Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En caso de encontrar un error o posible mejora, no dude en mencionarlo en clases o por email. ¡Gracias!

(S)cientific (C)omputing (T)eam
ILI-286 DI-UTFSM Chile

v0.33

Contenido

Introducción

Definición

Ecuación Diferencial Ordinaria:[a]:

Es una ecuación diferencial en donde la incognita es una función de una variable, generalmente $y(t)$ o $y(x)$.

[a] Ordinary Differential Equation, ODE

- S ¿Por qué queremos hacer esto?
- P Porque queremos ver o reconstruir la función incognita
- S Ahh, ¿Y de que sirve eso?
- P Sirve para responder preguntas formuladas en la forma de un modelo Matemático
- S ¿Pero eso es complicado y tiene pocas aplicaciones?
- P No es simple, pero lo entenderemos en este curso! Y sí, tiene muchas aplicaciones! Pero tendremos tiempo de ver sólo algunas.

Problema de Valor Inicial

Initial Value Problem, IVP

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= f(t, y(t))\\ y(0) &= y_0\\ t &\in [0, T]\end{aligned}$$

Problema de Valor de Frontera

Boundary value Problem, BVP

$$
\begin{aligned}
a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) &= 0 \\
y(0) &= y_0 \\
y(1) &= y_1 \\
0 \leq x &\leq 1
\end{aligned}
$$

Initial Boundary Value Problem, IBVP

IVP

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T]$$

+

BVP

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad 0 \le x \le 1$$

=

IBVP, la incognita en este caso es: $u(x, t)$

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

$$u(0,t) = g_1(t) \tag{2}$$

$$u(1,t) = g_2(t) \tag{3}$$

$$u(x,0) = w(x) \tag{4}$$

$$0 \le x \le 1, \quad t \in [0, T] \tag{5}$$

Introducción

Notación

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

Sistemas No-Autonomos versus Autonomos

- Sistema No-Autonomo: $\dot{y} = f(t, y)$
- Sistema Autonomo: $\dot{y} = f(y)$

Introducción

Ejemplo de Sistema No-Autonomo

- $\dot{y} = t\,y + t^3, \quad y(0) = 1$
- Solución: $y(t) = 3\,\exp(t^2/2) - t^2 - 2$

Ejemplo de Sistema Autonomo

- $\dot{y} = c\,y\,(1 - y), \quad y(0) = y_0$
- Solución: $y(t) = 1 - \dfrac{1}{1 + \frac{y_0}{1-y_0}\exp(c\,t)}$

Primer Método Numérico para ODEs

- S ¿Y siempre podemos encontrar la solución exacta?
- P No
- S ¡¡¡¡¡¡¡¡¿Y que podemos hacer entonces?!!!!!!!!
- P Bueno, lo que podemos hacer es reconstruir la función $y(t)$ numéricamente
- S Pero no se como hacer eso...
- P ¿Estás seguro?
- S veamos la siguiente diapositiva mejor...
- P OK

Primer Método Numérico para ODEs

- P Recuerde que tenemos $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ y $y(0) = y_0$, donde y_0 es conocido.
- S OK
- P Entonces, dado que conocemos $y(0)$, alguna idea de como encontrar $y(t_1)$, i.e. $y(t)$ en el tiempo t_1.
- S No
- P ¿Y que tal si integramos ambos lados de la ecuación entre 0 y t_1?
- S OK, ¿Cómo se hace eso?
- P

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_1} \dot{y}(s) ds &= \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds \\
y(t_1) - y(0) &= \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds \\
y(t_1) &= y(0) + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds
\end{aligned}
$$

Primer Método Numérico para ODEs

P

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_1} \dot{y}(s)ds &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds \\
y(t_1) - y(0) &= \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds \\
y(t_1) &= y(0) + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds \\
y(t_1) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds
\end{aligned}
$$

S OK, ahora veo que se despejo lo que se quiere encontrar en el lado izquierdo y conocemos el primer término del lado derecho.

P ¡Excelente! Note que hasta este punto no se ha realizado ninguna aproximación. ¿Que paso puede venir ahora?

S Me imagino que una aproximación de la integral.

P Se imagina bien. ¿Qué tipo de aproximación sugeriría?

S Creo que algo me hablaron de Cuadratura Gaussiana, sugiero esa.

Primer Método Numérico para ODEs

P ¿Está seguro?
S Ahora no se.
P Veamos que ocurre si utilizamos Cuadratura Gaussiana:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds$$
$$y(t_1) \approx y_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y(x_i))$$

¿Detecta algún problema?
S A ver, los w_i son conocidos, los x_i son los ceros del polinomio de Legendre de orden n (después de aplicar el cambio de variable respectivo) y también conozco $f(t, y)$ dado que la descrición del problema lo entrega. No veo ningún problem. ¡Sigamos adelante!
P Wait wait. Casi todo lo que usted menciona está correcto, sin embargo hay algo que usted no conoce.
S Profesor, creo que usted esta equivocado.
P Puede ser, veamos. Por simplicidad, usemos la Cuadratura Gaussiana más pequeña, i.e. midpoint rule.

Primer Método Numérico para ODEs

P Entonces la integral se aproxima de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
y(t_1) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds \\
y(t_1) &\approx y_0 + (t_1 - 0)\, f\left(\frac{t_1 + 0}{2}, y\left(\frac{t_1 + 0}{2}\right)\right) \\
y(t_1) &\approx y_0 + t_1\, f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

S Pero, ¿Cuál es el problema?

P El problema es que sólo conocemos $y(0)$, t_1 y $f(t, y)$ y no conocemos $y(t_1/2)$.

S Ah, ahora entiendo.

P ¿Que sugiere ahora?

S Lo único que conocemos es $y(0)$, usemos eso entonces.

P ¡Excelente!, veamos que ocurre.

P Reemplazando, obtenemos:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds$$
$$y(t_1) \approx y_0 + t_1\, f\,(0, y\,(0))$$

S ¿Y qué significa eso? Dado que nosotros realizamos la derivación con el punto medio.

P Buen punto, en realidad al hacer esa modificación lo que realmente estamos haciendo es utilizar el punto *izquierdo* de la integral para aproximar la integral y no el punto medio.

S Ah, ahora si.

P En resumen y considerando que estamos *avanzando* en forma general desde el tiempo t_i al tiempo t_{i+1}:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) f\,(t_i, y\,(t_i))$$

Primer Método Numérico para ODEs

P En resumen y considerando que estamos *avanzando* en forma general desde el tiempo t_i al tiempo t_{i+1}:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) f\,(t_i, y\,(t_i))$$

S ¿Eso significa que obtenemos el valor exacto en el tiempo $y(t_{i+1})$?

P Buen punto, la respuesta es **no**.

S Entonces, ¿Qué es lo que obtenemos?

P Lo que se obtiene es lo que llamamos una aproximación numérica. La notación que usaremos es la siguiente:

Método de Euler

- $y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i)$
- Donde: $h = t_{i+1} - t_i$ y $y_0 =$ Dato Inicial.

Ejemplo usando el método de Euler

Utilizando la ODE No-Autonoma

- $\dot{y} = t\,y + t^3, \quad y(0) = 1$
- Solución: $y(t) = 3\,\exp(t^2/2) - t^2 - 2$

Solución numérica obtenida:

i	t_i	$y(t_i)$	y_i	$e_i = \lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0	0	1	1	0
1	0.2000	1.0206	1.0000	0.0206
2	0.4000	1.0899	1.0416	0.0483
3	0.6000	1.2317	1.1377	0.0939
4	0.8000	1.4914	1.3175	0.1739
5	1.0000	1.9462	1.6306	0.3155

Orden del método

El método de Euler es de primer orden, i.e. $\mathcal{O}(h)$.

Un poco de teoría

Definición

Una función $f(t, y)$ es *Lipschitz continua* en la variable y en el rectángulo $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ si existe una constante L (llamada la *constante de Lipschitz*) que satisface:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

para cada (t, y_1) y (t, y_2) en S.

Orden de un método

Asuma que $f(t, y)$ tiene una constante de Lipschitz L para la variable y y el valor $y(t_1)$ de la solución del problema de valor inicial $\dot{y} = f(t, y)$, $y(0) = y_0$ en $t = [0, T]$, en el tiempo t_1 y es aproximada por y_1 por un paso de un ODE solver con error local de truncamiento $e_1 \leq C\,h^{k+1}$, para una constante C y $k \geq 1$. Entonces, para cada $a < t_i < b$, el solver tiene error de truncamiento:

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{C\,h^k}{L}\,(exp(L(t_i - a)) - 1))$$

Finalmente si un ODE solver satisface la ecuación previa, se le llama de orden k.

Convergencia del método de Euler - un paso

- Considere que se aplica un paso del método de Euler para $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_i) = y_i$.
- Esto significa $y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i)$.
- Ahora considere el valor exacto en el tiempo $y(t_{i+1})$.
- ¿Cómo se obtiene eso?
- ¡Fácil!, $y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + \dot{y}(t_i)\,h + \ddot{y}(c)\,\dfrac{h^2}{2}$.
- Ahora utilizando la ecuación original en el tiempo t_i obtenemos $\dot{y}(t_i) = f(t_i, y(t_i))$. Reemplazando en la expansión anterior:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))\,h + \ddot{y}(c)\,\frac{h^2}{2}$$

- Considerando que este es un análisis de un paso, i.e. $y(t_i) = y_i$, finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}
y(t_{i+1}) - y_{i+1} &= y(t_i) + f(t_i, y(t_i))\,h + \ddot{y}(c)\,\frac{h^2}{2} - y_i - h\,f(t_i, y_i) \\
&= y(t_i) - y_i + f(t_i, y(t_i))\,h - f(t_i, y_i)\,h + \ddot{y}(c)\,\frac{h^2}{2} \\
&= \ddot{y}(c)\,\frac{h^2}{2}
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, el método es de **primer** orden.

Convergencia del método de Euler - general

- Considere que se aplica un paso del método de Euler para $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_i) = y_i$.
- Esto significa: $y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i)$.
- Omitindo pasos repetidos: $y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + \dot{y}(t_i)\, h + \ddot{y}(c)\, \dfrac{h^2}{2}$.
- Ahora utilizando la ecuación original en el tiempo t_i obtenemos $\dot{y}(t_i) = f(t_i, y(t_i))$. Reemplazando en la expansión anterior:

  $y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))\, h + \ddot{y}(c)\, \dfrac{h^2}{2}$
- Calculando la diferencia, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
y(t_{i+1}) - y_{i+1} &= y(t_i) + f(t_i, y(t_i))\, h + \ddot{y}(c)\, \frac{h^2}{2} - y_i - h\, f(t_i, y_i) \\
&= y(t_i) - y_i + (f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i))\, h + \ddot{y}(c)\, \frac{h^2}{2}
\end{aligned}
$$

- En este caso utilizamos la propiedad que $f(t, y)$ es Lipschitz: $|f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)| \leq L\, |y(t_i) - y_i|$. Reemplazando,

$$
|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq |y(t_i) - y_i| + L\, |y(t_i) - y_i)|\, h + \ddot{y}(c)\, \frac{h^2}{2}
$$

Convergencia del método de Euler - general

- En este caso utilizamos la propiedad que $f(t, y)$ es Lipschitz: $|f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)| \leq L\,|y(t_i) - y_i|$. Reemplazando,

$$|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq |y(t_i) - y_i| + L\,|y(t_i) - y_i)|\,h + \ddot{y}(c)\,\frac{h^2}{2}$$

$$|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq (1 + L\,h)\,|y(t_i) - y_i| + \ddot{y}(c)\,\frac{h^2}{2}$$

- (Omitiendo pasos) Obtenemos: $|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq \dfrac{C\,h}{L}\,(\exp(L\,t_i) - 1) = \mathcal{O}(h)$
- Por lo tanto, nuevamente concluimos que el método es de **primer** orden.

Un poco más de teoría

Linear Stability Analysis

Considere el siguiente problema: $\dot{y} = \lambda\, y$, $y(0) = 1$. Donde la solución viene dada por: $y(t) = \exp(\lambda\, t)$.

- P Apliquemos el método de Euler a este problema:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \lambda\, h\, y_i \\
y_{i+1} &= (1 + \lambda\, h)\, y_i \\
y_{i+1} &= (1 + \lambda\, h)^{i+1}\, y_0
\end{aligned}
$$

  Considerando que $\Re(\lambda) < 0$ y $h > 0$, ¿Que condición debe ocurrir para que la aproximación numérica reproduzca el comportamiento original de la solución exacta del problema?
- S Analicemos, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, entonces la solución numérica debe decaer a medida que i aumenta. Por lo tanto necesitamos $|1 + \lambda\, h| < 1$.
- P ¡Excelente!
- S ¿Qué significa esto?
- P Dado que $\lambda \in \mathbb{C}$, considere $\lambda\, h = x + \mathrm{i}\, y$, donde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Un poco más de teoría

- P Dado que $\lambda \in \mathbb{C}$, considere $\lambda\, h = x + \mathrm{i}\, y$, donde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Reemplazando, obtenemos:

$$\begin{aligned} |1 + \lambda\, h| &= |1 + x + \mathrm{i}\, y| \\ &= |(1 + x) + \mathrm{i}\, y| \\ &= \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} < 1 \end{aligned}$$

  Realizando un sketch...el sketch es un círculo unitario centrado en $(-1, 0)$ del plano complejo y su región de estabilidad esta dentro del círculo.
- S Ah, ¿Y que significa eso?
- P Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda < 1$, significa que tenemos solo un conjunto de h que podemos usar y que cumplan con $|1 + \lambda\, h| < 1$.
- S ¿Cuales son?
- P En este caso se necesita que $-2 < \lambda\, h < 0$, o $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$.
- S Interesante, esto quiere decir que λ restringe el h que uno puede utilizar y que uno no puede definir h a priori.
- P ¡Correcto!

Ahora empieza algo incluso más interesante

P Considere el problema:

$$\dot{y}_1 = 2\,y_1 + y_2$$
$$\dot{y}_2 = y_1 + 3\,y_2$$

S Uff, ¿Y que hacemos ahora?

P Lo mismo..., considere la siguiente representación matricial.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

o mejor $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$

S ¿Qué significa eso?

P Significa que ahora la función $y(t)$ se convierte en el vector $\mathbf{y}(t)$ que cambia en el tiempo.

S ¿Y cómo se usaría el método de Euler en ese caso?

P Igual que antes, pero se hace el algebra con vectores: $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$. Donde h sigue significando que el paso en el tiempo y sigue siendo un escalar.

Métodos avanzados para ODE

Para todos los métodos indicados, se considera una condición inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ dada.

Backward Euler

$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_{i+1})$

¡Donde tenemos que resolver para $\mathbf{y}_{i+1}$ en cada iteración!

Midpoint rule — Runge-Kutta de segundo orden

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{k}_1)$$

¡Esto es lo que dijimos anteriormente que no se podia hacer!, i.e. $y(t_1) \approx y_0 + t_1\, f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)$. La aproximación utilizada en este caso fue estimar $y\left(\frac{t_1}{2}\right)$ con el método de Euler tradicional (también conocido como Forward Euler).

Métodos avanzados para ODE

Para todos los métodos indicados, se considera una condición inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ dada.

¡Runge-Kutta de cuarto orden!, más conocido como RK4

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\,\mathbf{k}_3) \\
\mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{h}{6}\,(\mathbf{k}_1 + 2\,\mathbf{k}_2 + 2\,\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)
\end{aligned}
$$

RK4 es uno de los métodos más populares existentes. Recuerde que cuarto orden significa $e_i = \mathcal{O}(h^4)$, i.e. si el h disminuye a la mitad el error disminuye 16 veces!!

Algunas preguntas para discutir en clases

- ¿Que es un estado estacionario de un sistema dinámico?
- ¿Podemos usar h dinámico el resolver numéricamente?
- ¿Cómo encuentro aproximaciones numéricas de los sistemas dinámicos de la diapositiva 8?
- ¿Cómo se aplica la teoría de estabilidad lineal a systemas de ODE? ¿Que es λ es ese caso?
- ¿Cuál es la región de estabilidad de Backward Euler?
- ¿Cuál es la región de estabilidad de RK4?
- ¿Como utilizo Backward Euler?
- ¿Como utilizo RK4?
- ...