Resolución de un análisis de elemento finito básico usando álgebra lineal

Guillermo Martinez Tizoc

2022-12-03

Introducción

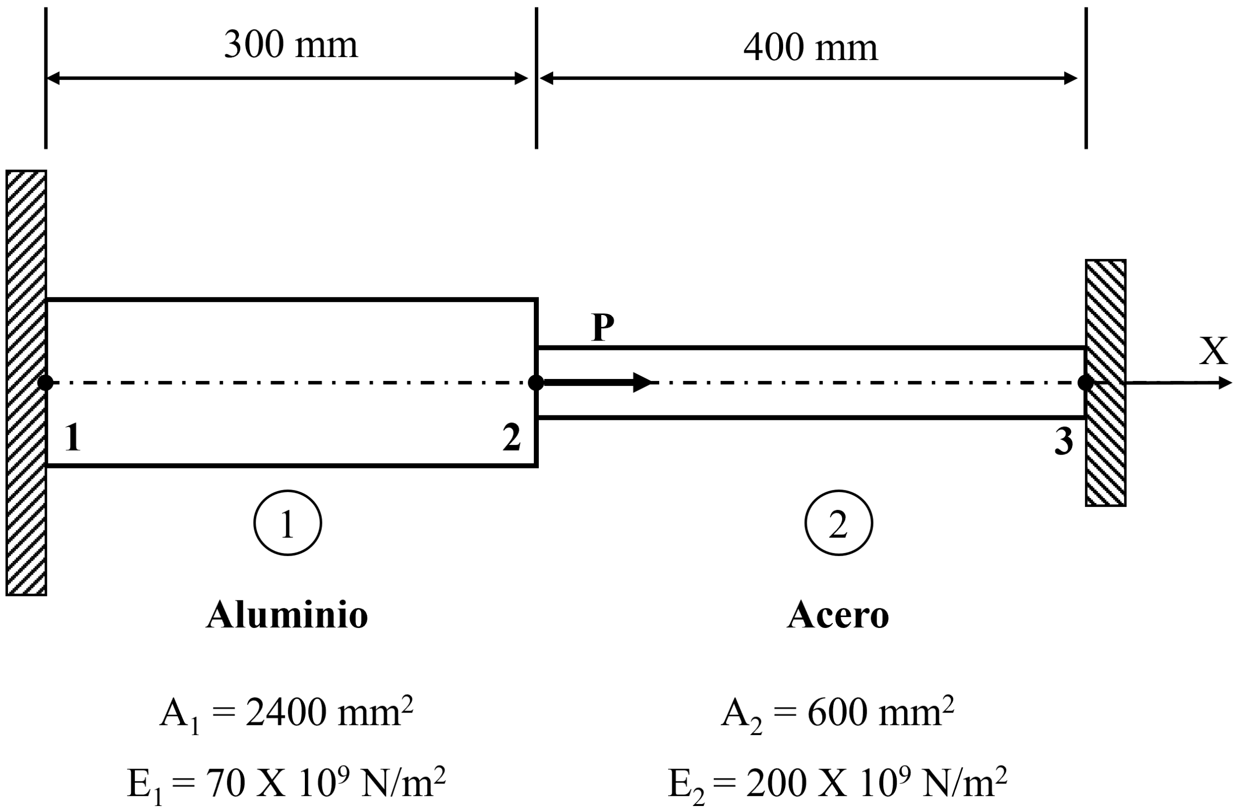
El análisis de elemento finito es un método que consiste en obtener información sobre un cuerpo que se encuentra sometido a ciertas condiciones, principalmente estructurales; y se desea conocer cómo estas afectan sobre él. Debido a que se pueden tener infinitos datos a lo largo del cuerpo, se lleva a cabo un proceso de discretización para dividir a este cuerpo en áreas o volúmenes más pequeños, de acuerdo a las dimensiones que se empleen; y hacerlo "finito". Cada división hecha se conforma del área o volumen y se encuentra delimitada por nodos. Cada uno de estos nodos contiene información acerca de las condiciones que afecta a su elemento. De acuerdo a lo que se desee conocer, pueden emplearse diversos métodos para resolver estos grupos de ecuaciones como por ejemplo el álgebra matricial y las ecuaciones diferenciales.

A continuación se presenta una solución a un problema básico de elemento finito en una dimensión con enfoque en el álgebra matricial. Del mismo modo, son probados dos métodos distintos para obtener la solución y se analizarán sus respectivos resultados y tiempos de ejecución.

Planteamiento del problema

El siguiente problema fue tomado del libro Introduction to Finite Elements in Engineering (Chandrupatla & Belegundu, 1991).

Considere la barras mostradas en la imagen. Se aplica una carga axial $P = 200X10^3N$ en el nodo 2. Usando el enfoque de penalización, encontrar los desplazamientos nodales del sistema.



En el problema se aplicarán dos métodos de solución para el sistema del tipo $Ax = b$, uno con eliminación gaussiana (Método de Gauss-Jordan) y otro utilizando matriz inversa $x = A^{-1}b$.

Justificación

El método de elemento finito es de suma relevancia en diversos campos de las ciencias y la ingeniería. Es además, un cálculo muy importante para uno de los pilares de la Industria 4.0 como lo es la simulación. Utilizado por ejemplo, para predecir y evaluar la funcionalidad de piezas después de pasar por algún proceso de manufactura. Actualmente se cuentan con una gran cantidad de programas que realizan los cálculos a manera de una caja negra, se introducen las geometrías, las condiciones de frontera, parámetros y demás, para después devolver el resultado. Para un uso correcto de este método es de suma importancia conocer de qué manera funcionan los *solvers* y así estar conscientes de las amplias posibilidades que se pueden explorar.

El ejemplo que se ha desarrollado sin duda es un cálculo muy básico, sin embargo, es una manera simplificada de abordar estos problemas y da una idea de algunos métodos de solución. En el caso del álgebra lineal que se usó para la solución de este problema, se consideran temas ampliamente aplicables, como lo son el Método de Gauss-Jordan, el cálculo de la inversa de matrices, la multiplicación matriz X matriz, matriz X vector y matriz X escalar.

Finalmente, el hecho de usar estas operaciones que en principio puedan parecer sencillas y que el resultado que se obtenga represente un dato importante para un problema, hace que esta simplicidad sea compensada por la relevancia del resultado.

Conceptos Básicos

A continuación se hace una breve descripción de los conceptos necesarios para abordar el problema propuesto. Las definiciones están basadas en el libro Introduction to Finite Elements in Engineering (Chandrupatla & Belegundu, 1991).

Division de elementos Para realizar un análisis de elemento finito, primeramente hay que definir el número de divisiones que conformarán al cuerpo original, es decir, el numero de elementos discretos del cuerpo a analizar. Entre las divisiones de estos elementos se encuentran los nodos, que representan la unión de un elemento con otro y donde se realizan los cálculos.

Grado de libertad Es la cantidad de movimientos o reacciones posibles que tiene un cuerpo.

Vector de desplazamiento El vector de desplazamiento nodal es aquel donde se representa la magnitud de desplazamiento que tuvo cada nodo del sistema durante su análisis. Normalmente es representado con la letra q. El vector de desplazamiento global representa los desplazamientos en los grados de libertad del sistema. Es representado por Q.

Módulo de Young Parámetro propio de cada elemento o material que representa el comportamiento que este toma según la dirección en la que se le aplique una carga. También es llamado módulo de elasticidad. Se identifica con la letra E.

Matriz de rigidez Es un arreglo que representa la relación entre los desplazamientos de los distintos nodos que conformen el sistema con los esfuerzos presentes en dichos puntos. Existen matrices de rigidez elementales, que como su nombre indica, representa desplazamientos con esfuerzos presentes en un elemento específico del sistema; y matrices de rigidez globales, que abordan a todo el sistema. Se identifican con k y K respectivamente.

$k = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz de rigidez global se forma superponiendo las matrices de rigidez elementales o mediante suma de matrices de acuerdo con los grados de libertad. La matriz de rigidez global tiene como propiedades que es una matriz de N X N, donde N es el numero de nodos del sistema. Además es simétrica.

Condiciones de frontera Son aquellas condiciones que evitan que el sistema presente movimientos de cuerpo rígido, es decir, que permiten los movimientos relativos dentro del sistema, como deformaciones; pero evitan que el cuerpo se desplace en su totalidad.

Enfoque de penalización Se considera Un resorte C con gran rigidez de usa como soporte. Entonces, se le suma un número grande C a cada grado de libertad donde se encuentre soportado el sistema. El número C normalmente se elige basándose en la siguiente ecuación:

$C = max|K_{ij}|X10^4$

Es decir, se toma la entrada mayor de rigidez global y se multiplica por 10^4.

Consideraciones de software

Este programa que se creó está escrito en C++ y usa librerías incluidas en él. Se enlistan a continuación:

iostream: Librería que se encarga de los formatos de entrada y salida del programa.

cstdlib: Librería estándar de C y que presenta utilidades en operaciones matemáticas.

fstream: Librería utilizada para la lectura y escritura de archivos externos.

chrono: Librería que se utiliza para el cronometrado del tiempo de ejecución del algoritmo.

unistd.h: Esta librería se usa para agregar pausas deliberadas en la ejecución del código.

Se agregan pausas al finalizar cada método para que el tiempo de ejecución registrado sea más evidente.

Metodología

Para la solución del problema se realizan los siguientes pasos:

Primero es necesario calcular las matrices de rigidez elementales. En este caso se cuenta con dos elementos por lo que sus matrices k son:

$$k_1 = \frac{(70X10^3 \frac{N}{mm^2})2400mm^2}{300mm} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{(200X10^3 \frac{N}{mm^2})600mm^2}{400mm} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, ensamblando la matriz de rigidez global K se tiene:

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 0.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 0.30 \end{bmatrix}$$

El vector de carga global F es: $F = \begin{bmatrix} 0 & 200X10^3 & 0 \end{bmatrix}$

Debido a que los nodos 1 y 3 están fijos a un soporte, se elige una C para ellos basados en el enfoque de penalización:

$C = (0.86X10^6)X10^4$

Por lo que la matriz modificada queda:

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 8600.30 \end{bmatrix}$$

Y las ecuaciones de elemento finito quedan de la siguiente manera:

$$10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 8600.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200X10^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir de esta ultima matriz se involucran los cálculos de Gauss-Jordan e inversa para resolver el sistema y obtener los desplazamientos Q_1, Q_2 y Q_3.

Los datos de esta matriz de rigidez son escritos en un archivo .txt donde además se incluye el tamaño de la K y la cantidad con la que se factorizó la matriz.

El código lee este archivo y forma virtualmente la matriz expandida K, la matriz de coeficientes K y el vector de carga F

Primeramente, en el método de Gauss-Jordan para resolver $Ax = b$, se trabaja con K expandida y se busca una matriz triangular superior.

$$10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 & 200X10^3 \\ 0 & -0.30 & 8600.30 & 0 \end{bmatrix}$$

Enseguida, se hace la eliminación en reversa, es decir, se hacen cero los valores superiores de la matriz triangular dejando solo los elementos de la diagonal. Posteriormente los elementos de la diagonal se hacen uno obteniendo asi los resultados. Para finalizar el proceso, se divide el vector resultante entre el factor externo de la matriz.

El resultado de la operación se ve de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.51432X10^{-5} \\ 0.232571 \\ 8.11265X10^{-6} \end{bmatrix}$$

Es decir, los desplazamientos nodales son:

$Q = \begin{bmatrix} 1.51432X10^{-5} & 0.232571 & 8.11265X10^{-6} \end{bmatrix}$

Para el método de matriz inversa se tomó en consideración la propiedad de K que establece que es simétrica y cuadrada, por lo que puede ser considerada para obtener su inversa. Entonces, el objetivo del método es resolver $x = A^{-1}b$. Primero, se toma la matriz de coeficientes K y se le agrega su identidad, de la siguiente forma:

$$10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.30 & 8600.30 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se busca reducir de forma Gaussiana los coeficientes de K y asi obtener su inversa en el lado derecho. Una vez que se obtiene la matriz inversa, se multiplica por b, representado por el vector de carga F. Como resultado se obtiene un vector, el de desplazamientos nodales Q, que es:

$Q = \begin{bmatrix} 1.51432X10^{-5} & 0.232571 & 8.11265X10^{-6} \end{bmatrix}$

Adicionalmente, se agregaron resgistros de tiempos para evaluar la duración de cada uno de los métodos. Los resultados de tiempo son los siguientes:

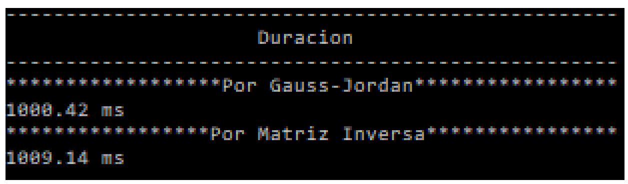


Figure 1: Duracion

Conclusión

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede establecer que ambos métodos son válidos para resolver este tipo de problemas ya que se obtuvieron los mismos resultados.

En cuanto al tiempo de ejecución, en ambos casos es muy similar ya que las operaciones realizadas son iguales. En los dos métodos se buscan matrices superiores e inferiores, sin embargo, en el método de la inversa se hacen operaciones extras, como la multiplicación de la inversa por el vector de carga y ahi es donde se refleja esa diferencia, mínima; de tiempo. No obstante, hay que ser cautos en los resultados de los tiempos ya que influyen otros procesos que estén ejecutándose en la computadora donde se corrió el código.

En cuestión de la programación, a pesar que son similares, es más sencillo programar un Gauss-Jordan directo que agregar las operaciones extras que implica el método de la matriz inversa.

Por lo tanto, para la resolución de este tipo de problemas y considerando solo los métodos aqui presentados, es mejor utilizar la eliminación Gaussiana que el método por matriz inversa.