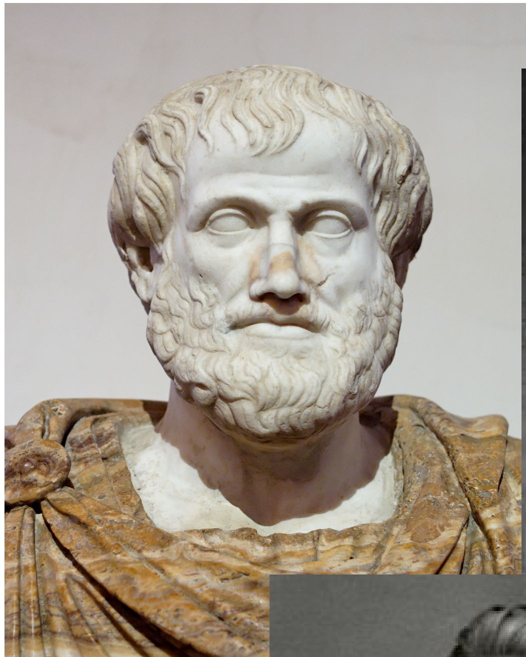
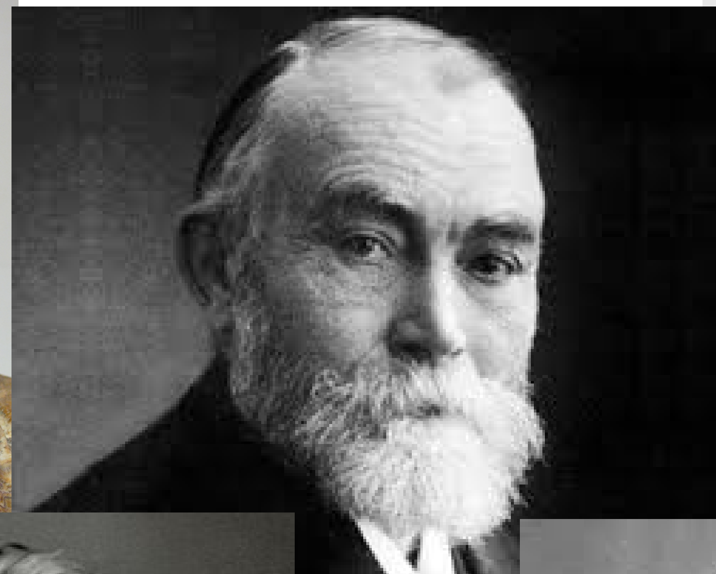
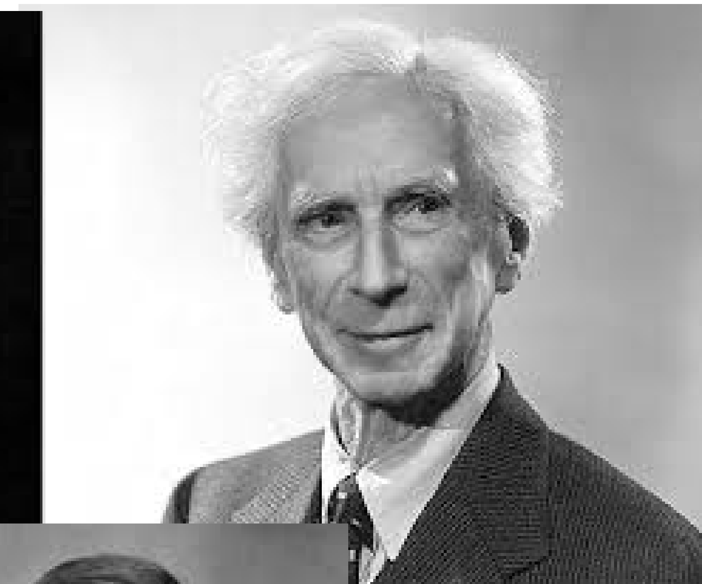
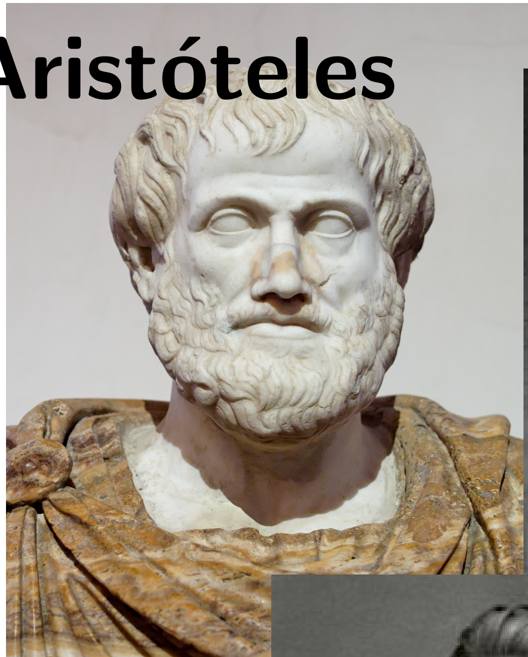
Tema 0.- Introducción a la lógica

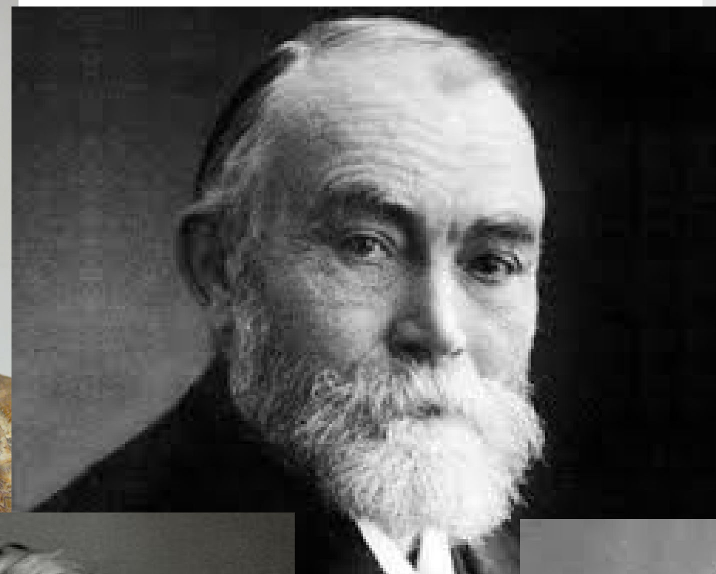




Tema 0.- Introducción a la lógica

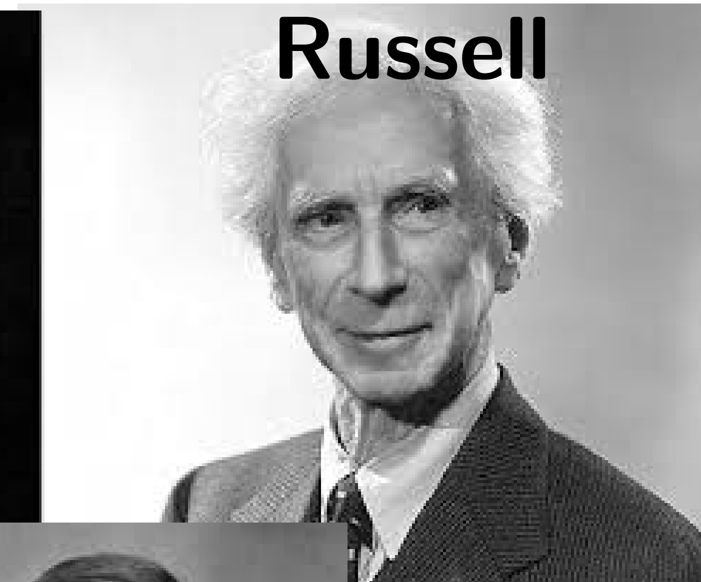
Aristóteles



Gottlob Frege



Bertrand Russell



Kurt Gödel

Alan Turing

Definiciones básicas

La **lógica** es la disciplina que proporciona las reglas y técnicas para determinar si un argumento matemático es válido o no

Definiciones básicas

- **Definición:** Un enunciado en el que se describe un objeto.

Definiciones básicas

- **Definición:** Un enunciado en el que se describe un objeto.

Un número primo es un entero $n \geq 2$ tal que sus únicos divisores enteros positivos son 1 y n.

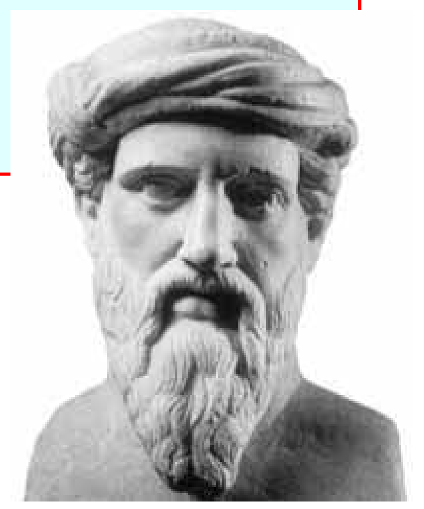
Definiciones básicas

- **Teorema/Proposición/Lema:** enunciado que <u>se ha demostrado</u> que es cierto.

Definiciones básicas

- **Teorema/Proposición/Lema:** enunciado que se ha demostrado que es cierto.

Teorema
En todo triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa



Definiciones básicas

- **Corolario:**

Definiciones básicas

- **Corolario:** es un teorema que es consecuencia de otro.

Definiciones básicas

- **Corolario:** es un teorema que es consecuencia de otro.

Tenemos un triángulo rectángulo y sus tres lados tienen longitudes enteros consecutivos. Entonces, la hipotenusa mide 5 unidades.

Definiciones básicas

- **Corolario:** es un teorema que es consecuencia de otro.

Tenemos un triángulo rectángulo y sus tres lados tienen longitudes enteros consecutivos. Entonces, la hipotenusa mide 5 unidades.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{N}$ la longitud de la hipotenusa. Entonces los catetos deben medir $a-1$ y $a-2$ unidades. Por el Teorema de Pitagoras se tiene que

$$a^2 = (a-1)^2 + (a-2)^2 \implies \cdots \implies \begin{cases} a = 5 \\ \vee \\ a = -3 \end{cases}$$

Definiciones básicas

- **Corolario:** es un teorema que es consecuencia de otro.

Tenemos un triángulo rectángulo y sus tres lados tienen longitudes enteros consecutivos. Entonces, la hipotenusa mide 5 unidades.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{N}$ la longitud de la hipotenusa. Entonces los catetos deben medir $a-1$ y $a-2$ unidades. Por el Teorema de Pitagoras se tiene que

$$a^2 = (a-1)^2 + (a-2)^2 \implies \cdots \implies \begin{cases} \boxed{a = 5} \\ \vee \\ \cancel{a = -3} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Definiciones básicas

- **Axioma:**

Definiciones básicas

- **Axioma:** premisa que se asume y que se usa para demostrar otras a partir de ella

Definiciones básicas

- **Axioma:** premisa que se asume y que se usa para demostrar otras a partir de ella

Axioma del principio de inducción
Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades

- $0 \in A$,
- Si $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Definiciones básicas

- **Axioma:** premisa que se asume y que se usa para demostrar otras a partir de ella

Axioma del principio de inducción
Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades

- $0 \in A$,
- Si $n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Giuseppe Peano

Definiciones básicas

- **Conjetura:**

Definiciones básicas

- **Conjetura:** enunciado que se cree que puede ser cierto pero del que no se dispone de una demostración.

Definiciones básicas

- **Conjetura:** enunciado que se cree que puede ser cierto pero del que no se dispone de una demostración.

- Todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos (Conj. de Goldbach)
- Hay infinitos pares de primos gemelos.
- No hay números impares perfectos.

Definiciones básicas

- **Conjetura:** enunciado que se cree que puede ser cierto pero del que no se dispone de una demostración.

  - Todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos (Conj. de Goldbach)
  - Hay infinitos pares de primos gemelos.
  - No hay números impares perfectos.

Comprobado por ordenador para todo $n \leq 4 \cdot 10^{18}$

Definiciones básicas

Hay conjeturas que con el tiempo se convierten en teoremas.

Definiciones básicas

Hay conjeturas que con el tiempo se convierten en teoremas.

Último Teorema de Fermat
Si $n \geq 3$ es un entero, entonces no hay x, y, z enteros positivos que cumplan que

$$x^n + y^n = z^n.$$

Definiciones básicas

Hay conjeturas que con el tiempo se convierten en teoremas.

Último Teorema de Fermat
Si $n \geq 3$ es un entero, entonces no hay x, y, z enteros positivos que cumplan que

$$x^n + y^n = z^n.$$

Conjeturado por Pierre de Fermat (1637), demostrado por Andrew Wiles (1995)

”Es imposible escribir un cubo como suma de dos cubos, una potencia cuarta como suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado, en la suma de dos potencias de la misma clase. He descubierto una demostración excelente. Pero este margen es demasiado pequeño para que quepa en él. ”

Fermat en el margen de 'Arithmetica' de Diophanto.

Último Teorema de Fermat

Si $n \geq 3$ es un entero, entonces no hay x, y, z enteros positivos que cumplan que

$$x^n + y^n = z^n.$$

Conjeturado por Pierre de Fermat (1637), demostrado por Andrew Wiles (1995)

Definiciones básicas

Hay conjeturas que con el tiempo se descubre que no eran ciertas

Definiciones básicas

Hay conjeturas que con el tiempo se descubre que no eran ciertas

Los "primos" de Fermat.
Para todo $m \in \mathbb{N}$, los números de la forma

$$2^{2^m} + 1$$

son siempre primos.

Definiciones básicas

Hay conjeturas que con el tiempo se descubre que no eran ciertas

Los "primos" de Fermat.
Para todo $m \in \mathbb{N}$, los números de la forma

$$2^{2^m} + 1$$

son siempre primos.

Comprobado por Fermat para $m = 0, 1, 2, 3, 4$.

Euler (1732) comprobó que

$$2^{2^5} + 1 = 641 \text{ x } 6700417.$$

Esto es un **contraejemplo** a este enunciado.

Los "primos" de Fermat.
Para todo $m \in \mathbb{N}$, los números de la forma

$$2^{2^m} + 1$$

son siempre primos.

Comprobado por Fermat para $m = 0, 1, 2, 3, 4.$

Euler (1732) comprobó que

$$2^{2^5} + 1 = 641 \text{ x } 6700417.$$

Definiciones básicas

- **Contrajemplo:** una excepción a un enunciado

Definiciones básicas

- **Contrajemplo:** una excepción a un enunciado

Enunciado: ”Todo número primo es impar”

Definiciones básicas

- **Contrajemplo:** una excepción a un enunciado

Enunciado: "Todo número primo es impar"

Contrajemplo: el 2 es primo pero no impar

Definiciones básicas

- **Contrajemplo:** una excepción a un enunciado

Enunciado: "Todo número primo es impar"

Contrajemplo: el 2 es primo pero no impar

Enunciado: "Todo número impar es primo"

Definiciones básicas

- **Contrajemplo:** una excepción a un enunciado

Enunciado: "Todo número primo es impar"

Contrajemplo: el 2 es primo pero no impar

Enunciado: "Todo número impar es primo"

Contrajemplo: el 15 es impar pero no primo porque $15 = 5$ x 3

Un enunciado matemático puede ser

VERDADERO o **FALSO**

Un enunciado matemático puede ser

VERDADERO o **FALSO**

o indecidible

Un enunciado matemático puede ser

VERDADERO o **FALSO**

o **indecidible**

$\boxed{\textbf{demostración}}$ $\boxed{\textbf{contraejemplo}}$

Definiciones básicas

Un enunciado matemático se compone de **hipótesis** y **tesis**.

Definiciones básicas

Un enunciado matemático se compone de **hipótesis** y **tesis**.

Las **hipótesis** son los supuestos bajo los cuales se afirma que la **tesis** es cierta.

Definiciones básicas

Un enunciado matemático se compone de **hipótesis** y **tesis**.

Las **hipótesis** son los supuestos bajo los cuales se afirma que la **tesis** es cierta.

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

Definiciones básicas

Un enunciado matemático se compone de **hipótesis** y **tesis**.

Las **hipótesis** son los supuestos bajo los cuales se afirma que la **tesis** es cierta.

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Es **FALSO**, veamos un **CONTRAEJEMPLO**.

$$\text{Si } \underbrace{a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}, \text{ entonces } \underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}.$$

Es **FALSO**, veamos un **CONTRAEJEMPLO**.

Es decir, un ejemplo, que

- **SÍ** cumple las **hipotesis**, pero
- **NO** cumple la **tesis**.

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Es **FALSO**, veamos un **CONTRAEJEMPLO**.

Es decir, un ejemplo, que

- **SÍ** cumple las **hipotesis**, pero
- **NO** cumple la **tesis**.

Tomamos $a = 0$, $b = 2$, $c = 5$.

Se tiene que $a, b, c \in \mathbb{R}$ y que

$a \cdot b = a \cdot c = 0$, pero $b \neq c$.

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

$$\text{Si } \underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}, \text{ entonces } \underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}.$$

Es **VERDADERO**, veamos una **DEMOSTRACIÓN**

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\text{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\text{tesis}}$.

Es **VERDADERO**, veamos una **DEMOSTRACIÓN**

Demostración: es una argumentación que sigue las leyes de la lógica en la que se pueden usar:

1) las hipótesis,
2) otros teoremas,
3) los axiomas y
4) el ingenio

para asegurar la verdad de la tesis.

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Demostración. Como $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}$.

Axioma del inverso

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Demostración. Como $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}$.

Axioma del inverso

Como $a \cdot b = a \cdot c$

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Demostración. Como $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}$.

Axioma del inverso

Axioma: el producto es ley de composición interna

Como $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1}(a \cdot c) \Rightarrow$

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Demostración. Como $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}$.

Axioma del inverso

Axioma: el producto es ley de composición interna

Como $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1}(a \cdot c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \Rightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \Rightarrow b = c.$$

Axioma: asociatividad

Definición de inverso

Definición de neutro

Si $\underbrace{a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ y } a \cdot b = a \cdot c}_{\textbf{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{b = c}_{\textbf{tesis}}$.

Demostración. Como $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}$.

Axioma del inverso

Axioma: el producto es ley de composición interna

Como $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1}(a \cdot c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \Rightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \Rightarrow b = c.$$

Axioma: asociatividad

Definición de inverso

Definición de neutro

c.q.d. / q.e.d. $\square$

Tipos de demostraciones

Tipos de demostraciones

- Directas
- Por contrarrecíproco
- Por reducción al absurdo
- Por inducción
- Por análisis exhaustivo
- Probabilistas
- No constructivas
- ...