

Índice

1. Valores y Vectores Propios	1
2. Integración Numérica	9
3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	22
4. Ecuaciones Diferenciales Parciales	39
5. Sin Clasificación	49

1. Valores y Vectores Propios

1. La empresa *FaceRecognition* desea implementar un nuevo sistema de reconocimiento facial el cual utilizará un novedoso método de reconocimiento basado en vectores y valores propios. Este nuevo sistema permitirá reconocer si una imagen capturada es o no un rostro registrado por el sistema. El sistema permite almacenar un conjunto de N imágenes de rostros distintos. Por simplicidad, las imágenes son de una resolución de $\kappa \times \kappa$. Internamente, el sistema maneja cada imagen como un vector Γ de κ^2 píxeles. Empleando el conjunto de capturas se construye su vector característico $\Psi = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Gamma_i$ el cual corresponde al promedio de los píxeles de las M capturas. Se define el vector diferencia Φ_i como la diferencia entre el i -ésimo vector imagen Γ_i y el vector característico Ψ , es decir, $\Phi_i = \Gamma_i - \Psi$. Tomando las diferencias entre los M vectores Γ y Ψ , se obtiene la matriz $A = [\Phi_1 | \Phi_2 | \dots | \Phi_M]$, cuyas columnas corresponden a los vectores Φ_i . Se construye la matriz de covarianzas de A como $C = \sum_{j=1}^M \Phi_j \Phi_j^T = AA^T$, donde $(\cdot)^T$ es operador transpuesta.
 - (a) Considere la siguiente relación: $A^T A v_i = \mu_i v_i$, donde v_i y μ_i son i -ésimo vector y valor propio de la matriz $A^T A$, respectivamente. Pruebe que la matriz A por el vector propio dominante v_d de la matriz $A^T A$ es un vector propio de la matriz AA^T . *Hint.* ¡Multiplique A por la izquierda!
 - (b) Implemente un algoritmo que permita obtener el valor y vector propio dominante de la matriz $A^T A$.
 - (c) Sea v_d vector propio dominante de la matriz $A^T A$. Se define la cara propia como $u_1 = A v_d$ y la k -ésima proyección sobre el espacio de la cara propia como $W_k = u_1^T \Phi_k$. El sistema para evaluar un nuevo vector imagen Γ_{new} calcula su proyección como: $W_{new} = u_1^T (\Gamma_{new} - \Psi)$. Para determinar si un vector imagen Γ_{new} es un rostro o no, debe cumplirse que $|W_{new} - W_k| < \epsilon_0$ para todo $k = 1 : M$, donde ϵ_0 es un valor umbral dado. Implemente un algoritmo que permita determinar si un vector imagen Γ_{new} es o no un rostro, considerando un valor umbral ϵ_0 .
2. Sea A una matriz real $n \times n$ tal que para cada fila, se tiene que sus elementos suman μ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = \mu$$

- (a) Pruebe que μ es un valor propio, al cual podemos asociar un vector propio v_1 muy fácil de encontrar.
- (b) ¿Qué matriz podríamos estudiar para averiguar si asociado al valor propio μ existe otro(s) vector(es) propio(s) distinto(s) a v_1 ? ¿Que valor y vector propio obtenemos si aplicamos Power Iteration a esa matriz?

- (c) La matriz en (b) puede utilizarse en los algoritmos de vectores propios estudiados en clase. En particular, resulta tentador utilizar Rayleigh Quotient Iteration, puesto que deseamos saber si existe otro vector propio asociado a μ es posible inicializar el algoritmo con μ y un vector aleatorio. Describa los pasos de Rayleigh Quotient Iteration y explique si es posible aplicarlo en este caso.

3. El Sr. Tony Stark está trabajando en obtener una nueva versión de su traje de IronMan para la película de los *Avengers 3*. Dentro de su trabajo ha realizado investigaciones en Machine Learning, específicamente en Deep Learning. Dentro de los desafíos que ha encontrado es resolver un problemas de valores propios **generalizados**. Lamentablemente, el Sr. Stark nunca tuvo la posibilidad de tomar el curso Computación Científica II en la UTFSM y no sabe cómo proceder para encontrar valores y vectores propios. El problema que tiene el Sr. Stark es encontrar λ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ de tal forma que:

$$A \vec{v} = \lambda B \vec{v}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y B es no singular.

Hint: These are very generalized eigenvalues, just look at the problem and think!

- (a) Considere que B es una matriz tridiagonal y diagonal dominante. Modifique el algoritmo *Power Iteration* para encontrar el valor y vector propios dominantes.

- (b) Considere que B triangular superior. Modifique el algoritmo de *Rayleigh Quotient Iteration* para encontrar un valor y vector propio dado un initial guess s_0 para el valor propios de nuestro interés.

- (c) Considere que $\sum_{i=1}^n a_{k,i} = 1$ para todo $k = 1 : n$, i.e. la suma de los elementos de cada fila de A es 1; y que $\sum_{i=1}^n b_{k,i} = 0.5$ para todo $k = 1 : n$, i.e. la suma de los elementos de cada fila de B es 0.5. Demuestre que 2 es un valor propio generalizado.

4. Demuestre que los valores propios de una matriz Hermitiana son siempre reales.
5. Demuestre que los vectores propios asociados a diferentes valores propios de una matriz Hermitiana son ortogonales.
6. Considere

$$B = I + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Si A es definida positiva, λ es el valor propio dominante de A , \vec{v} es el vector propio asociado a λ y $|\lambda| < 1$. Demuestre que $\mu = \frac{1}{1-\lambda}$ es un valor propio de B y determine el vector propio de B asociado a μ .

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva con valores y vectores propios $\{\lambda_i, \vec{v}_i\}$ para $i = 1 : n$.

- (a) Considere $B = A^m$, para $m \in \mathbb{N}$. ¿Cuáles son los valores y vectores propios de la matriz B ?

Notice: Let $g(x) = x^m$, thus $B = g(A) = A^m$. This means that we replaced A where x was!

- (b) Considere $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, donde $a_i \in \mathbb{R}$ y la parte (a), ¿Cuáles son los valores y vectores propios de la matriz $p(A)$?

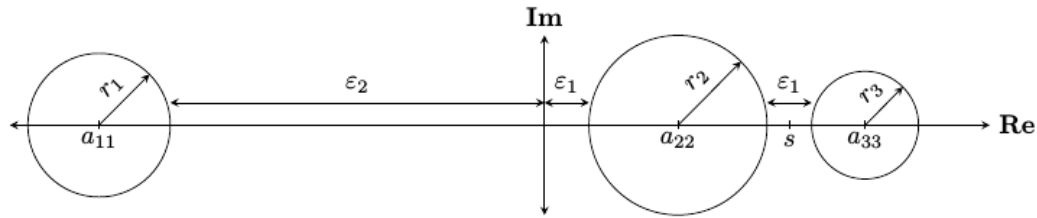
- (c) Considere $f(x) = \exp(x)$. ¿Cuáles son los valores y vectores propios de la matriz $f(A)$? *Hint: Do you remember the Taylor expansion about 0 of $\exp(x)$!*

8. Producto de su amplio conocimiento en valores y vectores propios, lo contratan en una gran empresa del Silicon Valley. En esta empresa, es necesario calcular los valores y vectores propios de una gran matriz Φ de tamaño $2n \times 2n$, que no cabe en la memoria de los computadores actuales. Sin embargo, usted propone particionar las matrices y estudiar sus propiedades de manera recursiva (divide and conquer, you say).

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \text{ donde } A, B, C, D \text{ son matrices de } n \times n$$

- (a) Si B y C son matrices nulas. ¿Cuáles son los valores y vectores propios de Φ , en función de los valores y vectores propios de A y D ?
- (b) Si A , B , C y D tienen el mismo vector propio u . ¿Que relación debe existir entre los valores propios de A , B , C y D (λ_A , λ_B , λ_C y λ_D) y el valor propio de Φ λ_Φ , para que $w = \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}$ sea un vector propio de Φ ? ¿Se cumple esta relación siempre?
- (c) La persona que anteriormente trabajaba en su puesto alcanzó a completar la función **fastAv**(v), que para cada v entrega el resultado de Av sin cargar A en memoria (por ejemplo, con cálculo distribuido por filas en distintos computadores, a través de un cluster, o utilizando tarjetas GPU). Utilizando llamadas a la función **fastAv**(v), escriba en detalle cómo resultaría el algoritmo de Power Iteration Distribuido. ¿Qué cambios son necesarios respecto al algoritmo tradicional?

9. El **teorema del círculo de Gershgorin** es utilizado para encontrar una cota de los valores propios de una matriz. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces se definen los discos d_1, d_2, \dots, d_n con centro a_{ii} y radio $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$. El teorema afirma que los valores propios se encuentran en la unión de los n discos, luego $|a_{ii} - \lambda_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$



Utilizando la información del gráfico anterior y sabiendo que $\epsilon_2 > 2\epsilon_1 + 2r_2 + 2r_3$, y que $r_2 > r_1 > r_3$. determine:

- a) El valor propio al cual converge el método de la potencia (power iteration). Justifique claramente su respuesta.
- b) El valor propio al cual converge el método de la potencia inversa (inverse power iteration) con shift nulo. Justifique claramente su respuesta.
- c) Sea $s = \frac{3\epsilon_1}{2} + 2r_2$, para los siguientes casos determine el valor propio al cual converge el método de la potencia inversa con shift s (justifique claramente su respuesta).
- 1) $\lambda_2 = a_{22} + r_2$ y $\lambda_3 = a_{33} + r_3$
 - 2) $\lambda_2 = a_{22} - r_2$ y $\lambda_3 = a_{33} - r_3$
 - 3) $\lambda_2 = a_{22}$ y $\lambda_3 = a_{33}$
10. *InformatikNetwork* es una nueva red social compuesta por informáticos de todo el mundo. Para analizar el comportamiento de esta nueva comunidad, se propone el empleo de la teoría espectral de grafos para recaudar información relevante respecto de sus usuarios. Se empleará la matriz de adyacencia $A_{n \times n}$ de un grafo dirigido G de n vértices, cuyos elementos a_{ij} representan la existencia ($a_{ij} = 1$) o carencia de relación ($a_{ij} = 0$) entre los usuarios i y j , respectivamente. Se utilizarán los vectores y valores propios para modelar la dinámica del desplazamiento de cargas. En este contexto, dado el k -ésimo vector propio \vec{v}_k de A y su respectivo valor propio λ_k , el desplazamiento de cargas ejercidas sobre el usuario i puede calcularse como:
- $$(A\vec{v}_k)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\vec{v}_k)_j = \lambda_k(\vec{v}_k)_i. \text{ Así, cada usuario } i \text{ recibe las cargas de sus vecinos resultando una carga final } \lambda_k \text{ veces su carga inicial. De acuerdo a lo anterior, el valor propio } \lambda_k \text{ corresponde a la razón común a todos los usuarios entre sus cargas final e inicial, lo que puede expresarse como : } \lambda_k = \frac{1}{(\vec{v}_k)_i} \sum_{j \in \psi_i} (\vec{v}_k)_j, \text{ para todo usuario en la red social, donde } v_i \neq 0 \text{ y } \psi_i \text{ son los índices de los vecinos del usuario } i. \text{ Un análisis previo a la estructura de esta red social evidencia que su } n \text{ valores propios de la matriz de adyacencia son todos reales}$$

y distintos. Considerando la información anterior y asumiendo que *InformatikNetwork* es una red social que tiene miles de usuarios, se le solicita realizar lo siguiente:

- (a) Proponga un pseudo-código que permita obtener el valor de mayor desplazamiento de cargas entre los usuarios de la red. Considere todos los parámetros que estime necesarios, indicando a que corresponde cada uno de ellos.
 - (b) Se define el índice de relación como: $\eta(G) = \sum_{i=1}^n \pi_i$, donde $\pi_i = \prod_{j=0(j \neq i)}^n |\lambda_i - \lambda_j|$. Implemente un algoritmo que permita calcular el índice de relación $\eta(G)$, el cual recibe como argumento la matriz de adyacencia A . *Hint: to calculate the eigenvalues of A , you can assume that UQR function and its parameters are known by the function that you must build.*
11. Un grafo se define como la tupla $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y E es el conjunto de arcos $\{(v_i, v_j), \dots\}$. La matriz de Adyacencia del grafo G , llamada A_G , es una matriz de $n \times n$ con coeficientes a_{ij} que se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Considere el grado de un vértice v_i como $\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. La matriz Laplaciana del grafo G , denominada L_G , es una matriz de $n \times n$ cuyos coeficientes l_{ij} se definen como:

$$l_{ij} = \begin{cases} \delta_i & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ahora considere que el grafo es simple, por lo que $(v_i, v_i) \notin E$ para todo i . Además, el grafo es no dirigido, por lo que si $(v_i, v_j) \in E$, entonces $(v_j, v_i) \in E$ para todo $i \neq j$. Desde el punto de vista de la matriz de adyacencia, se cumple que $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji}$.

- (a) Si $\delta_i = \alpha$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $\alpha \in \mathbb{N}$, y además, se sabe que la matriz A_G tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz Laplaciana L_G en función de los valores propios de A_G ? *Hint: think about the relation between A_G and L_G .*
- (b) El teorema del círculo de Gershgorin se puede utilizar para encontrar una cota para los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con coeficientes a_{ij} . Se definen discos d_1, d_2, \dots, d_n con centro a_{ii} y radio $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$. Entonces los valores propios se encuentran en la unión de los n discos y se satisface la desigualdad $|a_{ii} - \lambda_i| \leq r_i$. Utilice este teorema para mostrar que todos los valores propios de la matriz A_G se encuentran acotados superiormente por $\delta_{\max} = \max_i \delta_i$, es decir, $\lambda_i \leq \delta_{\max}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (c) El mayor valor propio de A_G , denotado por λ_1 , puede ser encontrado mediante la expresión:

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T A_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

Utilizando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, con $\mathbf{1} = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle^T$ un vector de dimensión n , determine una cota inferior para el valor propio λ_1 .

- (d) Una matriz A simétrica es semidefinida positiva si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que L_G es semidefinida positiva si y solo si $\mu_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, donde μ_i son los valores propios de L_G .

12. Se define un coloreo de vértices de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ como una función $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(v_i) \neq c(v_j)$ siempre que $(v_i, v_j) \in E$. El número cromático de un grafo G , denotado por $\chi(G)$, es el mínimo entero k tal que el grafo tiene un coloreo de k colores.

Considerar la Matriz de Adyacencia A_G , con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que satisfacen la relación $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Entonces, el número cromático del grafo $\chi(G)$ se encuentra acotado inferiormente por la relación:

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$$

Esta desigualdad corresponde a la **cota de Hoffman para el coloreo de vértices**.

- (a) Usted conoce varios métodos para encontrar valores y vectores propios de una matriz. Desafortunadamente, la relación que estaríamos esperando para algunos de estos métodos, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$, no se cumple necesariamente. Esto no significa que aquellos métodos no puedan ser usados. Construya un algoritmo que estime numéricamente la cota de Hoffman para el coloreo de vértices y explique como obtendrá los valores propios λ_1 y λ_n en su algoritmo. Solo podrá hacer uso de *Power Iteration*, *Inverse Power Iteration* y/o *Rayleigh Quotient Iteration* según estime necesario. Hint: *A convenient shift could be helpful.*
- (b) Un caso especial en coloreo de grafos ocurre cuando $\chi(G) = 2$. En este caso el grafo G recibe el nombre de *Grafo Bipartito* y se cumple que $\lambda_1 = -\lambda_n$. ¿Sigue funcionando el algoritmo propuesto en la pregunta anterior? **Justifique** su respuesta y proponga cambios si ya no funciona.
13. Un sistema lineal n -dimensional de ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneo, puede ser escrito matricialmente de la siguiente forma:

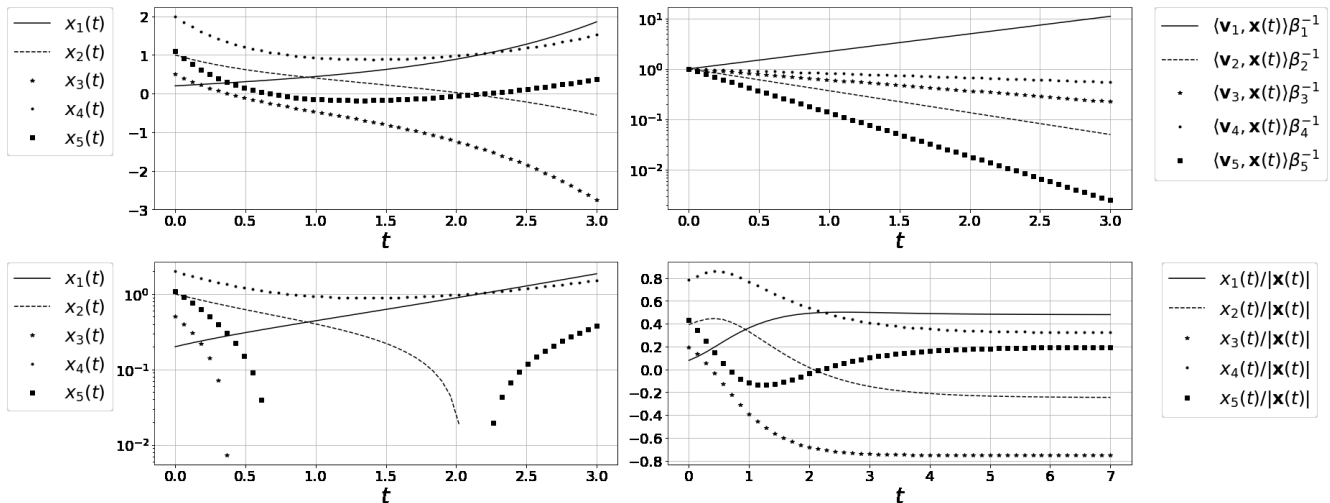
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es un vector n -dimensional que contiene las funciones incógnitas y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si los valores propios λ_i para $i = 1 : n$ son reales y distintos, entonces la solución del sistema viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i \exp(\lambda_i t) \quad (2)$$

donde \mathbf{v}_i es el i -ésimo vector propio de A y los coeficientes β_i son obtenidos con el valor inicial \mathbf{x}_0 .

El siguiente gráfico muestra las soluciones para un sistema con $n = 5$ y la matriz A hermitiana.



- (a) ¿A qué valor converge si aplicamos Power Iteration a la matriz A ?
- (b) Explique por qué se observa que el vector $\mathbf{x}(t)/\|\mathbf{x}(t)\|$ tiende a un vector constante y ¿cuál es?
- (c) ¿Qué sistema de ecuaciones diferenciales se debe resolver para que el gráfico inferior derecho, muestre las componentes del vector propio dominante?
14. *Thm:* Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz de Markov donde sus entradas $M_{i,j}$ son no-negativas y la suma de los elementos de sus columnas es 1, i.e. $\sum_{i=1}^n M_{i,j} = 1$ para $j = 1 \dots n$. Entonces $\lambda = 1$ es un valor propio de M y el vector propio correspondiente tiene coeficientes no-negativos, el resto de valores propios λ_i satisfacen la siguiente relación $|\lambda_i| \leq 1$. Más aún, si las entradas de M son estrictamente positivas, entonces $\lambda = 1$ es el valor propio dominante con un solo vector propio asociado.

- (a) Discuta si es posible resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales $(M - I)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde M es la matriz de Markov descrita en el Teorema indicado anteriormente, I es la matriz identidad y \mathbf{b} es un vector arbitrario.
- (b) Considere $M_2 = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$, donde $p \in [0, 1]$ y $q \in [0, 1]$. Demuestre que $\lambda = 1$ es un valor propio de M_2 .
- (c) Obtenga el vector propio de M_2 asociado al valor propio $\lambda = 1$.
- (d) Construya un algoritmo que permita encontrar por lo menos un vector propio asociado a $\lambda = 1$ para una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

15. Un sistema de n -masas unidos por resortes se puede plantear, de manera general, como:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

donde la matriz M es llamada *mass matrix* y la matriz K *stiffness matrix*. Supongamos soluciones de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{i\omega t}, \quad (4)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, ω una constante y \mathbf{v} es un vector fijo. Tomando la propuesta (4) y aplicándola en (3) obtenemos:

$$-\omega^2 M \mathbf{v} e^{i\omega t} + K \mathbf{v} e^{i\omega t} = (K - \omega^2 M) \mathbf{v} e^{i\omega t} = \mathbf{0}.$$

Como $e^{i\omega t} \neq 0$, entonces la forma propuesta de $\mathbf{x}(t)$ es una solución si y solo si:

$$(K - \omega^2 M) \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow K \mathbf{v} = \omega^2 M \mathbf{v}. \quad (5)$$

El problema expuesto por (5) se denomina como *Problema generalizado de Valores propios* y cada par (ω, \mathbf{v}) permite encontrar una solución de la forma (4).

- a) Considere que la matriz K es simétrica positiva-definida y que M es una matriz diagonal no-singular. Utilizando el hecho de que existe una matriz T diagonal e invertible que cumple $T \cdot T = M$, plantee el sistema (5) como un problema de valores propios tradicional, cuya matriz asociada es simétrica. *Hint 1: You may be interested in $\mathbf{e} = T\mathbf{v}$. Hint 2: A "traditional" eigenvalue problem is $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$.*
 - b) Proponga un algoritmo que permita obtener el valor y vector propio más cercano al promedio entre el valor propio dominante y el de menor magnitud de la matriz construida en la pregunta anterior. Su algoritmo debe recibir como parámetros la matriz K y la matriz M .
16. Considere una matriz simétrica no singular $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Suponga que la matriz A tiene dos valores propios dominantes, es decir, $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ pero que cumplen $\lambda_1 = -\lambda_2$.
- a) Sea λ_i valor propio y \mathbf{v}_i vector propio de A , muestre cuales son los valores y vectores propios de la matriz A^2 . Justifique apropiadamente.
 - b) Sabemos que *Power Iteration* no converge si lo aplicamos sobre A debido a que los valores propios dominantes tienen signo distinto. Demuestre a qué valor y vector propio converge *Power Iteration* si es aplicado a A^2 . Justifique su respuesta.
 - c) Sea \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 los vectores propios de A asociados a λ_1 y λ_2 , respectivamente, demuestre que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ es vector propio de A^2 .
 - d) Sabemos que los vectores propios dominantes de A^2 son una combinación lineal de los vectores propios dominantes de A . Sea \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 los vectores propios dominantes de A , demuestre que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ sí es vector propio de A^2 pero no lo es para A .
 - e) Implemente un algoritmo que permita encontrar los valores y vectores propios dominantes de una matriz simétrica no singular A que cumple $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ y $\lambda_1 = -\lambda_2$. *Hint: using the previous answers it's easy to find the absolute value of the dominant eigenvalue.*
17. Considere una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, cuyos valores propios cumplen $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$, donde además se sabe que $\lambda_1 > 0$ es un valor propio dominante, $\lambda_i = 0$, para $i \in \{10, 11, \dots, 19, 20\}$ y $n > 20$. Notar que λ_n **no** es necesariamente el valor propio de menor magnitud.

- a) Describa un algoritmo, mediante pseudocódigo, que permita obtener los valores propios λ_1 y λ_n . Solamente puede utilizar *Power Iteration*, *Inverse Power Iteration* y *Rayleigh Quotient Iteration*.

- b) Cuando el valor de n es muy grande, el costo de almacenamiento de la matriz A podría ser mayor a la memoria disponible, lo que genera problemas en muchos métodos numéricos que trabajan con matrices. Debido a esto, se decidió implementar la rutina `productAv(v)` la cual calcula el producto $A\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector arbitrario. Modifique su algoritmo para que obtenga λ_1 y λ_n utilizando la función `productAv(v)`.

18. Se tiene la siguiente matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, la cual tiene la siguiente estructura:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde cada matriz A_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, pertenece a $\mathbb{R}^{n \times n}$. Como el valor de n es grande, la matriz Σ tiene un alto costo de almacenamiento, por lo que se ha decidido no almacenar ninguna de las matrices A_i y, en su reemplazo, se decidió implementar la función `MatrixVectorProduct(v, i)` que calcula el producto $A_i \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector arbitrario e $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- a) Defina la función `computeSigmaTimesVector(q)` que calcule el producto $\Sigma \mathbf{q}$, donde $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ es un vector arbitrario, con componentes $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n$. Defina la función utilizando pseudocódigo. Recordar que no se tiene acceso a la matriz Σ , si no que solamente se tiene acceso a la función `MatrixVectorProduct(v, i)`.
- b) Describa un algoritmo que permita encontrar el valor propio dominante y valor propio de menor magnitud de la matriz Σ . Usted solo puede utilizar *Power Iteration*, *Inverse Power Iteration* y *Rayleigh Quotient Iteration*. Considere que la matriz Σ no es singular. *Hint: You cannot access explicitly to Σ .*

19. Se tiene la siguiente matriz:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -A^{-1} B A^{-1} & D \\ D & -A^{-1} C A^{-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

donde A , A^{-1} , B , C son matrices simétricas y D es la matriz nula.

- a) Muestre cuales son los valores y vectores propios de Φ en función de los valores y vectores propios de las matrices $-A^{-1} B A^{-1}$ y $-A^{-1} C A^{-1}$, respectivamente.
- b) Proponga un algoritmo, basado en *Power Iteration* y en su respuesta anterior, que permita obtener el valor propio dominante de (7). Considere como parámetros de su algoritmo las matrices A , B y C , así como también el *initial guess*. *Hint: Please do not compute the inverse!*

20. Considere el siguiente polinomio mónico:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + x^n$$

Al cual se se asocia la siguiente *companion matrix* cuadrada:

$$C(p_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

De la cual conocemos que los valores propios de $C(p_n)$ son las raíces de $p_n(x)$, i.e. $p_n(\lambda) = 0$ para $C(p_n) \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$

- a) Para $n = 3$, demuestre que su polinomio característico es efectivamente $p_3(x)$.
- b) Demuestre que $\langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ es un vector propio de $C(p_3)^T$ donde λ es un valor propios de la matriz.
- c) Encuentre todos los valores propios de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- d) ¿Cómo recomendaría implementar el Algoritmo *Power Iteration* para este matriz? Sea lo más explícito posible.

21. Se conoce como *Nonlinear Eigenproblem* o *Problema No-lineal de Valores Propios* a una generalización del problema clásico de Valores Propios. Sea $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, el problema consiste en encontrar el escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ y el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tal que:

$$F(\lambda) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Considere la función polinómica $F(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, donde A , B y C son matrices reales de dimensiones $n \times n$. Utilizando esta función en (8), el Problema No-Lineal de Valores Propios toma la forma:

$$F(\lambda) \mathbf{v} = (\lambda^2 A + \lambda B + C) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

- a) Se denomina un *Problema de Valores Propios Generalizado* cuando se desea encontrar el valor del escalar μ y el vector \mathbf{p} tal que:

$$K \mathbf{p} = \mu M \mathbf{p},$$

donde K y M son matrices, esta última no-singular. Suponga que en (9), se tiene $A = C$ y que tanto A como B son matrices positivas-definidas. Transforme el Problema No-Lineal de Valores Propios (9) a un Problema de Valores Propios Generalizado.

- b) Utilizando *Power Iteration*, describa un algoritmo que permita encontrar el valor y vector propio dominante de (9). Para esto, utilice el Problema de Valores Propios Generalizado desarrollado en la pregunta anterior. Considere como parámetros de su algoritmo la matriz A , la matriz B , el *initial guess* \mathbf{x}_0 y el número de iteraciones de *Power Iteration*. *Hint: Please, do not compute the inverse.*

22. Considere la matriz no-singular $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y la matriz singular $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Proponga un algoritmo para obtener λ de mayor magnitud que satisface la ecuación $A \mathbf{x} = \lambda B \mathbf{x}$.

23. Considere una matriz $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cuyos coeficientes dependen continuamente de un escalar $x \in [\alpha, \beta]$.

- a) Proponga un algoritmo que asegure la existencia de una solución no nula de la siguiente ecuación vectorial: $(I - A(x)) \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Note que no es necesario que obtenga \mathbf{v} , solo que asegure la existencia de la solución. Sí es necesario explicar como encontrará x .

2. Integración Numérica

1. Considere la integral:

$$I = \int_0^1 x \ln(x) dx = -\frac{1}{4}$$

- (a) ¿Es posible utilizar el método del trapecio para calcular esta integral?. En caso de ser posible, indique cuáles son las consideraciones para su correcto uso. Fundamente su respuesta.
- (b) Calcule la tasa de convergencia (orden) del método del trapecio considerando que en la estimación de la integral se emplean $m = \{3, 4, 5, 6\}$ puntos.
- (c) ¿Puede utilizarse el método del trapecio para calcular la integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$? En el caso de no ser posible, explique y fundamente que método podría utilizarse.
2. Estime numéricamente la siguiente integral $\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x) dx$. Desafortunadamente, no conocemos la función $f(x)$, sin embargo conocemos algunos valores puntuales de $f(x)$, ver Cuadro 1 en la siguiente página. Para realizar esta tarea usted tiene 2 opciones: (i) Use la Cuadratura Gaussiana con 4 puntos o (ii) Utilizar la regla del trapecioide con *todos* los puntos. *Justifique*. Hint: ¡Use la Cuadratura Gaussiana! Hint 2: $\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2}y + \frac{a+b}{2}\right) dy$.
3. Considere que se quiere aproximar numéricamente $\int_{-10}^{50} f(x) dx$ utilizando un método que use una malla equiespaciada. Además se sabe que $\left|\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right| \leq 0.4e12$ y $\left|\frac{d^4 f(x)}{dx^4}\right| \leq 3e16$: (i) Estime el valor de h_1 (equiespaciado) tal que la cota superior menor del error para el método del punto medio sea $E = 10^{-12}$. (ii) Tiempo computacional requerido por el método del punto medio se puede estimar como $T_1 = 10N_1[ns]$, donde $N_1 = \left\lceil \frac{1}{h_1} \right\rceil$. Estime T_1 en horas. (iii) Ahora, considerando que se usa la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral. Estime $T_2 = 10N_2[ns]$, donde $N_2 = \left\lceil \frac{1}{h_2} \right\rceil$ y h_2 es el equiespacio necesario para obtener la cota superior menor del error E en la aproximación de la integral con el método de Simpson.

i	x_i	$f(x_i)$
1	0.000000000000000	1.000000000000000
2	0.123064739633033	1.019901047710160
3	0.151572803865503	1.030138669702805
4	0.196953695496920	1.050715797573628
5	0.208117367423653	1.056573487187084
6	0.302572135547782	1.118359981383717
7	0.327578398314212	1.138270921836243
8	0.345210715061993	1.153172928388755
9	0.368213626750597	1.173665209847130
10	0.393035852634578	1.197085421368538
11	0.400435930687961	1.204325167474603
12	0.403524461378651	1.207381343845325
13	0.408529627155104	1.212377053602576
14	0.457407764052104	1.263896667573237
15	0.464758222106825	1.272062969984017
16	0.525844293956580	1.343953411094050
17	0.533945218175038	1.354007677327113
18	0.551414445999036	1.376086504325018
19	0.565019828833651	1.393650339205012
20	0.584926570484331	1.419914364814356
21	0.621647605351785	1.470056181170819
22	0.671067658285153	1.540791186614049
23	0.724437065183703	1.621005435760562
24	0.751816006680852	1.663561611017466
25	0.762522747450137	1.680445339069012
26	0.772255810474422	1.695907245273584
27	0.777876773914162	1.704884940564168
28	0.834689902561324	1.797494677750108
29	0.900155372361869	1.907987674799948
30	0.905319025849890	1.916856183279154
31	0.944408766728593	1.984648025199786
32	0.975126728570404	2.038678590993638
33	1.040509647200401	2.155641475857971
34	1.054425837265141	2.180848163172586
35	1.068511555267051	2.206465261893277
36	1.103308363275618	2.270175362213168
37	1.142024151070050	2.341739879218183
38	1.187527280421185	2.426726253128566
39	1.260597148854453	2.565181350797173
40	1.408802005675764	2.854898994213702
41	1.438488908602440	2.914803590535310
42	1.449207380222845	2.936626406273386
43	1.496498370966329	3.034301332809291
44	1.552568209403744	3.153558417316548
45	1.603859757547790	3.266705776688983
46	1.636647802493652	3.341477983754462
47	1.649389111272483	3.371116156302948
48	1.664336934572994	3.406335166502679
49	1.736558786135677	3.584226848594182
50	1.772453850905516	3.678164325843305

Cuadro 1: $f(x_i)$ y x_i

x_i	c_i
-0.861136311594053	0.347854845137454
-0.339981043584856	0.652145154862546
0.339981043584856	0.652145154862546
0.861136311594053	0.347854845137454

Cuadro 2: Las raíces del polinomio de Legendre de 4to orden son x_i y los pesos asociados son

$$c_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx$$

4. El método de Monte Carlo es otra forma de estimar el valor numérico de integrales. El método se basa en el cálculo de probabilidades, por ejemplo, si graficamos $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el primer cuadrante obtenemos:

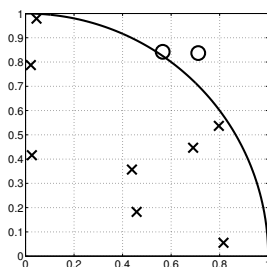


Figura 1: Línea sólida: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, \times puntos bajo $f(x)$ y \circ para puntos sobre $f(x)$

Donde las \times y \circ fueron generados aleatoriamente en $[0, 1]^2$ con una Distribución Uniforme. En este caso sabemos que tenemos una probabilidad de $\pi/4$ (área bajo la curva sobre el área total) de acertar bajo la línea sólida. En la Figura 1, se observa que hay 8 \times s bajo la línea sólida de un total de 10, por lo que $\frac{\pi}{4}$ es aproximadamente $\frac{8}{10} = 0.8$ (i.e. $\pi \approx 3.2$).

- (a) Considere ahora que se obtuvo la siguiente data en función del número de evaluaciones.

Número de evaluaciones	Valor estimado
10^1	3.2
10^2	3.112
10^3	3.1192
10^4	3.14568
10^5	3.140104

Determine el orden del método.

- (b) Estime el valor de π por medio de integración numérica utilizando 10 puntos equiespaciados (usted elige el método) y calcule el error asociado.
5. Considere que la longitud de arco L de una función $f(x)$ puede ser calculada mediante la siguiente expresión:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Construya un algoritmo que permita calcular la longitud de arco L , el cual reciba como parámetros la derivada de la función $f(x)$ y un umbral error de aproximación ζ , de modo que el error relativo $\bar{\epsilon}_n = |I_n - I_{n+1}|$ sea inferior al umbral ζ , donde I_n es la estimación de la integral considerando n puntos.

6. El cálculo de área es una de las primeras aplicaciones que uno aprende cuando estudia integración. Luego las aplicaciones empiezan a diversificarse, por ejemplo: sólidos de revolución, trabajo, etc. Uno de los resultados más interesantes de cálculo integral es el Teorema de Green. el cual se enuncia de la siguiente forma:

Sea C una curva en el plano orientada positivamente, suave por partes, cerrada simple y sea D la región encerrada por C . Si $L(x, y)$ y $M(x, y)$ son funciones definidas en la región abierta que contiene a D y tienen derivadas parciales continuas en D , entonces,

$$\oint_C (L(x, y) dx + M(x, y) dy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy$$

donde el camino de integración en C es contra-reloj.

En particular, este teorema se puede utilizar para el cálculo del área de la región D encerrada por la curva paramétrica C .

Considere que la curva paramétrica C se define de la siguiente forma:

$$C = \begin{cases} \langle x_1(s), y_1(s) \rangle & \text{if } 0 \leq s \leq s_1 \\ \langle x_2(s), y_2(s) \rangle & \text{if } s_1 < s \leq s_2 \\ \vdots & \vdots \\ \langle x_i(s), y_i(s) \rangle & \text{if } s_i < s \leq s_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ \langle x_m(s), y_m(s) \rangle & \text{if } s_{m-1} < s < 1, \end{cases}$$

donde $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{m-1} < 1$.

- (a) Explique cómo se puede utilizar el teorema de Green para encontrar el área de la región D . Fundamente su respuesta. *Hint: You may use $L(x, y) = x$ and $M(x, y) = 0$!!*
- (b) Construya un algoritmo que utilice el método de integración numérica del punto medio para obtener el área de la región D . Considere como parámetro la curva paramétrica C , la cantidad de puntos de integración por cada segmento y $\langle x'_i(s), y'_i(s) \rangle$ para $i = 1 : m$. Se debe explicitar claramente la integral que se está calculando.

- 7 Tony Stark anda en la búsqueda de estudiantes de Computación Científica II que le ayuden a calcular **derivadas fraccionarias**. Tony se ha dado cuenta que su traje de Ironman podría ser aún más poderoso si en vez de calcular derivadas tradicionales se usan derivadas fraccionarias en la modelación de sus propulsores.

Una forma de obtener derivadas fraccionarias es a través de la llamada *Caputo's fractional derivative* que se define como:

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(y)}{(t-y)^\alpha} dy$$

para $0 < \alpha < 1$, con $\Gamma(\cdot)$ la muy conocida función gamma.

- (a) Realice un cambio de variable de tal forma que la integral sea entre -1 y 1 . Simplifique lo más posible la integral obtenida.
- (b) Considere $u(t) = \sin(t)$ y que usted tiene los nodos y pesos de la cuadratura Gaussiana. Proponga un pseudo-código en donde se pueda obtener la función $g(t) = \frac{d^{0.5}u(t)}{dt^{0.5}}$. Justifique que para cada t , $0 < t < 2\pi$, se ha obtenido $g(t)$ por lo menos con 5 dígitos de precisión.
- (c) En la Figura 2 se observa las gráficas de $\sin(t)$, $\cos(t)$ y parcialmente $g(t)$. Sin embargo, Tony Stark está interesado en saber si $g(1) < 0.9$, el cual no está incluido en la figura. Obtenga $g(1)$ utilizando cuadratura Gaussiana con 5 puntos o 20 puntos de un método que utilice data equiespaciada.
Hint1: Utilice las Tablas 1 y 2 para la cuadratura Gaussiana, pero fíjese que es solo parte de la información necesaria.
Hint2: $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

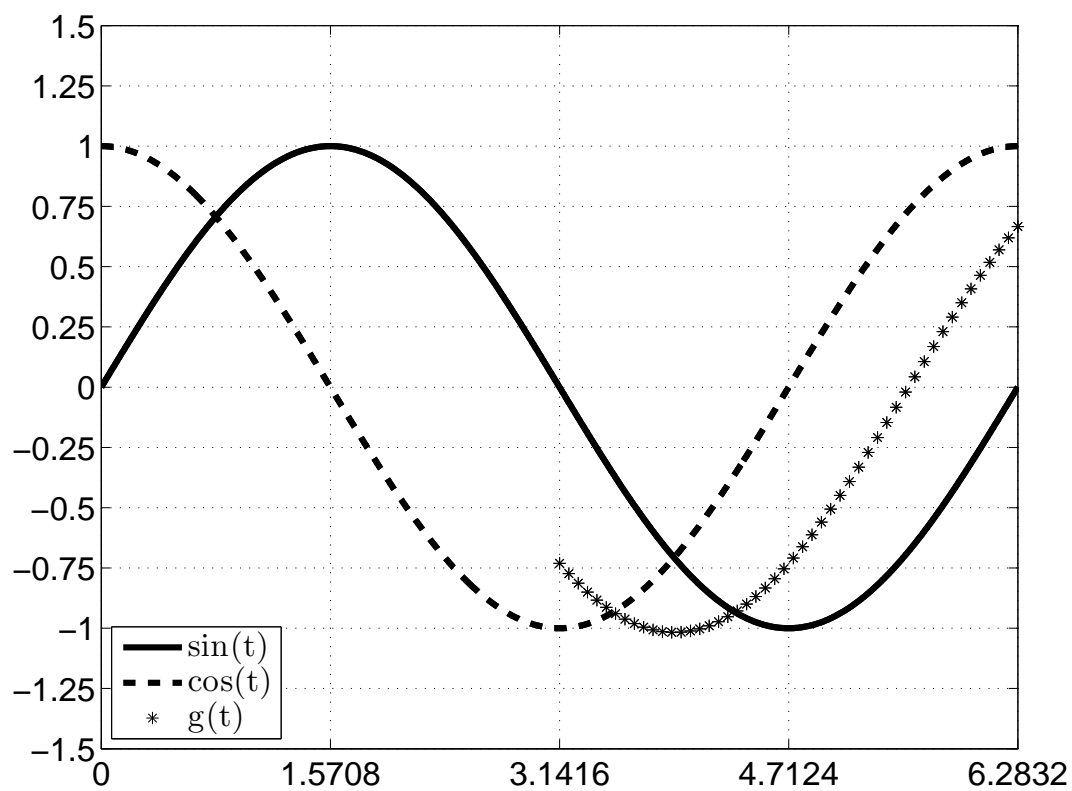


Figura 2: Figura de apoyo para pregunta 3.

i	x_i	$\frac{1}{(1-x_i)^{0.5}}$
1	-0.997284342427938	0.707587335596064
2	-0.993818604885070	0.708202047294415
3	-0.982169887493326	0.710279962200758
4	-0.979645088956446	0.710732756086593
5	-0.971813849621953	0.712142727640283
6	-0.954402658718133	0.715307827713611
7	-0.928818873239705	0.720036109316754
8	-0.906179845938664	0.724299296341400
9	-0.865233372782187	0.732206215842642
10	-0.862403657792567	0.732762257620837
11	-0.833004876421338	0.738615113359548
12	-0.828895535181886	0.739444444079018
13	-0.825062367362497	0.740220562194942
14	-0.809106952900799	0.743477583379283
15	-0.723759193899827	0.761660971276241
16	-0.720621442904999	0.762355143113709
17	-0.651689511131937	0.778100679491962
18	-0.632943608944320	0.782554163365939
19	-0.541062450503966	0.805545137962062
20	-0.538469310105683	0.806223738485128
21	-0.537809273777730	0.806396737789444
22	-0.533664628660680	0.807485624250593
23	-0.511654212985950	0.813343069901929
24	-0.506117269885007	0.814836746052924
25	-0.493871424497175	0.818169696565987
26	-0.478545297591361	0.822399206873380
27	-0.440342159999575	0.833234346343784
28	-0.403001105881521	0.844249852292815
29	-0.402369179785956	0.844440045942652
30	-0.323830412297436	0.869128163274683
31	-0.319043378469135	0.870703842281077
32	-0.317870062181542	0.871091355337946
33	-0.236778248022235	0.899195408828345
34	-0.231372764234773	0.901166892918066
35	-0.212199710297993	0.908265696609887
36	-0.151830362388241	0.931763596514895
37	-0.149006343994747	0.932907934283287
38	-0.142079292443985	0.935732839722813
39	-0.133130319933884	0.939420579351295
40	-0.125163048596559	0.942740727367197
41	-0.105985381330591	0.950879110603474
42	-0.099223691296149	0.953799213480308
43	-0.066975975237025	0.968105482668396
44	-0.064179068384508	0.969376849564304
45	-0.061798959541962	0.970462709971802
46	-0.052764115802231	0.974618079325053
47	-0.035539189126403	0.982690438612736
48	-0.025138691169109	0.987662779346065
49	-0.003791025754581	0.998109859606300
50	0.000000000000000	1.000000000000000

Tabla 1: x_i y $\frac{1}{(1-x_i)^{0.5}}$

i	x_i	$\frac{1}{(1-x_i)^{0.5}}$
51	0.003806838307487	1.001908870958321
52	0.015597910705206	1.007891393228804
53	0.047184089422321	1.024461164465312
54	0.054867925553268	1.028617121815634
55	0.068582099882058	1.036162116865031
56	0.082707866615409	1.044109784156898
57	0.135369995602973	1.075436689699203
58	0.175142527990627	1.101058879361603
59	0.176732891590501	1.102121863105076
60	0.214831582289871	1.128544240779296
61	0.217642898088720	1.130570073466131
62	0.222474261548603	1.134077183090643
63	0.245760688869591	1.151450884970522
64	0.255808355581097	1.159197952092757
65	0.289588051970752	1.186437517543554
66	0.341594217960446	1.232404234670168
67	0.391381853657539	1.281821499333593
68	0.393429705299443	1.283983465108743
69	0.407938157302389	1.299620232273278
70	0.423470186015838	1.317010127499408
71	0.449983922714478	1.348380017533652
72	0.457221321132620	1.357339882847603
73	0.474145309173178	1.379009073827777
74	0.492369879949691	1.403544893842440
75	0.516389059430832	1.437977005644316
76	0.538469310105683	1.471972537390792
77	0.553985811412057	1.497358053069137
78	0.630870311877495	1.645926782488919
79	0.685898577990577	1.784288386284842
80	0.711543782723473	1.861915845752787
81	0.713312953783380	1.867652033225242
82	0.718960214413579	1.886323161279351
83	0.721654702115750	1.895431332362841
84	0.723191519968734	1.900685688740337
85	0.745625986085708	1.982730231421010
86	0.755268276829044	2.021412122922712
87	0.772470222651503	2.096432477492443
88	0.774061464456026	2.103801910959187
89	0.775721910622455	2.111575314214413
90	0.776781869609156	2.116582820759128
91	0.792819558907868	2.196977571513762
92	0.797597111664380	2.222755262588595
93	0.834113496571170	2.455242954225169
94	0.852338165166146	2.602350980356535
95	0.876004013839261	2.839855134196120
96	0.878006182893110	2.863064221751054
97	0.899412707007065	3.153032445114205
98	0.906179845938664	3.264765024008576
99	0.915950376394716	3.449309095039496
100	0.961125659430108	5.071874310268988

Tabla 2: x_i y $\frac{1}{(1-x_i)^{0.5}}$

8. La primera constante matemática conocida por la mayoría de las personas es π , que viene del cociente entre el perímetro (P) y el diámetro (d) de *cualquier* circunferencia, esto nos da aproximadamente:

$$\frac{P}{d} \approx 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781\ 640628620899862803482534\dots$$

Probablemente la siguiente constante matemática conocida es e , la constante de Euler. Esta constante viene de la solución del siguiente problema de valor inicial $\dot{y}(t) = y(t)$ con $y(0) = 1$, que nos dice que la tasa de cambio de la función es igual al valor de la función en todo tiempo. Donde la solución es la conocida función exponencial: $y(t) = \exp(t)$.

Ahora, les queremos presentar una nueva constante, γ , la constante de Euler-Mascheroni o EulerGamma. Esta constante viene del siguiente límite:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

donde $\log(\cdot)$ es el logaritmo natural y $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ es la serie armónica truncada hasta n . Como se puede sospechar, ambos terminos en el límite tienden a infinito, sin embargo, su diferencia no. La pregunta que rápidamente activa nuestras neuronas es: ¿Cuál será el valor de γ ?

Una posible forma de representar el límite es la siguiente:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right) = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera inferior. Otra forma de representar γ es la siguiente:

$$\gamma = \int_0^{\infty} -\exp(-x) \log(x) dx. \quad (10)$$

- Realice un cambio de variables en la ecuación (10) de tal forma que los límites de integración sean entre -1 y 1 .
- Estime el valor de γ utilizando cuadratura Gaussiana para $n \geq 5$. Ver Tabla 3. ¿Cuál es el valor de γ estimado?
- Estime error del γ aproximado en (b).

9. El primer teorema de valor medio para integrales definidas indica lo siguiente: Sea $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe c en $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

- Construya un algoritmo que reciba una función f , el intervalo $[a, b]$, m (número de puntos de integración) y determine c basado en la integración del punto medio.
- Encuentre c para $f(x) = 1 + x - 20x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$.

n	w_i	x_i
2	1.0	-0.5773502692
	1.0	0.5773502692
3	0.5555555556	-0.7745966692
	0.8888888889	0.0
	0.5555555556	0.7745966692
4	0.3478548451	-0.8611363116
	0.6521451549	-0.3399810436
	0.6521451549	0.3399810436
	0.3478548451	0.8611363116
5	0.2369268851	-0.9061798459
	0.4786286705	-0.5384693101
	0.5688888889	0.0
	0.4786286705	0.5384693101
	0.2369268851	0.9061798459
6	0.1713244924	-0.9324695142
	0.3607615730	-0.6612093865
	0.4679139346	-0.2386191861
	0.4679139346	0.2386191861
	0.3607615730	0.6612093865
	0.1713244924	0.9324695142
7	0.2797053915	-0.7415311856
	0.1294849662	-0.4991079123
	0.3818300505	-0.4058451514
	0.4179591837	0.0
	0.3818300505	0.4058451514
	0.1294849662	0.4991079123
	0.2797053915	0.7415311856
8	0.1012285363	-0.9602898565
	0.2223810345	-0.7966664774
	0.3137066459	-0.5255324099
	0.3626837834	-0.1834346425
	0.3626837834	0.1834346425
	0.3137066459	0.5255324099
	0.2223810345	0.7966664774
	0.1012285363	0.9602898565
9	0.0812743883	-0.9681602395
	0.1806481607	-0.8360311073
	0.2606106964	-0.6133714327
	0.3123470770	-0.3242534234
	0.3302393550	0.0
	0.3123470770	0.3242534234
	0.2606106964	0.6133714327
	0.1806481607	0.8360311073
	0.0812743883	0.9681602395
10	0.0666713443	-0.9739065285
	0.1494503492	-0.8650633667
	0.2190863625	-0.6794095683
	0.2692667193	-0.4333953941
	0.2955242247	-0.1488743390
	0.2955242247	0.1488743390
	0.2692667193	0.4333953941
	0.2190863625	0.6794095683
	0.1494503492	0.8650633667
	0.0666713443	0.9739065285

Tabla 3: Pesos y nodos de cuadratura Gaussiana en el intervalo $[-1, 1]$

10. La siguiente ecuación diferencial ordinaria $y''(x) = x y(x)$ es conocida como la ecuación de Airy. Esta ecuación tiene 2 soluciones linealmente independientes, llamadas $Ai(x)$ y $Bi(x)$. Ver Figura 3 donde se grafican $Ai''(x)$ y $Bi''(x)$.

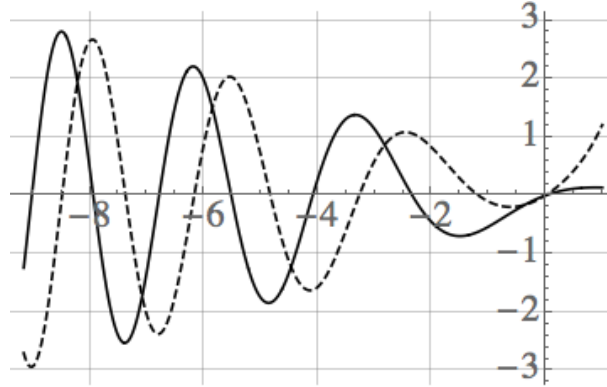


Figura 3: Funciones de Airy $Ai''(x)$ (línea sólida) y $Bi''(x)$ (línea punteada) en $x = [-9.165362310991792, 1]$

Además conocemos una representación integral de $Ai(x)$ en variable compleja:

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\left(zt + \frac{t^3}{3}\right)\right) dt$$

donde $i = \sqrt{-1}$, y su versión simplificada para variable real:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\left(xt + \frac{t^3}{3}\right)\right) dt$$

(a) **Estime** numéricamente la siguiente integral doble:

$$\int_{-9.165362310991792}^1 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\left(xt + \frac{t^3}{3}\right)\right) dt dx$$

de la mejor forma posible utilizando por lo menos 5 puntos de integración para la variable x y por lo menos 20 puntos de integración en la variable t (si fuera necesario).

Hint: *Read the question carefully, then read the question carefully, and finally think before computing anything. It may save you a lot of work read the plot.*

11. Se define la presión lineal P entre dos superficies planas contiguas S_1 y S_2 de un mismo material como la presión que sufren al interactuar a lo largo de toda la frontera Γ que éstas comparten, como se muestra en la Figura 1: La presión en un punto de la frontera en común Γ es proporcional a una constante $\gamma(t)$ de tensión

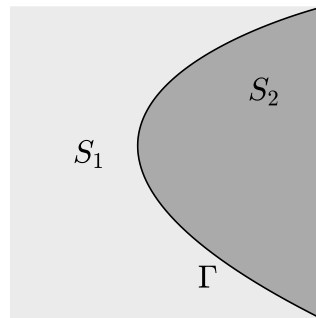


Figura 4: Superficies S_1 y S_2 con frontera en común Γ .

y al tamaño de las superficies que interactúan como $f(t) = \gamma(t)|A_{S_1} - A_{S_2}| = \gamma(t)\Delta A$. Esta presión puede deberse a cambios externos en el material, como fuerzas aplicadas, temperatura o golpes.

Por otra parte, la frontera Γ ha sido teorizada bajo la forma:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathbf{r}(s, \alpha) = \langle x(s, \alpha), y(s, \alpha) \rangle \\ x(s, \alpha) &= s - e^{-s^2 \alpha} (s - 1) s^2 \\ y(s, \alpha) &= s(-e^{-s \alpha} (s - 1) + s) \\ s &\in [0, 1]\end{aligned}$$

El parámetro α de la frontera define propiedades de estabilidad de ésta, es decir, para distintos valores de α la frontera se verá modificada físicamente para soportar una nueva cantidad de presión.

- (a) Dibuje un sketch en el plano cartesiano para la frontera Γ con un parámetro de estabilidad $\alpha = 0$.
 - (b) Describa un algoritmo para calcular la presión lineal total P a lo largo de la frontera entre las superficies S_1 y S_2 . (*Hint: Remember the definition of a line integral, $\int_{\Gamma} f dl = \int_s f(\mathbf{r}(s)) \|\mathbf{r}(s)\| ds$, where $\|\cdot\|$ is the euclidean norm.*)
 - (c) Calcule numéricamente la presión que la frontera es capaz de soportar cuando el parámetro de estabilidad es 0. Utilice los valores $\Delta A = 10$ y $\gamma(t_0) = \gamma = 1$.
 - (d) Proponga un algoritmo para encontrar el parámetro de estabilidad de la frontera tal que la presión resultante sea igual a $P_{obj} = 50$.
12. La empresa TexLa se encarga de fabricar y proveer distintos tipos de componentes metálicos a empresas de tecnología y producción. Pear, una importante empresa de tecnología, realizó la solicitud a TexLa de generar un lote de placas delgadas, de forma circular, las cuales son modelables en dos dimensiones. La forma de las placas se muestra en la Figura 5.

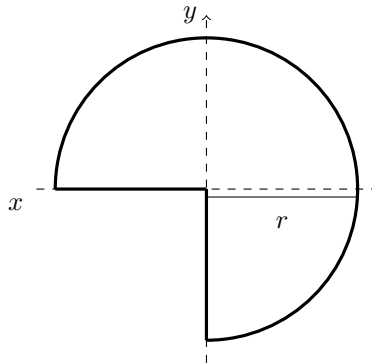


Figura 5: Placa circular de radio r .

La solicitud de *Pear* tiene como requerimiento que la placa posea un momento de inercia fijo I_0 respecto al eje de rotación y , es decir, respecto a $x = 0$. Así, es trabajo de TexLa encontrar el radio r tal que la placa posea el momento de inercia solicitado. La expresión para calcular la inercia de un cuerpo es:

$$I = \int_{\Omega} d^2 dm,$$

donde d es la distancia de un punto de la superficie del objeto al eje de rotación, dm es el diferencial de masa y Ω es la superficie respectiva. Suponiendo que la placa a construir tiene densidad superficial $\sigma(x, y)$, entonces el problema encargado a la empresa TexLa es encontrar el valor del radio r tal que:

$$I_0 = \int_{\Omega} x^2 \sigma(x, y) dA, \quad (11)$$

donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} - \mathcal{I}_3$, \mathcal{I}_3 es el tercer cuadrante, y dA es el diferencial de área. Dado que este problema requiere conocimientos de Computación Científica, se le solicitó a los estudiantes de ILI-286 que lo resolvieran.

- a) Plantee la integral en coordenadas Cartesianas. Explique como podría calcularse numéricamente y el costo computacional que esto tendría.

- b) Plantee la integral en otro sistema de coordenadas para encontrar una representación más sencilla de esta. *Hint: A change of variables requires the Jacobian of the transformation. Here are some typical Jacobians: $|J| = \frac{a^2}{2}(\cosh(2u) - \cos(2v))$ (Elliptic coordinates), $|J| = r$ (Polar coordinates), $|J| = u^2 + v^2$ (Parabolic coordinates).*
- c) Plantee un algoritmo que permita encontrar el valor de r tal que se cumpla el momento de inercia solicitado I_0 . Considere que la empresa sabe que si la placa tiene un radio R_1 , el momento de inercia es mayor al buscado, mientras que si el radio es R_2 el momento de inercia es menor al deseado.
13. Uno de los grandes problemas de la matemática (y al que lo resuelva puede ganar un millón dólares) gira en torno a la llamada *Función Zeta de Riemann*, la cual se denota como $\zeta(s)$. Formalmente se define como la continuación analítica de la serie p o *Serie de Dirichlet*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \Re(s) > 1. \quad (12)$$

La función $\zeta(s)$ se puede expresar de muchas maneras gracias al esfuerzo de muchos matemáticos. La *constante de Apéry* equivale al valor de $\zeta(3)$ la cual, al estar dentro de la región de convergencia de la serie (12), es convergente. Su valor está dado por:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820578631309 \dots \quad (13)$$

Podemos aproximar el valor de $\zeta(3)$ truncando la serie (13), obteniendo los valores de la Tabla 4.

Términos de la serie	Aproximación de $\zeta(3)$
$N = 2$	1.125
$N = 4$	1.17766203704
$N = 8$	1.19516024356
$N = 16$	1.20022203872
$N = 32$	1.20158364236

Tabla 4: Aproximación obtenida al truncar la serie de Dirichlet, con valor $s = 3$.

Una manera alternativa de obtener $\zeta(3)$ es mediante una representación integral de la función Zeta de Riemann. Así, la constante de Apéry se puede obtener como:

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx. \quad (14)$$

Podemos estimar el valor de la integral numéricamente separando la integral (14):

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{x^2}{e^x - 1} dx + \frac{1}{2} \int_L^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx, \quad (15)$$

y luego se procede, por ejemplo, a aplicar la Suma de Riemann por la derecha a la primera integral:

$$\zeta(3) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_L} h \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} dx + \frac{1}{2} \int_L^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx, \quad (16)$$

donde $h = x_n - x_{n-1}$, $x_n = hn$ y la integral restante corresponde al término del residuo de la aproximación. Notar que el uso de esta discretización depende de dos parámetros: el punto de separación de la integral L (y por consiguiente, el término N_L de la Suma de Riemann) y de h . Una aproximación de la constante $\zeta(3)$, utilizando distintos valores de h y valores de L , se muestra en la Tabla 5.

Distancia h	Integración hasta $L = 4$	Integración hasta $L = 8$	Integración hasta $L = 16$
0.5	0.9875208832221133	1.1804230338305042	1.1916490029624596
0.25	0.9778660467414517	1.1869984408722396	1.1994395108704623
0.125	0.9707916701709238	1.1883105986347513	1.2013905125465798
0.0625	0.9707916701709238	1.1884710925846493	1.2018782764781892
0.03125	0.9644999303588735	1.1884273373965404	1.2020001198300472

Tabla 5: Aproximación al usar la forma integral de la constante de Apéry, para distintos valores de h y el límite superior de la integral.

- Estime el orden de convergencia al truncar la serie (13).
 - Estime el orden de convergencia utilizando la Tabla 5. Primero estímelo con la columna de $L = 4$ y luego $L = 16$. ¿Los órdenes son distintos? Entregue una explicación si es que observa diferencias en los órdenes obtenidos. *Hint: I strongly suggest you to use the bold face values as the reference value for the analysis, correspondingly.*
 - Proponga un algoritmo que permita estimar la constante de Apéry mediante la Cuadratura Gaussiana. Especifique claramente el *input* y *output* de su algoritmo, así como también los componentes que debe construir, si fuera necesario.
 - Estime $\zeta(3)$ con el algoritmo anterior con $n = 4$ puntos de evaluación en la cuadratura.
14. La empresa *Munto Pedio* fabrica alambres y cables con propiedades específicas solicitadas por sus clientes. Para *Munto Pedio*, es importante que sus productos cumplan los más altos estándares de calidad y requerimientos de sus clientes, por lo que es importante realizar simulaciones antes de generar la orden de fabricación de los productos. Estas simulaciones permitirán ajustar los parámetros necesarios para que los clientes estén felices con los productos recibidos.

En esta ocasión, la empresa desea saber la masa de sus alambres. La forma de los alambres viene dada por una función vectorial $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))^T$, donde $s \in [0, 1]$. La Figura 6 contiene un ejemplo de una figura producida por la función $\mathbf{r}(s)$.

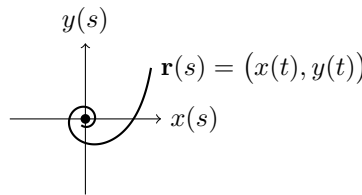


Figura 6: Ejemplo de un alambre producido por *Munto Pedio*.

La densidad del alambre viene dada por la función $\rho(x(s), y(s))$. Así, la masa del alambre entregado por $\mathbf{r}(s)$ se calcula como:

$$m = \int_0^1 \rho(x(s), y(s)) \|\mathbf{r}'(s)\| ds, \quad (17)$$

donde $\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}$.

- Describa un algoritmo que permita calcular la masa de un alambre descrito por la función $\mathbf{r}(s)$. Considere como parámetros la parametrización $x(s)$ e $y(s)$, sus derivadas $x'(s)$ e $y'(s)$, la densidad $\rho(x, y)$ del alambre y el error ε máximo permitido para la estimación de la masa.
 - Suponga ahora que las funciones $x'(s)$ e $y'(s)$ no están disponibles. Indique las modificaciones que requeriría su algoritmo para poder abordar el nuevo problema. Si necesita parámetros adicionales, indíquelos.
15. La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt$$

Por ejemplo, la transformada de Laplace de $\cos(t)$ es $\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$. Sin embargo, podría ser desafiante de obtener para algunas funciones.

- a) Proponga un algoritmo que obtenga una aproximación numérica de la transformada de Laplace de una función $g(t)$ conocida. Considere que solo nos interesa obtener $\mathcal{L}(g(t))(s)$ para N puntos equiespaciados en el intervalo $[a, b]$.
16. Ha caído la noche y cinco exploradores aún no han descendido del Cerro El Timbre. Dado que no tienen suficientes provisiones, deberán racionalizar la comida que tienen en función del *trabajo* que tomará descender el camino restante. Si $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))$ es la curva (parametrizada respecto al parámetro ξ) que describe la ruta de descenso, $\mathbf{r}'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi))$ es la derivada del vector posición (o curva parametrizada) y $\eta(x, y, z)$ es una función que describe el costo de energía grupal en el punto (x, y, z) , el trabajo necesario para recorrer toda la ruta faltante está descrita por la siguiente integral:

$$W = \int_0^1 \eta(x(\xi), y(\xi), z(\xi)) \|\mathbf{r}'(\xi)\|_2 d\xi. \quad (18)$$

Lamentablemente, los desafortunados exploradores solo tienen el valor de η en N puntos **no equiespaciados** de ξ , es decir, tienen los valores de $\eta(\xi_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, donde los puntos ξ_k no son equiespaciados. Esto ha desconcertado a los exploradores, pues no saben como obtener una aproximación de la integral dada esta situación. Sin embargo, los exploradores sabían del conocimiento de los estudiantes de CC2 en integración numérica, por lo que han decidido enviar un mensaje de S.O.S con la descripción del problema para pedirles ayuda en cómo resolver la integral que puede salvar sus vidas.

- a) Proponga un algoritmo numérico que permita estimar la integral W descrita en (18). Mencione explícitamente qué algoritmo usará y cuales son las modificaciones necesarias para que funcione en este problema. Considere que los parámetros de su algoritmo son: los componentes de parametrización $x(\xi)$, $y(\xi)$ y $z(\xi)$, los componentes de la derivada de la parametrización $x'(\xi)$, $y'(\xi)$ y $z'(\xi)$, los N valores de $\eta_k = (x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))$ y los N valores ξ_k utilizados para obtener los valores de η_k .

3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Considere el siguiente BVP, definido para $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= -4y - 5\frac{dy}{dx} \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 0\end{aligned}$$

OBS: Realice e indique sus cálculos con al menos 3 decimales de precisión.

- (a) Transforme el BVP a IVP utilizando como condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $\frac{dy}{dx}(0) = s$. Llamaremos a la solución numérica de este problema $w(s, x)$ y definiremos la función $F(s) = y(1) - w(s, 1)$. ¿Cuáles son los valores propios asociados al sistema? ¿Cuál es la restricción de estabilidad para el máximo paso de tiempo Δt , para el método de Euler Explícito?
- (b) Utilizando el método de Euler Explícito con $\Delta t = \frac{1}{3}$, resuelva el problema obtenido en (a) para $s = 0$ y verifique que $w(0, 1) \approx 0.41$, y por tanto $F(0) < 0$.
- (c) Utilizando el método de Euler Explícito con $\Delta t = \frac{1}{3}$, resuelva el problema obtenido en (a) para $s = -5$ y verifique que $w(-5, 1) \approx -0.15$, y por tanto $F(-5) > 0$.
- (d) Los resultados anteriores indican que s está mucho más cerca de -5 que de 0 , con lo cual el método de la bisección sería ineficiente. Una mejor aproximación s_{sec} a partir de 2 valores conocidos s_r y s_l tales que $F(s_r)F(s_l) < 0$, es utilizar el método de la secante:

$$s_{sec} = \frac{F(s_r)s_l - F(s_l)s_r}{F(s_r) - F(s_l)}$$

¿Que valor para s_{sec} obtenemos utilizando los resultados de (b) y (c)? Realice un gráfico para explicar su resultado.

- (e) Utilizando el método de Euler Explícito con $\Delta t = \frac{1}{3}$, resuelva el problema obtenido en (a) para s_{sec} y verifique que $w(s_{sec}, 1) \approx 0$, y por tanto $F(s) \approx 0$.

2. Considere el siguiente problema de valor de frontera:

$$f_0 \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) + f_1 \left(\frac{du(x)}{dx} \right) + u(x) = 1 \quad (19)$$

$$u(0) = 0 \quad (20)$$

$$u(1) = 1 \quad (21)$$

Donde $f_0(\cdot)$ y $f_1(\cdot)$ son funciones biyectivas de \mathbb{R} a \mathbb{R} .

- (a) Explique claramente como puede utilizar el método del disparo (shooting method) para encontrar una aproximación numérica de $u(x)$
- (b) Proponga un pseudo-código considerando el método de Euler donde Δt es un parámetro y que usted tienen acceso a la función *bisección* donde usted debe indicar claramente que parámetros le entrega a *bisección* y donde la está utilizando.

3. Un problema de valor inicial se puede describir de la siguiente forma:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (22)$$

$$y(0) = y_0 \quad (23)$$

Considerando que se utilizará la regla del trapecio para obtener una aproximación numérica de la solución,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left(\frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \right)$$

- (a) Determine la región de estabilidad lineal de la regla del trapecio.
- (b) ¿Es posible utilizar la regla del trapecio para encontrar una aproximación numérica de $\dot{y}_1(t) = a_{1,1}y_1(t) + a_{1,2}y_2(t)$ y $\dot{y}_2(t) = a_{2,1}y_1(t) + a_{2,2}y_2(t)$ con $y_1(0) = y_2(0) = 1$? Justifique. Donde $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$ y $a_{2,2}$ son parametros fijos.
- (c) Si su respuesta fue positiva en la parte (b), explique claramente como se debe utilizar el método de la regla del trapecio para el problema de valor inicial indicado en (b).

4. Considere el siguiente IVP:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_2(t) - y_1(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Nuestro objetivo será calcular la solución en $t = 1$, es decir, obtener $\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$.

- (a) Demuestre que el jacobiano del sistema, evaluado en las condiciones iniciales, está dado por

$$J(y_1(0), y_2(0)) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

y que los valores propios son -2 y -1 .

- (b) ¿Para cuál intervalo $[a, b]$ se tiene que el método de Explicit Euler con paso de tiempo $\Delta t \in [a, b]$ es estable?
- (c) Una primera aproximación consiste obtener la solución para el sistema linealizado, es decir, para el problema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Esta aproximación del problema no requiere recalculer el paso de tiempo en cada evaluación.

Realice el método de Explicit Euler con paso de tiempo $\Delta t = \frac{1}{2}$, para obtener $\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$.

- (d) El problema linealizado es sólo una aproximación del problema completo, debido a la no-linealidad. Por otra parte, el problema completo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_2(t) - y_1(t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

requiere que el paso de tiempo Δt sea recalculado en cada evaluación para verificar que el Δt elegido se mantenga en la región de estabilidad, puesto que el jacobiano cambia en función de y_1 y y_2 .

Utilice el paso de tiempo $\Delta t = \frac{1}{2}$ que siempre se encuentra en la región de estabilidad, por lo que es posible aplicar Explicit Euler para obtener $\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$.

5. La conocida ecuación del péndulo: $l \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -g \sin(\theta(t))$ con $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$, donde l representa el largo del cordel del péndulo y g la constante de gravedad, se estudia tradicionalmente en los cursos de Física. Sin embargo, se encuentra una aproximación de la solución considerando que $|\theta_0| \ll 1$. Lo cual implica que $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$. Ahora, siendo estudiantes avanzados, ya no es necesario *simplificar* el problema.

- (a) Convierta la ecuación del péndulo en un sistema dinámico.
- (b) Obtenga la matriz Jacobiana del sistema dinámico autónomo.
- (c) Determine analíticamente los valores propios de la matriz Jacobiana y determine cuando son puramente reales y puramente imaginarios.
- (d) Considerando que usted utilizará el método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2), determine el máximo Δt que se puede utilizar en el caso que los valores propios son puramente reales y puramente imaginarios.

Hint0: Recall that l and g are always positive.

Hint1: You don't have to solve the IVP.

Hint2: The stability region for RK2 is defined by $\left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| < 1$, where $z = \Delta t \lambda$.

Hint3: Recall that $z = x + iy$, with $i = \sqrt{-1}$, i.e. Hint2 must be interpreted on the complex plane.

6. Considere el siguiente IVP: $\ddot{y}(t) + \alpha^2 y(t) = 0$ con $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = \alpha$.

- (a) Realice un cambio de variables de tal forma que se obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales.
- (b) Seleccione un ODE-solver numérico (por ejemplo: Euler, backward-euler, RK2, RK4, etc) que sea estable para el problema anterior. Debe indicar claramente la razón de la elección y el Δt máximo a utilizar.
- (c) Determine $y(1)$ numéricamente. *Hint: ¡Utilice el máximo Δt posible!*

7. Considere la siguiente ecuación integro diferencial definida en $x = [0, 5]$:

$$\frac{d}{dx}(u(x)) + 2u(x) + 5 \int_0^x u(y) dy = 1 \quad (30)$$

$$u(0) = 0 \quad (31)$$

Hint: It would be a good idea to select the mesh and the integration nodes at the same location.

- (a) Utilice el método de diferencias finitas para discretizar la ecuación integro diferencial.
- (b) Construya explícitamente la aproximación en una malla de 5 puntos.
- (c) Explique claramente como se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido en (b).

8. Considere el siguiente Non-Linear-BVP: $u_{xx}(x) = \exp(u(x))$ con $u(-1) = u(1) = 0$.

- (a) Demuestre que $u(x) = 0$ en $-1 < x < 1$ no es una solución.
- (b) Discretice la ecuación y proponga un método numérico para encontrar la solución.
- (c) Encuentre la solución numérica considerando una discretización de 3 puntos, $u(-1) \approx w_{-1}$, $u(0) \approx w_0$ y $u(1) \approx w_1$; y $u_0(x) = 0$ con initial guess. *Hint: Realice solo 2 iteraciones del nonlinear-solver.*

9. Considere la siguiente ecuación diferencial $-(0.1)^2 u''(x) + x^2 u(x) = \lambda u(x)$ en $x = [-3, 3]$ con $u(-3) = u(3) = 0$, donde λ es un escalar.

- (a) Construya un algoritmo que obtenga una aproximación no nula de $u(x_j)$ para $x_j = -3 + j \frac{6}{n}$ con $j = 0, \dots, n$. n debe ser un parámetro de su algoritmo.

10. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $u'(x) - u(x) \cos(u(x)) = \cos(4x)$ con condiciones de borde periódicas, es decir $u(0) = u(2\pi)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

- (a) Construya un algoritmo que obtenga una aproximación de $u(x_j)$ para $x_j = j \frac{2\pi}{n}$ con $j = 1, \dots, n$. Recuerde que $u(0) = u(2\pi)$. n debe ser un parámetro de su algoritmo.

11. El Sr. Tony Stark desea obtener ayuda de los distinguidos estudiantes de Computación Científica II de la Universidad Técnica Federico Santa María. El Sr. Stark ha adquirido 3 módulos para el control de su más reciente armadura. Desafortunadamente se ha dado cuenta que los módulos, aunque resuelven la tarea encomendada, tienen un compartamiento no claro. La tarea de los módulos es resolver un problema de valor inicial: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ con $y(0) = 1$. Donde $f(y(t), t)$ es conocido, sin embargo por seguridad industrial no ha querido divulgarlo. La información entregada por el Sr. Stark son las siguientes Tablas 6 y 7, donde $y_{m_i}^{(n)}$ es la salida del i -ésimo método utilizado en los tiempos indicados, para $i = 1, 2, 3$. Considere que el paso en el tiempo es constante y se puede obtener de las Tablas respectivas.

t_n	$y_{\text{exact}}(t_n)$	$y_{m_1}^{(n)}$	$y_{m_2}^{(n)}$	$y_{m_3}^{(n)}$
0	1	1	1	1
1	2.319776	2.316373	2.311614	2.000000

Tabla 6: Primer experimento numérico

t_n	$y_{\text{exact}}(t_n)$	$y_{m_1}^{(n)}$	$y_{m_2}^{(n)}$	$y_{m_3}^{(n)}$
0	1	1	1	1
0.3333	1.387071	1.383500	1.387034	1.333333
0.6666	1.855900	1.851951	1.855817	1.753314
1	2.319776	2.321411	2.319657	2.212616

Tabla 7: Segundo experimento numérico

- (a) Determine el orden de cada módulo utilizado por el Sr. Stark. *Hint: Recall that the order of a method for an IVP is the α for which the error in the approximation can be described as Δt^α .*
- (b) Indique cual módulo considera más conveniente desde el punto de vista del orden. Justifique claramente.
- (c) Considerando que todos los módulos se demoran 1 unidad de tiempo τ en un paso temporal. ¿Cuanto se demorará cada módulo en obtener una aproximación con un error menor o igual a 10^{-7} .
12. Recordando el modelo de Lotka-Volterra que modela el comportamiento de 2 especies en un ecosistema cerrado que se discutió en los jupyter notebooks del curso. Este modelo genera soluciones periódicas en el tiempo. El modelo es el siguiente:

$$\dot{y}_1 = (1 - y_2/\mu_2) y_1 \quad (32)$$

$$\dot{y}_2 = -(1 - y_1/\mu_1) y_2 \quad (33)$$

$$y_1(0) = \alpha_0 \quad (34)$$

$$y_2(0) = \alpha_1 \quad (35)$$

$$\mu_1 = 300 \quad (36)$$

$$\mu_2 = 200 \quad (37)$$

- (a) Construya un algoritmo que obtenga el periodo de las soluciones obtenidas dado un α_0 y α_1 .
Hint: A good approximation is enough!

13. Un circuito eléctrico RLC en serie está compuesto por una resistencia de $R[\Omega]$, un capacitor de capacitancia $C[F]$ y una bobina de inductancia $L[H]$. En el tiempo $t = 0$, el circuito se encuentra cargado con una carga $Q_0[C]$ y circula una corriente $I_0[A]$.

La Segunda Ley de Kirchhoff establece la ecuación diferencial ordinaria:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (38)$$

Además, se considerará que este circuito está *sobre amortiguado* si $R^2 \geq \frac{4L}{C}$.

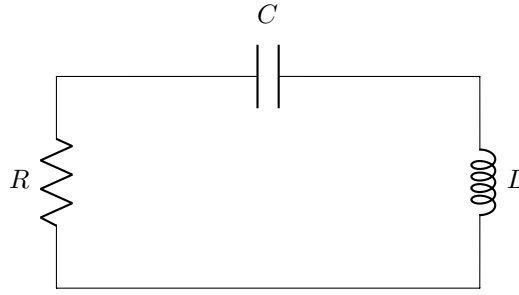


Figura 7: Circuito RLC en serie.

- (a) Transforme la EDO a un sistema dinámico.
- (b) Considere $R = 6[\Omega]$, $L = 1[H]$ y $C = 2[F]$. ¿Cuál es el máximo valor de Δt que asegura que el Método de Euler será estable?
- (c) Considere que el circuito eléctrico está sobreamortiguado. ¿Cuál es el máximo valor de Δt que asegura que el Método de Euler será estable? Exprese su resultado en términos de R , L y C .

14. Considere el problema de valor frontera:

$$y_{xxxx}(x) + y_{xxx}(x) + 2y_{xx}(x) + y_x(x) + y(x) = 0 \quad (39)$$

$$y(0) = 0 \quad (40)$$

$$y_x(0) = 0 \quad (41)$$

$$y(\pi) = -1 \quad (42)$$

$$y_x(\pi) = 1 \quad (43)$$

- (a) Construya un algoritmo para determinar $y(x_j)$ numéricamente, con $x_j = \frac{j\pi}{n}$ y $j \in \{0, \dots, n\}$. Debe usar n como parámetro de su algoritmo. Dependiendo del algoritmo que utilice, explicita las restricciones que tendrán sus ecuaciones y/o parámetros. Además, si lo considera necesario, puede utilizar la siguiente información:

Algunas aproximaciones para la tercera y cuarta derivadas:

$$f'''(x) = \frac{-f(x - \Delta x) + 3f(x) - 3f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x)}{\Delta x^3} + O(\Delta x) \quad (44)$$

$$f'''(x) = \frac{-f(x - 2\Delta x) + 2f(x - \Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2) \quad (45)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x - 2\Delta x) - 4f(x - \Delta x) + 6f(x) - 4f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x) \quad (46)$$

Las raíces del *polinomio característico* de la EDO, $r^4 + r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0$ son $r_1 = -i$, $r_2 = +i$, $r_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $r_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Donde $i = \sqrt{-1}$.

15. Científicos de un país europeo, en una búsqueda por mejorar sus importantes investigaciones, han desarrollado un método de resolución numérica de *problemas de valor inicial*. El problema que ellos resolvieron fue el siguiente:

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t, u(t), u'(t)) \\ u(t_0) &= \alpha \\ u'(t_0) &= \beta \end{aligned} \quad (47)$$

Donde $f(t, u(t), u'(t))$ es una función supersecreta con propósitos que no quisieron revelar. De la misma forma, distintos valores de α y β fueron utilizados para realizar sus pruebas, pero estos también son secretos. El método desarrollado por estos científicos sigue el mismo principio que los métodos estudiados en Computación

Científica II. Transformando el problema de valor inicial a la forma vectorial $\vec{U}'(t) = \vec{F}(t, \vec{U}(t))$, el método calcula estimaciones de la siguiente forma:

$$\vec{U}_0 = \vec{U}(t_0) \quad (48)$$

$$\vec{U}_{i+1} = \vec{U}_i + \vec{S}(\Delta t, \vec{F}(t_i, \vec{U}_i)) \quad (49)$$

Además, solo se sabe que para calcular una estimación en cierto tiempo t_{i+1} , se utiliza el valor estimado del tiempo t_i más un valor $\vec{S}(\Delta t, \vec{F}(t_i, \vec{U}_i))$ que depende del tamaño del paso del tiempo Δt y del vector $\vec{F}(t_i, \vec{U}_i)$ de la forma vectorial del IVP.

Con el fin de dar a conocer resultados parciales de su investigación, los científicos han publicado un gráfico (Figura 8) con 4 experimentos donde se probó el método con distintos valores de t_0 , Δt , α y β . Los resultados mostrados han captado gran interés de otras comunidades científicas que, deseando colaborar y aportar con la investigación, se han propuesto resolver el mismo *problema de valor inicial* con la información de la función supersecreta $f(t, u(t), u'(t))$ revelada y además, el siguiente *problema de valor frontera*:

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t, u(t), u'(t)) \\ u(t_a) &= u_a \\ u(t_b) &= u_b \end{aligned} \quad (50)$$

Usted desea ayudar y contribuir con el desarrollo de esta investigación y para ello se le ha solicitado realizar algunos cálculos.

- Transforme el problema de valor inicial resuelto por los científicos europeos a una forma vectorial de la forma $\vec{U}'(t) = F(t, \vec{U}(t))$. Especifique claramente los valores de $\vec{U}'(t)$, $F(t, \vec{U}(t))$ y $\vec{U}(t_0)$.
- Considere el IVP de la Ecuación (47) con $t_0 = 1$ y $\alpha = 1.1$, para un valor β desconocido. Determine una estimación para $u(1.3)$.
- Considere el BVP de la Ecuación (50) con $t_a = 0$, $t_b = 0.8$, $u_a = 0.1$ y $u_b = 0.48$. Determine una estimación para $u'(0.4)$. *Hint: Finite Difference may be helpful.*
- Considere el BVP de la Ecuación (50) con $t_a = 0.5$, $t_b = 2$, $u_a = 2$ y $u_b = 4$. Determine una estimación para $u''(1.5)$. *Hint: Finite Difference may be helpful.*
- Considere el IVP de la Ecuación (47) con $t_0 = 0.5$ y $\alpha = 4$, para un valor β desconocido. Determine una estimación para $\int_1^2 u'(s)ds$.
- Considere el BVP de la Ecuación (50) con $t_a = 1$, $t_b = 1.4$, $u_a = 1.1$ y $u_b = 1.35$. Si desea resolver el BVP con el método del disparo, determine los valores de t_0 , α y β necesarios para resolverlo como si fuera el IVP de la Ecuación (47). Si no puede determinar un valor β , determine 2 valores β_1 y β_2 que lo ayuden a encontrar el valor β requerido.
- Considere el BVP de la Ecuación (50) con $t_a = 0$, $t_b = 0.3$, $u_a = 3$ y $u_b = 3.3$. Si desea resolver el BVP con el método del disparo, determine los valores de t_0 , α y β necesarios para resolverlo como si fuera el IVP de la Ecuación (47). Si no puede determinar un valor β , determine 2 valores β_1 y β_2 que lo ayuden a encontrar el valor β requerido.

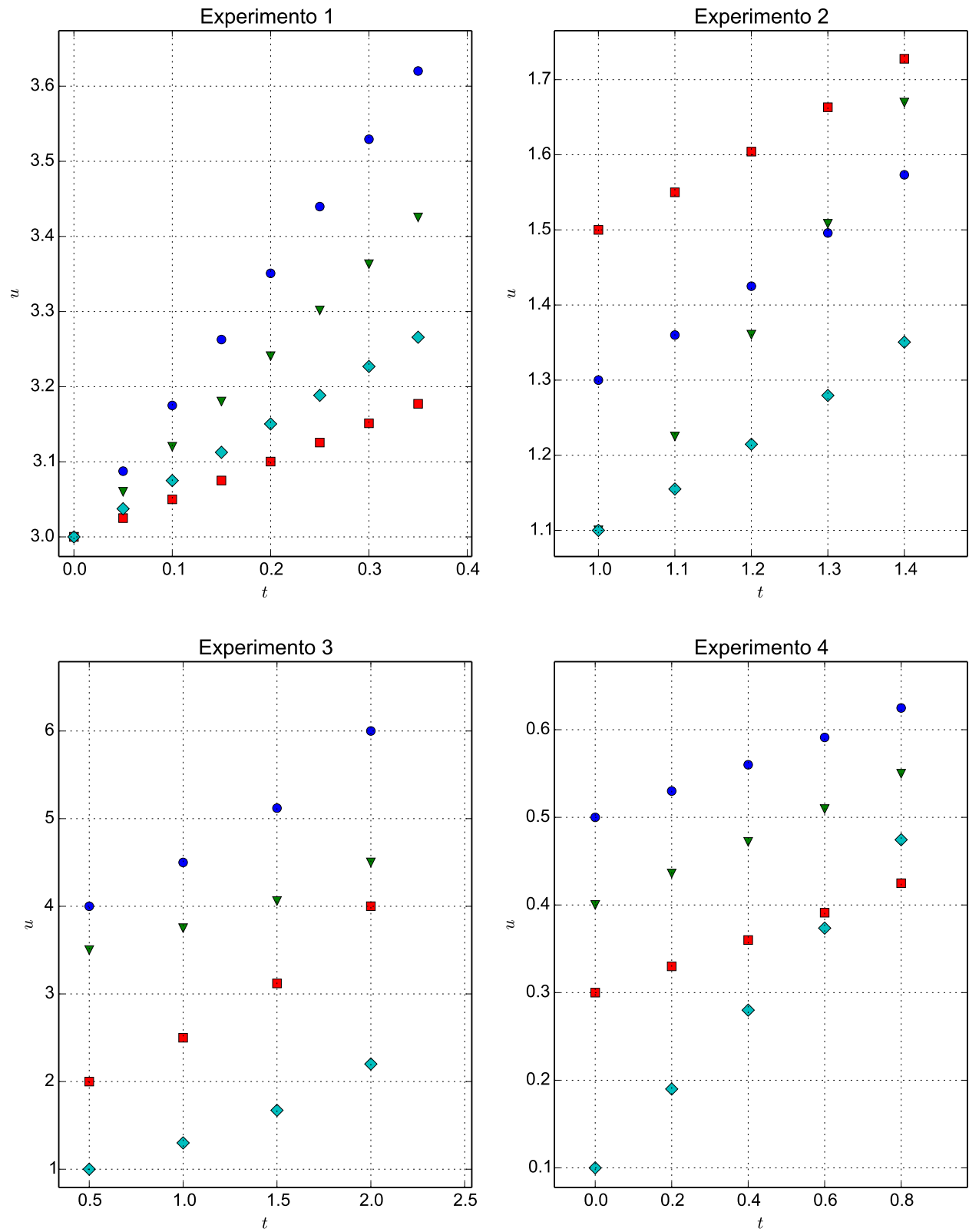


Figura 8: Resultados parciales del método desarrollado.

16. Sea el siguiente BVP

$$u_s''(t) - \left(1 - \frac{t}{5}\right) u_s(t) = t, \quad u_s(1) = 2 \quad (51)$$

En la Figura 9 se observan cuatro soluciones, donde para cada solución $u_s'(1) = s$.

s	$u_s'(1)$
s_1	-1.5
s_2	-2.4
s_3	-2.7
s_4	-3.0

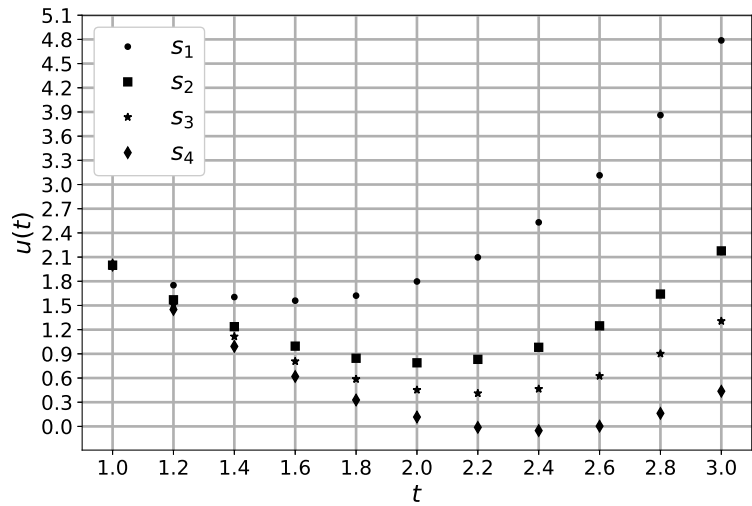


Figura 9: Soluciones para el BVP (51)

- (a) Obtenga una estimación de $u_s''(2.2)$ mediante diferencias finitas y la data de la Figura 9, para $s = s_2$.
- (b) Obtenga una estimación de $u_s''(2.2)$ utilizando la ecuación diferencial (51) y la data de la Figura 9, para $s = s_2$.
- (c) Grafique s v/s $g(s)$, donde

$$g(s) = \left. \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} \right|_{t=3} \quad (52)$$

17. Considere el siguiente BVP:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + (1 - c) u(x) = 0, \quad 0 < c < 1 \quad (53)$$

$$u(0) = 0 \quad (54)$$

$$u(1) = 1 \quad (55)$$

- (a) Desarrolle una aproximación mediante diferencias finitas. Proponga un algoritmo en formato de pseudocódigo para estimar el error de su aproximación en función del número de puntos N que usted esta estimando, considerando que conoce la solución exacta $u(x)$.
Hint: You can use the maximum of the errors for each approximation w_i . Any other error you use must be justified.
- (b) Esta clase de ecuación diferencial tiene una solución en forma cerrada, la clásica combinación lineal de exponenciales:

$$u(x) = A \exp(\sqrt{(1 - c)} x) + B \exp(-\sqrt{(1 - c)} x) \quad (56)$$

Ajuste los coeficientes A y B . Luego resuelva su aproximación de diferencias finitas para $N = 3$ puntos y $c = 0.75$ y calcule según su algoritmo los errores de su aproximación usando la información de la Tabla 8. Finalmente concluya de los errores basándose en la teoría de diferencias finitas como en los errores encontrados.

Hint: Is your approximation with $N = 3$ points good? What happens as N increases? try to answer this kind of questions.

i	x_i	$u(x_i)$
1	0.25	0.240505
2	0.5	0.484772
3	0.75	0.736624

Tabla 8: $u(x)$ evaluada en la grilla x_1, x_2, x_3 .

18. Considere la siguiente Ecuación de Poisson unidimensional con condiciones de borde de Dirichlet y Neumann en los bordes:

$$\Delta u = \exp(-x^2) \quad (57)$$

$$u'(0) = -1 \quad (58)$$

$$u(1) = 1 \quad (59)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

- (a) Proponga un algoritmo numérico para resolver la Ecuación de Poisson. Utilice un método que crea conveniente, desarrolle los pasos necesarios y recuerde incluir debidamente las condiciones de borde.
- (b) Indique el orden que usted espera de su aproximación. Justifique por qué su método es de dicho orden.
19. Considere nuestro viejo péndulo con roce del curso FIS-110 como el de la Figura 10. El sistema puede expresarse en función de la variación del ángulo θ del péndulo como:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)) + b \dot{\theta}(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(T) = \theta_T \quad (60)$$

donde $b > 0$ es el coeficiente de roce, g es la aceleración de gravedad y L el largo de la cuerda. Cuando el roce es nulo, el péndulo oscila libremente y esperamos una solución periódica $\theta(t)$. Ante la presencia de roce esperamos que la solución decaiga con el tiempo hasta el equilibrio, en donde la velocidad y aceleración angular son nulas.

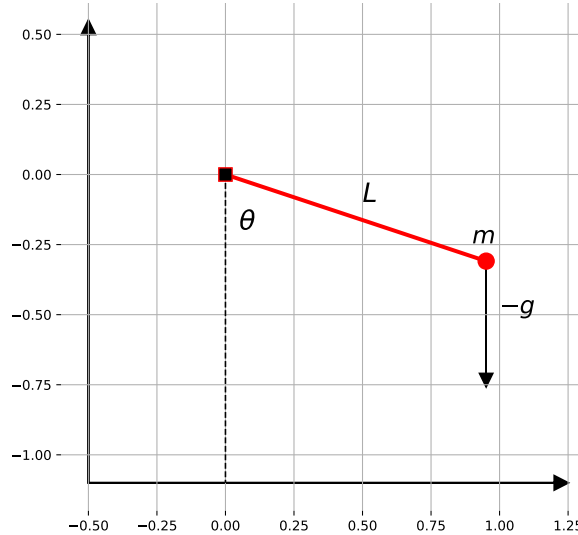


Figura 10: Esquema de péndulo. Note que la masa no aparece en el análisis posterior.

- (a) Despreciando el roce y suponiendo que usted sostiene el péndulo al inicio a un ángulo de θ_0 , plantee un algoritmo utilizando **diferencias finitas** para encontrar la **velocidad angular inicial** con la que debe inicializar el péndulo tal que luego de un tiempo T el péndulo alcance un ángulo de θ_T .

- (b) Escriba explícitamente el sistema de ecuaciones que debe resolverse y qué método utilizaría para resolverlo. Considere $n = 5$ puntos de discretización para el intervalo $[0, T]$, con $T = 1$.

20. Considere el siguiente IVP:

$$u'(t) = (1 - \mu) u(t), \quad u(0) = u_0, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (61)$$

Suponga que se utiliza el siguiente método para solucionar el IVP (61), el cual viene dado por:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= h f(t_n, u_n) \\ \kappa_2 &= h f(t_n + h, u_n + \kappa_1) \\ u_{n+1} &= u_n + \alpha \kappa_1 + (1 - \alpha) \kappa_2 \end{aligned}$$

- (a) Determine la región de estabilidad para este método considerando $\mu > 1$. (*Hint: the stability region must be in function of α .*)
(b) Comente sobre la región de estabilidad considerando $\alpha = 1$.
(c) Comente sobre la región de estabilidad considerando $\alpha = \frac{1}{2}$.
21. Sea el siguiente problema de valores de frontera:

$$(\text{BVP}) \begin{cases} y(x)'' = f(x, y(x), y(x)'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = A, & y(b) = B, \end{cases} \quad (62)$$

en su lugar, podemos considerar el siguiente problema de valor inicial:

$$(\text{IVP}) \begin{cases} y(x)'' = f(x, y(x), y(x)'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = A, & y'(a) = M, \end{cases} \quad (63)$$

para varios valores del parámetro M . Introduciendo nuevas variables dependientes, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ f(x, y(x), y(x)') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ f(x, y_1(x), y_2(x)) \end{bmatrix} \quad (64)$$

por lo tanto el problema (63) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ f(x, y_1(x), y_2(x)) \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ M \end{bmatrix} \quad (65)$$

Suponga que la solución obtenida por algún solver para $y(x)$, la denotaremos como $y(M, x)$ para poner en evidencia la dependencia del parámetro M .

- (a) Suponga que se ha resuelto $y(x)$ para los parámetros M_1 y M_2 , tal que $(y(M_1, b) - B)(y(M_2, b) - B) < 0$. Determine una expresión para obtener un parámetro M_3 , que pueda ser utilizado para obtener una nueva solución $y(M_3, x)$.
(b) Ud. sabe que el objetivo de iterar sobre una secuencia de parámetros M_k para $k = 1, 2, \dots$, es para converger a algún M_0 de tal manera que $y(M_0, b) = B$. Un método para hallar este parámetro podría ser el conocido método iterativo de Newton:

$$M_{k+1} = M_k - \frac{y(M_k, b) - B}{\frac{\partial}{\partial M} y(M_k, b)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (66)$$

Para calcular $\frac{\partial}{\partial M} y(M, x)$, introducimos una variable dependiente auxiliar

$$z(x) = \frac{\partial}{\partial M} y(M, x), \quad a \leq x \leq b \quad (67)$$

de modo que,

$$z(b) = \frac{\partial}{\partial M} y(M, b) \quad (68)$$

que es la derivada requerida en (66).

- (b.1) Obtenga $z'(x) = \frac{\partial z}{\partial x}$ (*Hint: chain rule is coming!*)
 (b.2) Demuestre que $z(a) = 0$ y $z'(a) = 1$.
 (b.3) Demuestre que $z(x)'' = \frac{\partial}{\partial x} z(x)' = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(M, x), y'(M, x)) z + \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y(M, x), y'(M, x)) z'$ (*Hint: recall the previous hint!*)
 (b.4) Construya un algoritmo que permita resolver el IVP (63) utilizando el método de Newton para obtener el parámetro M_k .

22. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal:

$$\exp(u_{xxx}(x)) = u(x)$$

definida en $x \in (0, 1)$ con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u(0) + u'(0) &= 0 \\ u(0) - u'(0) &= 1 \\ u'(1) &= 1 \end{aligned}$$

- (a) Proponga un algoritmo que encuentre una aproximación numérica de $u(x)$. Debe asegurarse que su algoritmo encuentra una aproximación numérica de la ecuación diferencial y que también cumple con todas las condiciones de borde indicadas.

Hint 1: You may consider that $u(x) > 0$ for $x \in [0, 1]$.

Hint 2: You may use $\log(\cdot)$ if you need it.

23. Considere el siguiente problema de valor inicial no-autónomo definido para $t \in [0, T]$:

$$y_1'(t) = -\frac{y_1(t) y_2(t)}{20} + y_2^2(t) \sin(t) \quad (69)$$

$$y_2'(t) = \frac{y_1^2(t)}{20} - y_1(t) y_2(t) \sin(t) \quad (70)$$

con $y_1(0) = \cos(\theta)$ y $y_2(0) = \sin(\theta)$ con $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- (a) Demuestre que las órbitas del sistema dinámico se mueven en un círculo, además determine el radio del círculo.

Hint 1: Multiply equation (69) by $y_1(t)$ and multiply (70) by $y_2(t)$, add them up and integrate.

Hint 2: Recall $\frac{d}{dx}(f^2(x)) = 2f(x)f'(x)$.

- (b) Convierta el IVP no-autónomo en un IVP autónomo.

Hint 1: How can we build an ODE from a known solution? Say $y_3(t) = t$.

- (c) Determine una cota inferior para valor propio menor de la matriz Jacobiana obtenida de su IVP autónomo obtenido en la pregunta anterior.

- (d) **[Problema computacional]** Construya la siguiente curva paramétrica en 2D $\langle y_1(t), y_2(t) \rangle$, para $t \in [0, 1000]$.

- (e) **[Problema computacional]** Construya la siguiente curva paramétrica en 3D $\langle y_1(t), y_2(t), t \rangle$, para $t \in [0, 1000]$.

- (f) **[Problema computacional]** Determine θ y T tal que al dibujar las órbitas se cubra todo el círculo.

24. Sea la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y'(0) + y(0) &= 2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

- (a) Expresé el problema como sistema de ecuaciones diferenciales.
(b) Con $\Delta t = \pi/8$, proponga un método numérico para resolver la ecuación diferencial.
25. La empresa FinDif, encargada de fabricar materiales para la construcción de viviendas, está preocupada por los resultados obtenidos por su competencia directa HighFinit. Tanto FinDif como HighFinit fabrican sus componentes de acuerdo a las soluciones de ecuaciones diferenciales. FinDif posee un departamento de Computación Científica que les proporciona el software para resolver las ecuaciones diferenciales. El desempeño del software se mide mediante un problema de *testing*, que corresponde a un BVP cuya solución es conocida. Para un valor x_k fijo y conocido, la solución del BVP *testing* tiene valor:

$$y(x_k) = 1.296108547327770477153308092965744435787200927734375.$$

Sin embargo, se sabe que HighFinit mejoró su software para resolver BVPs y FinDif está interesado en saber qué tan buena es la calidad del nuevo software diseñado por la competencia. Para esto, FinDif ha conseguido los resultados obtenidos por el software de HighFinit al utilizar la misma función de *testing*. En la Tabla 9 se tienen los resultados obtenidos por el software diseñado por FinDif y HighFinit al aproximar el valor de $y(x_k)$, donde ambos software utilizan *Diferencias Finitas* para aproximar la solución, y los errores absolutos obtenidos por cada empresa. Dado que, para abordar la petición de FinDif, se requieren conocimientos de

Nº puntos	Estimación FinDif	Error FinDif	Estimación HighFinit	Error HighFinit
5	1.306122448979592	$1.00139017 \cdot 10^{-2}$	1.3017751479289938	$5.66660060 \cdot 10^{-3}$
9	1.2986619240353316	$2.55337671 \cdot 10^{-3}$	1.2965047838330204	$3.96236505 \cdot 10^{-4}$
17	1.296750112921593	$6.41565594 \cdot 10^{-4}$	1.2961352462181841	$2.66988904 \cdot 10^{-5}$
33	1.2962691417319847	$1.60594404 \cdot 10^{-4}$	1.2961102910191795	$1.74369141 \cdot 10^{-6}$
65	1.2961487086429913	$4.01613152 \cdot 10^{-5}$	1.2961086588964714	$1.11568701 \cdot 10^{-7}$

Tabla 9: Resultados obtenidos por FinDif y HighFinit sobre el BVP *testing*.

Computación Científica, se le ha encargado a los estudiantes de ILI-286 que resuelvan las inquietudes de FinDif.

- a) Determine el orden de los métodos implementados por FinDif y HighFinit.
b) La empresa FinDif ha decidido mejorar su software ya que recientemente han actualizado su hardware, permitiendo así correr algoritmos de mayor costo computacional. El BVP de *testing* corresponde al siguiente problema:

$$\begin{aligned}y''(x) &= 4y(x), \\ y(0) &= 1, \\ y(1) &= 3.\end{aligned}$$

Además, considere las siguientes expresiones para aproximar la segunda derivada mediante diferencias finitas de cuarto orden, utilizando esquemas con distintos puntos:

$$\begin{aligned}f''(x) &\approx \frac{-f(x-2\Delta x) + 16f(x-\Delta x) - 30f(x) + 16f(x+\Delta x) - f(x+2\Delta x)}{12\Delta x^2}, \\ &\approx \frac{-10f(x-5\Delta x) + 16f(x-4\Delta x) - 156f(x-3\Delta x) + 214f(x-2\Delta x) - 154f(x-\Delta x) + 45f(x)}{12\Delta x^2}, \\ &\approx \frac{-10f(x+5\Delta x) + 16f(x+4\Delta x) - 156f(x+3\Delta x) + 214f(x+2\Delta x) - 154f(x+\Delta x) + 45f(x)}{12\Delta x^2}, \\ &\approx \frac{f(x-4\Delta x) - 6f(x-3\Delta x) + 14f(x-2\Delta x) - 4f(x-\Delta x) - 15f(x) + 10f(x+\Delta x)}{12\Delta x^2}, \\ &\approx \frac{f(x+4\Delta x) - 6f(x+3\Delta x) + 14f(x+2\Delta x) - 4f(x+\Delta x) - 15f(x) + 10f(x-\Delta x)}{12\Delta x^2}.\end{aligned}$$

Plantee una discretización del BVP utilizando un esquema de Diferencias Finitas de cuarto orden. Explique cómo resolver el problema de *testing* de FinDif y qué sistema de ecuaciones habría que resolver. No es necesario escribir un algoritmo pero asegúrese de que su explicación o procedimiento sea claro y ordenado. *Hint: It is not necessary to describe the system of equation. Use the discrete BVP to explain the structure of the system to solve.*

26. Considere el siguiente modelo de difusión de una reacción química de oxígeno:

$$\begin{aligned}x^2 y''(x) + 2x y'(x) &= x^2 f(y(x)), \quad 0 < x < 1, \\ \frac{d}{dx} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1,\end{aligned}$$

donde f es una función no lineal.

- a) Discretice el problema (BVP y condiciones de borde) **utilizando** *Central Difference* (para la primera y segunda derivada). ¿Existe algún inconveniente al utilizar este esquema? Si existe algún inconveniente, explíquelo. De no existir inconveniente alguno, describa como resolvería el problema presentado.
- b) Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{x} = y''(0).$$

Hint: There are several ways to prove this. One way is to consider a Taylor series around 0 of $y'(x)$.

- c) Tomando el BVP, dividiendo por x^2 y tomando $x \rightarrow 0$, utilizando el límite anterior, tenemos que la ecuación diferencial se comporta como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(y''(x) + 2 \frac{y'(x)}{x} - f(y(x)) \right) = y''(0) + 2y''(0) - f(y(0)) = 3y''(0) - f(y(0)) = 0.$$

Si aproximamos la ecuación diferencial anterior en el borde $x = 0$, mediante diferencias finitas de segundo orden, obtenemos:

$$3 \frac{y(x_1) - 2y(x_0) + y(x_{-1}))}{\Delta x^2} - f(y(x_0)) = 0.$$

Sin embargo, la expresión anterior requiere del valor de $y(x_{-1})$, el cual está “fuera del dominio”. Solucione este problema mediante una aproximación de segundo orden para la condición $y'(0) = 0$. Utilizando lo anterior, describa de manera ordenada como resolvería el BVP presentado. *Hint: recall that f is a nonlinear function.*

27. Como se observó en una de las tareas, podemos modelar la caída libre de un objeto mediante la Segunda Ley de Newton. Considerando una caída en el eje y , que g es la magnitud de la aceleración de gravedad, k una constante de resistencia, dependiente del viento y del objeto que es lanzado, y m la masa del objeto, entonces podemos modelar esta situación mediante la ecuación:

$$m y''(t) = -m g + k (y')^2. \quad (71)$$

Cuando el peso es igual a la fuerza de resistencia del viento, el objeto deja de acelerar y cae con velocidad constante, la cual es denominada *velocidad terminal*. En la situación de un salto con paracaídas, mientras el aventurero cae con su paracaídas cerrado, el viento aplica una resistencia con una constante de resistencia k_1 y acelera hasta llegar a la velocidad terminal v_{T_1} . El rol de paracaídas es modificar esta constante de resistencia a un valor mayor $k_2 > k_1$ y así poder reducir la velocidad terminal, es decir, $v_{T_2} < v_{T_1}$. Considerando que el aventurero es dejado caer desde una altura y_0 y si el paracaídas es abierto a una altura y_p , entonces la constante k de (71) toma los valores:

$$k = \begin{cases} k_1 & , y_p < y \leq y_0 \\ k_2 & , 0 < y \leq y_p. \end{cases}$$

- a) Construya un sistema dinámico a partir del IVP presentado en (71) y calcule la matriz Jacobiana de la función.

- b) Realice un análisis de estabilidad lineal sobre la matriz Jacobiana calculada previamente. Esta nos entregará una aproximación de los valores posibles para el *time-step* Δt . Considere que la velocidad es siempre negativa y la máxima velocidad posible (velocidad terminal cuando el paracaídas está cerrado) es de aproximadamente $-\sqrt{\frac{mg}{k_1}}$. En función de lo obtenido, escoja un método numérico adecuado para resolver este IVP.
- c) Describa como se puede resolver este IVP. Los parámetros que usted debe considerar son m , g , y_p , k_1 , k_2 , la altura inicial y_0 y la velocidad inicial v_0 . No es necesario escribir un algoritmo pero asegúrese de que su respuesta sea clara y ordenada.

28. Uno de los principios de la física más conocidos es la *Ley de Hooke*, que indica que la fuerza restauradora de un resorte es proporcional al desplazamiento de este. Si el resorte está unido a una masa, generando un sistema masa-resorte, se puede combinar la Ley de Hooke junto con la Segunda Ley de Newton, obteniendo así la siguiente ecuación diferencial:

$$F = -kx = m\ddot{x}, \quad (72)$$

donde x corresponde a la posición del extremo del resorte respecto al eje de equilibrio o reposo y k una constante asociada al resorte. La solución de (72) permite obtener la función de un oscilador armónico, la cual describe el movimiento de un resorte en condiciones ideales. Se puede construir un modelo más realista de un sistema masa-resorte si incorporamos términos de resistencias y fuerzas externas. Esto puede ser modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$F = F_{\text{ext}} - kx - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

donde F_{ext} es una fuerza externa, c un coeficiente de fricción y k una constante asociada al resorte. Considerando una situación ideal sin fuerza exterior, tenemos entonces que la ecuación diferencial queda como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (73)$$

Considere que la la posición inicial es y_0 , la velocidad inicial del resorte es v_0 , $k = 50$, $m = 1$ y $c = 2$.

- a) Construya un sistema dinámico a partir de la ecuación (73).
- b) Dado que el problema es de un resorte con fricción, ¿qué debería suceder si $t \rightarrow \infty$?
- c) Realice un análisis de estabilidad para este problema, considerando el método de Euler explícito. ¿Qué valores del *time step* son aceptables para obtener soluciones estables?.
- d) Describa un algoritmo, mediante pseudocódigo, que solucione el problema descrito mediante el método de Euler explícito.

29. Se desea calcular la siguiente integral:

$$f(x) = \int_0^x g(t)e^{-t^2} dt, \quad (74)$$

donde se conoce que la función g satisface el siguiente Problema de Valor Inicial:

$$\begin{aligned} g''(u) &= -2g(u) - 2g'(u), \\ g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 1. \end{aligned}$$

- a) Construya un sistema dinámico a partir del IVP entregado.
- b) Realice un Análisis de Estabilidad Lineal del IVP y encuentre los valores del *time step* que permita que la solución numérica del IVP sea estable. Para el análisis de estabilidad, considere el Método de Euler explícito.
- c) Proponga un algoritmo que permita calcular el valor de la integral para un valor de x fijo (por ejemplo, $x = x_f$). Asegúrese que su algoritmo resuelva el IVP de manera estable. Considere como parámetros de su algoritmo el valor de x a evaluar y el número de puntos N_I para estimar la integral.

30. Considere que la concentración química en un disco responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{D}{r^2} (2rc'(r) + r^2 c''(r)) = kc(r), \quad (75)$$

sujeito a las condiciones:

$$\frac{d}{dr}c(0) = 0 \quad (76)$$

$$c(R) = c_0. \quad (77)$$

Acá, la concentración $c(r)$ depende de la distancia r desde el centro del disco, donde $r \in (0, R)$.

- Discretice la ecuación diferencial utilizando esquemas de segundo orden. Considere la notación $c(r_i) = w_i$ e indique claramente para qué índices i son válidas las discretizaciones.
- Discretice las condiciones de borde mediante un esquema de diferencias centradas de segundo orden, ¿existe algún inconveniente de usar esto? Si existe un, indíquelo. De no existir inconveniente alguno, indique como solucionar el BVP propuesto combinando su respuesta en esta pregunta y en la anterior.
- La condición

$$c'(0) = 0,$$

puede ser discretizada utilizando un esquema de segundo orden del tipo *Forward Difference*. Este esquema se puede utilizar para aproximar la primera derivada de una función f en el punto x_i , el cual está dado por:

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_i + 2h) + 4f(x_i + h) - 3f(x_i)}{2h}. \quad (78)$$

Utilizando (78), proponga un algoritmo para resolver el problema presentado.

31. Considere la ecuación diferencial de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 10(v - u), \\ \dot{v} &= u(28 - w) - v, \\ \dot{w} &= uv - \frac{8}{3}w, \\ u(0) &= -15, \\ v(0) &= -15, \\ w(0) &= 20, \\ t &\in]0, T] \end{aligned}$$

- Obtenga el o los estados estacionarios del IVP. *Hint: Recall that a stationary state is when a dynamical system does no longer depend on time.*
- Proponga un algoritmo para resolver numéricamente la ecuación diferencial de Lorenz basado en el método del trapecio para avanzar en el tiempo. *Hint: Recall that $\dot{y} = f(t, y)$ can be translated to $y(t + \Delta t) = y(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(s, y(s)) ds$. So, if we apply the Trapezoidal rule to integrate we obtain:*

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, y^{(n)}) + f(t_{n+1}, y^{(n+1)})).$$
- Obtenga la región de estabilidad del método del trapecio y determine el rango de valores de Δt que su algoritmo debiera usar.

32. La empresa *KutRun* es famosa por su desempeño a la hora de simular distintos eventos, principalmente relacionados a seguridad y evacuación, lo que ha permitido salvar numerosas vidas en los proyectos en los que ha participado. Para lucir la capacidad y precisión de sus algoritmos, *KutRun* tiene publicada una tabla con los resultados y errores de su algoritmo al intentar resolver un IVP que, lamentablemente, no es de conocimiento público. Los resultados se pueden ver en la Tabla 10, que muestran el *time-step* utilizado, el valor aproximado $\hat{y}(T)$, y el error obtenido respecto a la solución conocida $y(T)$.

- La empresa dice que su algoritmo es de un orden cercano al cuadrático. ¿Coincide o no con dicha afirmación? Justifique su respuesta.

$time-step$	$\hat{y}(T)$	$ y(T) - \hat{y}(T) $
0.0078125	1.271044904057534	0.0007832787883705894
0.00390625	1.2714645622365346	0.00036362060937000784
0.001953125	1.2716533772166367	0.00017480562926786014

Tabla 10: Tabla con los resultados de KutRun.

- b) La empresa KutRun ha recibido muy buenas recomendaciones de usted, por lo que ha decidido solicitarle que implemente un algoritmo para resolver Problemas de Valor Inicial. El IVP que se desea resolver tiene la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= \alpha f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

donde α es el parámetro que KutRun necesita obtener. Los requerimientos son:

- El algoritmo debe recibir como parámetros: la función $f(t, y(t))$, la condición inicial y_0 , el tiempo inicial t_0 , un tiempo máximo de simulación T , una tolerancia η y un valor y_T .
- Se sabe que $|\alpha| \leq 1$. Su algoritmo debe encontrar el valor de α tal que la aproximación de $y(T)$ sea y_T (suponga que dicho valor sí existe en el intervalo de α indicado).
- La empresa desea que el algoritmo propuesto sea de orden cúbico o superior respecto a la discretización en el tiempo.

33. Considere $y''(w) - y^3(w) - \frac{w-20}{20} = 0$, donde $w \in [0, 60]$, $y(0) = y(60) = 0$.

- a) Proponga un algoritmo que encuentre una aproximación de $y(k)$, donde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 60\}$. Si necesita discretizar la ecuación, debe indicar explícitamente que ecuaciones obtiene y como obtendría la solución. Además, su algoritmo debe recibir Δw , el cual debe utilizarse en la resolución del problema, tal que al disminuir Δw el error al obtener cada $y(k)$ decaiga. Note que Δw puede interpretarse como una discretización espacial o temporal, según usted decida.

34. Considere un fluido viscoso que atraviesa un canal de ancho L , como se muestra en la Figura 11. Si la velocidad del fluido en el canal está en un estado estacionario, entonces la ecuación diferencial para la velocidad del fluido, dependiendo del ancho y , es:

$$-\frac{d}{dy} \left(\mu(y) \frac{du}{dy} \right) = \Delta P,$$

donde $u(y)$ corresponde a la velocidad del fluido, $\mu(y)$ es la viscosidad del fluido y ΔP es una constante que indica la caída de presión del ducto. Notar que en los bordes del canal la velocidad es 0, i.e. $u(0) = u(L) = 0$.

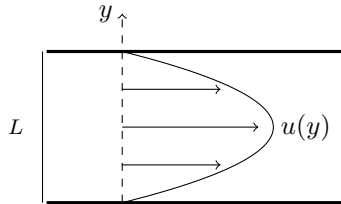


Figura 11: Perfil de velocidades de un fluido.

- a) Plantee la formulación variacional de este problema, suponiendo que $\mu(y)$ es constante.
- b) Muestre cuales son los coeficientes que acompañan a las incógnitas en la k -ésima ecuación del sistema de ecuaciones lineal final (o al plantear la formulación variacional para la k -ésima *test function*).
- c) Suponga ahora que la función $\mu(y)$ es un parámetro del problema y, por lo tanto, no es conocido *a priori*. Sin embargo, si es que es un polinomio de grado igual o menor a cinco, proponga un algoritmo para estimar las integrales obtenidas en la forma variacional tal que el error de la integración numérica sea **lo más pequeño posible**. *Hint: The error should be zero for this polynomials!*

35. Considere $\varepsilon y''(x) + (1+x)y'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$, donde $x \in [0, 1]$ y $0 < \varepsilon \ll 1$.

- Escriba la representación matricial de la discretización de diferencias finitas de la ecuación diferencial ordinaria.
- En la representación matricial, explique qué ocurre cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Considere ahora $y''(x) + \varepsilon(1+x)y'(x) + y(x) = 0$ y las mismas condiciones de bordes antes indicadas, ¿Qué ocurre con la discretización numérica en este caso si $\varepsilon \rightarrow 0$? Explique.

36. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^4}{dt^4}y(t) = F(y(t)),$$

donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ y $\left.\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right|_{t=0} = 0$, y solo se conocerá durante *runtime* la función $F(y)$ pero se sabe que $|F(u)| \leq |F'(u)| \leq 1$ para $-2 \leq u \leq 2$. Por lo cual se le solicita a los estudiantes de CC2 que estudien la siguiente linealización de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4}{dt^4}y(t) = F(y_0) + F'(y_0)(y(t) - y_0),$$

entorno a y_0 .

- Determine la matriz Jacobiana del IVP asociado.
- Obtenga los valores propios de la matriz Jacobiana para la condición inicial y considerando que $F(y) = y$.
- Seleccione un método para avanzar un Δt en el tiempo dado los valores propios obtenidos.

37. Considere la siguiente versión simplificada de La Ecuación de Bratu:

$$\begin{aligned} T''(x) + \lambda \exp(T(x)) &= 0, x \in (0, 1), \\ T(0) &= 0, \\ T(1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

- Muestre que $T(x) = 0$ **no** es una solución de la EDO presentada para $\lambda \neq 0$.
- Proponga un algoritmo para encontrar una aproximación numérica de $T(x)$.

38. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(x) = - \int_0^{y(x)} f(t)dt + x,$$

cuyas condiciones de borde son $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$, y además f es una función arbitraria.

- Proponga un algoritmo que resuelva el BVP presentado, mediante un método a su elección. Justifique la elección de su método. *Hint 1: A possible approach is to discretize the BVP and integral using the same mesh. Hint 2: You may find useful the Fundamental Theorem of Calculus: $g(s) = \int_0^x f(p)dp$, where $g'(s) = f(p)$, and also the Chain Rule. Hint 3: Some finite difference schemes for the third derivative are*

$$\begin{aligned} g^{(3)}(s_i) &\approx \frac{-g(s_{i-2}) + 2g(s_{i-1}) - 2g(s_{i+1}) + g(s_{i+2})}{2\Delta s^3}, \\ &\approx \frac{-5g(s_i) + 18g(s_{i+1}) - 24g(s_{i+2}) + 14g(s_{i+3}) - 3g(s_{i+4})}{2\Delta s^3}, \\ &\approx \frac{5g(s_i) - 18g(s_{i-1}) + 24g(s_{i-2}) - 14g(s_{i-3}) + 3g(s_{i-4})}{2\Delta s^3}, \\ &\approx \frac{-3g(s_{i-1}) + 10g(s_i) - 12g(s_{i+1}) + 6g(s_{i+2}) - g(s_{i+3})}{2\Delta s^3}, \\ &\approx \frac{g(s_{i-3}) - 6g(s_{i-2}) + 12g(s_{i-1}) - 10g(s_i) + 3g(s_{i+1})}{2\Delta s^3}. \end{aligned}$$

4. Ecuaciones Diferenciales Parciales

1. Considere $x, y \in [0, 1]$ para la siguiente EDP con condiciones de frontera mixtas:

$$(1 - c)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (79)$$

$$\Phi_x(0, y) = 0 \quad (80)$$

$$\Phi_x(1, y) = 0 \quad (81)$$

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad (82)$$

$$\Phi(x, 1) = f(x) \quad (83)$$

OBS: En sus desarrollos utilice la notación $\Phi_{i,j} = \Phi(i\Delta x, j\Delta y)$.

- Realice un diagrama del problema e indique el rango de valores de c en el cual la EDP es elíptica.
 - [5 puntos] Realice la discretización de la EDP (sólo la ecuación (1)), utilizando diferencias finitas centradas de segundo orden. Expresé el resultado general ($\Delta x \neq \Delta y$). Simplifique y agrupe cuando sea posible.
 - Realice la discretización de las condiciones de frontera en x (ecuaciones (2) y (3)), utilizando diferencias finitas de primer orden. Simplifique y agrupe cuando sea posible.
 - Realice la discretización de las condiciones de frontera en y (ecuaciones (4) y (5)). Simplifique y agrupe cuando sea posible.
 - Indique explícitamente y resuelva el sistema lineal que se obtiene al considerar $c = \frac{1}{3}$, $\Delta x = \frac{1}{3}$, $\Delta y = \frac{1}{2}$ y $f(x) = \cos(2\pi x) - 1$.
 - Resuelva explícitamente en función de c . ¿Qué pasa si $c = 1$?
2. Considere la ecuación de ondas: $u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)$ definida en $\Omega = [0, 1]^2 \times [0, T]$ con las siguientes condiciones de borde: $u(x, 0, t) = u(1 - x, 1, t) = 0$ y $u(0, y, t) = u(0, 1 - y, t)$ (condición de Mobius); y condiciones iniciales $u(x, y, 0) = f_1(x, y)$ y $u_t(x, y, 0) = f_2(x, y)$.

Para las siguientes preguntas considere que usted ya ha inicializado el algoritmo y las condiciones iniciales ya fueron consideradas.

- Construya un sketch del stencil para el método explícito obtenido al discretizar la ecuación de ondas con diferencias finitas y considerando que ya se ha resuelto del problema de la inicialización.
 - Considerando la discretización explícita:
$$\frac{w_{i,j}^{(k+1)} - 2w_{i,j}^{(k)} + w_{i,j}^{(k-1)}}{\Delta t^2} = \frac{w_{i+1,j}^{(k)} - 2w_{i,j}^{(k)} + w_{i-1,j}^{(k)}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1}^{(k)} - 2w_{i,j}^{(k)} + w_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta y^2},$$
donde $u(x_i, y_j, t_k) \approx w_{i,j}^{(k)}$; y una discretización con $\Delta x = \frac{1}{4}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$ y Δt . ¿Cuántas incógnitas existen en la discretización? Identifíquelas en un sketch.
 - Considerando la discretización explícita indicada en (b) y $\Delta x = \frac{1}{4}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$ y Δt , explique claramente como intervienen las condiciones de borde de en los puntos $(1, 0)$, $(0, 0.75)$ y $(0.75, 0.75)$. Escriba las ecuaciones respectivas para cada punto.
3. Sea $u(r, t)$ la concentración de cierto componente químico dentro una partícula de radio R_{max} . Considere $r \in [0, R_{max}]$ y $t > 0$ para la siguiente EDP que gobierna la difusión de la concentración al interior de la partícula:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, t) \right) \quad (84)$$

con, para $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial r} u(0, t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (85)$$

$$u(R_{max}, t) = \alpha(1 - e^{-t}), \quad \forall t > 0 \quad (86)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad \forall r \in [0, R_{max}] \quad (87)$$

Para la discretización, utilice la notación $u_{i,n} = u(r_i, t_n)$, donde $r_i = i\Delta r = i\frac{R_{max}}{N}$ y $t_n = n\Delta t$.

- (a) Indique cuál problema continuo que es necesario resolver para conocer el estado estacionario. Compruebe además que la solución constante α es la solución del estado estacionario.
- (c) Realice la discretización de la Condición Inicial.
- (c) Realice la discretización de las Condiciones de Frontera.
- (b) Demuestre que el esquema explícito utilizando diferencias finitas centradas para la EDP está dado por

$$u_{i,n+1} = \left(1 + \frac{1}{i}\right) \sigma u_{i+1,n} + (1 - 2\sigma)u_{i,n} + \left(1 - \frac{1}{i}\right) \sigma u_{i-1,n}$$

donde $\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta r^2}$.

4. El Grafeno es un nuevo material que ha revolucionado la industria mundial debido a sus múltiples aplicaciones. Una de sus propiedades relevantes es su alta conductividad del calor. Un importante laboratorio (IL) de ensayo de materiales le ha solicitado a los alumnos de CC2 de la USM realizar una serie de simulaciones computacional para analizar la conductividad de una varilla de Grafeno de largo l_0 . IL ha solicitado a diferentes compañías la construcción de varillas de Grafeno y ha detectado que cada compañía involuntariamente introduce impurezas en el material. Se ha determinado que las impurezas afectan directamente la conductividad del material. Luego de un largo análisis, se ha podido caracterizar la conductividad de cada varilla para cada compañía como $\alpha_j^2(x)$, para $j = 1 : n$. IL está interesado en hacer un ranking entre las compañías basado en la temperatura media obtenida luego de T unidades de tiempo considerando que la temperatura inicial de la varilla de 0 grados y justo al inicio se agrega una fuente de temperatura de β grados al lado derecho ($u(x = l_0, t)$) y que al lado izquierdo se mantiene aislado ($u_x(x = 0, t) = 0$) de perdida de calor.

Considere que el flujo de calor a través de la varilla puede modelarse con la siguiente EDP: $u_t(x, t) = \alpha^2(x)u_{xx}(x, t)$ definida en $0 \leq x \leq l_0$ y $0 \leq t \leq T$ con las siguientes condiciones: $u(x, 0) = 0$, $u_x(0, t) = 0$ y $u(l_0, t) = \beta$, respectivamente y donde $u(x, t)$ representa la temperatura de la varilla en la posición x al tiempo t .

- (a) Construya una aproximación de segundo orden para la condición de borde $u_x(0, t) = 0$. *Hint: Build an interpolation with 3 points starting from the left boundary, compute the derivative and evaluate it on the boundary. It is a good idea to use the Lagrange interpolation polynomial!*
- (b) Construya un algoritmo que pueda generar el ranking requerido por IL.

5. El Grafeno es un nuevo material que ha revolucionado la industria mundial debido a sus múltiples aplicaciones. Una de sus propiedades relevantes es su alta conductividad del calor. Un importante laboratorio (IL) de ensayo de materiales le ha solicitado a los alumnos de CC2 de la USM realizar una simulación computacional para analizar la conductividad de una varilla de Grafeno de largo l_0 con una constante conductividad α^2 y una duración máxima del experimento de T unidades de tiempo. Considere que el flujo de calor a través de la varilla puede modelarse con la siguiente EDP: $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$ definida en $0 \leq x \leq l_0$ y $0 \leq t \leq T$ con las siguientes condiciones: $u(x, 0) = f(x)$, $u_x(0, t) = 0$ y $u(l_0, t) = 0$, respectivamente y donde $u(x, t)$ representa la temperatura de la varilla en la posición x al tiempo t . IL está interesado en conocer el tiempo en que la temperatura máxima de la varilla no exceda los β grados.

- (a) Construya una aproximación de segundo orden para la condición de borde $u_x(0, t) = 0$. *Hint: Build an interpolation with 3 points starting from the left boundary, compute the derivative and evaluate it on the boundary. It is a good idea to use the Lagrange interpolation polynomial!*
- (b) Utilice el enfoque Crank-Nicolson para discretizar la EDP descrita anteriormente y realice un sketch que muestre como el enfoque realiza las aproximaciones en cada evolución en el tiempo. Escriba su algoritmo en forma matricial.
- (c) Construya un algoritmo que utilice el código propuesto de (b) para determinar el tiempo en que la temperatura de la varilla no exceda los β grados. Así el laboratorio IL podrá solucionar su problema.

6. Considere el dominio Ω indicado en la Figura 12 y su frontera $\partial\Omega$ también indicada en la misma figura. En la Figura 12 se propone una discretización del dominio donde los círculos representan la discretización de la frontera y los triángulos representan la discretización de los puntos interiores.

El problema a discutir es la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad (88)$$

$$u(\partial\Omega) = 0 \quad (89)$$

Nuestro interés es encontrar aproximaciones numéricas de $u(x, y)$ en los puntos interiores indicados en la Figura 12 y λ .

- (a) Obtenga una discretización del Laplaciano en los puntos interiores indicados en la Figura 12.
- (b) Construya explícitamente las ecuaciones discretas y representela matricialmente.
- (c) Explique claramente (¡no resuelva!) que algoritmo necesita para encontrar *todas* las soluciones no nulas de $u(x, y)$ y sus λ 's respectivos dada la discretización sugerida en la Figura 12.

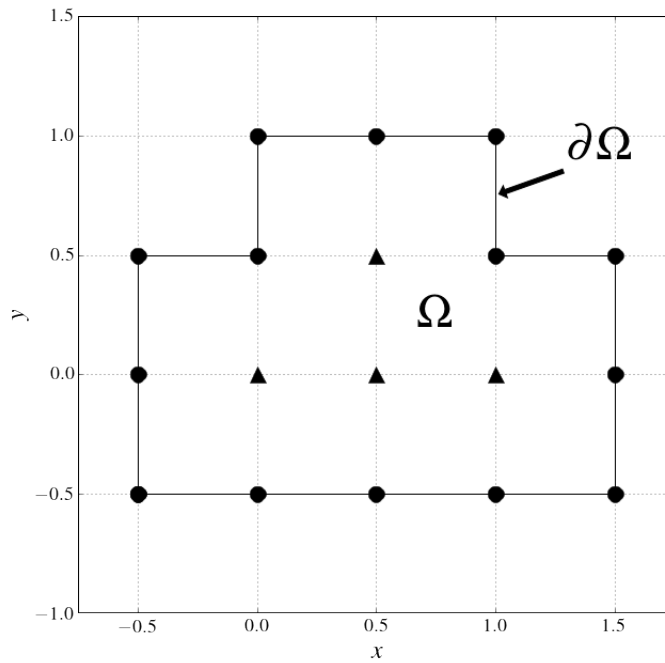


Figura 12: Malla de diferencias finitas. Los círculos representan los puntos de frontera y los triángulos los puntos interiores.

7. Considere la siguiente ecuación de ondas para $u(x, t)$ definida en $x = [0, 1]$ y $t = [0, T]$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (90)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (91)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (92)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (93)$$

$$u(1, t) = 0 \quad (94)$$

- (a) ¿Es $u(x, t) = 0$ la solución? Fundamente su respuesta.
- (b) Si su respuesta fue negativa en la parte (a), proponga un esquema explícito de diferencias finitas para resolver la ecuación de ondas descrita anteriormente. Incluya un bosquejo del *stencil* utilizado.
- (c) Escriba matricialmente el método propuesto en el punto anterior.
- (d) Explique claramente como se inicializa el método propuesto.
Hint0: Recall that finite differences for the wave equation needs a special treatment for $u_t(x, 0)$ such that you can start your method correctly!

8. La temperatura en estado estacionario de la cuarta parte de un anillo circular de radio interno 1[cm] y radio externo 3[cm] se modela con la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$-\Delta u(r, \theta) = 0 \quad (95)$$

$$u(1, \theta) = 2 \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (96)$$

$$u(3, \theta) = 3 \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (97)$$

$$u_\theta(r, 0) = \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right) \quad 1 < r < 3 \quad (98)$$

$$u_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \cos(r\pi) - 1 \quad 1 < r < 3 \quad (99)$$

$$(100)$$

Donde Δ es el operador laplaciano en coordenadas polares:

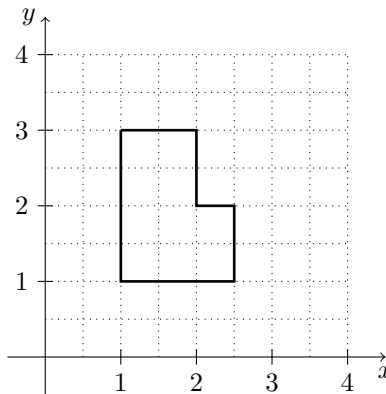
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (101)$$

Para las siguientes preguntas realizará una discretización de la EDP utilizando el método de diferencias finitas, donde debe asumir que $w_{i,j} = u(r_i, \theta_j) = u(i\Delta r, j\Delta\theta)$.

- Realice una discretización de la EDP (Ecuación (95)) utilizando diferencias centradas de segundo orden. Considere un caso general para puntos interiores y distintos valores Δr y $\Delta\theta$.
 - Realice una discretización de las condiciones de frontera de la EDP (Ecuaciones (96), (97), (98), (99)).
 - Ahora considere el caso particular donde $\Delta r = 1$ y $\Delta\theta = \frac{\pi}{8}$. Determine un sistema de ecuaciones en forma matricial con los puntos desconocidos de la discretización.
9. Una pieza de un material térmico en forma de L posee una distribución de temperatura, que en estado estacionario, se rige por la Ecuación Diferencial Parcial:

$$-\Delta u(x, y) = -u(x, y) \quad (102)$$

$$u(x, y) = xy \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad (103)$$



Usted debe realizar una discretización de la EDP con el método de Diferencias Finitas. Para ello responda las siguientes preguntas.

- ¿Qué aproximaciones utilizará para discretizar la EDP (Ecuación (102))?

- (b) Discretice la EDP y exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones para los puntos interiores del material. Considere $\Delta x = \Delta y = 0.5$.
- (c) Proponga un método numérico para resolver el sistema de ecuaciones de la pregunta anterior.
10. Considere la siguiente EDP Parabólica que modela la difusión de una población con crecimiento proporcional, con $0 \leq x \leq 1$ y para un tiempo $0 \leq t \leq T_{max}$:

$$p_t(x, t) = D p_{xx}(x, t) + C p(x, t) \quad (104)$$

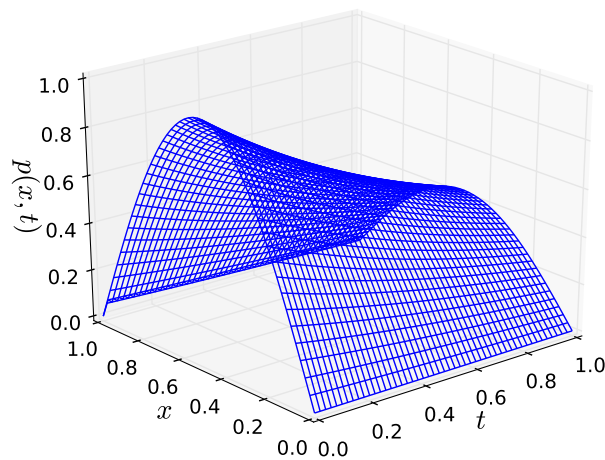
$$p(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (105)$$

$$p(0, t) = 0 \quad (106)$$

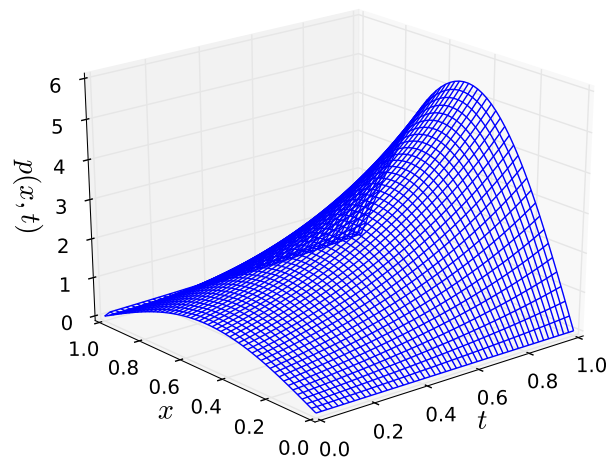
$$p(1, t) - p_x(1, t) = 0 \quad (107)$$

Donde $p(x, t)$ expresa la población dado un valor para la coordenada espacial y temporal, D es una constante de difusión y C es una tasa de crecimiento. Dados distintos valores para D y C , el modelo de difusión de población puede indicar la extinción o la sobrevivencia de la población para un tiempo $t = T_{max} \gg t_0$.

- (a) Utilizando un Esquema Implícito, realice una discretización de la EDP (Ecuación (104)). Simplifique y agrupe la mayor cantidad de términos posibles. Considere $p(x_i, t_n) = p(i\Delta x, n\Delta t) \approx w_{i,n}$, $N_x = 1/\Delta x$ y $N_t = T_{max}/\Delta t$.
- (b) Discretice las condiciones iniciales y de frontera. Simplifique y agrupe la mayor cantidad de términos posibles. Considere $p(x_i, t_n) = p(i\Delta x, n\Delta t) \approx w_{i,n}$, $N_x = 1/\Delta x$ y $N_t = T_{max}/\Delta t$.
- (c) Utilizando las discretizaciones de las preguntas (a) y (b), determine un sistema matricial para encontrar soluciones de la EDP en el tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t$. Considere $\Delta x = 0.25$, $\Delta t = 0.002$, $D = 1$, $C = 2$.
- (d) La población regida por este modelo sobrevivirá en $t = T_{max} \gg t_0$ si se cumple que $C > \alpha D$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, en la Figura 13 se muestra el efecto que produce en la población la elección de dos valores distintos de la tasa de crecimiento. En el caso $C = \alpha_1 D$, la población disminuye gradualmente, mientras que en el caso $C = \alpha_2 D$ se produce un aumento de población con el paso del tiempo. Diseñe un algoritmo que estime una cota para la tasa de crecimiento C que asegure que la población sobrevivirá. Especifique claramente todos los parámetros y supuestos que usará.



(a) $C = \alpha_1 D$



(b) $C = \alpha_2 D$

Figura 13: Evolución de la población en el tiempo considerando dos valores de la tasa de crecimiento.

11. Considere el siguiente sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales parciales definido en $(x, t) = [0, 1] \times [0, T]$:

$$u_{tt}(x, t) = c(v(x, t)) u_{xx}(x, t) \quad (108)$$

$$v_{tt}(x, t) = v_{xx}(x, t) \quad (109)$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \exp(-(x - 0.5)^2) \quad (110)$$

$$v(x, 0) = \sin(\pi x) \exp(-(x - 0.5)^2) \quad (111)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (112)$$

$$v_t(x, 0) = 0 \quad (113)$$

$$u(1, t) - u(0, t) = 0 \quad (114)$$

$$v(1, t) = 0 \quad (115)$$

$$v(0, t) + v_x(0, t) = \frac{\pi}{\exp(1/4)} \quad (116)$$

$$c(x) = 1 + \varepsilon \cos(x) \quad (117)$$

- (a) Construya un algoritmo basado en diferencias finitas que encuentre una aproximación numérica de las funciones incógnitas $u(x, t)$ y $v(x, t)$ en la grilla (x_i, t_k) donde $x_i = \frac{i}{n}$ y $t_k = \frac{kT}{m}$ para $i \in \{0, \dots, n\}$ y $k \in \{0, \dots, m\}$. Considere ε , T , n y m como parametros de su algoritmo.

12. Para la EDP parabólica

$$u_t(x, t) = D u_{xx}(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0 \quad (118)$$

con el método explícito se puede resolver mediante

$$\mathbf{w}_{j+1} = \begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\sigma) & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & (1-2\sigma) & \sigma & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \sigma & (1-2\sigma) & \sigma \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma & (1-2\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{N-1,j} \end{bmatrix} = A \mathbf{w}_j \quad (119)$$

donde $u(x_i, t_j) \approx w_{i,j}$ para $i = 0, \dots, N$ y $j = 0, 1, \dots$

- (a) Demuestre que $\mathbf{w}_j = A^j \mathbf{w}_0$.
 (b) Sea $\mathbf{e}_j = \mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{w}_j$, el cual representa el error entre dos aproximaciones sucesivas. Demuestre que $\mathbf{e}_j = A^j \mathbf{e}_0$.
 (c) Suponga que el vector \mathbf{e}_0 se escribe como combinación lineal de los vectores propios de A , es decir $\mathbf{e}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mathbf{x}_k$, demuestre que $\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k^j \mathbf{x}_k$, donde λ_k es el k -ésimo valor propio de A .
 (d) Si la magnitud de todos los valores propios de A son menores o igual a 1, el esquema computacional (119) es estable. Proponga un algoritmo que verifique que la matriz A utilizada permite un esquema computacional estable.

13. Considere la ecuación de calor:

$$u_t(x, t) = D u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T] \quad (120)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (121)$$

donde $D = \frac{1}{3}$ y $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right) dy$. Además conocemos que $f(x)$ tiene soporte compacto en $[-1, 1]$ y que en el soporte compacto su valor es 1.

- (a) **(10 puntos)** Considere la siguiente discretización del dominio $x_i = i \Delta x$ para $i \in \mathbb{Z}$ y $t_j = j \Delta t$ para $j \in \mathbb{N}_0$. Proponga un método numérico para poder avanzar en el tiempo la condición inicial proyectada sobre la grilla infinita, i.e. $f(x_i) = w_{i,0}$. Debe basar su aproximación en la ecuación diferencial.
Hint: Yes, you are dealing with an infinite grid but don't worry, we will be only studying it around the compact support of $f(x)$!

- (b) Determine con el método propuesto en la pregunta anterior $w_{0,2}$, para $\Delta x = 0.5$ y $\Delta t = 0.5$.
 (b) Obtenga el error de su aproximación anterior.
Hint: Now you need to use the integral included above. This will give you the “exact” value.

14. Considere la clásica ecuación de onda con condición de Dirichlet nula:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \quad (122)$$

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad (123)$$

$$u_t(x, 0) = x \quad (124)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (125)$$

Se ha resuelto numéricamente la ecuación de onda mediante diferencias finitas para varios tiempos entre $t = 0$ y $t = 1$. Los resultados han variado en función de la elección de $\Delta x = (M + 1)^{-1}$ y $\Delta t = (N + 1)^{-1}$ como se puede ver en la Figura 14. La Tabla 11 muestra para cada experimento p la cantidad de puntos M y N

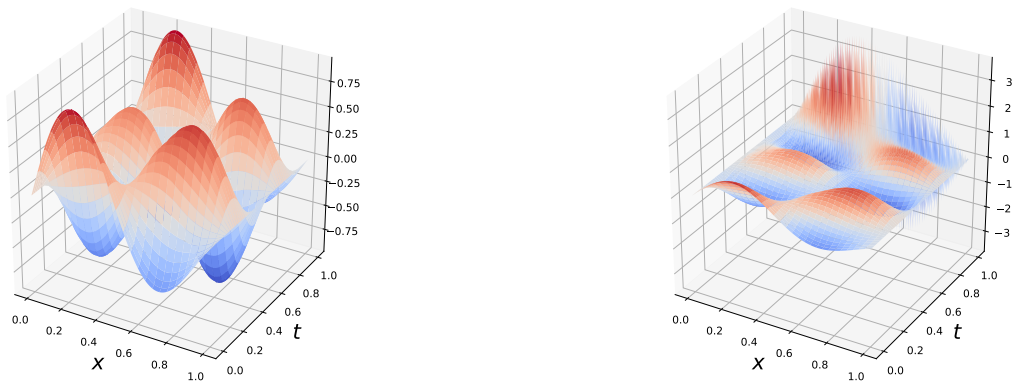


Figura 14: Dos soluciones numéricas de la ecuación de onda (122) para dos configuraciones distintas de parámetros. ¡Note la diferencia entre ellas!

utilizados para discretizar el espacio y el tiempo respectivamente.

- (a) Describa de forma precisa el fenómeno que se aprecia en las figuras. ¿A qué se debe este fenómeno? ¿Qué condición debe cumplirse?
 b) Encierre en la Tabla 11 aquel o aquellos cuocientes que resulten en una resolución numérica estable de la ecuación (122).

$M \backslash N$	200	230	260	290	320	350	380	410	440	470	500
100	0.5025	0.4372	0.3870	0.3471	0.3146	0.2877	0.2651	0.2457	0.2290	0.2144	0.2016
120	0.6020	0.5238	0.4636	0.4158	0.3769	0.3447	0.3176	0.2944	0.2744	0.2569	0.2415
140	0.7015	0.6104	0.5402	0.4845	0.4393	0.4017	0.3701	0.3431	0.3197	0.2994	0.2814
160	0.8010	0.6970	0.6169	0.5533	0.5016	0.4587	0.4226	0.3917	0.3651	0.3418	0.3214
180	0.9005	0.7835	0.6935	0.6220	0.5639	0.5157	0.4751	0.4404	0.4104	0.3843	0.3613
200	1.0000	0.8701	0.7701	0.6907	0.6262	0.5726	0.5276	0.4891	0.4558	0.4268	0.4012
220	1.0995	0.9567	0.8467	0.7595	0.6885	0.6296	0.5801	0.5377	0.5011	0.4692	0.4411
240	1.1990	1.0433	0.9234	0.8282	0.7508	0.6866	0.6325	0.5864	0.5465	0.5117	0.4810
260	1.2985	1.1299	1.0000	0.8969	0.8131	0.7436	0.6850	0.6350	0.5918	0.5541	0.5210
280	1.3980	1.2165	1.0766	0.9656	0.8754	0.8006	0.7375	0.6837	0.6372	0.5966	0.5609
300	1.4975	1.3030	1.1533	1.0344	0.9377	0.8575	0.7900	0.7324	0.6825	0.6391	0.6008

Tabla 11: Tabla de cuocientes $\frac{M+1}{N+1}$

15. Considere la siguiente ecuación diferencial parcial, definida en el dominio $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} &= -2u + \sin(y)(1 - \cos(x)) + \frac{x}{\pi}, \\
 u(x, 0) &= \sin(x) + \frac{x}{2\pi}, \\
 u(x, \frac{\pi}{2}) &= 1 + \frac{x}{2\pi}, \\
 u(0, y) &= \sin(y), \\
 u(\frac{\pi}{2}, y) &= \cos(y) + \sin(y) + C.
 \end{aligned}$$

- a) Determine el valor de la constante C para que la EDP esté bien definida, y determine el tipo de la EDP.
b) Determine una expresión para la derivada parcial mixta. Utilice diferencias centradas y considere que $\Delta x \neq \Delta y$. *Hint: If $v(x_i, y_j) = u_x(x_i, y_j)$, then:*

$$u_{xy}(x_i, y_j) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (x_i, y_j) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_j).$$

- c) Describa ordenadamente como resolver la ecuación diferencial mediante diferencias finitas. Indique como construirá los elementos requeridos y como los resolverá.

- 16.** Se le ha encargado a los destacados estudiantes de CC2 la construcción de la función $\xi(t)$, la cual está definida como:

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (u(x, t))^2 dx.$$

Lamentablemente, no se tiene acceso explícito a la función $u(x, t)$. Sin embargo, luego de horas de esfuerzo, se ha descubierto que dicha función satisface la *Ecuación de Korteweg-de Vries* (KdV), la cual se define por medio de la siguiente EDP:

$$u_t(x, t) = 2\alpha u(x, t) u_x(x, t) + \beta u_{xxx}(x, t), \quad (126)$$

donde $(x, t) \in [-\pi, \pi] \times [0, T]$, $u(x, 0) = f(x)$ y condiciones de borde periódicas.

- a) Proponga un algoritmo que permita obtener numéricamente el valor de la función $\xi(t)$. Defina claramente las ecuaciones resultantes de la discretización realizada e indique los algoritmos auxiliares que necesitará para definir una propuesta de solución. Considere como parámetros de su algoritmo los valores de α y β , la condición inicial $f(x)$, el número N_x de puntos para discretizar la variable x , el número N_t de puntos

para discretizar la variable temporal y el valor de T . Además, considere las siguientes discretizaciones de segundo orden de la tercera derivada mediante diferencias finitas:

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x_i) &\approx \frac{-f(x_{i-2}) + 2f(x_{i-1}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{2\Delta x^3}, \\ &\approx \frac{-5f(x_i) + 18f(x_{i+1}) - 24f(x_{i+2}) + 14f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+4})}{2\Delta x^3}, \\ &\approx \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2\Delta x^3}. \end{aligned}$$

Debe explicar claramente como se considerará la condición de borde periódica en sus cálculos.

17. La *Ecuación de Brusselator* consiste en un modelo de dos ecuaciones diferenciales acopladas, donde cada una representa un elemento en una reacción química donde interactúan dos sustancias. Si consideramos un dominio $\Omega = [0, H]^2$ cuadrado, donde $H \in \mathbb{R}$, esta se define como:

$$\begin{aligned} u_t &= D_u \Delta u + u^2 v + C - (K + 1)u, \\ v_t &= D_v \Delta v - u^2 v + Ku, \end{aligned}$$

donde D_u , D_v , C y K son coeficientes reales. Las condiciones iniciales de este problema son:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= C + \alpha, (x, y) \in \Omega, \\ v(x, y, 0) &= K/C + \beta, (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

donde α y β son constantes reales positivas. Las condiciones de borde son $u(\partial\Omega, t) = v(\partial\Omega, t) = 0$. Gracias al esfuerzo realizado por estudiantes de CC2, se ha logrado descubrir la función $v(x, y, t)$ por lo que solamente falta encontrar la función $u(x, y, t)$, además del valor de la constante C el cual también se desconoce. Debido a que parte del trabajo ya fue realizado por los estudiantes de CC2, se le ha pedido a usted que termine de resolver numéricamente el problema restante.

- a) Describa, de manera ordenada, un algoritmo para encontrar la función $u(x, y, t)$, mediante un esquema explícito. Considere como parámetros los valores de D_u , D_v , K , α y β , así como también el valor de H , N_x (número de puntos en la discretización de x), N_y (número de puntos en la discretización de y), N_t (número de puntos en la discretización de la variable temporal) y T (el valor del tiempo máximo de simulación).

18. Se desea resolver el siguiente IVP:

$$\begin{aligned} y''(t) &= f(t, y(t), y'(t)) + u(x_i, t), \quad t \in (0, T] \\ y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= v_0, \end{aligned}$$

donde el valor de x_i es un parámetro fijo del problema. Lamentablemente, se desconoce la función $u(x, t)$. Lo que si se conoce es la ecuación diferencial que satisface la función $u(x, t)$, la cual corresponde al siguiente problema, definido en un dominio $\Omega = [0, \pi] \times [0, T]$:

$$u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u,$$

con condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= e^{-t} \cos(t), \\ u(\pi, t) &= e^{-t} \cos(\pi - t), \end{aligned}$$

y condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \cos(x), \\ u_t(x, 0) &= \sin(x) - \cos(x). \end{aligned}$$

- a) Proponga un algoritmo que, dado un valor de x_i fijo, encuentre $y(t)$. Considere como parámetros el valor de T (tiempo máximo de simulación), la cantidad de puntos N_x para discretizar la variable x , el número de puntos N_t para discretizar la variable temporal, el valor de x_i que será utilizado para evaluar $u(x, t)$ en el IVP.
19. Considere la siguiente aproximación $u(x_i, t_k + \Delta t) = \sigma u(x_i + \Delta x, t_k) + (1 + \Delta t - 2\sigma) u(x_i, t_k) + \sigma u(x_i - \Delta x, t_k)$, donde $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ la cual requiere $0 < \sigma < 0.5$. Donde $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$, x_i y t_k son equiespaciados, $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = 0$ y $u(1, t) = 1$.
- a) Obtenga la ecuación diferencial parcial que generó esa aproximación.
- b) Proponga un esquema implícito para resolver la misma ecuación diferencial parcial, escríbalo en su forma matricial.
20. Sean $u = u(x, y, t)$ la concentración de Fitoplanctons y $v = v(x, y, t)$, la concentración de Zooplanctons en una columna de agua de área basal $\Delta x \cdot \Delta y$ en determinado instante de tiempo t , en donde se asume una distribución vertical uniforme de los mismos a lo alto de la columna. Estas funciones se pueden modelar con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} u_t &= \epsilon \Delta u + u(1 - u) - \frac{uv}{u + h} \\ v_t &= \epsilon \Delta v + \frac{kuv}{u + h} - mv \end{aligned}$$

en donde las constantes r, h, k, m y $0 \leq \epsilon \ll 1$ dependen de diferentes factores externos. Se requiere encontrar funciones solución **no triviales**, considere $k = 2, r = 0.3, h = 0.4, m = r \cdot k$. Las condiciones de borde del problema son de flujo nulo, es decir:

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal al dominio. El dominio es $\Omega = [0, 900] \times [0, 300]$.

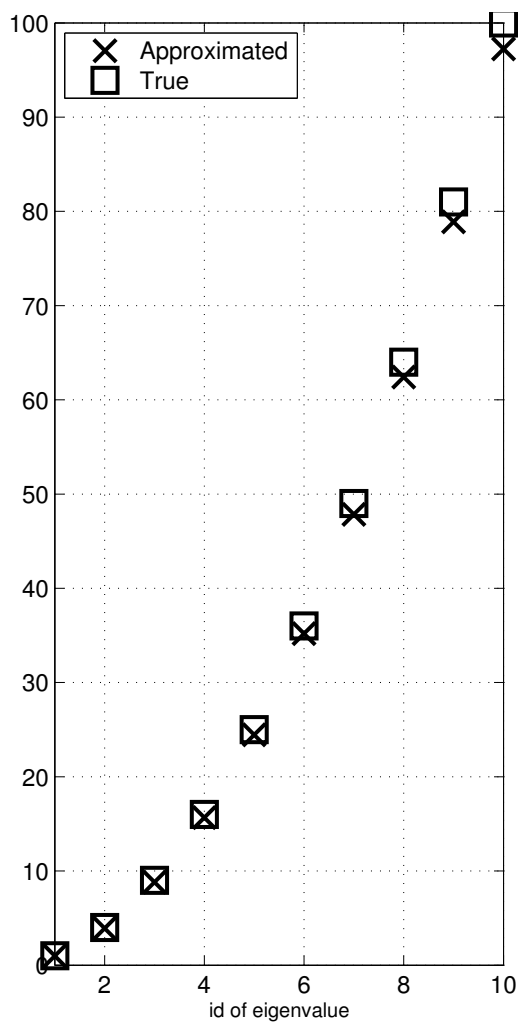
- a) Proponga un método numérico que obtenga algún estado estacionario no trivial del sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Se debe desarrollar explícitamente las ecuaciones que se resolverán.
- b) Considerando ahora que $\epsilon = 0$, obtenga el estado estacionario si es posible. Si no es posible, justifique.
21. Considere $u_t(t, x) + cu_x(t, x) = -u(t, x)$ para $x \in [0, 1]$, $u(0, x) = f(x)$, $c \in \mathbb{R}$ y condiciones periódicas, i.e. $u(t, 0) = u(t, 1)$.
- a) Proponga un esquema numérico implícito basado en diferencias finitas para la PDE anterior.

5. Sin Clasificación

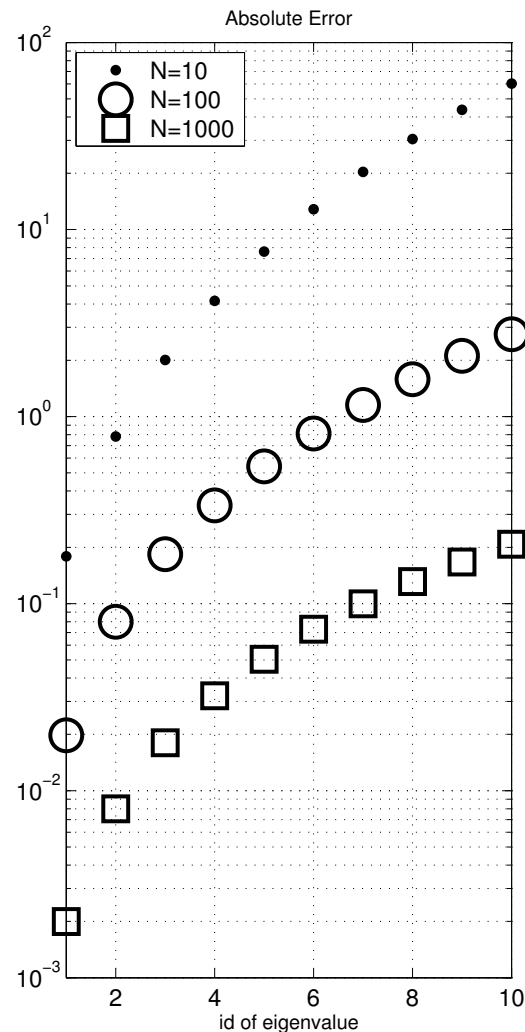
1. El cómputo de eigenvalues (o valores propios) no está sólo limitado a matrices, uno también puede calcular valores propios de operadores diferenciales. Lamentablemente, eso aún no lo hemos estudiado. Sin embargo, lo que si podemos hacer es estimar numéricamente valores propios de operadores diferenciales con los métodos aprendidos en clases.

Considere la siguiente ecuación diferencial: $-y''(x) = \lambda y(x)$, para $0 < x < \pi$, con $y(0) = 0$ y $y(\pi) = 0$.

- (a) Demuestre que $\lambda = 25$ es el eigenvalue de la eigenfunction (función propia) $y(x) = \sin(5x)$.
Nota: En este caso es posible demostrar que el operador tiene ¡infinitos valores propios!
- (b) Dado que no sabemos como obtener valores propios de operadores diferenciales, construya un método numérico utilizando diferencias finitas para obtener una aproximación discreta del operador diferencial por medio de una matriz de diferenciación (¡esta debiera ser una matriz muy conocida!) y luego proponga algún método para obtener el valor propio λ_s más cercano a un valor s dado. La matriz debe ser construida explícitamente y debe especificar claramente que método utilizará para obtener λ_s y la razón de la elección.
- (c) Considere que el método que usted definió anteriormente ha sido implementado exitosamente. Se han obtenido varias aproximaciones de los primeros 10 eigenvalues, ver Figura (15). Obtenga el orden de convergencia del sexto valor propio observado en la Figura (15b). ¿Se observa convergencia cuadrática?



(a) Eigenvalues exactos vs estimados para $N = 100$



(b) Error absoluto al aumentar la resolución

Figura 15: Estimación numérica de eigenvalues de operadores diferenciales

2. Considere el siguiente ecuación integral:

$$u(t) = t + \int_0^t (t-s) u(s) ds \quad (127)$$

(a) Determine un método numérico para obtener $u(t)$ para cualquier t . Usted debe asegurarse que el método numérico elegido es estable.

Hint0: You may evaluate t at any time you wish, for instance at $t = 0$.

Hint1: You may take derivatives.

Hint2: You may evaluate derivatives at any t .

3. Considere la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0 \quad (128)$$

definida en $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, donde c es una constante real mayor que 0. Con las siguientes condiciones iniciales,

$$u(x, 0) = g(x) \quad (129)$$

$$u_t(x, 0) = h(x) \quad (130)$$

Afortunadamente, *Jean-Baptiste le Rond d'Alembert* descubrió la siguiente representación de la solución.

$$u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy \quad (131)$$

o mejor conocida como la formula de *d'Alembert*. Sin embargo, la representación requiere el calculo de una integral.

(a) Proponga un método numérico para encontrar $u(x, t)$ para cualquier coordenada (x, t) considerando $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = \exp(-x^2)$.

4. Considere la siguiente ecuación de ondas para $u(x, t)$ definida en $x = [0, 1]$ y $t = [0, T]$:

$$u_{tt} - (1 + \varepsilon c(t)) u_{xx} = 0 \quad (132)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (133)$$

$$u_t(x, 0) = f(x) \quad (134)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (135)$$

$$u(1, t) = 0 \quad (136)$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$ es un parámetro pequeño pero no nulo y no puede ser considerado nulo y $c(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial de *Jacobi*:

$$\ddot{c}(t) + (1 + k^2) c(t) - 2k^2 c^3(t) = 0 \quad (137)$$

$$c(0) = 0.5 \quad (138)$$

$$\dot{c}(0) = 0 \quad (139)$$

donde $0 < k < 1$ es un parámetro conocido.

(a) Proponga un método numérico para obtener una aproximación de $u(x, t)$ para $x = [0, 1]$ y $t = [0, T]$.

Hint0: Uncoupled equations don't need to be solve together!

5. Considere la siguiente ecuación integral $\int_0^1 \min(x, y) u(y) dy = \lambda u(x)$ en $x \in [0, 1]$, donde λ es un escalar y $\min(x, y)$ retorna el mínimo entre las variables x e y .

- (a) Construya un algoritmo que maximice $\lambda \in \mathbb{R}$ y obtenga la aproximación **no nula** de $u(x_j)$ asociada para $j \in \{0, \dots, n\}$. Queda a su elección la definición de $0 \leq x_j \leq 1$. n debe ser un parámetro de su algoritmo.

6. Considere el siguiente problema de valor de frontera en la región Ω :

$$\begin{aligned}\Delta u &= f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}\tag{140}$$

- (a) Escriba un pseudocódigo para resolver **numéricamente** el problema (140), donde la incógnita es la función $u(x)$. Considere que la región $\Omega = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ y $f = f(x, u, u')$. Su pseudocódigo debe manejar los casos cuando f es una función lineal en u y cuando no lo es. Recuerde indicar los parámetros de su algoritmo así como explicitar las evaluaciones de funciones en puntos conocido.
- (b) Para la misma región anterior, considere el caso $f = \lambda u$. Sabemos que u tendrá infinitas soluciones provenientes de las funciones propias asociadas al operador Δ . Numéricamente no podremos obtener estas soluciones exactas, pero podemos a través de la discretización nuestro operador (en este caso la matriz de derivación) obtener aproximaciones a estas funciones, las cuales serán vectores propios. Haga una excepción en su pseudocódigo de forma tal que maneje el caso $f = \lambda u$ y obtenga la primera solución no nula para $u(x)$.
- (c) Computacionalmente no podemos obtener las infinitas soluciones, ¿cuántas soluciones sí podemos obtener?
(*hint: piense en cuántos puntos utilizó para discretizar y el tamaño de su sistema*)
- (d) Modifique su excepción para encontrar de una sola vez las soluciones no nulas $u(x)$.
- (e) Demuestre que las soluciones numéricas de la pregunta anterior son ortogonales.

7. Considere el siguiente problema del péndulo escalado:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta(\tau) + \frac{\sin(\varepsilon\theta(\tau))}{\varepsilon} = 0,\tag{141}$$

$$\theta(0) = 1,\tag{142}$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}\theta(\tau)\right|_{\theta=0} = 0,\tag{143}$$

para $\tau > 0$ y $0 < \varepsilon \ll 1$. Se puede demostrar que para este problema el periodo exacto de oscilación puede expresarse de la siguiente forma:

$$P = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\cos(\varepsilon x) - \cos(\varepsilon)}} dx.\tag{144}$$

- (a) Proponga un algoritmo que determine el periodo del pendulo escalado.
- (b) Proponga un algoritmo que determine $\theta(\tau)$ para cualquier valor de $\tau > 0$ considerando que puede resolver la ecuación diferencial solo una vez.

8. Recordando la integral de contorno de Cauchy en el plano complejo:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z - z_0)^{-1} dz$$

donde $f(z)$ es una función analítica, Γ es un contorno cerrado simple que encierra a z_0 y $i = \sqrt{-1}$. En el caso de que z_0 se reemplazara por una matriz, la integral de contorno de Cauchy se transforma de la siguiente forma:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

donde I es la matriz identidad, A es una matriz cuadrada definida positiva y Γ encierra todos los valores propios de A .

- (a) Considerando un contorno de la siguiente forma $z(\theta) = \rho_0 + \rho_1 \exp(i\theta)$. Construya un algoritmo que determine $\rho_0 \in \mathbb{R}$ y $\rho_1 \in \mathbb{R}$.

9. Recordando la integral de contorno de Cauchy en el plano complejo:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z - z_0)^{-1} dz$$

donde $f(z)$ es una función analítica, Γ es un contorno cerrado simple que encierra a z_0 y $i = \sqrt{-1}$. En el caso de que z_0 se reemplazara por una matriz, la integral de contorno de Cauchy se transforma de la siguiente forma:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

donde I es la matriz identidad, A es una matriz cuadrada definida positiva y Γ encierra todos los valores propios de A .

- (a) Considerando un contorno de la siguiente forma $z(\theta) = \rho_0 + \rho_1 \exp(i\theta)$ y que usted ya obtuvo $\rho_0 \in \mathbb{R}$ y $\rho_1 \in \mathbb{R}$ anteriormente. Construya un algoritmo que obtenga $f(A)\mathbf{b}$ utilizando la integral de contorno de Cauchy. Los parámetros del algoritmo son: A , \mathbf{b} , $f(z)$, ρ_0 , ρ_1 y n . Donde n es la cantidad de puntos que deben utilizarse en la discretización de la integral. Recuerde que está prohibido calcular inversas.

Hint: It may be a good idea to remember the trapezoidal rule of integration.

10. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} + (x^2 - n^2) y(x) = 0,$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y la solución es $y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(ns - x \sin(s)) ds$.

- a) Convierta esta ecuación diferencial en un IVP y determine las condiciones iniciales requeridas considerando $n = 1$.