \cdot 1{,}42 + 0{,}6521 \cdot 2{,}427 + 0{,}3479 \cdot 3{,}371 \right]$$

$$\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 4{,}036 \approx \boxed{3{,}577}$$

3.- Se tiene el problema:

$$\vec{v}A = \lambda_1 \vec{v}$$, donde $\vec{v}$ es un vector fila.

Luego, si ~~trasponemos~~ conjugamos la expresión:

$$(\vec{v}A)^* = (\lambda_1 \vec{v})^* \rightarrow A^* \vec{v}^T = \bar{\lambda}_1 \vec{v}^T$$

Y la expresión resultante es la definición de valores propios. Luego, podemos utilizar power iteration.

```
def leftPowerIteration(A, x0):
    (v, λ) = PowerIteration(A*, x0)
    return (v^T, λ̄)
```

4.- Se espera que la integral tenga de error absoluto η. Entonces, el algoritmo consistirá en ~~calcular~~ estimar la integral con n puntos y luego calcular la diferencia con una estimación de n+1 puntos.

Además, se puede utilizar cualquier método ya que no se conoce la naturaleza de $p(x)$. Usaremos trapecio.

```
def integralI(x,a,ɲ,p):
    n = 2   -> 2 puntos
    I = trapecio(x-a, x+a, p, n)
    error = infinity
    while error >= ɲ:
        I0 = I1
        n += 1
        I1 = trapecio(x-a, x+a, p, n)
        error = |I1 - I0|
    return I1
```

b) El máximo de la expresión de encuentra calculando la derivada:

$$\frac{d}{dx}\int_{x-a}^{x+a} p(y)\,dy = p(x+a)\frac{d}{dx}(x+a) - p(x-a)\frac{d}{dx}(x-a)$$

Regla de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = f(x,b(x))\cdot\frac{d}{dx}b(x) - f(x,a(x))\cdot\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x-a}^{x+a} p(y)\,dy = p(x+a) - p(x-a) = F(x,a)$$

Luego, para encontrar el máximo debemos encontrar un valor de x tal que $F(x,a) = \emptyset$.

```
def máximo(F, x0, a):
    α = Bisección(F(x0, a))
    return α.
```