Ayudantía 10

1.- Se considerará una resolución con método explícito e implícito.

(a) Este item corresponde a la aproximación derivada del polinomio interpolador de Lagrange visto en la ayudantía 7.

(b) El EDP a resolver corresponde a:

$$u_t(x,t) = \alpha^2(x)\, u_{xx}(x,t) \quad (1)$$
$$u(x,0) = 0 \quad (2)$$
$$u_x(0,t) = 0 \quad (3)$$
$$u(l_0,t) = \beta \quad (4)$$

Definiendo:

$$h = \frac{l_0}{n} \qquad K = \frac{T}{m} \qquad w_{ij} = u(ih, jK) = u(x_i, t_j)$$

La estimación de la ecuación (1) por diferencias finitas:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{K}$$ (Forward difference nos llevará a un método explícito.)

$$u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} \qquad \alpha^2(x_i) = \alpha_i^2$$

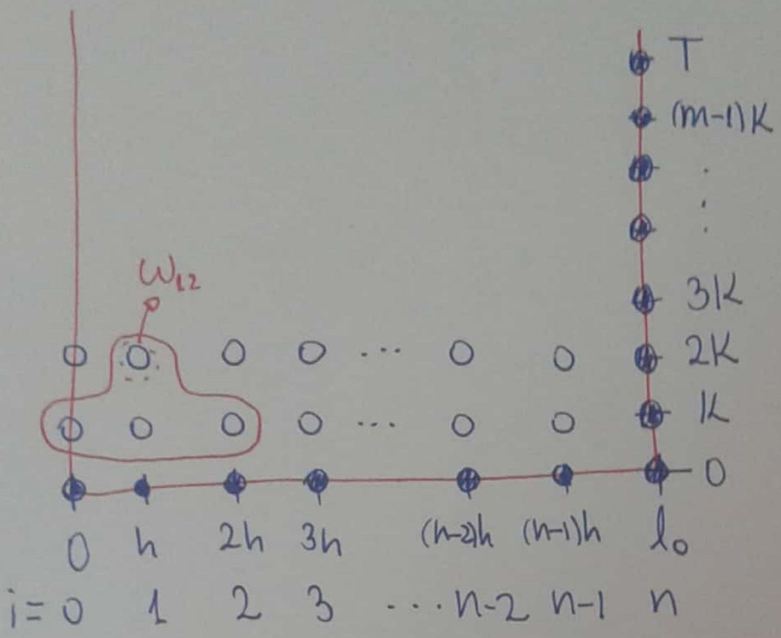
Así, (1):

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{K} = \alpha_i^2 \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} \right)$$ · Despejando $w_{i,j+1}$:

$$(5) \quad w_{i,j+1} = w_{ij} \cdot \left(1 - \frac{2\alpha_i^2 K}{h^2}\right) + w_{i+1,j} \cdot \frac{\alpha_i^2 K}{h^2} + w_{i-1,j} \cdot \frac{\alpha_i^2 K}{h^2} \quad \Big/ \quad \sigma_i = \frac{\alpha_i^2 K}{h^2}$$

... a través de la varilla puede modelarse con la siguiente EDP:

Siendo el stencil del esquema:



Como no se tiene el valor de la función en el borde izquierdo, es necesario realizar una estimación con la derivada (eq. 3)

$$u_x(x_0, t_j) \approx \frac{-3w_{0,j} + 4w_{1,j} - w_{2,j}}{2h} = 0$$

Despejando w_{0j}.

$$w_{0,j} = -\frac{4}{3} w_{1j} + \frac{1}{3} w_{2j}$$

Luego, reemplazamos en i=1 de la ecuación (5).

$$w_{1,j+1} = w_{1j}(1 - 2\sigma_1) + w_{2,j}\sigma_1 + w_{0,j}\sigma_1$$

$$w_{1,j+1} = w_{1j}(1 - 2\sigma_1) + w_{2j}\sigma_1 - \frac{4}{3} w_{1j}\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{3} w_{2j}$$

$$w_{1,j+1} = w_{1j}\left(-\frac{1}{3} - 2\sigma_1\right) + w_{2j}\frac{4}{3}\sigma_1$$ ← Caso de la izquierda.

Finalmente el esquema matricial:

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ w_{3,j+1} \\ \vdots \\ w_{n-2,j+1} \\ w_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{3} - 2\sigma_1) & \frac{4}{3}\sigma_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \sigma_2 & (1-2\sigma_2) & \sigma_2 & 0 \cdots 0 \\ & \sigma_3 & (1-2\sigma_3) & \sigma_3 \cdots 0 \\ & & & \\ 0 \quad 0 \quad 0 & \cdots & 0 \quad \sigma_{n-1} & (1-2\sigma_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ \vdots \\ w_{n-2,j} \\ w_{n-1,j} \end{bmatrix} + \sigma_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

El esquema implícito se deriva a partir de una estimación mediante Backward Difference en la derivada temporal:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{w_{i,j}-w_{i,j-1}}{k}$$

Así la ecuación (1).

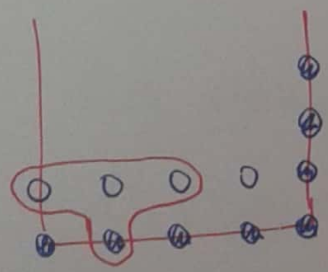
$$\frac{w_{i,j}-w_{i,j-1}}{k} = \alpha_i^2\left(\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}\right) \Big/ \sigma_i = \frac{\alpha_i^2 k}{h^2}$$

·Despejando $w_{i,j-1}$

$$w_{ij}\cdot(1+2\sigma_i)+w_{i+1,j}(-\sigma_i)+w_{i-1,j}(-\sigma_i)=w_{i,j-1} \quad (6).$$

En este esquema se calculan 3 puntos del tiempo actual (j) con información de un punto del pasado (j-1).

El stencil:



Para ~~utilizar~~ reparar la falta de información en el borde:

$$w_{0j} = -\frac{4}{3}w_{1j}+\frac{1}{3}w_{2j}$$

Con i=1, la ecuación (6)

$$w_{1j}(1+2\sigma_1)+w_{2j}(-\sigma_1)+w_{0j}(-\sigma_1)=w_{1,j-1}$$

$$w_{1j}(1+2\sigma_1)+w_{2j}(-\sigma_1)+\frac{4}{3}\sigma_1 w_{1j}-\frac{1}{3}\sigma_1 w_{2j}=w_{1,j-1}$$

$$w_{1j}\left(1+\frac{10}{3}\sigma_1\right)+w_{2j}\left(-\frac{4}{3}\sigma_1\right)=w_{1,j-1}$$

Finalmente el esquema matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{10}{3}\sigma_1\right) & \left(-\frac{4}{3}\sigma_1\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma_2 & (1+2\sigma_2) & -\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & (1+2\sigma_3) & -\sigma_3 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{n-1} & (1+2\sigma_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ \vdots \\ w_{n-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ w_{3,j-1} \\ \vdots \\ w_{n-1,j-1} \end{bmatrix} + \sigma_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$