Ayudantía 8
Computación Científica II

Profesor: Ariel Sanhueza
Ayudante: Javier Levio Silva

12 de noviembre de 2018

1. Considere el siguiente IVP:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_2(t) - y_1(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Nuestro objetivo será calcular la solución en $t = 1$, es decir, obtener $\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$.

(a) Demuestre que el jacobiano del sistema, evaluado en las condiciones iniciales, está dado por

$$J(y_(0), y_2(0)) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

y que los valores propios son -2 y -1.

(b) ¿Para cuál intervalo $[a, b]$ se tiene que el método Explicit Euler con paso de tiempo $\Delta t \in [a, b]$ es estable?

(c) Una primera aproximación consiste en obtener la solución para el sistema linealizado, es decir, para el problema

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Esta aproximación del problema no requiere recalcular el paso de tiempo en cada evaluación.

Realice el método de Explicit Euler con paso de tiempo $\Delta t = \frac{1}{2}$, para obtener $\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$.

(d) El problema linealizado es sólo una aproximación del problema completo, debido a la no-linealidad. Por otra parte, el problema completo

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_2(t) - y_1(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

requiere que el paso del tiempo Δt sea recalculado en cada evaluación para verificar que el Δt elegido se mantenga en la región de estabilidad, puesto que el jacobiano cambian en función y_1 e y_2.

Utilice el paso de tiempo $\Delta t = \frac{1}{2}$ que siempre se encuentra en la región de estabilidad, por lo que es posible aplicar Explicit Euler para obtener $\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix}$.

2. Sea la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = 0 \tag{7}$$
$$y'(0) + y(0) = 2 \tag{8}$$
$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{9}$$

   (a) Exprese el problema como sistema de ecuaciones diferenciales.

   (b) Con $\Delta t = \frac{\pi}{8}$, proponga un método numérico para resolver la ecuación diferencial.

3. El Sr. Tony Stark desea obtener ayuda de los distinguidos estudiantes de Conputación Científica II de la Universidad Técnica Federico Santa María. El Sr. Stark ha adquirido 3 módulos para el control de más reciente aramdura. Desafortunadamente se ha dado cuenta que los módulos, aunque resuelve la tarea enconmendada, tienen un comportamiento no claro. La tarea de los módulos es resolver un problema de valor inicial: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ con $y(0) = 1$. Donde $f(y(t), t)$ es conocido, sin embargo por seguridad industrial no ha querido divulgarlo. La información entregada por el Sr. Stark son las siguientes Tablas (1) y (2), donde $y_{m_i}^{(n)}$ es la salida del i-ésimo método utilizado en los tiempos indicados, para $i = 1, 2, 3$. Considere que el paso en el tiempo es constante y se puede obtener de las Tablas respectivas.

t_n	$y_{\text{exact}}(t_n)$	$y_{m_1}^{(n)}$	$y_{m_2}^{(n)}$	$y_{m_3}^{(n)}$
0	1	1	1	1
1	2.319776	2.316373	2.311614	2.000000

Cuadro 1: Primer experimento numérico

t_n	$y_{\text{exact}}(t_n)$	$y_{m_1}^{(n)}$	$y_{m_2}^{(n)}$	$y_{m_3}^{(n)}$
0	1	1	1	1
0.3333	1.317071	1.383500	1.387034	1.333333
0.6666	1.855900	1.851951	1.855817	1.753314
1	2.319776	2.321411	2.319657	2.212616

Cuadro 2: Segundo experimento numérico

   (a) Determine el orden de cada módulo utilizado por el Sr. Stark. *Hint: Recall that the order of a method for an IVP is the α for which the error in the approximation can be described as Δt^{α}.*

   (b) Indique cual módulo considera más conveniente desde el punto de vista del orden. Justifique claramente.

   (c) Considerando que todos los módulos se demoran una unidad de timepo τ en un paso temporal. ¿Cuánto se demorará cada módulo en obtener una aproximación con un error menor o igual a 10^{-7}?.

4. Construya una aproximación de segundo orden para la primera derivada de una función. *Hint: Build an interpolation with 3 points, compute the derivative an evaluate it on the left point. It is a good idea to use the Lagrange interpolation polynomial!*

5. Considere la siguiente Ecuación de Poisson unidimensional con condiciones de borde de Dirichlet y Neumann en los bordes:

$$\Delta u = \exp(-x^2) \tag{10}$$
$$u'(0) = -1 \tag{11}$$
$$u(1) = 1 \tag{12}$$
$$0 \leq x \leq 1 \tag{13}$$

   (a) Proponga un algoritmo numérico para resolver la Ecuación de Poisson. Utilice un método que crea conveniente desarrolle los pasos necesarios y recuerde incluir debidamente las condiciones de borde.

   (b) Indique el orden que usted espera de su aproximación. Justifique por qué su método es de dicho orden.

6. Considere nuestro viejo péndulo con roce del curso FIS-110 como el de la Figura 8. El sistema puede expresarse en función de la variación del ángulo θ del péndulo como:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta(t)) + b\,\dot{\theta}(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(T) = \theta_T \tag{14}$$

donde $b > 0$ es el coeciente de roce, g es la aceleración de gravedad y L el largo de la cuerda. Cuando el roce es nulo, el pendulo oscila libremente y esperamos una solución periódica $\theta(t)$. Ante la presencia de roce esperamos que la solución decaiga con el tiempo hasta el equilibrio, en donde la velocidad y aceleración angular son nulas.

(a) Despreciando el roce y suponiendo que usted sostiene el péndulo al inicio a un ángulo de θ_0, plantee un algoritmo utilizando **diferencias finitas** para encontrar la **velocidad angular inicial** con la que debe inicializar el péndulo tal que luego de un tiempo T el péndulo alcance un ángulo de θ_T.

(b) Escriba explícitamente el sistema de ecuaciones que debe resolverse y que metodo utilizara para resolverlo. Considere $n = 5$ puntos de discretización para el intervalo $[0, T]$, con $T = 1$.