Ayudantía 11

1.- a) En la figura de la derecha se aprecia una solución inestable, esto porque hacia el final del Intervalo temporal se observan grandes irregularidades en la función.

Se debe cumplir la condición CFL.

$$\frac{C\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \ , \ C=2 \rightarrow \frac{2\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

b) Los valores de la tabla equivalen a:

$$\frac{M+1}{N+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Según la condición CFL

$$\frac{M+1}{N+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} = 0.5$$

Así los valores de soluciones estables corresponden a todas las instancias menores o iguales a 0.5.

a)* Además es necesario especificar que la EDP es hiperbólica, es decir, se cumple que:

$$B^2 - 4AC > 0$$

En este caso se tiene: $B=0$, $A=1$, $C=-4$

$$0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$$

2.- El sistema presente es acoplado, es decir, una EDP depende del valor de una función presente en otra EDP.

- Iniciaremos resolviendo la EDP en función de $v(x,t)$.
- Agrupando las ecuaciones dependientes de $v(x,t)$.

$$v_{tt}(x,t) = v_{xx}(x,t) \rightarrow v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$v(x,0) = \text{sen}(\pi x)\exp(-(x-0.5)^2) \quad (2)$$

$$v_t(x,0) = 0 \quad (3)$$

$$v(1,t) = 0 \quad (4)$$

$$v(0,t) + v_x(0,t) = \frac{\pi}{\exp(1/4)} \quad (5)$$

- De la ecuación (1) se sabe que la EDP es hiperbólica.
- Utilizando la discretización:

$$\psi_{i,k} = v(x_i, t_k)$$

$$v_{tt} \approx \frac{\psi_{i,k+1} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1}}{\Delta t^2}, \quad v_{xx} \approx \frac{\psi_{i+1,k} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i-1,k}}{\Delta x^2}$$

- La EDP (1):

$$\frac{\psi_{i,k+1} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1}}{\Delta t^2} - \frac{\psi_{i+1,k} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i-1,k}}{\Delta x^2} = 0 \;/\cdot \Delta t^2 \quad / \; \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} = \sigma^2$$

$$\psi_{i,k+1} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1} - \sigma^2\psi_{i+1,k} + 2\sigma^2\psi_{i,k} - \sigma^2\psi_{i-1,k} = 0$$

$$\psi_{i,k+1} + (2\sigma^2 - 2)\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1} - \sigma^2\psi_{i+1,k} - \sigma^2\psi_{i-1,k} = 0$$

- Despejando el tiempo $k+1$ (tiempo a calcular):

$$\psi_{i,k+1} = (2 - 2\sigma^2)\psi_{i,k} + \sigma^2\psi_{i+1,k} + \sigma^2\psi_{i-1,k} - \psi_{i,k-1} \quad (6)$$

- En la expresión (6) el tiempo K representa el tiempo actual, y el K-1 un tiempo anterior, esto en el tiempo inicial $K=0$ es un problema ya que no contamos con info. de $K=-1$.

- Utilizaremos (3) para solucionar la falta de información.

$$v_t(x_i,0) \approx \frac{\psi_{i,K+1} - \psi_{i,K-1}}{2\Delta t} \quad \text{(Central difference)}$$

$$0 \approx \frac{\psi_{i,K+1} - \psi_{i,K-1}}{2\Delta t} \rightarrow \psi_{i,K+1} \approx \psi_{i,K-1}$$

- Así, sabemos que para $K=0$, $\psi_{i,1} \approx \psi_{i,-1}$

- Reparando (6) para $K=0$:

$$\psi_{i,1} = (2-2\sigma^2)\psi_{i,0} + \sigma^2\psi_{i+1,0} + \sigma^2\psi_{i-1,0} - \psi_{i,1}$$

$$2\psi_{i,1} = (2-2\sigma^2)\psi_{i,0} + \sigma^2\psi_{i+1,0} + \sigma^2\psi_{i-1,0}$$

$$\psi_{i,1} = (1-\sigma^2)\psi_{i,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{i+1,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{i-1,0}$$

- Para el borde izquierdo ($i=0$) se tiene que utilizar la expresión (5)

$$v_x(0,t) \approx \frac{\psi_{1,K} - \psi_{0,K}}{\Delta x} \quad \text{(Forward difference)}$$

Reemplazando en (5):

$$\psi_{0,K} + \frac{\psi_{1,K} - \psi_{0,K}}{\Delta x} = \frac{\pi}{\exp(1/4)} \rightarrow \frac{(\Delta x - 1)}{\Delta x}\psi_{0,K} + \frac{1}{\Delta x}\psi_{1,K} = \frac{\pi}{\exp(1/4)}$$

$$\psi_{0,K} = \frac{\Delta x}{(\Delta x - 1)}\left[\frac{\pi}{\exp(1/4)} - \frac{1}{\Delta x}\psi_{1,K}\right] = \frac{\Delta x \pi}{(\Delta x - 1)\exp(1/4)} - \frac{1}{(\Delta x - 1)}\psi_{1,K} = \psi_{0,K}$$

- Para el borde derecho ($i=n$): expresion (4)

$$\psi_{n,K} = 0$$

• Luego, para $k=0$, el sistema de ecuaciones:

$\underline{i=1}$ $$\psi_{1,1} = (1-\sigma^2)\psi_{1,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{2,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{0,0} \xrightarrow{} \text{Borde izquierdo}$$

$$\psi_{1,1} = (1-\sigma^2)\psi_{1,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{2,0} + \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\Delta x \tilde{\pi}}{(\Delta x-1)\exp(1/4)} - \frac{1}{(\Delta x-1)}\psi_{1,0}\right]$$

$$\psi_{1,1} = \left(1-\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2(\Delta x-1)}\right)\psi_{1,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{2,0} + \frac{\sigma^2 \Delta x \tilde{\pi}}{2(\Delta x-1)\exp(1/4)}$$

$\underline{i=2}$ $$\psi_{2,1} = (1-\sigma^2)\psi_{2,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{3,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{1,0}$$

$\vdots$

Borde derecho

$\underline{i=n-1}$ $$\psi_{n-1,1} = (1-\sigma^2)\psi_{n-1,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{n,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{n-2,0}$$

$$\psi_{n-1,1} = (1-\sigma^2)\psi_{n-1,0} + \frac{\sigma^2}{2}\psi_{n-2,0}$$

• Así, el sistema matricial para $k=0$:

$$\begin{bmatrix}\psi_{1,1}\\ \psi_{2,1}\\ \vdots \\ \psi_{n-1,1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(1-\sigma^2-\frac{\sigma^2}{2(\Delta x-1)}\right) & \sigma^2/2 & 0 \cdots & 0\\ \sigma^2/2 & (1-\sigma^2) & \sigma^2/2 \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots \sigma^2/2 & (1-\sigma^2)\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\psi_{1,0}\\ \psi_{2,0}\\ \vdots\\ \psi_{n-1,0}\end{bmatrix}}_{\text{Vector de valores conocidos}} + \frac{\sigma^2}{2}\begin{bmatrix}\frac{\Delta x \tilde{\pi}}{(\Delta x-1)\exp(1/4)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\psi_{i,0} = \operatorname{Sen}(\pi x_i)\exp(-(x_i-0.5)^2)$$

Expresión (2)

- Luego, para $k>0$; utilizaremos la expresión (6):

$i=1$

Borde izquierdo

$$\psi_{1,k+1}=(2-2\sigma^2)\psi_{1,k}+\sigma^2\psi_{2,k}+\sigma^2\psi_{0,k}-\psi_{1,k-1}$$

$$\psi_{1,k+1}=\underbrace{\left(2-2\sigma^2+\frac{\sigma^2}{(\Delta x-1)}\right)}_{\alpha}\psi_{1,k}+\sigma^2\psi_{2,k}-\psi_{1,k-1}+\frac{\sigma^2\Delta x\,\pi}{(\Delta x-1)\exp(1/4)}$$

$i=2$

$$\psi_{2,k+1}=(2-2\sigma^2)\psi_{2,k}+\sigma^2\psi_{3,k}+\sigma^2\psi_{1,k}-\psi_{2,k-1}$$

$$\vdots$$

$i=n-1$

Borde derecho

$$\psi_{n-1,k+1}=(2-2\sigma^2)\psi_{n-1,k}+\sigma^2\psi_{n,k}+\sigma^2\psi_{n-2,k}-\psi_{n-1,k-1}$$

$$\psi_{n-1,k+1}=(2-2\sigma^2)\psi_{n-1,k}+\sigma^2\psi_{n-2,k}-\psi_{n-1,k-1}$$

- Así, el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix}\psi_{1,k+1}\\ \psi_{2,k+1}\\ \vdots\\ \psi_{n-1,k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \sigma^2 & (2-2\sigma^2) & \sigma^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 & (2-2\sigma^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_{1,k}\\ \psi_{2,k}\\ \vdots\\ \psi_{n-1,k}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\psi_{1,k-1}\\ \psi_{2,k-1}\\ \vdots\\ \psi_{n-1,k-1}\end{bmatrix}+\sigma^2\begin{bmatrix}\frac{\Delta x\,\pi}{(\Delta x-1)\exp(1/4)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

- Para que el sistema sea estable se debe cumplir:

$$\sigma\leq 1\rightarrow\frac{\Delta t}{\Delta x}\leq 1\rightarrow\Delta t\leq\Delta x$$

- Ahora, consideremos la EDP que depende de $u(x,t)$.

$$u_{tt}(x,t) = c(v(x,t))\, u_{xx}(x,t) \quad (7)$$
$$u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x)\exp(-(x-0.5)^2) \quad (8)$$
$$u_t(x,0) = 0 \quad (9)$$
$$u(1,t) - u(0,t) = 0 \quad (10)$$

- Para asegurar un comportamiento hiperbólico de la EDP (7)

$$c(x) \geq 0 \rightarrow 1 + \varepsilon\cos(x) \geq 0 \rightarrow \varepsilon \geq \frac{-1}{\cos(x)}, \ \cos(x) \geq 0$$
$$\rightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{\cos(x)}, \ \cos(x) < 0$$
$$\rightarrow |\varepsilon| \leq 1$$

- La discretización: $w_{i,k} = u(x_i, t_k)$

$$u_{tt}(x_i,t_k) - c(v(x_i,t_k))\, u_{xx}(x_i,t_k) = 0$$
$$\frac{w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}}{\Delta t^2} - c(\psi_{i,k})\cdot\frac{w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}}{\Delta x^2} = 0,$$

*Desde aquí en adelante se debería usar $\sigma_{i,k}^2$ pero por error solo escribí σ^2. $\rightarrow$ $\sigma_{i,k}^2 = \frac{c(\psi_{i,k})\Delta t^2}{\Delta x^2}$

$$w_{i,k+1} = (2-2\sigma^2)w_{i,k} + \sigma^2 w_{i+1,k} + \sigma^2 w_{i-1,k} - w_{i,k-1} \quad (11)$$

- Para los bordes izquierdos y derechos, se tiene la exp. (10)

$$u(1,t) - u(0,t) = 0 \rightarrow w_{0,k} = w_{n,k} \quad (12)$$

Esta condición necesita que ingresemos una nueva incógnita al sistema, esta puede ser $w_{0,k}$ o $w_{n,k}$. Eligiremos $w_{0,k}$.

• Al igual que para la EDP anterior debemos reparar en $K=0$.
Dado la exp. (9):

$$u_t(x_i,0)=0\approx\frac{w_{i,1}-w_{i,-1}}{\Delta t}\rightarrow w_{i,1}\approx w_{i,-1}$$

• Reemplazando en (11). Con $K=0$

$$w_{i,1}=(2-2\sigma^2)w_{i,0}+\sigma^2 w_{i+1,0}+\sigma^2 w_{i-1,0}-w_{i,-1}$$

$$w_{i,1}=(1-\sigma^2)w_{i,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{i+1,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{i-1,0}$$

• Luego, las ecuaciones:

$i=0$ → Variable nueva para utilizar (12).

$$w_{0,1}=(1-\sigma^2)w_{0,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{1,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{n-1,0}$$

Como definimos $w_{0,k}=w_{n,k}$ entonces el punto a la izq. de $w_{0,k}$ es el mismo que el de $w_{n,k}$.

$i=1$

$$w_{1,1}=(1-\sigma^2)w_{1,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{2,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{0,0}$$

$\vdots$

$i=n-1$

Punto a la derecha de $w_{n-1,1}$.

$$w_{n-1,1}=(1-\sigma^2)w_{n-1,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{0,0}+\frac{\sigma^2}{2}w_{n-2,0}$$

• El sist. matricial:

Vector de pts. conocidos según exp. (8)

$$\begin{bmatrix} w_{0,1}\\ w_{1,1}\\ \vdots\\ w_{n-1,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-\sigma^2) & \sigma^2/2 & 0 & \cdots & 0 & \sigma^2/2\\ \sigma^2/2 & (1-\sigma^2) & \sigma^2/2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \sigma^2/2 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2/2 & (1-\sigma^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{0,0}\\ w_{1,0}\\ \vdots\\ w_{n-1,0}\end{bmatrix}$$

• Para $k \geq 1$ se tendrán las ecuaciones:

$\underline{i=0}$ $$w_{0,k+1} = (2-2\sigma^2)w_{0,k} + \sigma^2 w_{1,k} + \sigma^2 w_{n-1,k} - w_{0,k-1}$$

$\underline{i=1}$ $$w_{1,k+1} = (2-2\sigma^2)w_{1,k} + \sigma^2 w_{2,k} + \sigma^2 w_{0,k} - w_{1,k-1}$$

$\vdots$

• Así, el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} w_{0,k+1} \\ w_{1,k+1} \\ \vdots \\ w_{n-1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-2\sigma^2) & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & (2-2\sigma^2) & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 & (2-2\sigma^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,k} \\ w_{1,k} \\ \vdots \\ w_{n-1,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0,k-1} \\ w_{1,k-1} \\ \vdots \\ w_{n-1,k-1} \end{bmatrix}$$

• Finalmente, el algoritmo debe resolver la EDP para $v(x,t)$ hasta el tiempo T, asegurando la condición CFL. Luego, resolver para $u(x,t)$ con las consideraciones mencionadas, teniendo en cuenta para cada matriz (cada step temporal) una condición CFL definida como:

$$\sqrt{2}\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esto porque el valor máximo de $c(x)$ es 2.