QUIZ 5 - ILI286

PRIMAVERA 2017 - LU 13.11.17

NOMBRE: PAUTA ROL: ____________

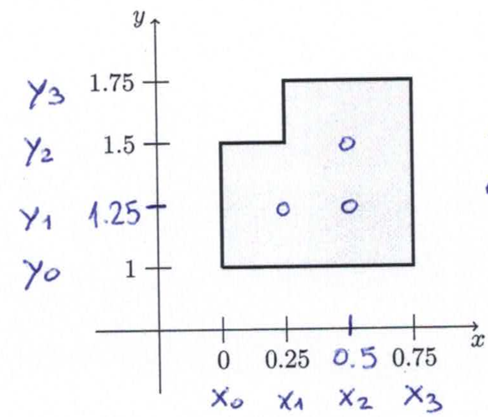
Responda las siguientes preguntas de forma personal. **Tiempo Máximo:** 25 minutos.

1. **[100 puntos]** Considere la Figura 1 que muestra la sección transversal de una superficie metálica en el dominio $\Omega = \cancel{[0, \frac{3}{4}] \times [1, \frac{7}{4}]}$, cuya ecuación de calor en estado estacionario se comporta según la EDP (1), que depende del parámetro λ.

$$\Delta u(x,y) = \lambda\, u(x,y) \tag{1}$$

$$u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega \tag{2}$$

1(a)



$u(x_i, y_j) \approx w_{i,j}$

con $x_i = i\,\Delta x$

$y_j = y_0 + j\,\Delta y$

Figura 1: Sección transversal de una superficie metálica.

(a) **[30 puntos]** Dibuje un esquema discreto del material, considerando que $\Delta x = \Delta y = 0.25$ y establezca una expresión para la discretización $u(x_i, y_j)$.

(b) **[70 puntos]** Construya un algoritmo basado en diferencias finitas que detemine una solución no nula de $u(x,y)$ que minimice λ.

1(b) - Se usarán las aproximaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

- Los puntos internos cumplen con la Ec. (1):

$$\Delta u(x_i, y_j) = \lambda\, u(x_i, y_j) \quad \text{para } \begin{array}{l} i=1, j=1 \\ i=2, j=1 \\ i=2, j=2 \end{array}$$

- Para la frontera

$$w_{i,j} = 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in \partial\Omega$$

Reemplazando: $\bigcirc \rightarrow$ valor frontera

$i=1, j=1$
$$\frac{w_{0,1}-2w_{1,1}+w_{2,1}}{\Delta x^2}+\frac{w_{1,0}-2w_{1,1}+w_{1,2}}{\Delta y^2}=\lambda w_{1,1}$$

$i=2, j=1$
$$\frac{w_{1,1}-2w_{2,1}+w_{3,1}}{\Delta x^2}+\frac{w_{2,0}-2w_{2,1}+w_{2,2}}{\Delta y^2}=\lambda w_{2,1}$$

$i=2, j=2$
$$\frac{w_{1,2}-2w_{2,2}+w_{3,2}}{\Delta x^2}+\frac{w_{2,1}-2w_{2,2}+w_{2,3}}{\Delta y^2}=\lambda w_{2,2}$$

Sea $\alpha=\frac{1}{\Delta x^2}$, $\beta=\frac{1}{\Delta y^2}$, $\gamma=\frac{-2}{\Delta x^2}-\frac{2}{\Delta y^2}$. Matricialmente se tiene:

$$\begin{bmatrix}\gamma & \alpha & 0\\ \alpha & \gamma & \beta\\ 0 & \beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{1,1}\\ w_{2,1}\\ w_{2,2}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}w_{1,1}\\ w_{2,1}\\ w_{2,2}\end{bmatrix}$$

o escrito más simplemente como $Dw=\lambda w$

$$\Rightarrow Dw-\lambda w=0$$
$$(D-\lambda I)w=0 \text{, entonces } (D-\lambda I)=0 \vee w=0$$

Una solución no nula se encuentra cuando $\det(D-\lambda I)=0$, lo que se convierte en un problema de valores y vectores propios.

Finalmente, usando Power Iteration o Inverse Power Iteration sobre las matrices D^{-1} o D (shift=0) respectivamente se encontrará una solución no nula que minimiza λ.