Ayudantía 1+2.

1.- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular, si y solo sí, el vector $\vec{x} = \vec{0}$ es la única solución del sistema: $A\vec{x} = \vec{0}$.

Supongamos que

$$A^T\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Como A es no singular, entonces existe un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, tal que, $A\vec{u} = \vec{v}$.

Luego (1), $A^TA\vec{u} = \vec{0}$. (2)

Multiplicando por $\vec{u}^T$ por la izq. a (2).

$$\vec{u}^TA^TA\vec{u} = \vec{u}^T\vec{0} \qquad \rightarrow (\vec{a}\vec{b})^T = \vec{b}^T\vec{a}^T$$

$$(A\vec{u})^TA\vec{u} = 0 \qquad \longrightarrow \vec{x}^T\vec{x} = \|\vec{x}\|_2^2$$

$$\|A\vec{u}\|_2^2 = 0$$

Dado que $\|A\vec{u}\|_2^2 = 0$, entonces $\|\vec{v}\|_2^2$.

Entonces, $\vec{v} = \vec{0}$. Así, necesariamente la solución a (1) es $\vec{v} = \vec{0}$, luego A^T es no singular.

2.- Al igual que en la pregunta anterior supongamos que:

(1) $(AB)\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e intentemos probar que $\vec{x} = 0$.

Definamos $y = B\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, así (1) se puede escribir:

$$A\vec{y} = \vec{0} \quad (2)$$

Como A es no singular, entonces la ecuación (2) solo se cumple si $\vec{y} = \vec{0}$.

Luego, $B\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$. y de la misma manera que con A, como B es no singular, entonces necesariamente $\vec{x} = \vec{0}$.

De esta manera, AB es no singular.

3.- Ya que se intenta busar un valor y vector propio, se planteará la ecuación con la información conocida.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (1)$$

Además, sabemos que: $B = I + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (2)$

Siguiendo nuestro instinto, si multiplicamos por $\vec{v}$ por la derecha a (2) obtenemos:

$(3)\ B\vec{v} = \vec{v} + A\vec{v} + A^2\vec{v} + \dots$ Utilizando la igualdad de (1).

$$= \vec{v} + \lambda\vec{v} + A\lambda\vec{v} + \dots$$
$$= \vec{v} + \lambda\vec{v} + \lambda A\vec{v} + \dots$$
$$= \vec{v} + \lambda\vec{v} + \lambda\cdot\lambda\vec{v} + \dots$$

Se observa así que (3) se puede escribir como:

$$B\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \vec{v}$$

Además, de Mat021 (uff) sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$, $|r| < 1$

Serie Geométrica

Luego, $B\vec{v} = \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\vec{v}$. De esta manera demostramos que un valor propio de B corresponde a $\mu = \frac{1}{1-\lambda}$ y tiene vector propio asociado $\vec{v}$.

4.- Se sabe que la matriz $\overline{Q}_n$ del algoritmo NSI, corresponde a:

$\overline{Q}_n = Q_1 Q_2 \cdots Q_n$, donde Q_i corresponde a las iésima matriz Q de UQR.

Además, la iteración realizada por UQR corresponde a:

$$
\begin{aligned}
R_0' Q_0 &= Q_1 R_1' \qquad (1)\\
R_1' Q_1 &= Q_2 R_2'\\
&\vdots\\
R_{n-1}' Q_{n-1} &= Q_n R_n' \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Con lo anterior debemos llegar a la igualdad $R_n' Q_n = \overline{Q}_n^T A \overline{Q}_n$

Podemos escribir R_n' desde (2), ya que las matrices Q son unitarias ($Q^T = Q^{-1}$).

$$R_{n-1}' Q_{n-1} = Q_n R_n' \,/\cdot Q_n^T \rightarrow Q_n^T R_{n-1}' Q_{n-1} = R_n' \quad (3)$$

Repitiendo el proceso para R_{n-1}'.

$$R_{n-2}' Q_{n-2} = Q_{n-1} R_{n-1}' \rightarrow Q_{n-1}^T R_{n-2}' Q_{n-2} = R_{n-1}' \quad (4)$$

Podemos reescribir $R'_n Q_n$ como:

$$R'_n Q_n = Q_n^T R'_{n-1} Q_{n-1} Q_n \quad (\text{Usando } (3))$$

$$Q_n^T R'_{n-1} Q_{n-1} = Q_n^T Q_{n-1}^T R'_{n-2} Q_{n-2} Q_{n-1} Q_n \quad (\text{Usando } (4))$$

$$\vdots$$

$$\rightarrow Q_n^T Q_{n-1}^T \cdots Q_1^T R'_0 Q_0 Q_1 \cdots Q_{n-1} Q_n$$

Sabemos que $R'_0 = A$ y $Q_0 = I_n$

$$\rightarrow Q_n^T Q_{n-1}^T \cdots Q_1^T A Q_1 \cdots Q_{n-1} Q_n$$

$$\rightarrow \overline{Q}_n^T A \overline{Q}_n \quad //$$

5.- a) Describamos las matrices A_G y L_G.

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \qquad L_G = \begin{bmatrix} \alpha & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{12} & \alpha & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & & \alpha \end{bmatrix}$$

Simétrica Simétrica

Es sencillo detectar la relación en L_G y A_G.

$$L_G = -A_G + \alpha I_n \longrightarrow \lambda_L = -\lambda_A + \alpha$$

b) La definición de los radios de los discos de Gerschgorin calza con la del grado de un vértice, ya que al ser un grafo simple $a_{ii} = 0, \forall i$.

$$r_i = \delta_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$\underset{i \neq j}{a_{ij}} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Los discos de Gerschgorin se encuentran todos centrados en 0 y dado que A_G es simétrica sabemos sus valores propios son reales.

Como los discos son concéntricos, y dado el teorema los valores propios se encontrarán dentro del disco más grande que tendrá radio $\delta_{máx}$.

c) Nos piden encontrar una cota inferior, para la expresión, así que evaluando en el vector dado:

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T A_G x}{x^T x} \geq \frac{1^T A_G 1}{1^T 1}$$

Analizando las operaciones:

$$1^T 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1 = n$$

$$A_G \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1n} \\ \vdots \\ \end{bmatrix}$$

La suma de los componentes de A_G por fila ya sabemos que se denota como δ_i.

$$A_G \mathbb{1} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbb{1}^T A_G \mathbb{1} = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

Juntando todo:

$$\lambda_1 \geq \frac{\mathbb{1}^T A_G \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T \mathbb{1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} \quad //$$

d) • Partamos demostrando que:

$$x^T L_G x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu_i \geq 0, \forall i$$

Como x puede se cualquier vector eligamos un vector propio u_i cualquiera.

$$u_i^T L_G u_i \geq 0 \longrightarrow u_i^T \mu_i u_i \geq 0$$

definición de valores propios

$$u_i^T \mu_i u_i = \mu_i u_i^T u_i = \mu_i \|u_i\|_2^2 \geq 0 \Rightarrow \mu_i \geq 0$$

- Ahora demostraremos que:

$$\mu_i \geq 0 \Rightarrow x^T L_G x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sabemos que L_G es simétrica por lo que sus vectores propios forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Base ortonormal: $u_i^T u_i = 1$, $u_i^T u_j = 0 / i \neq j$

Considerando esto podemos escribir x ~~como~~ un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores propios de L_G.

$$X = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n \quad , \quad X \in \mathbb{R}^n, u_i: \text{i-ésimo vector propio de } L_G$$

$$X^T = c_1 u_1^T + c_2 u_2^T + \ldots + c_n u_n^T$$

Así tendremos:

$$L_G X = c_1 L_G u_1 + c_2 L_G u_2 + \ldots + c_n L_G u_n$$
$$= c_1 \mu_1 u_1 + c_2 \mu_2 u_2 + \ldots + c_n \mu_n u_n$$

$$x^T L_G x = (c_1 u_1^T + \ldots + c_n u_n^T)(c_1 \mu_1 u_1 + \ldots + c_n \mu_n u_n)$$

$$= c_1^2 \mu_1 u_1^T u_1 + c_1 c_2 \mu_2 u_1^T u_2 + c_1 c_3 \mu_3 u_1^T u_3 + \ldots$$

$$= c_1^2 \mu_1 + 0 + 0 + \ldots + c_2^2 \mu_2 + 0 + \ldots + 0 + c_3^2 \mu_3 + \ldots$$

$$x^T L_G x = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mu_i \geq 0$$ → Dado que $c_i^2 \geq 0, \forall i$ y $\mu_i \geq 0$

6.- Al igual que en la pregunta 5-b, los discos de G. se encuentran centrados en 0. Por lo que todos los valores propios se encuentran dentro del disco de mayor ~~&~~ radio.

$$-\max_i \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda_k \leq \max_i \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} |a_{ij}|, \forall k.$$

Con $R = \max_i \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_\infty$ → Norma Infinita.

$$-R \leq \lambda_k \leq R$$

Luego, si sumamos R a la desigualdad:

$0 \leq \lambda_k + R \leq 2R$ → Todos los valores propios son positivos (o cero).

Se tiene que $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k + R$ corresponden a los valores propios de la matriz $A + RI_n$. y cumplen con la propiedad: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots > |\lambda_n|$.

Se puede usar Power Iteration sobre $A+RI_n$, encontrar $\tilde{\lambda}_1$ y luego obtener λ_1 mediante:

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 - R$$