Guía de ejercicios 4 CC2

Sebastián Acevedo

Octubre 2019

1

Sea el siguiente problema de ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
y''(t) + y(t) &= 0\\
y'(0) + y(0) &= 2\\
y'(\frac{\pi}{2}) + y(\frac{\pi}{2}) &= 1\\
t \in [0, \frac{\pi}{2}]&
\end{aligned}
$$

a) Exprese el problema como un sistema de diferencias finitas.

b) Proponga un método para resolver el problema con $\Delta t = \frac{\pi}{8}$

2

Considere el siguiente problema de valor de frontera:

$$
\begin{aligned}
f_0(\frac{d^2u(x)}{dx^2}) + f_1(\frac{du(x)}{dx}) + u(x) &= 1\\
u(0) &= 0\\
u(1) &= 1
\end{aligned}
$$

Donde $f_0(\cdot)$ y $f_1(\cdot)$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

a) Explique claramente como puede usar el método del disparo para encontrar una aproximación de $u(x)$.

b) Proponga un pseudocódigo considerando el método de Euler donde Δx es un parámetro y que usted tiene acceso a una función *biseccion()*.

3

Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria $u'(x) - u(x)\cos(u(x)) = cos(4x)$ con $x \in [0, 2\pi]$ con condiciones de borde **periódicas** (esto quiere decir

$u(0) = u(2\pi)$).

a) Proponga un algoritmo que obtenga una aproximación de $u(x_j)$ con $x_j = j\frac{2\pi}{n}$, con $j = 1, 2, ..., n$. n debe ser un parámetro de su algoritmo.

4

Considere el siguiente BVP:

$$\frac{du(x)}{dx} + 2u(x) + 5\int_0^x u(y)dy = 1$$
$$u(0) = 0$$

Hint: It would be a good idea to select the mesh and the integration nodes at the same location

a) Utilice el método de diferencias finitas para discretizar la ecuación integro-diferencial.

b) Construya explicitamente la aproximación en una malla de 5 puntos.

c) Explique claramente como se puede resolver el problema de ecuaciones lineales obtenidos en b).

Desarrollos

1

a) Usaremos forward difference para la primera condición de borde y backward difference para la segunda.

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{y+1}}{h^2} + y_i = 0 \\
&\frac{y_1 - y_0}{h} + y_0 = 2 \\
&\frac{y_n - y_{n-1}}{h} + y_n = 1
\end{aligned}
$$

De manera matricial tendremos:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{h} & \frac{-1}{h} + 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} + 1 & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} + 1 & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} + 1 & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} + 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

b) Con $\Delta t = \frac{\pi}{8}$ se tiene:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{8}{\pi} & \frac{-8}{\pi} + 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{64}{\pi^2} & \frac{-128}{\pi^2} + 1 & \frac{64}{\pi^2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{64}{\pi^2} & \frac{-128}{\pi^2} + 1 & \frac{64}{\pi^2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{64}{\pi^2} & \frac{-128}{\pi^2} + 1 & \frac{64}{\pi^2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{-8}{\pi} & \frac{8}{\pi} + 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y(0) \\ y(\frac{\pi}{8}) \\ y(\frac{\pi}{4}) \\ y(\frac{3\pi}{8}) \\ y(\frac{\pi}{2})
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

Sistema que se puede resolver con PALU o cualquier otro solver.

2

a) Primero se debe desacoplar la ecuación: Sea $u_1 = u(x)$ y $u_2 = \frac{du(x)}{dx}$, se tiene entonces que:

$$
\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f_0^{-1}(1 - u_1 - f_1(u_2)) \end{bmatrix}
$$

lo cual se puede resolver ya que $f_0(\cdot)$ es biyectiva y por lo tanto existe su inversa. En caso de que esta no pueda ser encontrada analíticamente, es posible encontrarla computacionalmente con una búsqueda de ceros, ie. $f_0(x) - c = 0$ encontrará el valor $f_0^{-1}(c)$. Para resolver la ecuación con shooting method entonces es necesario definir los valores iniciales:

$$
\begin{aligned}
u_1(0) &= 0 \\
u_2(0) &= \alpha
\end{aligned}
$$

Luego, para que se cumpla que $u(1) = 1$, se debe hacer bisección sobre α de tal forma que $u_1(1) - 1 = 0$.

b)

- Definir función con parámetros Δx y α que retorne la estimación del IVP usando método de Euler.
- Definir función a encontrar cero, esta es $e(u_1(1)_\alpha) = u_1(1) - 1$
- Elegir dos numeros random α_1 y α_2 tal que al realizar la estimación y evaluar en $e(\cdot)$ tengan distintos signos.
- Usar bisección para estimar un α entre $[\alpha_1, \alpha_2]$ tal que $e(u_1(1)) = 0$.

3

Para resolver el IVP construiremos un sistema de ecuaciones no lineales basadas en el método de Euler, esto es $u_(\frac{x_{j+1})-u(x_j)}{h} - u(x_j)\cos(u(x_j)) = \cos(4x_j)$.

$$\begin{bmatrix} u(x_1) - u(x_0) - h(u(x_0)\cos(u(x_0)) - 4\cos(x_0)) \\ u(x_2) - u(x_1) - h(u(x_1)\cos(u(x_1)) - 4\cos(x_1)) \\ u(x_3) - u(x_2) - h(u(x_2)\cos(u(x_2)) - 4\cos(x_2)) \\ \vdots \\ u(x_n) - u(x_{n-1}) - h(u(x_{n-1})\cos(u(x_{n-1})) - 4\cos(x_{n-1})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tienen $n+1$ variables y n ecuaciones, por lo que hace falta añadir la condición periódica, o sea $u(x_0) - u(x_n) = 0$, con $x_0 = 0$ y $x_n = 2\pi$.

$$\begin{bmatrix} u(x_1) - u(x_0) - h(u(x_0)\cos(u(x_0)) - 4\cos(x_0)) \\ u(x_2) - u(x_1) - h(u(x_1)\cos(u(x_1)) - 4\cos(x_1)) \\ u(x_3) - u(x_2) - h(u(x_2)\cos(u(x_2)) - 4\cos(x_2)) \\ \vdots \\ u(x_n) - u(x_{n-1}) - h(u(x_{n-1})\cos(u(x_{n-1})) - 4\cos(x_{n-1})) \\ u(x_0) - u(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (0 \end{bmatrix}$$

Luego reemplazando h por $\frac{2\pi}{n}$ y x_j por $j\frac{2\pi}{n}$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} u(\frac{2\pi}{n}) - u(0) - h(u(0)\cos(u(0)) - 1) \\ u(\frac{4\pi}{n}) - u(\frac{2\pi}{n}) - h(u(\frac{2\pi}{n})\cos(u(\frac{2\pi}{n})) - \cos(\frac{8\pi}{n})) \\ u(\frac{6\pi}{n}) - u(\frac{4\pi}{n}) - h(u(\frac{4\pi}{n})\cos(u(\frac{4\pi}{n})) - \cos(\frac{16\pi}{n})) \\ \vdots \\ u(2\pi) - u((n-1)\frac{2\pi}{n}) - h(u((n-1)\frac{2\pi}{n})\cos(u((n-1)\frac{2\pi}{n})) - \cos((n-1)\frac{8\pi}{n})) \\ u(0) - u(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego se propone como algoritmo para resolver el sistema no lineal el método de Newton Multivariado.

4

Es importante que el método que aproxime la integral sea compatible con los nodos de diferencias finitas (por ejemplo, punto medio no serviria ya que calcularia un $y_{j/2}$). Usaremos el método del trapecio. Tendremos entonces:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 2u_i + 5\frac{h}{2}(u_0 + u_i + 2\sum_{j=1}^{i-1} u_j) = 1$$

b) Los 5 nodos serán: u_0, u_1, u_2, u_3 y u_4

Recordar que $u_0 = 0$, lo cual reemplazaremos directamente en la primera ecuación.

$$\begin{aligned}
&\frac{u_1}{h} = 1 \\
&\frac{u_2 - u_1}{h} + 2u_1 + 5\frac{h}{2}(u_1) = 1 \\
&\frac{u_3 - u_2}{h} + 2u_2 + 5\frac{h}{2}(u_2 + 2u_1) = 1 \\
&\frac{u_4 - u_3}{h} + 2u_3 + 5\frac{h}{2}(u_3 + 2u_1 + 2u_2) = 1
\end{aligned}$$

De manera matricial tendremos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} + 2 + 5\frac{h}{2} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 5h & \frac{-1}{h} + 2 + 5\frac{h}{2} & \frac{1}{h} & 0 \\ 5h & 5h & \frac{-1}{h} + 2 + 5\frac{h}{2} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Ya que la matriz es triangular inferior, se puede resolver con Forward Substitution