Quiz 7 - ILI286
Primavera 2017 - Mi 29.11.17

Nombre: PAUTA Rol:

Responda las siguientes preguntas de forma personal. **Tiempo Máximo:** 30 minutos.

1. **[100 puntos]** Considere la EDP (1), con sus condiciones (2), (3) y (4), la cuál es válida para $0 < x < 1$ y $t > 0$.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \tag{1}$$
$$u(x,0) = x \tag{2}$$
$$u(0,t) = 0 \tag{3}$$
$$u(1,t) = 1 \tag{4}$$

(a) **[40 puntos]** Muestre que usando el método de las líneas y considerando $\Delta x = \frac{1}{4}$, usted puede resolver de manera equivalente el siguiente problema de valor inicial:

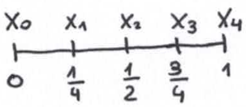
$$\begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \\ w_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32\,w_1(t) + 16\,w_2(t) \\ 16\,w_1(t) - 32\,w_2(t) + 16\,w_3(t) \\ 16\,w_2(t) - 32\,w_3(t) + 16 \end{bmatrix} \tag{5}$$
$$\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

(b) **[60 puntos]** Construya un algoritmo estable basado en el esquema implícito para encontrar una solución numérica de $u(x,t)$ en el tiempo $T = 1[s]$. Considere $x_i = i\,\Delta x$ con $i \in \{0, 1, \ldots, N_x\}$ y $t_n = n\,\Delta t$ con $n \in \{0, 1, \ldots, N_t\}$

(a) Sea $w_i(t) \approx u(x_i, t)$. Discretizando la coordenada espacial:

$$w_i'(t) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(w_{i-1}(t) - 2w_i(t) + w_{i+1}(t)\right)$$

Usando $\Delta x = \frac{1}{4}$:



, se tiene la ecuación:

$$w_i'(t) = 16\,w_{i-1}(t) - 32\,w_i(t) + w_{i+1}(t) \quad \text{válida para } i = 1,2,3$$

Por la condición inicial se sabe que

$$\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_1,0) \\ u(x_2,0) \\ u(x_3,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Por las condiciones de frontera, se sabe que $w_0(t) = 0$, $w_4(t) = 1$.
Luego, el siguiente IVP debe resolverse:

$$\begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \\ w_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \cdot 0 - 32 \cdot w_1(t) + 16\,w_2(t) \\ 16\,w_1(t) - 32\,w_2(t) + 16\,w_3(t) \\ 16\,w_2(t) - 32\,w_3(t) + 16 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

sujeto a las condiciones iniciales anteriores.

(b).- El esquema implícito siempre es estable.

- Sea $\Delta x = \dfrac{1-0}{N_x}$, $\Delta t = \dfrac{1-0}{N_t}$ con N_x, N_t parámetros del algoritmo

- Usando diferencias finitas, con la notación $W_{i,n} \simeq u(x_i, t_n)$:

$$\frac{W_{i,n} - W_{i,n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(W_{i-1,n} - 2W_{i,n} + W_{i+1,n}\right)$$

Sea $\sigma = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$, entonces reordenando términos

$$-\sigma W_{i+1,n} + (1+2\sigma) W_{i,n} - \sigma W_{i-1,n} = W_{i,n-1} \qquad n \geq 1$$

$$-\sigma W_{i+1,n+1} + (1+2\sigma) W_{i,n+1} - \sigma W_{i-1,n+1} = W_{i,n} \qquad n \geq 0$$

Para $n = 0$

$$\begin{bmatrix} W_{0,0} \\ W_{1,0} \\ W_{2,0} \\ \vdots \\ W_{N_x,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_x} \end{bmatrix}$$

Luego, para n entre 1 y $N_t \cdot \Delta t$; resolver el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ 0 & -\sigma & 1+2\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{0,n+1} \\ W_{1,n+1} \\ W_{2,n+1} \\ \vdots \\ W_{N_x,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{0,n} \\ W_{1,n} \\ W_{2,n} \\ \vdots \\ W_{N_x,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

El resultado a entregar corresponde al vector:

$$\begin{bmatrix} W_{0,N_t} \\ W_{1,N_t} \\ \vdots \\ W_{N_x,N_t} \end{bmatrix}$$