Ayudantía 10.

1.- a) • Utilizando la aproximación encontrada en la ayudantía 8.

$$u_x(0,t) \approx \frac{-3u(0,t)+4u(0+\Delta x,t)-u(0+2\Delta x,t)}{2\Delta x}$$

b) • Estableciendo:

$$\Delta x = \frac{l_0}{N} \qquad \Delta t = \frac{T}{M} \qquad u(i\cdot\Delta x, j\cdot\Delta t) = w_{ij}$$

• Para obtener una representación explícita se aproximará la derivada temporal con forward difference.

$$u_t(i\Delta x, j\Delta t) \approx \frac{w_{i,j+1}-w_{ij}}{\Delta t}$$

• Para la 2da derivada espacial:

$$u_{xx}(i\Delta x, j\Delta t) \approx \frac{w_{i+1,j}-2w_{ij}+w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

• Además, $\alpha^2(i\Delta x) = \alpha_i^2$.

• Así, la EDP.

$$\frac{w_{i,j+1}-w_{ij}}{\Delta t} = \alpha_i^2\left(\frac{w_{i+1,j}-2w_{ij}+w_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)$$

• Despejando $w_{i,j+1}$:

$$w_{i,j+1} = \left(1-2\frac{\alpha_i^2\Delta t}{\Delta x^2}\right)w_{ij} + \frac{\alpha_i^2\Delta t}{\Delta x^2}w_{i+1,j} + \frac{\alpha_i^2\Delta t}{\Delta x^2}w_{i-1,j} \qquad \boxed{\nabla_i = \frac{\alpha_i^2\Delta t}{\Delta x^2}}$$

$$w_{i,j+1} = (1-\nabla_i)w_{ij} + \nabla_i w_{i+1,j} + \nabla_i w_{i-1,j} \quad (\mathrm{I})$$

- Aplicando la aproximación encontrada en a).

$$u_x(0,t) \approx \frac{-3w_{0,j} + 4w_{1,j} - w_{2,j}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow$$ Condición de borde dada.

- Podemos encontrar expresión para borde izquierdo ($w_{0,j}$)

$$w_{0,j} = \frac{4w_{1,j} - w_{2,j}}{3} = \frac{4}{3}w_{1,j} - \frac{1}{3}w_{2,j}$$

- Reemplazando para los puntos de interés ($i = \{1, \dots, n-1\}, j$) en (I)

$i=1$

$$w_{1,j+1} = (1-\sigma_1)w_{1j} + \sigma_1 w_{2j} + \sigma_1 w_{0j} \rightarrow \text{Borde izquierdo.}$$

$$w_{1,j+1} = (1-\sigma_1)w_{1j} + \sigma_1 w_{2j} + \sigma_1 \cdot \frac{4}{3} w_{1,j} - \sigma_1 \cdot \frac{1}{3} w_{2,j}$$

$$w_{1,j+1} = \left(1 + \frac{\sigma_1}{3}\right) w_{1j} + \frac{2\sigma_1}{3} w_{2j}$$

$i=2$

$$w_{2,j+1} = (1-\sigma_2)w_{2j} + \sigma_2 w_{3j} + \sigma_2 w_{1j}$$

$$\vdots$$

$i=n-1$

$$w_{n-1,j+1} = (1-\sigma_{n-1})w_{n-1,j} + \sigma_{n-1} \underbrace{w_{n,j}}_{\text{Borde derecho. } (=\beta)} + \sigma_{n-1} w_{n-2,j}$$

$$w_{n-1,j+1} = (1-\sigma_{n-1})w_{n-1,j} + \sigma_{n-1} w_{n-2,j} + \sigma_{n-1} \cdot \beta$$

- Finalmente, el esquema matricial:

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ w_{3,j+1} \\ \vdots \\ w_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\sigma_1/3) & 2\sigma_1/3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & (1-\sigma_2) & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & (1-\sigma_3) & \sigma_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & (1-\sigma_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ w_{3,j} \\ \vdots \\ w_{n-1,j} \end{bmatrix}$$

$$+ \sigma_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Este esquema es explícito ya que para encontrar los puntos del tiempo siguiente basta con multiplicar y sumar vectores y matrices.

c) • Para obtener un esquema implícito debemos aproximar la derivada temporal con backward difference.

$$u_t(i\Delta x, j\Delta t) \approx \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta t}$$

- Manteniendo la notación y aproximaciones del item anterior, la EDP:

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta t} = \alpha_i^2 \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right)$$

- Despejando a la izquierda los términos del tiempo j:

$$w_{i,j} - \sigma_i w_{i+1,j} + 2\sigma_i w_{i,j} - \sigma_i w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

$$-\sigma_i W_{i-1,j} + (2\sigma_i - 1) W_{i,j} - \sigma_i W_{i+1,j} = W_{i,j-1} \quad (\mathrm{II})$$

- Reemplazando para los puntos de interés $(i=\{1,\dots,n\}, j)$ en (II)

i = 1|

Borde izquierdo

$$-\sigma_1 W_{0,j} + (2\sigma_1 - 1) W_{1,j} - \sigma_1 W_{2,j} = W_{1,j-1}$$

$$-\sigma_1 \cdot \frac{4}{3} W_{1,j} + \sigma_1 \cdot \frac{1}{3} W_{2,j} + (2\sigma_1 - 1) W_{1,j} - \sigma_1 W_{2,j} = W_{1,j-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\sigma_1 - 1\right) W_{1,j} - \frac{2}{3}\sigma_1 W_{2,j} = W_{1,j-1}$$

i = 2|

$$-\sigma_2 W_{1,j} + (2\sigma_2 - 1) W_{2,j} - \sigma_2 W_{3,j} = W_{2,j-1}$$

i = ...|

$\vdots$

Borde derecho $(=\beta)$

i = n-1| $$-\sigma_{n-1} W_{n-2,j} + (2\sigma_{n-1} - 1) W_{n-1,j} - \sigma_{n-1} W_{n,j} = W_{n-1,j-1}$$

$$-\sigma_{n-1} W_{n-2,j} + (2\sigma_{n-1} - 1) W_{n-1,j} = W_{n-1,j-1} + \sigma_{n-1}\beta$$

- Finalmente, el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_1 - 1 & -\frac{2}{3}\sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & 2\sigma_2 - 1 & -\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & 2\sigma_3 - 1 & -\sigma_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_{n-1} & 2\sigma_{n-1} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,j} \\ W_{2,j} \\ W_{3,j} \\ \vdots \\ W_{n-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1,j-1} \\ W_{2,j-1} \\ W_{3,j-1} \\ \vdots \\ W_{n-1,j-1} \end{bmatrix} + \sigma_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

• Este esquema es implícito ya que es necesario resolver un sistema lineal para obtener los valores del tiempo j (siguiente).

d) • Para obtener un esquema con enfoque Crank-Nicolson se debe utilizar Backward Difference, y una media entre la segunda derivada espacial para el tiempo j y el tiempo j-1.

para u_t

$$u_{xx} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}}{\Delta x^2}\right)$$

• Así, la EDP:

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{\alpha_i^2}{2\Delta x^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}\right)$$

• Reordenando términos con j a la izquierda y j-1 a la derecha.

$$-\frac{\nabla_i}{2}w_{i+1,j} + \nabla_i w_{ij} + w_{ij} - \frac{\nabla_i}{2}w_{i-1,j} = \frac{\nabla_i}{2}w_{i+1,j-1} - \nabla_i w_{i,j-1} + w_{i,j-1} + \frac{\nabla_i}{2}w_{i-1,j-1}$$

$$-\frac{\nabla_i}{2}w_{i+1,j} + (1+\nabla_i)w_{ij} - \frac{\nabla_i}{2}w_{i-1,j} = \frac{\nabla_i}{2}w_{i+1,j-1} + (1-\nabla_i)w_{i,j-1} + \frac{\nabla_i}{2}w_{i-1,j-1}$$

• Reemplazando para los puntos de interés.

Borde izquierdo

$\underline{i=1}$

$$-\frac{\nabla_1}{2}w_{2j} + (1+\nabla_1)w_{1j} - \frac{\nabla_1}{2}w_{0,j} = \frac{\nabla_1}{2}w_{2,j-1} + (1-\nabla_1)w_{1,j-1} + \frac{\nabla_1}{2}w_{0,j-1}$$

$$-\frac{\nabla_1}{2}w_{2j} + (1+\nabla_1)w_{1j} - \frac{\nabla_1}{2}\cdot\frac{4}{3}w_{1j} + \frac{\nabla_1}{2}\cdot\frac{1}{3}w_{2j} = \frac{\nabla_1}{2}w_{2j-1} + (1-\nabla_1)w_{1,j-1} + \frac{\nabla_1}{2}\cdot\frac{4}{3}w_{1,j-1} - \frac{\nabla_1}{2}\cdot\frac{1}{3}w_{2,j-1}$$

$$-\frac{\nabla_1}{3}w_{2,j} + \left(1+\frac{\nabla_1}{3}\right)w_{1j} = \frac{\nabla_1}{3}w_{2,j-1} + \left(1-\frac{\nabla_1}{3}\right)w_{1,j-1}$$

$\underline{i=2}$

$$-\frac{\nabla_2}{2}w_{3j} + (1+\nabla_2)w_{2j} - \frac{\nabla_2}{2}w_{1j} = \frac{\nabla_2}{2}w_{3,j-1} + (1-\nabla_2)w_{2,j-1} + \frac{\nabla_2}{2}w_{1,j-1}$$

• $\underline{i=n-1}$ Borde derecho ($=\beta$)

$$-\frac{\nabla_{n-1}}{2} w_{nj} + (1+\nabla_{n-1}) w_{n-1,j} - \frac{\nabla_{n-1}}{2} w_{n-2,j} = \frac{\nabla_{n-1}}{2} w_{n,j-1} + (1-\nabla_{n-1})\overset{w_{n-1,j-1}}{\uparrow} + \frac{\nabla_{n-1}}{2} w_{n-2,j-1}$$

$$(1+\nabla_{n-1}) w_{n-1,j} - \frac{\nabla_{n-1}}{2} w_{n-2,j} = (1-\nabla_{n-1}) w_{n-1,j-1} + \frac{\nabla_{n-1}}{2} w_{n-2,j-1} + \nabla_{n-1}\beta$$

• Sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{\nabla_1}{3} & -\frac{\nabla_1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\nabla_2}{2} & 1+\nabla_2 & -\frac{\nabla_2}{2} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{\nabla_{n-1}}{2} & 1+\nabla_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\nabla_1}{3} & \frac{\nabla_1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\nabla_2}{2} & 1-\nabla_2 & \frac{\nabla_2}{2} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\nabla_{n-1}}{2} & 1-\nabla_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{n-1,j-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \nabla_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

• Este esquema también es "implícito" ya que es nesario resolver un sistema lineal para encontrar los valores de j.

e) • Para generar el ranking es necesario ~~q~~ resolver la EDP hasta el tiempo T para cada material. Luego, para cada solución calcular el valor medio de la función para t=T.

Finalmente ordenar las medias ligandolas al material con el que se calculó.