Solución Ayudantía 8

1.

a) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_2(t) - y_1(t) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$J(y_1(t), y_2(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(2y_1(t)y_2(t))}{\partial y_1} & \frac{\partial(2y_1(t)y_2(t))}{\partial y_2} \\ \frac{\partial(y_1(t)y_2(t) - y_1(t))}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_1(t)y_2(t) - y_1(t))}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

$$J(y_1(t), y_2(t)) = \begin{bmatrix} 2y_2(t) & 2y_1(t) \\ y_2(t) - 1 & y_1(t) \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$J(y_1(0), y_2(0)) = J(1, -2) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) • Valores propios de Matriz Jacobiana.

$$\det\left(\begin{bmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-4-\lambda)(1-\lambda) + 3 \cdot 2$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = -2$$

• Región de estabilidad $(h = \Delta t)$

$$|1 + h\lambda_i| < 1 \ , \ \forall i \rightarrow -1 < 1 + h\lambda_i < 1$$

$$\rightarrow -2 < h\lambda_i < 0 \rightarrow \frac{-2}{\lambda_i} < h < 0$$

λ_1 $\frac{-2}{-1} > h > 0 \rightarrow 0 < h < 2$

λ_2 $\frac{-2}{-2} > h > 0 \rightarrow 0 < h < 1$

$\Big\} \ h \in [0, 1-\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon << 1$

c) $\dot{Y}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} Y(t) \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

- Euler explícito: $Y_n = Y(n \cdot h)$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \cdot \dot{Y}_n, \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -2.25 \end{bmatrix} = Y(1) = \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$$

d) • Euler explícito (recalculando matriz jacobiana).

> Primer paso es idéntico al anterior

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

> Recalculamos matriz a partir de (*) evaluando en Y_1

$$J\left(y_1(\tfrac{1}{2}), y_2(\tfrac{1}{2})\right) = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -5.5 & -3 \end{bmatrix}$$

> Siguiente paso de Euler

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -5.5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 10.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$$

2.- a) $y'' + y = 0 \quad , \quad y'(0) + y(0) = 2 \, , \, y'(\frac{\pi}{2}) + y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$y_1(t) = y(t) \, , \; y_2(t) = y'(t), \; y_3(t) = y''(t)$

$y_1'(t) = y_2(t) \quad , \quad y_2'(t) = y_3(t)$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \end{bmatrix} \; , \; \begin{matrix} y_1(0) = \alpha \\ y_2(0) = 2 - \alpha \end{matrix} \quad (**)$$

α es parámetro de shooting method.

b) • Se propone resolver problema con shooting method definiendo los valores iniciales como se menciona en $(**)$.

• Para verificar el valor de alpha se calcula error en el extremo derecho $(t = \pi/2)$ con expresión:

$$\hat{y}_1(\tfrac{\pi}{2}) + \hat{y}_2(\tfrac{\pi}{2}) - 1 = \text{error}(\hat{y}_\alpha)$$

$\hat{y}_\alpha$: Aproximación de solver IVP con α.

• Para resolver los IVP se utilizará algún metodo estable con $h = \Delta t = \pi/8$.

> Valores propios: $\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 = \lambda^2 + 1 \rightarrow \lambda_1 = i \, , \, \lambda_2 = -i$$

> Euler Explícito: $\| 1 + \lambda_i h \| < 1$

$$\| 1 + \lambda_i h \| < 1 \xrightarrow{\lambda_1} \| 1 + hi \| < 1 \rightarrow \sqrt{1^2 + h^2} < 1$$
$$\approx 1.07 \not< 1$$

Euler no es estable para $h = \pi/8$

> Probemos Euler Implícito.

$$1 < \| 1 - h\lambda \| \xrightarrow{\lambda_1} \| 1 - hi \| = \sqrt{1 + h^2} > 1 ✓$$

$$\xrightarrow{\lambda_2} \| 1 + hi \| = \sqrt{1 + h^2} > 1 ✓$$

- Euler Implícito es estable.

$$Y_{n+1} = Y_n + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y_{n+1}$$

$$I Y_{n+1} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y_{n+1} = Y_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y_{n+1} = Y_n$$

En cada iteración del solver IVP resolver sistema anterior.

3.- a) • Mínimos cuadrados para un modelo exponencial.

$$e = C \cdot \Delta t^{\alpha} \;/\; \log() \rightarrow \log(e) = \log(C) + \alpha \log(\Delta t)$$

$$e : \text{error} = | y^{(n)}_{exact} - y^{(n)}_m |$$

- Se deben utilizar ptos. equivalentes de ambas tablas.
- $t_n = 1$, aparece en ambas tablas.
- Para el método 1:

Primera Tabla:
$$e = |2.319776 - 2.316373| = 0.003403$$
$$\log(e) = -2.468$$
$$\Delta t = 1 \;,\; \log(\Delta t) = 0$$

Segundo tabla: $e = |2.319776 - 2.321411| = 0.001635$

$\log(e) = -2.786$

$\Delta t = \frac{1}{3}$, $\log(\Delta t) = -0.4771$

> Juntando: $\begin{array}{l} -2.468 = K + \alpha \cdot 0 \\ -2.786 = K + \alpha \cdot (-0.4771) \end{array}$ $\rightarrow$ $K = -2.468$

$-2.786 = -2.468 - 0.4771 \cdot \alpha \rightarrow \alpha \approx 0.6665$

- Para método 2:

  1ª tabla $e = 0.008162$, $\log(e) = -2.088$

  2ª tabla $e = 0.000119$, $\log(e) = -3.924$

> Juntando: $\begin{array}{l} -2.088 = K \\ -3.924 = K + \alpha \cdot (-0.4771) \end{array}$

$-3.924 = -2.088 + \alpha(-0.4771) \rightarrow \alpha \approx 3.848$

- Para método 3:

  1ª tabla $e = 0.319776$, $\log(e) = -0.49515$

  2ª tabla $e = 0.10716$, $\log(e) = -0.96997$

> Juntando: $\begin{array}{l} -0.49515 = K \\ -0.96997 = K + \alpha \cdot (-0.4771) \end{array}$

$-0.96997 = -0.49515 + \alpha(-0.4771) \rightarrow \alpha \approx 0.995$

b) Dado que $\Delta t \in [0, 1]$, el método que más conviene es el 2do. Ya que por la manera en la que se define el error ($e = c\Delta t^{\alpha}$), expresión tenderá a 0 más rápido entre mayor sea la magnitud de α.

c) • Debemos reconstruir expresiones de error.

Error Método 1: $e_1 = 0.08475 \cdot \Delta t^{0.6665}$

$c = e^{K}$

> Luego, error debe ser menor o igual a 10^{-7}.

$$0.08475 \cdot \Delta t^{0.6665} \leq 10^{-7} \quad / \log()$$

$$-2.468 + 0.6665 \cdot \log(\Delta t) \leq -7 \log(10)$$

$$\Delta t \leq \exp\left(\frac{-7\log(10) + 2.468}{0.6665}\right)$$

$$\Delta t \leq 1.21 \cdot 10^{-9}$$

• Lo mismo para método 2.

$$-2.088 + 3.848 \cdot \log(\Delta t) \leq -7 \log(10)$$

$$\Delta t \leq \exp\left(\frac{-7\log(10) + 2.088}{3.848}\right)$$

$$\Delta t \leq 0.026$$

• Para el método 3.

$$-0.49515 + 0.995 \cdot \log(\Delta t) \leq -7 \log(10)$$

$$\Delta t \leq \exp\left(\frac{-7\log(10) + 0.49515}{0.995}\right)$$

$$\Delta t \leq 1.516 \cdot 10^{-7}$$

• Luego, los tiempos. Con tamaño Δt, se realizan $1/\Delta t$ saltos temporales, luego en total

Método 1 / $\left\lceil \frac{1 \cdot \tau}{1.21 \cdot 10^{-9}} \right\rceil = 8.26 \cdot 10^{8} \cdot \tau$

Método 2 / $\left\lceil \frac{1 \cdot \tau}{0.026} \right\rceil = \lceil 38.46 \cdot \tau \rceil = 39 \cdot \tau$

Método 3 / $\left\lceil \frac{1 \cdot \tau}{1.516 \cdot 10^{-7}} \right\rceil = 6.59 \cdot 10^{6} \cdot \tau$