

Ayudantía 9

Computación Científica II

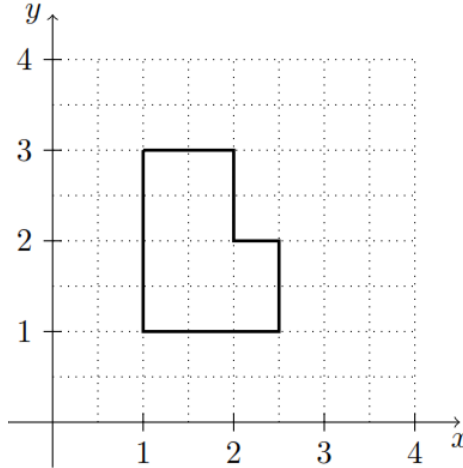
Profesor: Ariel Sanhueza
Ayudante: Javier Levio Silva

19 de noviembre de 2018

1. Una pieza de un material térmico en forma de L posee una distribución de temperatura, que en estado estacionario, se rige por la Ecuación Diferencial Parcial:

$$-\Delta u(x, y) = -u(x, y) \quad (1)$$

$$u(x, y) = xy \quad \forall (x, y) \in \delta\Omega \quad (2)$$



Usted debe realizar una discretización de la EDP con el método de Diferencias Finitas. Para ello responda las siguientes preguntas:

- (a) ¿Qué aproximaciones utilizará para discretizar la EDP?
 - (b) Discretice la EDP y exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones para los puntos interiores del material. Considere $\Delta x = \Delta y = 0,5$
 - (c) Proponga un método numérico para resolver el sistema de ecuaciones de la pregunta anterior.
2. Considere $x, y \in [0, 1]$ para la siguiente EDP con condiciones de frontera mixtas:

$$(1 - c)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (3)$$

$$\Phi_x(0, y) = 0 \quad (4)$$

$$\Phi_x(1, y) = 0 \quad (5)$$

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad (6)$$

$$\Phi(x, 1) = f(x) \quad (7)$$

OBS: En sus desarrollos utilice la notación $\Phi_{i,j} = \Phi(i\Delta x, j\Delta y)$.

- (a) Realice un diagrama del problema e indique el rango de valores de c en el cual la EDP es elíptica.

- (b) Realice la discretización de la EDP (sólo la ecuación (1)), utilizando diferencias finitas centradas de segundo orden. Exprese el resultado general ($\Delta x \neq \Delta y$). Simplifique y agrupe cuando sea posible.
- (c) Realice la discretización de las condiciones de frontera en x (ecuaciones (2) y (3)), utilizando diferencias finitas de primer orden. Simplifique y agrupe cuando sea posible.
- (d) Realice la discretización de las condiciones de frontera en y (ecuaciones (4) y (5)). Simplifique y agrupe cuando sea posible.
- (e) Indique explícitamente y resuelva el sistema lineal que se obtiene al considerar $c = \frac{1}{3}$, $\Delta x = \frac{1}{3}$, $\Delta y = \frac{1}{2}$ y $f(x) = \cos(2\pi x) - 1$
- (f) Resuelva explícitamente en función de c . ¿Qué pasa si $c = 1$?
3. Considere el dominio Ω indicado en la Figura 1 y su frontera $\partial\Omega$ también indicada en la misma figura. En la Figura 1 se propone una discretización del dominio donde los círculos representan la discretización de la frontera y los triángulos representan la discretización de los puntos interiores.
- El problema a discutir es la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad (8)$$

$$u(\partial\Omega) = 0 \quad (9)$$

Nuestro interés es encontrar aproximaciones numéricas de $u(x, y)$ en los puntos interiores indicados en la Figura 1 y λ .

- (a) Obtenga una discretización del Laplaciano en los puntos interiores indicados en la Figura 1.
- (b) Construya explícitamente las ecuaciones discretas y representela matricialmente.
- (c) Explique claramente (¡No resuelva!) que algoritmo necesita para encontrar todas las soluciones no nulas de $u(x, y)$ y sus λ 's respectivos dada la discretización sugerida en la Figura 1.

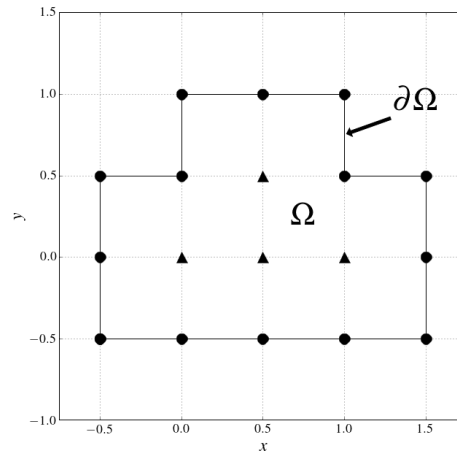


Figura 1: Malla de diferencias finitas. Los círculos representan los puntos de frontera y los triángulos los puntos interiores.