

# Problemas resueltos de Electromagnetismo I

## Contents

- Problema B2.3
- Problema B2.4
- Problema B2.6
- Problema B4.4
- Problema B4.5
- Problema B4.7
- Problema B5.4
- Problema B5.5
- Problema B6.1
- Problema B6.3
- Problema B6.4
- Problema B6.5
- Problema B6.6
- Problemas Examen parcial 24/25
- Problemas Examen 1a convocatoria 24/25
- Problemas Examen 2a convocatoria 24/25

En este documento pondremos **las soluciones a algunos de los problemas propuestos** en los boletines de problemas de la asignatura *Electromagnetismo I* del Grado en Física por la Universidad de Córdoba. Es importante observar y tener en cuenta que las soluciones **no se muestran con todos los detalles**, sino que la intención es que se tenga una orientación de *los objetivos de*

aprendizaje de cada problema, qué cosas nos parecen importantes para cultivar *nuestra intuición como científicos físicos*, y por supuesto *los resultados*. Las técnicas matemáticas que vamos a entrenar en cada problema están esbozadas, y el cálculo detallado se deja como ejercicio recomendado. Para cualquier duda, consúltese con el equipo docente.

Las notas están pensadas para que puedan actualizarse y mejorarse a medida que la interacción en clase y en tutoría sugiera que algo se podría mejorar.

## Problema B2.3

Podemos suponer que la imagen de un **dipolo**  $\vec{p}$  en un sistema con una esfera de **CEP (Conductor Eléctrico Perfecto)**, por similitud con la imagen de una carga puntual que conocemos, será algo parecido a otro dipolo pero *no podemos darlo por hecho*.

### Note

Tenemos que demostrarlo matemáticamente. Por lo tanto, tenemos que utilizar la relación matemática entre el dipolo, del que desconocemos la imagen, y la carga puntual, **de la que sí conocemos la imagen**.

Empezamos por lo que sí sabemos seguro: La imagen de una carga puntual  $q$  a una distancia  $d$  del centro de una esfera de CEP de radio  $a$  ( $d > a$ ) es otra carga  $q' = -q \frac{a}{d}$  a una distancia  $d' = \frac{a^2}{d}$ .

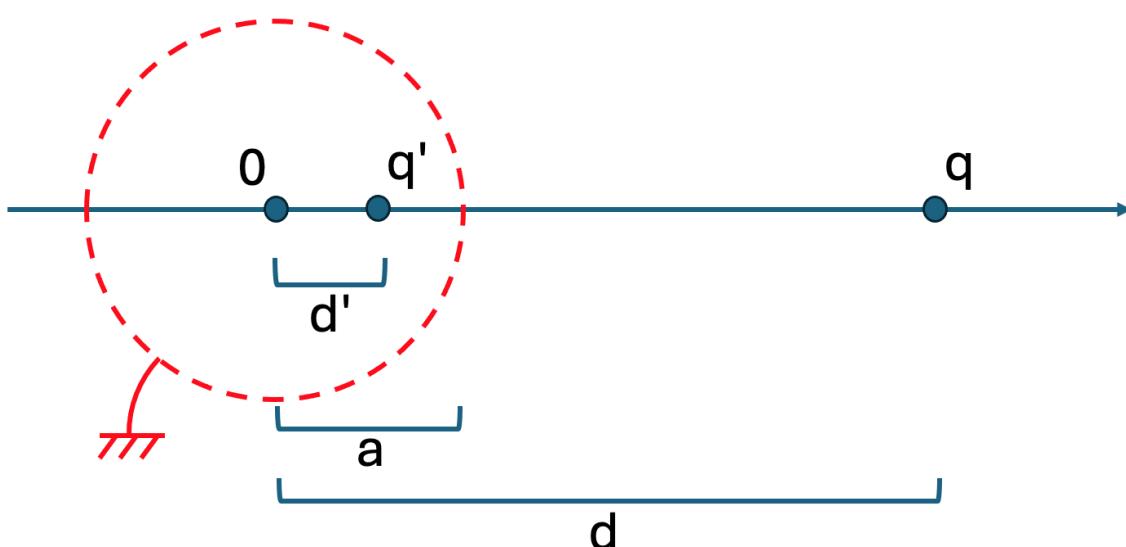


Fig. 1 Imagen de una carga puntual frente a una esfera de CEP.

Ahora descomponemos el dipolo en *dos cargas separadas una distancia  $\Delta$* , tal que  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} q\Delta = p$ :

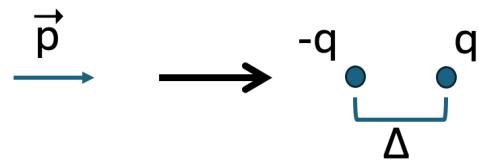


Fig. 2 Equivalencia entre dipolo y cargas puntuales.

Veamos cual sería la imagen de las dos cargas puntuales equivalentes al dipolo.

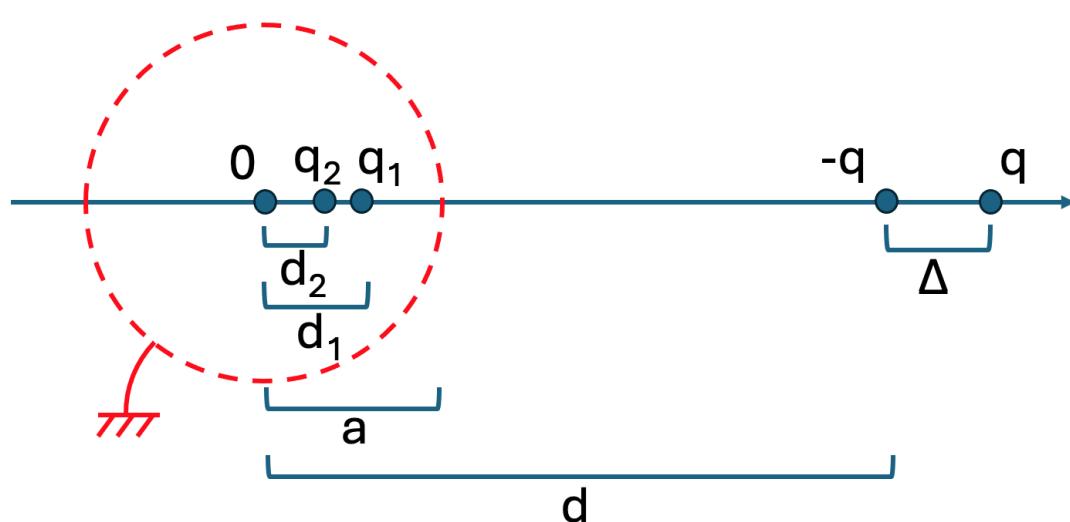


Fig. 3 Imagen de las cargas equivalentes al dipolo.

De forma que podemos escribir los valores de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= -(-q) \frac{a}{d} \\ d_1 &= \frac{a^2}{d} \\ q_2 &= -q \frac{a}{d + \Delta} \\ d_2 &= \frac{a^2}{d + \Delta} \end{aligned}$$

Solo nos falta **tomar el límite** para recuperar el dipolo  $\vec{p}$  y obtener la configuración de las cargas imágenes. Lo primero que nos llama la atención, es que **las dos cargas no se compensan exactamente**. Podemos calcular cuál es la suma de las dos cargas cuando tomamos el límite de  $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$  (*Este es un límite de tipo  $0 \cdot \infty$ , ya que  $q \rightarrow \infty$  cuando  $\Delta \rightarrow 0$ , que se resuelve modificando algebraicamente la expresión*).

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (q_1 + q_2) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} q \left( \frac{a}{d} - \frac{a}{d + \Delta} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} q \frac{a\Delta}{d^2} = p \frac{a}{d^2}$$

Es decir, queda **una carga no compensada** entre las imágenes de las cargas del dipolo. Esto se convierte en **un término monopolar** que tenemos que sumar en el potencial creado por la imagen. Respecto al dipolo, las dos cargas convergen correctamente a una carga de valor  $q_1 = -q_2 = q \frac{a}{d}$ , por lo que *podemos calcular el dipolo imagen*.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} q \frac{a}{d} (d_2 - d_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} q \frac{a}{d} \left( \frac{a^2}{d} - \frac{a^2}{d + \Delta} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} q \frac{a^3}{d^3} \Delta = p \frac{a^3}{d^3}$$

Por lo tanto, **el potencial en cualquier punto del espacio** fuera de la esfera de CEP, es la suma de 3 términos:

- El potencial  $\Phi_p$  creado por el dipolo original  $\vec{p}$  en la posición  $d$ .
- El potencial  $\Phi'_p$  creado por el dipolo imagen  $\vec{p}' = \vec{p} \frac{a^3}{d^3}$  en la posición  $d' = \frac{a^2}{d}$ .
- El potencial  $\Phi_Q$  creado por la carga imagen  $Q = q_1 + q_2$  en la posición  $d' = \frac{a^2}{d}$ .

$$\Phi(r > a) = \Phi_p + \Phi_{p'} + \Phi_Q$$

## Problema B2.4

Para obtener la imagen de **una corona superficial de carga** frente a una esfera de **CEP (Conductor Eléctrico Perfecto)** podemos obtener la imagen de **cada trozo diferencial** de corona, que podemos considerar como una carga puntual de valor conocido, *tendrá como imagen otra carga puntual de valor conocido*. El diagrama del problema es el siguiente:

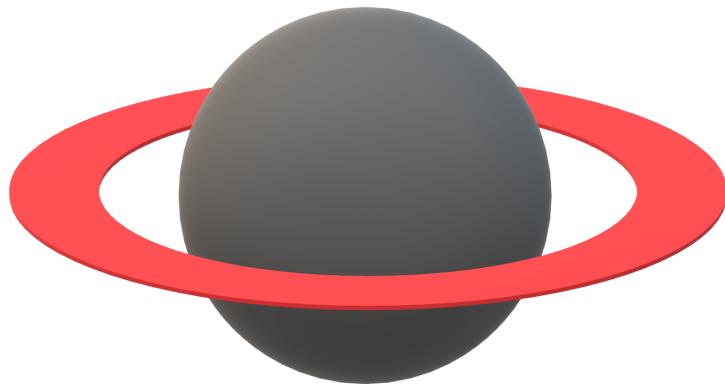


Fig. 4 Diagrama del problema, con la corona de densidad de carga constante alrededor de la esfera de CEP.

Cada trozo de corona de carga va a tener *una imagen dentro de la esfera de CEP*. En conjunto, los trozos imagen tienen una distribución de **otra corona de carga** dentro de la esfera.

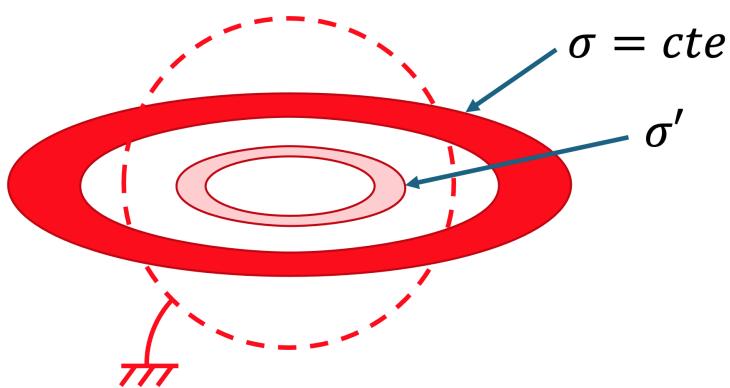


Fig. 5 Diagrama de la corona de densidad de carga constante y la corona imagen, de densidad desconocida, alrededor de la esfera de CEP.

**Note**

La clave del problema es poner un trozo diferencial de la **corona externa** en función de sus coordenadas, hacer lo mismo con un trozo diferencial de la **corona imagen**, y relacionarlas mediante la teoría bien establecida de la imagen de una carga puntual.

Empezamos la teoría bien establecida: La imagen de una carga puntual  $q$  a una distancia  $d$  del centro de una esfera de CEP de radio  $a$  ( $d > a$ ) es otra carga  $q' = -q \frac{a}{d}$  a una distancia  $d' = \frac{a^2}{d}$ .

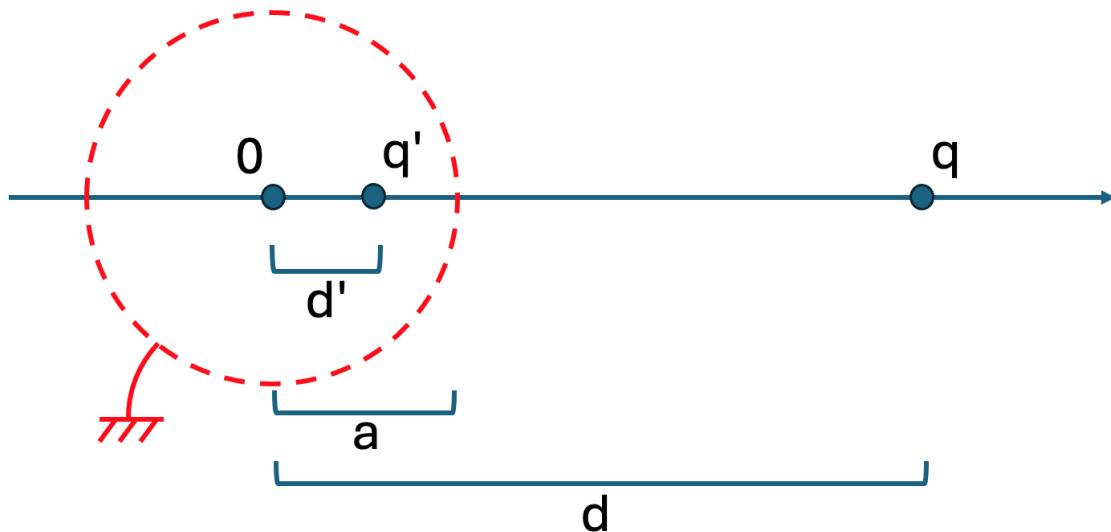


Fig. 6 Imagen de una carga puntual frente a una esfera de CEP.

Un trozo diferencial de corona externa, en función de **sus coordenadas en polares**, está a una **distancia**  $d = r$  y tiene una **carga**  $q = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$  por lo que su imagen tiene unos valores:

$$q' = -q \frac{a}{d} = -\sigma r dr d\theta \frac{a}{r}$$

$$r' = \frac{a^2}{r}$$

Por otra parte, la **carga de la imagen** en función de **sus propias coordenadas en polares** es:

$$q' = \sigma' r' dr' d\theta'$$

Por lo que:

$$-\sigma drd\theta a = \sigma' r'dr'd\theta'$$

Identificamos  $\theta' = \theta$ , de forma que las cargas imagen no se superponen. Ya tenemos la expresión de  $r'$  en función de  $r$  en (1), por lo que solo nos queda expresar  $dr'$  en función de  $r$  (y  $dr$ ).

Diferenciando la expresión (1) obtenida:

$$dr' = -\frac{a^2}{r^2}dr$$

Dado que el área debe ser positiva, cogemos el valor absoluto de esta expresión y sustituimos en la expresión (3):

$$\sigma' = -\sigma \frac{r^3}{a^3} = -\sigma \frac{a^3}{r'^3}$$

#### Note

Comprobamos que el área de la imagen **no es constante**, sino que depende de la coordenada polar  $r'$ .

Esta sería la solución si la esfera de CEP estuviera conectada a tierra, pero el enunciado indica que **la esfera está aislada y con una carga  $Q$** . Para calcular el potencial, tenemos que encontrar **la carga imagen restante,  $Q_c$** , y que debemos colocar en el centro, para que el potencial de la esfera siga siendo constante.

#### Note

Cada carga puntual con su imagen, deja la esfera con potencial nulo. Por el principio de superposición, podemos sumar tantas cargas puntuales más sus imágenes, que dejan la esfera con potencial nulo (Es lo que hemos hecho con la corona de carga). La única carga imagen que deja el potencial constante en la esfera de CEP es una carga imagen puntual en el centro de la esfera.

La carga restante es  $Q_c = Q - Q_{imagen}$ , que podemos obtener por integración, ya que conocemos la densidad superficial (que no es constante) en función de sus coordenadas  $r'$  y  $\theta'$ .

Por último, podemos conocer el potencial y el campo eléctrico de la configuración de CEP más corona de carga constante calculando y sumando el potencial y el campo eléctrico de la corona de carga más su imagen más la carga restante en el centro de la esfera.

## Efectos mecánicos sobre un dipolo

Los efectos mecánicos sobre un dipolo, es decir, **la fuerza y el momento angular sobre el dipolo depende del campo eléctrico** a través de las siguientes expresiones:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

En principio, **conociendo la distribución de cargas se puede calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$**  (aunque no siempre sea fácil). En este problema, ya hemos resuelto la distribución de cargas, por lo que solo queda calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$ . Nos piden el efecto mecánico (fuerza y momento) sobre **un dipolo colocado en el eje z y orientado en la dirección z**

$$\vec{p} = p\vec{u}_z$$

- Empezamos por **el momento resultante que es nulo**: En el eje  $z$ , el campo eléctrico tiene que tener dirección  $z$ , por la simetría del problema, por lo que el momento  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = (p\vec{u}_z) \times (E_z \vec{u}_z) = 0$ .
- **La fuerza neta es la contribución de tres términos**: Hay que sumar el campo de la corona externa ( $\sigma = cte$ ), el campo de la corona imagen ( $\sigma' \neq cte$ ) y la carga central  $Q_c$ . El operador  $(\vec{p} \cdot \nabla)$  debe ser particularizado con cuidado para el problema. Teniendo en cuenta que el campo eléctrico solo tiene componente  $z$ :

$$(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = ((p\vec{u}_z) \cdot \nabla) E_z \vec{u}_z = p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \vec{u}_z = -p_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \vec{u}_z$$

(He utilizado la definición de  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ , de forma que podemos calcular el que nos parezca más fácil. Típicamente el potencial  $\Phi$  es más fácil, aunque no siempre)

**Note**

De los tres términos, dos son sencillos de obtener, ya que son integrales que hemos hecho otras veces:

$$\Phi_{corona} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + R_2^2} - \sqrt{z^2 + R_1^2} \right),$$

$$\Phi_{Q_c} = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 z}$$

El otro término es el de **una corona con  $\sigma \neq cte$** :

$$\sigma' = -\sigma \frac{a^3}{r'^3},$$

$$\vec{r} = z\vec{u}_z,$$

$$\vec{r}' = (r' \cos \phi', r' \sin \phi', 0),$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r'^2 + z^2},$$

con los límites de integración  $r' \in [R'_2, R'_1] = [\frac{a^2}{R_2}, \frac{a^2}{R_1}]$  y  $\phi' \in [0, 2\pi]$ . Con lo que la integral queda:

$$\Phi_{imagen} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'=R'_2}^{s'=R'_1} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \frac{-\sigma \frac{a^3}{r'^3}}{\sqrt{r'^2 + z^2}} r' dr' d\phi'$$

Esta integral no es plato de buen gusto, pero se puede resolver realizando algunos cambios de variable. Primero, para quitar el denominador, podemos usar  $\frac{r'}{z} = \sinh x$  de forma que queda:

$$\Phi_{imagen} = -\frac{\sigma a^3}{2\epsilon_0 z^2} \int \frac{dx}{\sinh^2 x}$$

Esta integral parece más difícil, pero si tenemos en cuenta que  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  podemos poner:

$$\Phi_{imagen} = -\frac{\sigma a^3}{2\varepsilon_0 z^2} \int \frac{4dx}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{\sigma a^3}{2\varepsilon_0 z^2} \int \frac{4e^{2x} dx}{(e^{2x} - 1)^2}$$

Por lo que ahora podemos usar el cambio de variable  $y = e^{2x} - 1$ ,  $dy = 2e^{2x}dx$ , resultando en una integral inmediata. Despues de hacer la sustitución y posteriormente sustituir a la inversa:

$$\begin{aligned} \int \frac{4e^{2x}dx}{(e^{2x} - 1)^2} &= \int \frac{2dy}{y^2} = -\frac{2}{y} \\ &= -\frac{2}{e^{2x} - 1} = -\frac{2}{e^x(e^x - e^{-x})} \\ &= -\frac{1}{(\sinh x + \cosh x) \sinh x} \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{r'}{z} + \sqrt{1 + (\frac{r'}{z})^2}\right)(\frac{r'}{z})} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede obtener la expresión:

$$\Phi_{imagen} = \frac{\sigma a^3}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r'(r' + \sqrt{r'^2 + z^2})} \Big|_{r'=R'_1}^{r'=R'_2}$$

Finalmente, si quisieramos desarrollar una expresión final, faltaría sustituir y derivar dos veces con respecto a  $z$ .

## Problema B2.6

Tenemos **una esfera a un potencial conocido** de radio  $R$  que sigue la expresión  $V = K \cos(3\theta)$ , donde  $(r, \theta, \varphi)$  son las coordenadas **esféricas** e implicitamente, se establece *la simetría en la variable  $\varphi$* .

### Note

Si pidiera el potencial en un punto del eje  $z$  o en algún otro punto con una simetría clara, la integración directa sería posible.

Dado que se pide el potencial en cualquier punto externo e interno, la estrategia de los polinomios de Legendre es la única factible.

Se trata entonces de **resolver la ecuación de Poisson** con las condiciones de contorno apropiadas.

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Para *el volumen interno a la esfera*, la única condición de contorno es el propio potencial  $\Phi(r=R) = K \cos(3\theta)$  de la esfera. Para *el volumen exterior a la esfera*, además de  $\Phi(r=R) = K \cos(3\theta)$ , usamos el potencial en el infinito,  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ .

Este es precisamente el problema que tiene por solución los Polinomios de Lengendre:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\theta))$$

**Para el volumen interior**, denominamos el potencial  $\Phi_d$  y usamos la condición de que todas las magnitudes físicas deben ser finitas, y por tanto,  $B_l = 0$ . **Para el volumen exterior**, denominamos el potencial  $\Phi_f$  y usamos la condición de que el potencial en el infinito se anula, y por tanto,  $A_l = 0$ .

$$\begin{aligned}\Phi_d &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos(\theta)) \\ \Phi_f &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos(\theta))\end{aligned}$$

### **i Note**

Podemos **resolver los dos problemas por separado o en paralelo**, ya que son independientes. Están separados por la condición de contorno  $V$  que descompone el espacio en dos volúmenes separados.

### **i Note**

Debemos usar los infinitos términos de las sumatorias pero por inspección podemos reducir los términos a unos pocos (*en algunos casos a uno*)

- Los polinomios de Lengendre incluyen términos  $\cos^l(\theta)$ , que siempre se van a poder poner en forma de **una suma de términos que contiene**  $\cos(l\theta)$ .
- Los polinomios de Legendre son independientes, no se puede poner uno en función de otros. El motivo es que **los términos de**  $\cos(l\theta)$  **son independientes** (*y por tanto los polinomios*).

La condición de contorno que nos dan es *una función de*  $\cos(3\theta)$ , por lo que **seguro que necesitamos el término de**  $l = 3$ . Efectivamente:

$$P_3(\cos(\theta)) = \frac{1}{2} (5 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)) = \frac{5}{8} \cos(3\theta) + \frac{3}{8} \cos(\theta)$$

Vemos que este polinomio de Lengendre incluye un término en  $\cos(\theta)$ , por lo que de por sí solo, podemos conseguir el término  $\cos(3\theta)$ , pero nos sobra el de  $\cos(\theta)$ . **Por esto tenemos que añadir el término del polinomio de Lengendre con**  $l = 1$ .

### Note

En general, si nos vemos obligados a añadir **un polinomio de orden  $l$** , tendremos que añadir también todos los polinomios **de grado inferior  $l'$  del mismo tipo par o impar**. (Es decir, si  $l$  es par, pondremos todos los términos pares inferiores o iguales a  $l$ , y si  $l$  es impar, todos los términos impares inferiores o iguales a  $l$ ).

Por ejemplo, si la condición de contorno fuera  $V = K_1 \cos(9l) + K_2 \cos(4l)$ , por el primer término tendríamos que poner  $l \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$  mientras que por el segundo término, tendríamos que poner  $l \in \{0, 2, 4\}$  (Ojalá nunca nos encontremos con un problema así).

Si realizamos la igualación de los términos con la condición de contorno...

$$\begin{aligned}\Phi_d(r=R) &= A_1 R^1 P_1(\cos(\theta)) + A_3 R^3 P_3(\cos(\theta)) = K \cos(3\theta) \\ \Phi_f(r=R) &= \frac{B_1}{R^2} P_1(\cos(\theta)) + \frac{B_3}{R^4} P_3(\cos(\theta)) = K \cos(3\theta)\end{aligned}$$

...nos da el siguiente resultado

$$A_1 = -\frac{3K}{5R}; \quad A_3 = \frac{8K}{5R^3}; \quad B_1 = -\frac{3}{5}KR^2; \quad B_3 = \frac{8}{5}KR^4$$

Por supuesto, la expresión de  $\Phi_d$  es válida dentro de la esfera y la de  $\Phi_f$  es válida fuera de la esfera.

## Problema B4.4

Claramente, la carga superficial  $\sigma$  girando a velocidad constante  $\omega$  implica **unas cargas que se desplazan**, en este caso, una corriente superficial  $\vec{j}$ . El **potencial vector** tiene una expresión sencilla a partir de la corriente superficial.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Para usar esta expresión, tenemos que calcular **la corriente superficial**, que debe ir en la dirección de la velocidad de desplazamiento de las cargas. *Cuando tenemos la velocidad de desplazamiento de las cargas, la manera más sencilla de obtener la corriente superficial es multiplicar:*

$$\vec{j} = \sigma \vec{v}$$

**Note**

Para recordar o deducir la expresión de  $\vec{j}$ , primero observamos que tiene **las unidades correctas, de  $[A/m]$** . Notamos que **la velocidad debe estar contenida en la superficie** para que la expresión tenga sentido, de forma que las cargas se desplazan dentro de la superficie

Es similar a la expresión conocida  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ , con unidades de  $[A/m^2]$

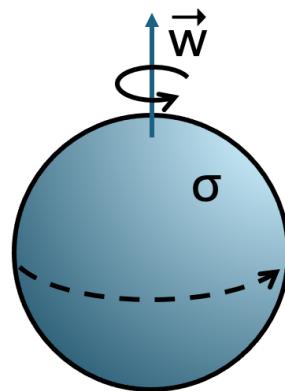


Fig. 7 Diagrama del problema.

Podemos comprobar que la velocidad siempre tiene dirección  $\vec{u}_\varphi$ , y que su valor depende de la latitud en la esfera,  $\vec{v} = a \sin \theta \omega \vec{u}_\varphi$ . Vemos que esta expresión **es la que obtendríamos si utilizamos la expresión vectorial de la velocidad (y por tanto, independiente del sistema de referencia) en función de la velocidad angular**:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \omega \vec{u}_z \times a \vec{u}_r$$

Así:

$$\vec{j} = \sigma a \sin \theta' \omega \vec{u}_\varphi$$

 Note

Observamos que la expresión del **potencial escalar general** en función de la densidad de corriente  $\vec{J}$  es fácil de particularizar para los casos de corriente superficial  $\vec{j}$  o corriente por un hilo  $I$ :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{l}'$$

Sin embargo, la expresión de la ley de Biot-Sabart, se puede poner fácilmente para densidad de corriente  $\vec{J}$  y para la corriente  $I$  que pasa por un hilo (*ambas están en las transparencias*), pero es difícil de expresar en función de la corriente superficial  $\vec{j}$ . Por eso, en este problema es más fácil calcular la expresión del potencial vector  $\vec{A}$  y obtener el campo magnético como un rotacional,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

A veces, la geometría de la corriente superficial es suficientemente sencilla para que el campo magnético resulte fácil de plantear directamente del diagrama como una suma (*integral*) de espiras o hilos, pero en este caso, aunque se hiciera, la integral resultaría complicada.

Planteamos los elementos que aparecen en la integral de  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x, y, z) \\ \vec{r}' &= (a \sin \theta' \cos \varphi', a \sin \theta' \sin \varphi', a \cos \theta') \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - a \sin \theta' \cos \varphi')^2 + (y - a \sin \theta' \sin \varphi')^2 + (z - a \cos \theta')^2} \\ dS' &= a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi' \\ \vec{j} &= \sigma a \sin \theta' \omega \vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

Con lo que nos queda una expresión para  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma a \sin \theta' \omega \vec{u}_\varphi}{\sqrt{(x - a \sin \theta' \cos \varphi')^2 + (y - a \sin \theta' \sin \varphi')^2 + (z - a \cos \theta')^2}} a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

**¡Esta expresión es difícil!** Las variables de integración  $\theta'$  y  $\varphi'$  están ambas en el argumento de la raíz, por lo que no son separables. Además están dentro de senos y cosenos. Y peor aún, no hay cambios de variable de  $\theta'$  o de  $\varphi'$  por separado que permitan simplificar la integral de forma sustancial. Sin embargo, existe una manera alternativa de plantear el sistema de referencia, de forma que la integral es sencilla.

### Note

El hecho de que podamos cambiar el sistema de referencia para que la integral sea sencilla significa que *debe existir un cambio de variables  $(\theta', \varphi')$  a otras dos que simplificaría la integral*. Sin embargo, no es fácil pensar dicho cambio de variables, mientras que **el cambio de sistema de referencia es muy fácil de ver**.

El sistema de referencia alternativo es el que **tiene el eje  $z$  en la dirección del vector posición  $\vec{r}$** , de forma que es la velocidad angular  $\vec{\omega}$  la que es un parámetro de la integral. Arbitrariamente, elegimos que esté contenida en el plano  $(x, z)$ .

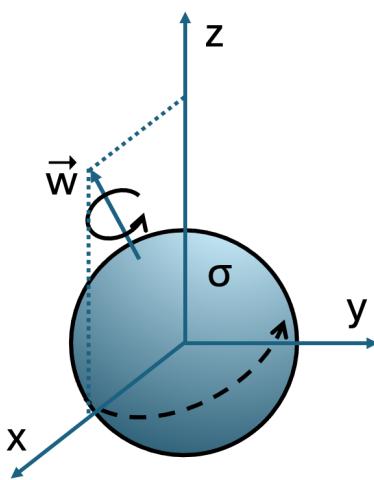


Fig. 8 Diagrama del problema con sistema de referencia alternativo.

De esta manera, planteamos los elementos de la integral de  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (0, 0, z) \\
\vec{r}' &= (a \sin \theta' \cos \varphi', a \sin \theta' \sin \varphi', a \cos \theta') \\
|\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta'} \\
dS' &= a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'
\end{aligned}$$

Para la densidad superficial de corriente, usamos la expresión vectorial. Llamamos  $\Psi$  al ángulo entre  $\vec{r}$  y  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}' = \sigma(\omega(\sin \Psi \vec{u}_x + \cos \Psi \vec{u}_z)) \times (a \sin \theta' \cos \varphi', a \sin \theta' \sin \varphi', a \cos \theta')$$

Con lo que nos queda una expresión para  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma(\omega(\sin \Psi \vec{u}_x + \cos \Psi \vec{u}_z)) \times (a \sin \theta' \cos \varphi', a \sin \theta' \sin \varphi', a \cos \theta')}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta'}} a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

**¡Esta expresión es más fácilmente resoluble!** Para empezar,  $\varphi'$  está separada y se puede integrar. Además, los términos que tienen  $\sin \varphi'$  y  $\cos \varphi'$  tienen una integral nula, por ser la integral en un periodo completo. Otros términos desaparecen por el producto vectorial. El único término que sobrevive es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{2} \int_{\theta'=0}^{\theta'=\pi} \frac{\sigma \omega (\sin \Psi \vec{u}_x) \times (a \cos \theta' \vec{u}_z)}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta'}} a^2 \sin \theta' d\theta'$$

La dirección resultante  $-\vec{u}_y$  es constante en la integral. Con el cambio de variable  $u = \cos \theta'$ , y usando la integral:

$$\int \frac{udu}{\sqrt{k-u}} = -\frac{2}{3} \sqrt{k-u}(u-2k)$$

### Note

En algunos problemas, el sistema de referencia se puede elegir en base a criterios físicos del problema, y pensar que permitirá simplificar la expresión de la integral. En este caso, poniendo el sistema de referencia con el punto  $\vec{r}$  fijado, podemos deducir que las componentes  $\vec{u}_x$  y  $\vec{u}_z$  se cancelarán. Para verlo podemos ver que para **cada punto de la fuente de corriente que contribuye en las dirección positivas de  $\vec{u}_x$  y  $\vec{u}_z$  hay otro punto que contribuye en dirección contraria y se cancelan**. La única componente que no se cancela es la  $\vec{u}_y$ . En la integral, resulta en integrales en  $\sin \varphi'$  y  $\cos \varphi'$  que se anulan.

Podemos resolver el potencial vector  $\vec{A}$ . Para los puntos dentro de la esfera, para  $z < a$  (cuidado con que el resultado de las raíces siempre sea positivo) el resultado final es:

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 \omega z a \sin \Psi \sigma}{3} \vec{u}_y$$

Ahora, podemos volver al sistema de referencia original. La manera más sencilla es poner la expresión resultante en forma vectorial de nuevo, que es independiente del sistema de referencia. Usamos que, en este sistema de referencia:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega(\sin \Psi \vec{u}_x + \cos \Psi \vec{u}_z)) \times (0, 0, z) = -\omega z \sin \Psi \vec{u}_y$$

De tal forma que obtenemos la expresión vectorial, independiente del sistema de referencia:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 a \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Ponemos esta expresión en el sistema de referencia original, con  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 a \omega \sigma}{3} r \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

Finalmente, tomando rotacional, comprobamos que **el campo magnético en el interior de la esfera es constante**:

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 a \sigma \vec{\omega}$$

## Problema B4.5

La carga superficial  $\sigma$  girando a velocidad constante  $\omega$  implica **unas cargas que se desplazan**, en este caso, **una corriente superficial  $\vec{j}$** . En este caso, dado que el cilindro **se puede dividir fácilmente en espiras diferenciales que podemos integrar**, vamos a calcular el campo magnético total a partir del campo magnético de una espira (*Notar que es similar al problema 4.2*):

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

El campo magnético de **una espira de corriente  $I$  y de radio  $a$  en el eje  $\vec{u}_z$  de simetría** es conocido:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Ahora vamos a utilizar este resultado para **obtener el campo magnético generado por un trozo de cilindro** cuya posición sea  $z'$ :

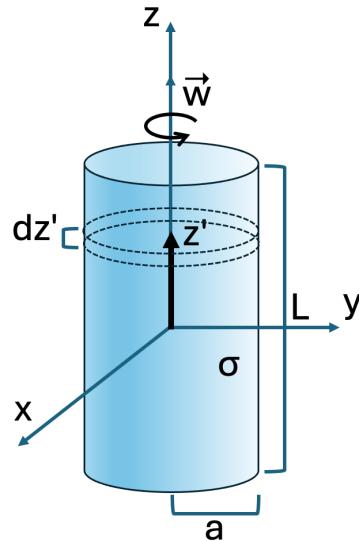


Fig. 9 Diagrama del problema.

Vamos a particularizar el resultado para la espira diferencial en  $z'$ .

## Cálculo de $d\vec{B}$

Por una parte, **la posición ha cambiado, por lo que tenemos que sustituir  $z$  para tener en cuenta la posición de la espira diferencial:**

$$z \rightarrow z - z'$$

Por otra parte, **tenemos que obtener la corriente que atraviesa la sección lateral de anchura  $dz'$** . Se puede calcular como la densidad superficial de corriente  $\vec{j}$  multiplicada por la anchura del segmento perpendicular  $dz'$ . *Cuando tenemos la velocidad de desplazamiento de las cargas, la manera más sencilla de obtener la corriente superficial es multiplicar:*

$$\vec{j} = \sigma \vec{v}$$

### Note

Para recordar o deducir la expresión de  $\vec{j}$ , primero observamos que tiene **las unidades correctas, de  $[A/m]$** . Notamos que **la velocidad debe estar contenida en la superficie** para que la expresión tenga sentido, de forma que las cargas se desplazan dentro de la superficie

Es similar a la expresión conocida  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ , con unidades de  $[A/m^2]$

Queda obtener la velocidad, que está relacionada con la velocidad angular  $\omega$  y con el radio del cilíndro  $a$ . Así:

$$I = j dz' = \sigma v dz' = \sigma \omega a dz'$$

Observar que coincide con la carga por unidad de tiempo que atraviesa la sección lateral de anchura  $dz'$ . Dicha carga, la que atraviesa  $dz'$  en un tiempo  $dt$  es la contenida en una superficie de lados  $dz'$  y  $v dt$ .  $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma dz' v dt}{dt}$

Ya tenemos todos los elementos para obtener  $\vec{dB}$ . Por último, las espiras diferenciales tienen posiciones desde  $z' = -L/2$  hasta  $z' = +L/2$ , que serán los límites de integración

Con esto, **el campo magnético total, obtenido a partir del campo magnético diferencial de cada espira diferencial** es:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int_{z'=-L/2}^{z'=L/2} \frac{\mu_0 \sigma \omega a}{2} dz' \frac{a^2}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Dando un resultado comparable al del problema 4.2:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega a \vec{u}_z}{2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} \right)$$

**Para obtener el momento magnético total, usamos la misma estrategia:**

## Cálculo de $\vec{dm}$

El momento magnético de cada espira diferencial es el de una espira de corriente  $I$  y radio  $a$

$$\vec{dm} = I \pi a^2 \vec{u}_z = \sigma \omega a dz' \pi a^2 \vec{u}_z$$

Por lo tanto:

$$\vec{m} = \int \vec{dm} = \sigma \omega \pi a^3 L \vec{u}_z$$

## Problema B4.7

**El campo magnético que genera una espira pequeña** es conocido.

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_1}{r^3} \right)$$

Como sabemos, este campo magnético sigue unas líneas de campo que salen en la misma dirección que  $\vec{m}_1$ , y dan una vuelta para entrar por abajo y cerrar el camino.

**El efecto mecánico de un campo magnético sobre una espira** también es conocido:

$$\vec{F} = (m_2 \cdot \nabla) \vec{B}_1$$

$$\vec{\tau} = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1$$

También sabemos que el torque intentará alinear  $\vec{m}_2$  para que siga la misma dirección de  $\vec{B}_1$

Para resolver las preguntas del enunciado, solo tenemos que *particularizar el campo magnético  $\vec{B}_1$  y la posición y orientación de la espira  $\vec{m}_2$*  para los casos que se proponen:

## a) Momentos magnéticos perpendiculares, con $\vec{m}_2$ apuntando a $\vec{m}_1$

Elegimos, por ejemplo,  $\vec{m}_1 = m_1 \vec{u}_y$  y colocado en el origen,  $\vec{r}_1 = 0$ . Para que  $\vec{m}_2$  sea perpendicular y apunte hacia la posición de  $\vec{m}_1$ , elegimos por ejemplo  $\vec{m}_2 = -m_2 \vec{u}_x$  y  $\vec{r}_2 = \vec{r} = r \vec{u}_x$ . De esta manera:

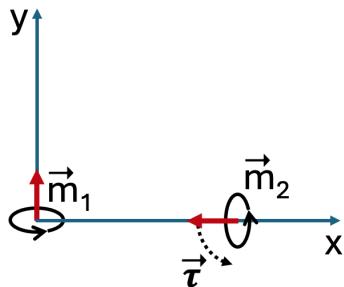


Fig. 10 Configuración de momentos magnéticos del problema a)

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 \vec{m}_1}{4\pi r^3}$$

Y, respecto la fuerza y al torque:

$$\vec{F} = -m_2 \frac{\partial}{\partial x} \vec{B}_1 = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^4} \vec{u}_y$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} \vec{u}_z$$

Este torque implica que  $\vec{m}_2$  sufre un torque que tiene tendencia a alinearlo con  $\vec{m}_1$  pero con sentido contrario.

## b) Momentos magnéticos antiparalelos

Las posiciones relativas no están especificadas, por lo que ponemos  $\vec{m}_1$  en el origen,  $\vec{r}_1 = 0$ , y  $\vec{m}_2$  en un punto arbitrario  $\vec{r}_2 = \vec{r}$ . Elegimos  $\vec{m}_1 = m_1 \vec{u}_z$  y  $\vec{m}_2 = -m_2 \vec{u}_z$ , para poder usar las coordenadas esféricas y dejar el resultado en función de los ángulos. De esta manera, usando las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_1}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (3 \cos \theta \vec{u}_r - \vec{u}_z) = \\ &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)\end{aligned}$$

Y, por lo tanto, la fuerza:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left( (-m_2 \vec{u}_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right) \right) \vec{B}_1 \\ &= -m_2 \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \vec{B}_1\end{aligned}$$

Y el torque:

$$\vec{\tau} = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1 = (-m_2 \vec{u}_z) \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \right) = -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} (3 \cos \theta \sin \theta \vec{u}_\varphi)$$

Si analizamos la dirección de giro,  $\vec{m}_2$  sufre un torque que *tiene tendencia a ponerlo en dirección y sentido al campo  $\vec{B}_1$* , igual que en el apartado anterior.

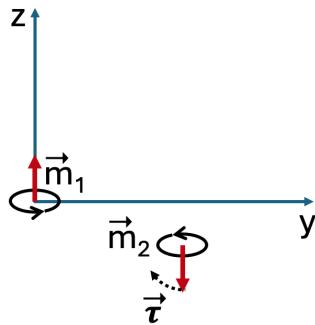
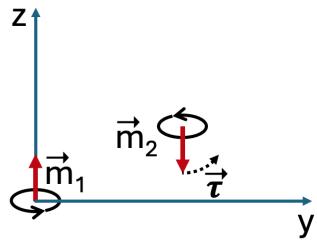


Fig. 11 Configuración de momentos magnéticos del problema b)

## Problema B5.4

Este es un problema de circuito magnético que resolvemos con un **método gráfico**, ya que la respuesta del material ferromagnético es no lineal y tenemos la gráfica, pero no tenemos una expresión. Nos dan la gráfica de la respuesta del material  $H_{Fe} = H_{Fe}(B_{Fe})$ .

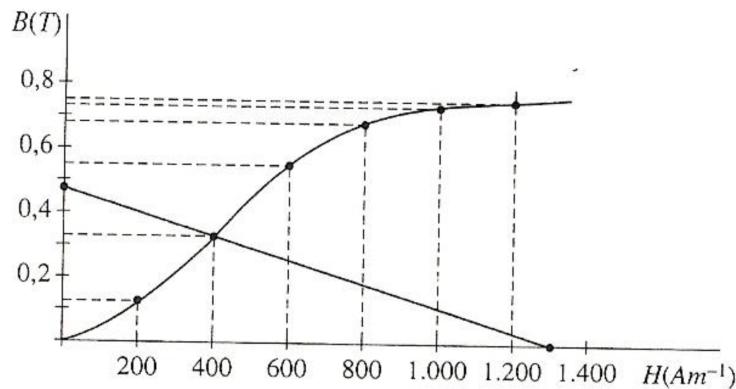


Fig. 12 Respuesta de carga inicial del material ferromagnético.

El circuito magnético tiene una fuerza magnetomotriz, o *fmm*, generada por un bobinado de  $N = 300$  espiras por las que circula una corriente  $I = 2.5\text{A}$ . El circuito tiene una sección

$S = 2\text{cm}^2$  y una longitud de  $L_{Fe} = 60\text{cm}$ , y un entrehierro (es decir, un trozo de aire que rompe el circuito de hierro) de  $L_e = 2\text{mm}$ . **El entrehierro, al ser aire, tendrá una respuesta lineal, caracterizada por su reluctancia**  $R_e = \frac{L_e}{\mu_0 S}$ . Deberíamos haber usado  $S_e$ , pero el entrehierro es tan estrecho, que podemos asumir que la sección por la que pasa el flujo magnético es la misma que la sección del material ferromagnético  $S$ . Por lo tanto, *el campo magnético también es igual en el material ferromagnético que en el entrehierro*,  $B_{Fe} = B_e = B$ . El circuito magnético podríamos dibujarlo de la siguiente manera:

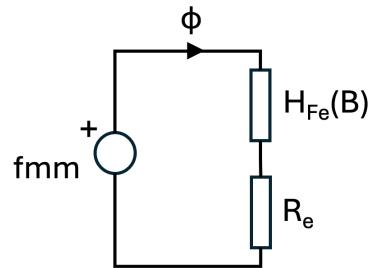


Fig. 13 Circuito magnético equivalente.

### Note

Todos los problemas de este tipo los vamos a resolver por un método gráfico. **La metodología gráfica tiene tres pasos:**

- **Plantear** la ecuación del circuito. Tipicamente:

$$fmm = H(B)L + \Phi R$$

- **Despejar** el elemento no lineal para el que tenemos la gráfica.

$$H(B) = \frac{1}{L}(fmm - \Phi R)$$

- **Dibujar** en la gráfica la recta que nos queda en la igualdad. El punto de corte es la solución que cumple los dos miembros de la igualdad.

Las fórmulas que debemos tener en cuenta son:

$$\begin{aligned} fmm &= NI \\ \Phi R &= \phi \frac{L_R}{\mu_R S_R} = B_R \frac{L_R}{\mu_R} \end{aligned}$$

Esta metodología general se puede aplicar a los casos concretos de los problemas con un único material ferromagnético y una única malla, de forma que solo nos queda la ecuación de dicha malla.

Aplicando la metodología gráfica, **la ecuación del circuito** queda:

$$fmm = H_{Fe}(B_{Fe})L_{Fe} + \Phi R_e$$

Sustituimos los valores de  $fmm$  y  $R_e$  y dejamos la expresión para que dependa de  $B_{Fe} = B_e = B$ . La expresión final, después de despejar  $H_{Fe}(B)$ , es la siguiente:

$$H_{Fe}(B) = \frac{1}{L_{Fe}} \left( NI - B \frac{L_e}{\mu_0} \right)$$

Podemos comprobar que la recta dibujada en la figura es la recta que tiene esta ecuación. Lo más fácil es dibujar los puntos de corte con los ejes y trazar la linea recta que los une. Si calculamos los puntos de corte con los ejes de la recta  $\frac{1}{L_{Fe}}(NI - B\frac{L_e}{\mu_0})$ , comprobaremos que coinciden con los de la recta dibujada.

## Problema B5.5

Este es un problema de circuito magnético que resolvemos con un **método gráfico**, ya que la respuesta del material ferromagnético es no lineal y tenemos la gráfica, pero no tenemos una expresión. Nos dan la gráfica de la respuesta del material  $\mu_0 H_{Fe} = \mu_0 H_{Fe}(B_{Fe})$ .

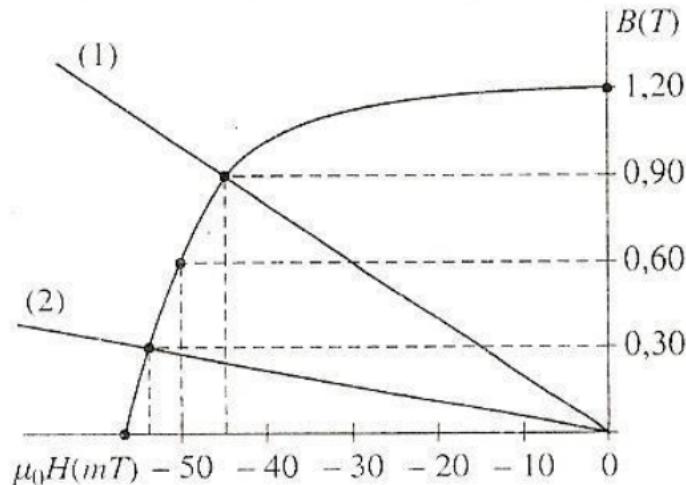


Fig. 14 Respuesta de desimanación del material ferromagnético previamente imanado.

El circuito construido tiene **un trozo de material ferromagnético con la característica no lineal  $\mu_0 H_{Fe}(B_{Fe})$**  de sección de  $S_{Fe} = 3\text{cm}^2$  y longitud de  $L_{Fe} = 5\text{cm}$ . También tiene **un material lineal**, con la misma sección  $S_l = S_{Fe} = S$ , una longitud de  $L_l = 25\text{cm}$  y una permeabilidad magnética relativa de  $\mu_r = 100$ . La reluctancia del material lineal es, por lo tanto,  $R_l = \frac{L_l}{\mu_r \mu_0 S}$ . Dado que la sección es la misma (y el flujo lo es siempre en todos los circuitos magnéticos de una malla), *el campo magnético también es igual en el material lineal que en el material ferromagnético,  $B_l = B_{Fe} = B$* . El circuito magnético del apartado a) podríamos dibujarlo de la siguiente manera, con una fuerza magnetomotriz nula:

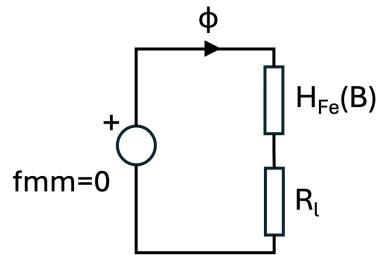


Fig. 15 Circuito magnético equivalente.

### **i Note**

Todos los problemas de este tipo los vamos a resolver por un método gráfico. **La metodología gráfica tiene tres pasos:**

- **Plantear** la ecuación del circuito. Tipicamente:

$$fmm = H(B)L + \Phi R$$

- **Despejar** el elemento no lineal para el que tenemos la gráfica.

$$H(B) = \frac{1}{L}(fmm - \Phi R)$$

- **Dibujar** en la gráfica la recta que nos queda en la igualdad. El punto de corte es la solución que cumple los dos miembros de la igualdad.

Las fórmulas que debemos tener en cuenta son:

$$\begin{aligned} fmm &= NI \\ \Phi R &= \phi \frac{L_R}{\mu_R S_R} = B_R \frac{L_R}{\mu_R} \end{aligned}$$

Esta metodología general se puede aplicar a los casos concretos de los problemas con un único material ferromagnético y una única malla, de forma que solo nos queda la ecuación de dicha malla.

Aplicando la metodología gráfica, **la ecuación del circuito** queda:

$$fmm = H_{Fe}(B_{Fe})L_{Fe} + \Phi R_l$$

Sustituimos los valores de  $fmm = 0$  y  $R_l = \frac{L_l}{\mu_r \mu_0 S}$  y dejamos la expresión para que dependa de  $B_l = B_{Fe} = B$ . La expresión final, después de despejar  $\mu_0 H_{Fe}(B)$ , es la siguiente:

$$\mu_0 H_{Fe}(B) = -B \frac{L_l}{\mu_r L_{Fe}}$$

Podemos comprobar que la recta  $-B \frac{L_l}{\mu_r L_{Fe}}$  coincide con la recta (1) dibujada sobre la gráfica.

En el segundo apartado b), se abre un entrehierro en el circuito magnético (es decir, un trozo de aire que rompe el circuito de hierro) de  $L_e = 0.2\text{cm}$  y de sección  $S_e = 1\text{cm}^2$ . **El entrehierro, al ser aire, tendrá una respuesta lineal, caracterizada por su reluctancia  $R_e = \frac{L_e}{\mu_0 S_e}$** . Observar que la sección del entrehierro es distinta de la del toroide. Por lo tanto, *el campo magnético también es distinto en el material toroide que en el entrehierro,  $B_e \neq B$* . Sin embargo, el flujo magnético  $\Phi$  si debe ser igual, lo que nos permite relacionar ambos campos magnéticos:

$$\Phi = BS = B_e S_e$$

El circuito magnético podríamos dibujarlo de la siguiente manera:

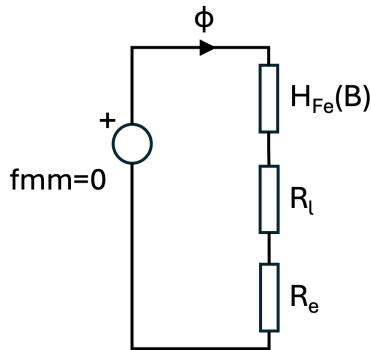


Fig. 16 Circuito magnético equivalente.

Aplicando la metodología gráfica, **la ecuación del circuito** queda:

$$fmm = H_{Fe}(B_{Fe})L_{Fe} + \Phi R_l + \Phi R_e$$

Desarrollamos la expresión:

$$0 = H_{Fe}(B_{Fe})L_{Fe} + \Phi \frac{R_l}{\mu_r \mu_0 S} + \Phi \frac{L_e}{\mu_0 S_e}$$

$$0 = H_{Fe}(B_{Fe})L_{Fe} + B \frac{R_l}{\mu_r \mu_0} + BS \frac{L_e}{\mu_0 S_e}$$

La expresión final, después de despejar  $H_{Fe}(B)$ , es la siguiente:

$$\mu_0 H_{Fe}(B) = -\frac{B}{L_{Fe}} \left( \frac{L_l}{\mu_r} + \frac{L_e S}{S_e} \right)$$

Podemos comprobar que la recta  $-\frac{B}{L_{Fe}} \left( \frac{L_l}{\mu_r} + \frac{L_e S}{S_e} \right)$  coincide con la recta (2) dibujada sobre la gráfica.

## Problema B6.1

Antes de plantear el problema, recordamos el fenómeno físico: Cuándo un campo magnético  $\vec{B}_1$  varía a través de una espira, de tal forma que el flujo total  $\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$  varía, se genera una fuerza electromotriz  $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1}$  que genera una corriente  $I_2$  en dicha espira. Esta corriente podría generar un campo magnético adicional  $\vec{B}_2$  que a su vez debería tenerse en cuenta para corregir la corriente  $I_2$ . Cuando nos pidan la corriente inducida, **vamos a despreciar este efecto de autoinducción, que es lo mismo que decir que el campo magnético  $\vec{B}_2$  tiene un efecto despreciable frente al efecto de  $\vec{B}_1$** . Esto lo conseguimos limitando la corriente con una resistencia  $R \neq 0$ .

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_{21}}{dI_1}$$

En este problema concreto, tenemos la corriente  $I_1 = I(t)$  diferente para cada apartado.

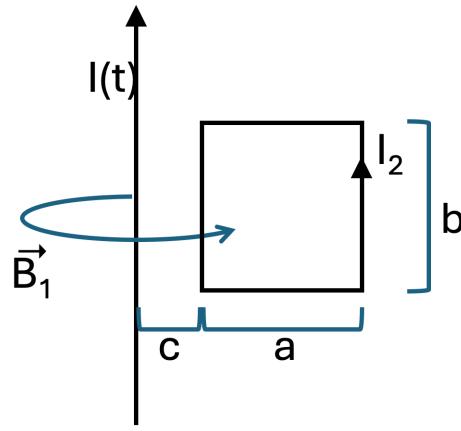


Fig. 17 Diagrama del problema.

En el primer apartado, la espira rectangular está quieta, por lo que la única variación del flujo  $\Phi_{21}$  viene de la dependencia temporal de la corriente.

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{z=0}^{z=b} \int_{r=c}^{r=c+a} \left( \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{u}_\phi \right) \cdot (dr dz \vec{u}_\phi)$$

En los apartados segundo y tercero la corriente es constante  $I_1 = I_0 = cte$ , pero la espira se mueve de forma que el flujo  $\Phi_{21}$  puede variar. En el segundo apartado, la espira rectangular se desplaza radialmente, por lo que cambiamos la corriente y los límites de integración de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 = cte \\ r &= c \rightarrow r = vt \\ r &= c + a \rightarrow r = vt + a \end{aligned}$$

De esta forma el flujo disminuye y la fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  genera la corriente  $I_2 \neq 0$ . En el tercer apartado, la espira se desplaza a lo largo del eje  $z$  de simetría, por lo que cambiamos:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 = cte \\ z &= 0 \rightarrow z = vt \\ z &= b \rightarrow z = vt + b \end{aligned}$$

En este caso, obtenemos un flujo magnético constante, por lo que la corriente inducida en  $I_2 = 0$ .

# Problema B6.3

En el diagrama de este problema no hay un circuito, espira o similar por donde sepamos seguro que debe pasar la corriente, por lo que **no podemos aplicar las expresiones de inducción, fuerza electromotriz, etc.** Tenemos que quedarnos en un paso anterior de los desarrollos teóricos y quedarnos con las leyes fundamentales. En este caso, **tenemos unas cargas libres en el disco de metal que estarán sujetas a a fuerza de Lorentz  $\vec{F}_L$**  cuando el disco gira.

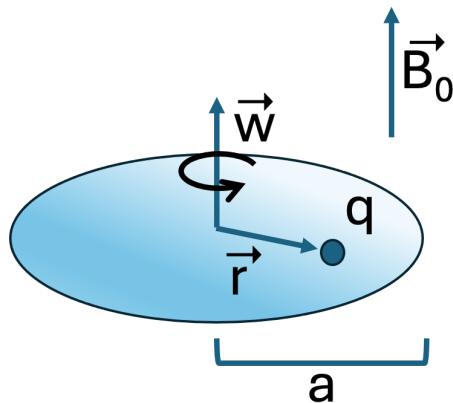


Fig. 18 Diagrama del problema.

Despreciando la aceleración centrípeta, que es muy pequeña, podemos decir que la fuerza de Lorentz sobre la partícula es nula,  $\vec{F}_L = 0$ :

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0 \right)$$

Es decir, para que las partículas estén estacionarias (o girando con *inercia despreciable*), debe aparecer **un campo eléctrico  $\vec{E}$  que compense la fuerza magnética producida por  $\vec{B}_0$ .** El campo eléctrico aparece por la acumulación de cargas positivas en el exterior del disco a causa de la fuerza magnética:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}_0) = q(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}_0 = q(\omega \vec{u}_z \times r \vec{u}_r) \times B_0 \vec{u}_z = q\omega r B_0 \vec{u}_r$$

Efectivamente, la fuerza magnética aleja las cargas del centro del disco. El campo eléctrico  $\vec{E}$  se obtiene por lo tanto:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}_0 = -\omega r B_0 \vec{u}_r$$

Si se conecta una resistencia  $R$  entre el centro y el borde del disco, la corriente que atraviesa la resistencia viene dada por la ley de Ohm,  $I = \frac{\Delta V}{R}$ , y la diferencia de potencial la podemos obtener por integración del campo eléctrico a lo largo de un radio del disco,  $r \in [0, a]$ .

$$\Delta V = \Phi(r = a) - \Phi(r = 0) = - \int_{r_0}^{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_0}^{r=a} \omega r B_0 dr = \frac{\omega a^2 B_0}{2}$$

## Problema B6.4

Para resolver la corriente inducida en la espira, es necesario conocer el campo magnético que genera el solenoide en todo el espacio.

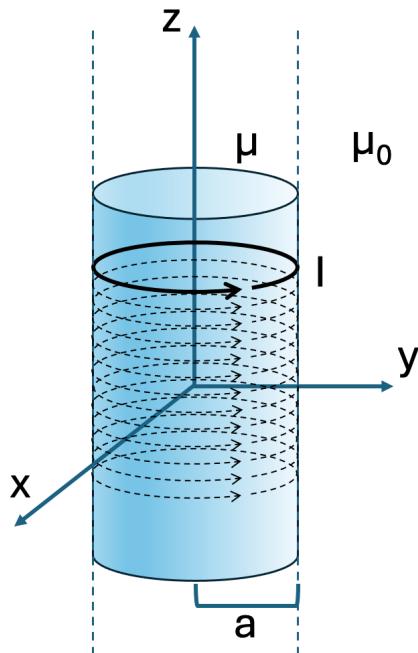


Fig. 19 Diagrama del problema.

Podemos aprovechar la simetría y resolverlo por Ampere, utilizando un circuito de Ampere apropiado.

### Note

El circuito de Ampere debe elegirse de forma que **la superficie de dicho circuito de Ampere tenga lados paralelos al campo magnético**. Los lados restantes, si los hay, deberían ser perpendiculares al campo magnético. Para ello, debemos adivinar la **dirección del campo magnético usando la regla de la mano derecha**. Por otra parte, el **circuito de Ampere debe estar atravesado por la corriente que genera el campo**.

En esta configuración, de un solenoide cilíndrico infinito en el que los hilos de corriente tienen dirección  $\vec{u}_\phi$  positiva, el campo magnético tendrá dirección  $\vec{u}_z$ . Por lo tanto, **el circuito de Ampere debe tener lados paralelos al eje  $z$** . Los lados restantes deben ser perpendiculares al eje  $z$  para que no aporten en la integral de Ampere. Para que recoja la corriente en su interior, la configuración debe ser la de la figura:

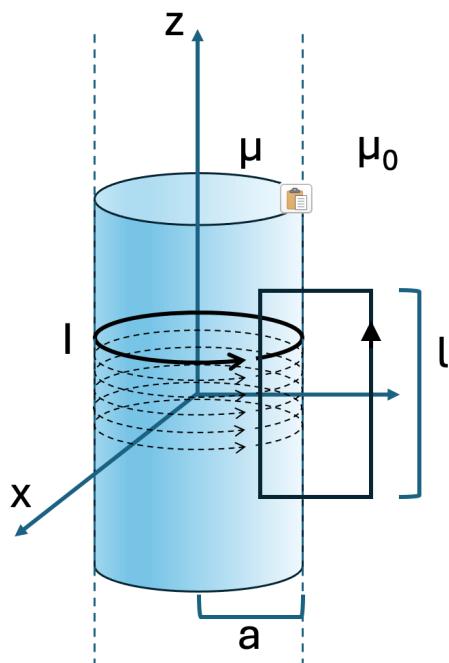


Fig. 20 Diagrama del problema.

**La integral de Ampere es, en el caso de materiales:**

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

La integral es fácil de calcular,  $\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{int}l$ . Podemos ver que el campo magnético en el exterior debe ser independiente de la distancia  $r$  al eje, ya que la expresión no puede depender de la posición del lado que está fuera. Además, debe ser  $H_{ext} = 0$ , porque en el infinito debería tender a cero y la constante debe coincidir con el valor en el infinito. La corriente que atraviesa la espira es la de todos los hilos que la atraviesan,  $I(t)nl$  (recordamos que  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud).

$$\vec{B}_{int} = \mu I(t) n \vec{u}_z$$

Con esto, podemos calcular el flujo que pasa por la espira del problema:

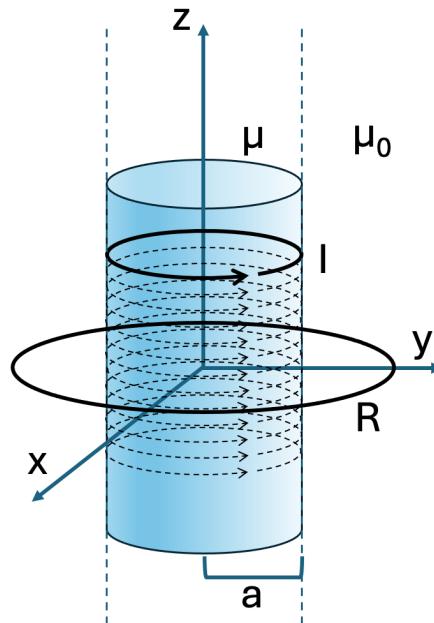


Fig. 21 Diagrama del problema.

Observamos que no nos da las dimensiones de la espira, pero no nos importa, porque todo el flujo es el producido en el interior del núcleo de permeabilidad  $\mu$ , es decir,  $\Phi = B_{int}\pi a^2$ . Con esto, la corriente inducida en la espira es:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu n \pi a^2}{R} \frac{dI(t)}{dt}$$

## Problema B6.5

La densidad del corriente en el interior del cilindro es  $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$ .

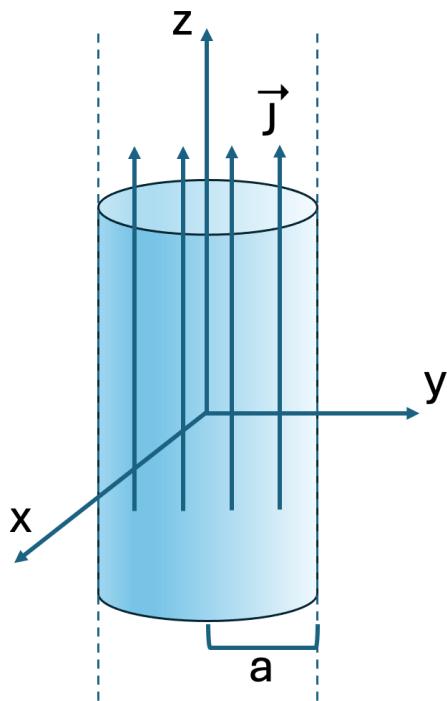


Fig. 22 Diagrama del problema.

El problema pide la autoinducción  $L$  por unidad de longitud  $l$ , o  $L/l$ . El propio enunciado nos da la pista de que no se puede calcular la inducción total, ya que las corrientes no están confinadas. Aunque podemos calcular el campo magnético por Ampere, la expresión no se puede usar para obtener la inducción.

### Note

El campo magnético que genera se puede obtener con un circuito de Ampere apropiado.

### Note

El circuito de Ampere debe elegirse de forma que **la superficie de dicho circuito de Ampere tenga lados paralelos al campo magnético**. Los lados restantes, si los hay, deberían ser perpendiculares al campo magnético. Para ello, debemos adivinar **la dirección del campo magnético usando la regla de la mano derecha**. Por otra parte, **el circuito de Ampere debe estar atravesado por la corriente que genera el campo**.

Dado que la corriente tiene dirección  $\vec{u}_z$ , deducimos que el campo magnético debe tener dirección  $\vec{u}_\phi$ . Por lo tanto, **el circuito de Ampere debe ser una circunferencia de radio  $r$  en el plano horizontal, de forma que su lado sigue una linea de campo del campo magnético**. La corriente atravesada dependerá de si el radio  $r$  de dicho circuito de Ampere es menor o mayor que  $a$ .

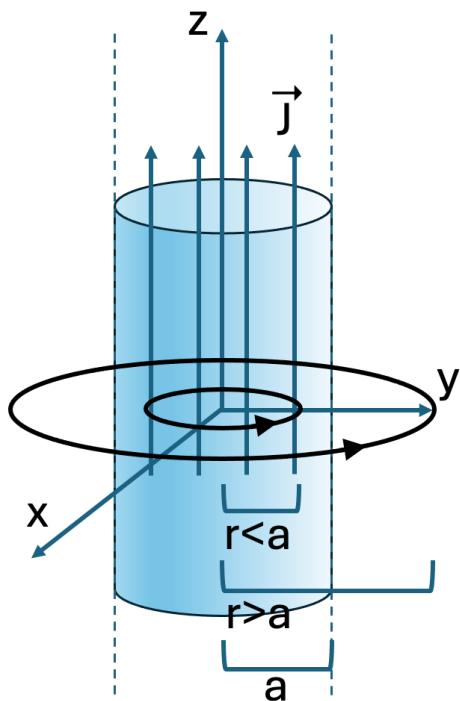


Fig. 23 Diagrama del problema.

La integral de Ampere queda:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Si  $r < a$ :

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\phi$$

Si  $r > a$ :

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi a^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

Para corrientes no confinadas tenemos unas expresiones de energía magnética que sí son válidas y que contienen la  $L$  que necesitamos calcular:

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

Es decir, que  $L = \frac{1}{I^2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$ . Para calcular la autoinducción por unidad de longitud  $L/l$ , tan solo necesitamos restringir el volumen de integración a un intervalo en  $z$  de longitud  $l$ . ¡No conocemos  $\vec{A}$ ! Podríamos intentar calcularlo mediante su expresión a partir de la integral de  $\vec{J}$ . Pero en este caso, dado que  $\vec{B}$  es conocido, podemos intentar deducirlo a partir de su definición  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Dado que toda la corriente tiene dirección  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{A}$  también debe tener dirección  $\vec{u}_z$ . Además, por simetría, sólo puede depender de la coordenada radial de cilíndricas  $r$ . De esta forma, el único término de cilíndricas que sobrevive es:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\phi$$

Dado que sólo nos interesa  $\vec{A}$  dentro del cilindro (fuera,  $\vec{J} = 0$  y en la integral de  $U_m$  no aporta), podemos poner la siguiente igualdad:

$$\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Y podemos deducir que la expresión de  $A_z$  es:

$$A_z = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} + K = \frac{\mu_0 I (a^2 - r^2)}{4\pi a^2}$$

El valor de la constante  $K$  es el que se obtiene cuando imponemos que la corriente vuelva por la superficie exterior del cilindro, aunque no se mencione en el enunciado (ver problema 7.28 de Griffiths). Ya podemos calcular el producto  $\vec{J} \cdot \vec{A}$  e integrarlos en un volumen de altura  $l$ :

$$\vec{J} \cdot \vec{A} = \left( \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z \right) \cdot \left( \frac{\mu_0 I (a^2 - r^2)}{4\pi a^2} \vec{u}_z \right) = \frac{\mu_0 I^2 (a^2 - r^2)}{4\pi^2 a^4}$$

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV = \int_{r=0}^{r=a} \int_{z=0}^{z=l} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\mu_0 I^2 (a^2 - r^2)}{4\pi^2 a^4} r dr dz d\phi = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a^4} \left( \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=a}$$

Finalmente:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

## Problema B6.6

El radio del toroide está indicado,  $R$ , pero no se dice exáctamente si es el radio interior, el exterior, el radio del centro de la sección circular de superficie  $A$ ... Por eso, **vamos a suponer que la sección es suficientemente pequeña** como para que la diferencia sea despreciable.

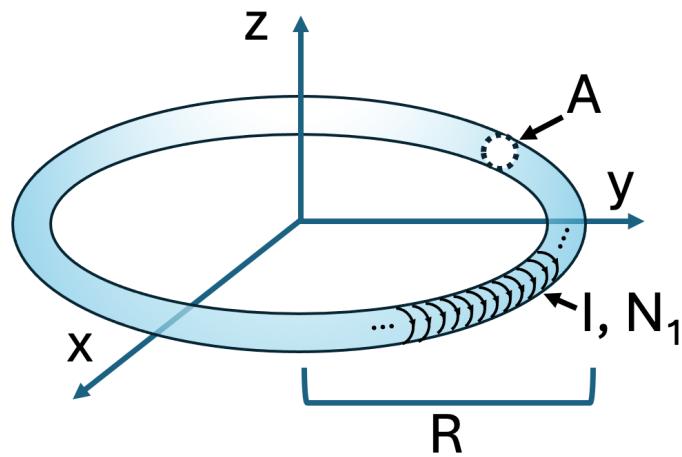


Fig. 24 Diagrama del problema.

Para calcular el coeficiente de autoinducción, **es necesario calcular el flujo magnético que atraviesa la superficie de describe el circuito** generado por el propio circuito. A partir del flujo, el coeficiente de autoinducción es *inmediato*.

$$L = \frac{\Phi_1}{I}$$

El campo magnético se puede obtener fácilmente por Ampere.

#### Note

El circuito de Ampere debe elegirse de forma que **la superficie de dicho circuito de Ampere tenga lados paralelos al campo magnético**. Los lados restantes, si los hay, deberían ser perpendiculares al campo magnético. Para ello, debemos adivinar **la dirección del campo magnético usando la regla de la mano derecha**. Por otra parte, **el circuito de Ampere debe estar atravesado por la corriente que genera el campo**.

En esta configuración, por la regla de la mano derecha, podemos deducir que **el campo magnético tiene dirección  $\vec{u}_\phi$  por el interior del toroide**. Por lo tanto, el circuito de Ampere apropiado es un círculo que *sigue las líneas de campo magnético en el interior*. Vemos que los hilos de corriente que suben por el interior del toroide atraviesan su superficie.

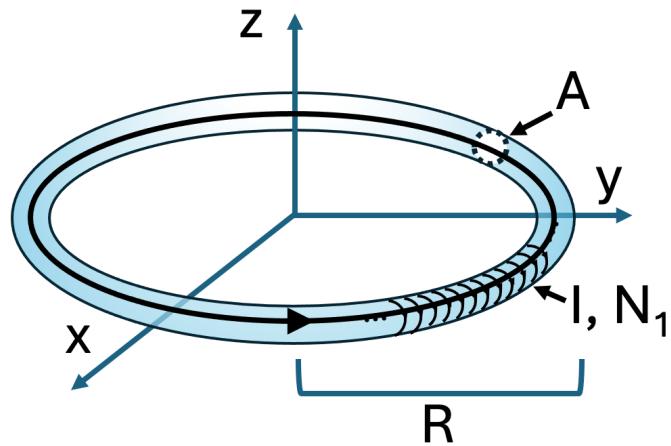


Fig. 25 Diagrama del problema.

De esta forma, la integral de Ampere queda:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B2\pi R = \mu_0 I N_1$$

Para obtener la integral del flujo del campo magnético sobre el propio circuito, **debemos tener cuidado por que el circuito da  $N_1$  vueltas**, por lo que la superficie no es la sección  $A$  de una espira, sino la sección de las  $N_1$  espiras sumadas. Con  $\vec{B}$  aproximadamente constante en la superficie:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = BN_1 A$$

Podemos obtener  $L$  de forma inmediata. Si se pone un segundo arroyamiento de  $N_2$  vueltas justo encima del primero de forma que el área  $A$  es igual, el coeficiente de inducción mutua  $M$  es también inmediato. Siendo el campo magnético  $B$  el mismo:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I}$$

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = BN_2 A$$

Observar que **en el coeficiente de autoinducción aparece un factor  $N_1^2$** , mientras que **en el coeficiente de inducción mutua hay un factor  $N_1 N_2$** . Queda claro que podríamos haber

calculado  $\Phi_{21}$  y  $\Phi_{12}$  indistintamente para obtener el mismo resultado, y que se cumple la expresión  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

# Problemas Examen parcial 24/25

## Note

### Problema primer llamamiento

Una carga puntual  $q$  se coloca a una distancia  $d$  de una esfera de conductor eléctrico perfecto (CEP) de radio  $a$  conectada a un potencial  $V$ , tal y como se muestra en la figura.

1. Calcule:

- A) La fuerza que actúa sobre la carga puntual  $q$ .
- B) El trabajo realizado para trasladar la carga puntual  $q$  desde puntos muy alejados hasta su posición  $d$ .
- C) La densidad superficial de carga  $\sigma$  en la superficie de la esfera de CEP.
- D) Los momentos multipolares de orden 0 y 1 de la configuración esfera de CEP a potencial  $V$  y carga puntual  $q$  en puntos muy alejados de la misma.

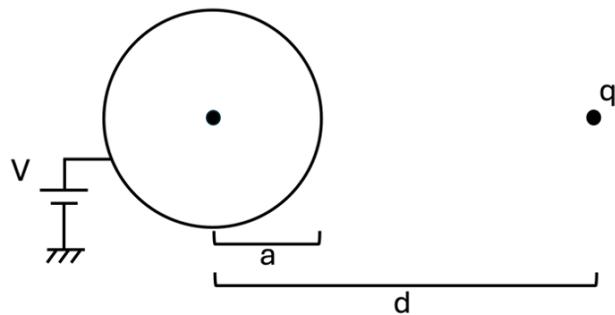


Fig. 26 Figura 1.

Para resolver este problema tenemos que tener en cuenta el efecto de una superficie de CEP cerca de una carga  $q$ . La carga  $q$  genera un campo eléctrico en su entorno que es radial respecto a la posición  $\vec{r}_q$  de dicha carga:

$$\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

La condición de contorno del CEP implica que las cargas superficiales del conductor se van a reorganizar para conseguir que el campo eléctrico  $\vec{E}_q$  en la superficie del CEP sea perpendicular o, lo que es lo mismo, que el potencial  $\Phi$  en la superficie de la esfera sea constante. En algunas configuraciones, como por ejemplo en la del problema, es posible sustituir las cargas superficiales del CEP por otras cargas "imágenes" que permiten obtener el campo eléctrico  $\vec{E}_q$  y el potencial  $\Phi$  que cumplen la condición del CEP en la superficie. Como la solución de las ecuaciones de electrostática debe ser única, dicha solución es la correcta. **En la configuración del problema, una esfera de CEP frente a una carga, sabemos que la imagen es:**

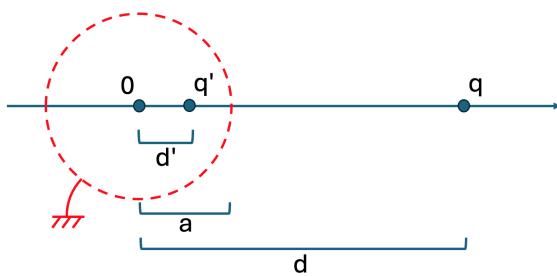


Fig. 27 Imagen de una carga puntual frente a una esfera de CEP.

$$q' = -q \frac{a}{d}$$

$$d' = \frac{a^2}{d}$$

$$\vec{E}_{q'} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{q'}|^3} (\vec{r} - \vec{r}_{q'})$$

Es importante, respecto a esta configuración, recordar que el potencial en la superficie del CEP es  $\Phi = 0$ , pero en el enunciado se dice que el potencial es  $\Phi = V$ . Para conseguir dicho potencial, usamos que el **Principio de superposición** y añadimos una carga  $Q_c$  en el centro de la esfera. **Es el único punto donde podemos poner una carga de forma que el potencial en la esfera siga siendo constante:**

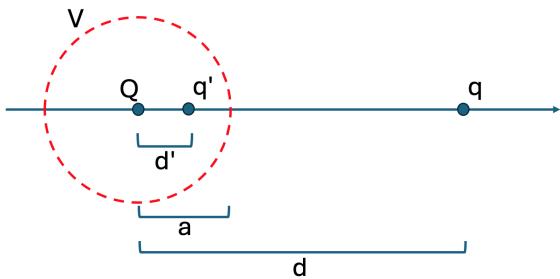


Fig. 28 Imagen de una carga puntual frente a una esfera de CEP con carga central.

$$\vec{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}(\vec{r} - \vec{r}_Q)$$

**Para obtener el valor de  $Q$  usamos la condición del enunciado,  $\Phi = V$ .** Observar que la esfera está conectada a una fuente, por lo que la fuente le suministra la carga que necesite para cumplir las condiciones del problema.

$$\vec{\Phi}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_Q|} = V$$

### Note

El problema con la esfera aislada (*desconectada de tierra o de un generador*) es diferente, ya que en ese caso, **la carga total de la esfera es la condición del problema**, mientras que el potencial sería desconocido y dependería de la carga central residual después de formarse la imagen.

Falta poner el sistema de referencia. Si ponemos todas las cargas en el mismo eje  $x$ , y la esfera centrada en el origen:

$$\begin{aligned}\vec{r}_Q &= 0 \\ \vec{r}_q &= d\vec{u}_x \\ \vec{r}_{q'} &= d'\vec{u}_x\end{aligned}$$

Con este planteamiento, podemos resolver todos los apartados:

- A) La fuerza sobre la carga  $q$  sera la fuerza que generan las demás cargas de la configuración, las cargas  $q'$  y  $Q$ .

$$\vec{F}_q = q \left( \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(d-d')^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right) \vec{u}_x$$

- B) Teniendo la fuerza sobre la carga que depende de la distancia, el trabajo realizado sobre la carga  $q$  desde un punto a otro se obtiene utilizando la definición de trabajo. Dado que la fuerza que apliquemos debe oponerse a la fuerza electrostática,  $\vec{F} = -\vec{F}_q$ :

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

En este caso, el camino es desde  $x = \infty$  hasta  $x = d$ .

$$W = \int_{\infty}^d -q \left( \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(x-d')^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) dx$$

### **i Note**

**¡No se puede usar la expresión  $W = q\Delta\Phi!$**  La configuración de cargas en el CEP cambia a medida que la carga  $q$  se desplaza. Se observa en que la carga  $q'$  y su posición  $d'$  dependen de la posición de la carga  $q$ . La expresión  $W = \Delta\Phi$  solo se puede usar cuando la configuración de cargas o campos es fija cuando la carga se desplaza (*Lo cual suele ser válido en casi todos los problemas salvo en los de imágenes*).

- C) La densidad superficial de carga de la esfera se puede obtener a partir de la condición de contorno del campo eléctrico. Hay varias expresiones equivalentes, teniendo que el campo eléctrico es  $\vec{E} = 0$  y el potencial  $\Phi$  es constante dentro del CEP:

$$\sigma = \epsilon_0 E_{\perp} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} = -\epsilon_0 \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|$$

Dado que ya tenemos obtenido el campo eléctrico en la superficie, lo podemos usar directamente.

$$\sigma = \epsilon_0 \left( \vec{E}_q + \vec{E}_{q'} + \vec{E}_Q \right) \cdot \vec{n}$$

- D) Los momentos multipolares de orden 0 y 1 son la carga total y el momento dipolar. Particularizamos las expresiones de los momentos multipolares para distribuciones discretas de carga y solo queda sustituir los valores por los de las cargas de la configuración del problema,  $q$ ,  $q'$  y  $Q$ :

$$Q_T = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^N q_i$$

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i q_i$$

 Note

## Problema segundo llamamiento

Un cilindro dieléctrico de altura  $2L$  y radio  $L$  está polarizado con una polarización de valor:

$$\vec{P}(\vec{r}') = \frac{K}{2} \left( \frac{L^2}{s'} - s' \right) \vec{u}_s$$

siendo  $s$  la distancia desde el eje hasta el punto  $\vec{r}'$ , y  $\vec{u}_s$  el vector unitario radial de las coordenadas cilíndricas  $(s, \phi, z)$ . Calcule:

- A) Las densidades de carga de polarización. ¿Qué significa la constante  $K$ ?
- B) El campo eléctrico en un punto del eje  $z$ .
- C) El trabajo necesario para trasladar una carga puntual  $q$  desde puntos muy alejados hasta el punto central del círculo superior.

Las expresiones de las densidades de carga de polarización son:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \vec{n} \cdot \vec{P} \\ \rho_p &= -\nabla \cdot \vec{P}\end{aligned}$$

Las densidades superficiales de carga valen  $\sigma_p = 0$  tanto en las tapas del cilindro,  $\vec{n} \perp \vec{P}$ , como en la lateral,  $\vec{P}(r' = L) = 0$ . Falta calcular la densidad de carga de polarización  $\rho_p$ , para lo que usamos la divergencia en cilíndricas.

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = K$$

Por lo que la constante  $K$  es precisamente la densidad de carga.

Para obtener el campo eléctrico de la configuración, sustituimos el dieléctrico por un cilindro con densidad de carga constante  $K$ , de dimensiones de altura  $2L$  y radio  $L$ . Para obtener el campo eléctrico en un punto del eje  $z$ , planteamos la integral:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV'$$

Los elementos de la integral son:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= z\vec{u}_z \\ \vec{r}' &= s'\vec{u}_s + z'\vec{u}_z \\ \vec{r} - \vec{r}' &= -s'\vec{u}_s + (z - z')\vec{u}_z \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{s'^2 + (z - z')^2} \\ s' &\in [0, L] \\ \theta' &\in [0, 2\pi] \\ z' &\in [-L, L] \\ dV' &= s' ds' s \theta' dz' \\ \rho(\vec{r}') &= K\end{aligned}$$

Además, por simetría, el campo eléctrico resultante solo puede tener componente  $z$ . El resultado de la integral es:

$$\vec{E} = \frac{K\vec{u}_z}{2\varepsilon_0} \left( 2L + \sqrt{L^2 + (z-L)^2} - \sqrt{L^2 + (z+L)^2} \right)$$

Para calcular el trabajo necesario para trasladar una carga puntual  $q$ , o bien se usa la expresión del trabajo  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ , o bien se usa la misma metodología para calcular la integral del potencial  $\Phi$  y se usa la relación  $W = q\Delta\Phi$ .

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int -\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^L -qE_z \cdot dz$$

o bien

$$\begin{aligned} W &= -q\Delta\Phi \\ &= -q(\Phi(z=d) - \Phi(z \rightarrow \infty)) \\ &= -q\Phi(z=d) \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \int_{z'=-L}^{z'=L} \int_{s'=0}^{s'=L} \frac{K}{\sqrt{s'^2 - (z-z')^2}} s' ds' dz' d\phi' \end{aligned}$$

Aunque es un problema que suele estar resuelto en los libros, la integral en  $z'$  no es sencilla, así que solo con plantearlo de cualquiera de las dos maneras el problema estaría correcto.

# Problemas Examen 1a convocatoria 24/25

 Note

## Problema primer llamamiento de electrostática

Frente a una esfera de Conductor Eléctrico Perfecto (CEP) de radio  $a$  conectada a tierra y centrada en el origen de coordenadas, se coloca un hilo de carga de densidad lineal de carga  $\lambda$  constante el eje  $z$ . El hilo empieza a una distancia  $2a$  y termina a una distancia  $3a$  del centro de la esfera.

- A) Describa la forma de la imagen y calcule la densidad lineal de carga  $\lambda'(z')$  de la imagen del hilo de carga y su dependencia con  $z'$ , la variable posición de la imagen (4 puntos).
- B) Calcule la carga neta total de la imagen (3 puntos).
- C) Calcule el potencial en el eje  $z$ , para valores de  $z > 3a$  (Si no resolvió el apartado anterior, suponga que la imagen es una densidad lineal de carga  $\lambda'$  constante entre  $b$  y  $c$ , con  $b, c < a$ ) (3 puntos).

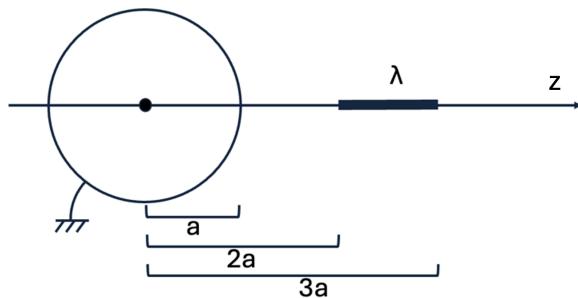


Fig. 29 Figura 1.

**Este problema es similar al problema 2.4:** Una distribución de carga **se divide en trozos diferenciales de carga**, cada uno de los cuales tiene una imagen, de forma que **todas las imágenes juntas forman una distribución de carga imagen**. En este caso, cada trozo diferencial  $dz$  contiene una carga  $dq = \lambda dz$  que tiene una imagen dentro de la esfera de CEP. Además, **como la esfera está conectada a tierra, esta es la única imagen**, ya que precisamente las imágenes se

obtienen imponiendo la condición de que el potencial total es  $\Phi = 0$  en la superficie de CEP. Es decir, no hay imagen residual.

**i Note**

**El objetivo de la carga residual en el centro es conseguir que el potencial no sea nulo en la superficie de CEP.** Aparece si la esfera está conectada a un potencial no nulo o si la esfera está aislada con una carga determinada.

Por lo tanto, **las características de la imagen** de un trozo de carga diferencial  $dq$  en  $z$  son:

$$dq' = -\frac{a}{z} dq$$
$$z' = \frac{a^2}{z}$$

Si utilizamos la definición de  $dq = \lambda dz$  y  $dq' = \lambda' dz'$  obtenemos

$$\lambda' dz' = -\frac{a}{z} \lambda dz$$

Para poder identificar la expresión de  $\lambda'$  en la ecuación **falta establecer la relación entre  $dz$  y  $dz'$** , lo que podemos hacer diferenciando en la expresión de  $z'$ .

$$dz' = \frac{a^2}{z^2} dz$$

He ignorado el signo, porque **sobre el trozo diferencial  $dq'$  en  $z'$  solo nos interesa su longitud  $dz'$** . Con esto:

$$\lambda' \frac{a^2}{z^2} dz = -\frac{a}{z} \lambda dz$$

**Finalmente**, despejando y utilizando la relación entre  $z$  y  $z'$ , obtenemos:

$$\lambda' = -\lambda \frac{a}{z'}$$

Por lo tanto, la distribución imagen es una distribución lineal de carga variable  $\lambda'(z')$  entre  $z' = a/3$  y  $z' = a/2$ , que son las posiciones de las imágenes en  $3a$  y  $2a$ , respectivamente. Para obtener la carga total de la imagen, utilizamos la carga total de una distribución lineal de carga.

$$Q_T = \int_{a/3}^{a/2} \lambda'(z') dz'$$

Y finalmente, para obtener el potencial a partir de las dos distribuciones lineales de carga utilizamos la expresión del potencial:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Tenemos dos contribuciones, la de  $\lambda$  y la de  $\lambda'(z')$ . Vamos a detallar los elementos de cada una de las dos integrales, aunque primero vamos a observar que tanto la distribución lineal de carga como el punto  $z$  están en el mismo eje. Además, tenemos que tener cuidado con la notación, ya que las primas ' en la integral se refieren a las variables espaciales en la región de la fuente que genera el potencial. Por eso, cuando haga la integral en el hilo  $\lambda$ , también voy a usar  $z'$ , como la posición en el hilo que genera el potencial. Para el hilo original:

$$\begin{aligned} \int_C &= \int_{z'=2a}^{z'=3a} \\ \lambda(\vec{r}') &= \lambda \\ dl &= dz' \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= z - z' \end{aligned}$$

Observemos que  $|\vec{r} - \vec{r}'| = z - z'$  se puede hacer por que el enunciado pide calcular el valor para  $z > 3a$ , es decir, que  $z$  siempre es mayor que  $z' \leq 3a$ . Para el hilo imagen:

$$\int_C = \int_{z'=a/3}^{z'=a/2} \lambda(\vec{r}') = \lambda(z') = -\lambda \frac{a}{z'} \\ dl = dz' \\ |\vec{r} - \vec{r}'| = z - z'$$

Con lo que el potencial se puede obtener resolviendo la siguiente expresión:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{z'=2a}^{z'=3a} \frac{\lambda dz'}{z - z'} + \int_{z'=a/3}^{z'=a/2} \frac{-\lambda adz'}{z'(z - z')} \right)$$

La primera integral es inmediata, y la segunda se puede resolver por fracciones simples ( $\frac{z}{z'(z-z')} = \frac{1}{z'} - \frac{1}{z-z'}$ ), aunque **con poner la expresión, sería suficiente para tener el problema bien.**

 Note

## Problema primer llamamiento de magnetostática

Una bobina pequeña 1 de radio  $a$  y  $N_1$  vueltas se coloca encima de otra bobina 2 de mayor tamaño de radio  $b$  y  $N_2$  vueltas, de forma que los ejes de ambos bobinados coinciden y las dos bobinas están a una distancia  $d$ . En ambas bobinas, la única dimensión relevante es el radio. Considere  $a \ll b$  y  $a \ll d$ , de forma que la bobina pequeña 1 puede considerarse como un dipolo magnético, mientras que  $b$  y  $d$  son del mismo orden de magnitud.

- A) Calcule el flujo magnético que atraviesa el circuito de la bobina pequeña 1 cuando por la bobina 2 pasa una corriente  $I_2$  (4 puntos).
- B) Calcule el flujo magnético que atraviesa el circuito de la bobina 2 cuando por la bobina pequeña 1 pasa una corriente  $I_1$  (3 puntos).
- C) Los coeficientes de inducción mutua  $M_{12}$  y  $M_{21}$  (3 puntos).

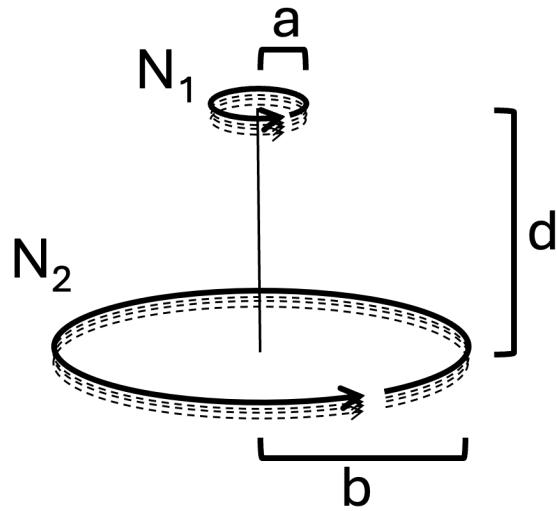


Fig. 30 Figura 1.

El enunciado dice que las bobinas son tan estrechas que podemos considerar que todas las espiras que conforman la bobina están prácticamente en la misma posición. Es una suposición común y que en la práctica, en muchas configuraciones reales, se puede considerar como válida. Por lo tanto, en el primer apartado, por ejemplo, **la corriente total en la bobina 2 es  $I = N_2 I_2$** , mientras que el

**diferencial de superficie de la superficie limitada por la bobina 1 es**  $dS_1 = N_1 dS$ . Con esto, pasamos a resolver las integrales de flujo. La primera que nos piden es:

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

Dado que la bobina 1 es pequeña, **podemos aproximar el campo magnético que genera la bobina 2 por el valor en el eje**. Esto es conveniente, por que calcular el campo magnético que genera una espira fuera de su eje es difícil.

**Note**

**El campo magnético generado por una espira solo es fácil de calcular en el eje de la espira.** De hecho, el valor del campo magnético generado por una espira *fueras de su eje* solo lo calculamos para distancias *muy grandes* con respecto a las dimensiones de la espira, es decir, *para un dipolo magnético*.

Con esta simplificación, **la integral se convierte en el producto de los vectores**:

$$\Phi_{12} = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1$$

Calculamos el campo magnético generado por una espira por la que pasa una corriente  $I = N_2 I_2$  atravesando una superficie de área  $S_1 = N_1 \pi a^2$ .

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_2 I_2 b^2}{2(d^2 + b^2)^{3/2}} N_1 \pi a^2$$

El flujo contrario, el campo magnético generado por la bobina 1 que atraviesa la bobina 2 sigue la expresión simétrica:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

**Las mismas consideraciones acerca de la corriente y la superficie son válidas:**  $I = N_1 I_1$  y  $dS_2 = N_2 dS$ . En este caso, el campo magnético generado por la bobina 1 es el de un dipolo magnético: dado que  $a$  es muy pequeño, **todos los puntos del espacio se pueden considerar**

**como que están muy lejos, con respecto a las dimensiones de la espira 1.** La expresión del campo magnético producido por un dipolo magnético es conocida:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

En este caso,  $\vec{m} = I\pi a^2 \vec{u}_z = N_1 I_1 \pi a^2 \vec{u}_z$ , mientras que  $\vec{r} = r\vec{u}_r$  es precisamente la coordenada radial de las coordenadas esféricas. En esta caso:

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = mr \cos \theta = mr \left( -\frac{d}{r} \right) = -md$$

Con  $r$  y  $\theta$  de coordenadas esféricas. **No se puede simplificar el campo magnético como constante de ninguna manera.** Dado que la superficie limitada por la bobina 2 es grande, **el campo magnético no es constante en la superficie**. Para realizar la integral, primero, vamos a parametrizar la superficie limitada por la bobina 2:

$$d\vec{S} = sds d\varphi \vec{u}_z$$

Con  $s$ ,  $\varphi$  y  $z$  de coordenadas cilíndricas,  $r \in [0, b]$  y  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . La distancia  $r$  entre el dipolo magnético y un punto de la superficie es:

$$r = \sqrt{s^2 + d^2}$$

Mientras que el vector  $\vec{r} = -d\vec{u}_z + s\vec{u}_s$ . Con esto, podemos usar la expresión para obtener la integral del flujo magnético.

$$\Phi_{21} = \int_{s=0}^{s=b} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{\mu_0 N_1 I_1 \pi a^2}{4\pi} \left( \frac{-3d(-d\vec{u}_z + s\vec{u}_s)}{(s^2 + d^2)^{5/2}} - \frac{\vec{u}_z}{(s^2 + d^2)^{3/2}} \right) \cdot (N_2 sds d\varphi \vec{u}_z)$$

El resultado de la integral es el mismo que en el apartado A), cambiando  $I_2 \rightarrow I_1$ . Por supuesto, los coeficientes de inducción mutua también salen iguales:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

*(De hecho, esta igualdad nos ofrece una manera alternativa más rápida de resolver el problema. Después de calcular el flujo  $\Phi_{12}$  que depende de  $I_2$ , podemos obtener  $M_{12}$ . Dado que  $M_{12} = M_{21}$  y  $\Phi_{21} = M_{21}I_1$ , podemos concluir que el flujo  $\Phi_{21}$  se puede obtener escribiendo el flujo  $\Phi_{12}$  realizando el cambio  $I_2 \rightarrow I_1$ .)*

 Note

## Problema segundo llamamiento de magnetostática

Un alambre de material magnético con una susceptibilidad magnética  $\chi_m$  tiene un arrollamiento de hilos por los que circula una corriente  $I$ . En un segmento de longitud  $L$  hay  $N$  hilos. Calcule:

- A) Los campos  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{M}$  (5 puntos).
- B) Las densidades de corriente de polarización (2 puntos).
- C) La fuerza magnetomotriz de los hilos ( $fmm$ , en unidades de  $A$ ) y la reluctancia del material ( $R$ , en unidades de  $A/(Tm^2)$ ) (3 puntos).

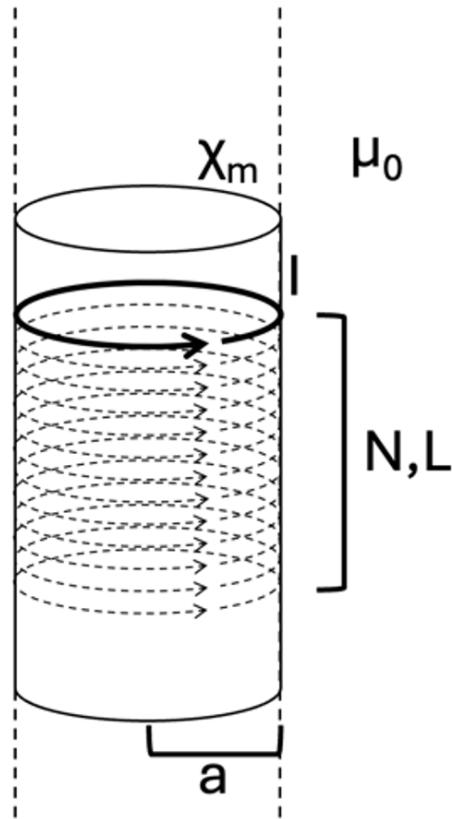


Fig. 31 Figura 1.

Este problema tiene simetría cilíndrica de rotación y de translación en la dirección del eje. Es decir, si rotamos la configuración un ángulo  $\phi$  cualquiera o si desplazamos la configuración en la dirección  $z$ , la configuración queda igual. Además, teniendo un medio material distinto en el interior

y en el exterior, lo conveniente es usar la ley de Ampere sobre  $\vec{H}$ , que es independiente del material.

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

Debemos elegir un circuito de Ampere que nos permita resolver el problema. Vemos que por la regla de la mano derecha, el campo magnético debe tener la dirección  $\vec{u}_z$ .

 Note

El circuito de Ampere debe elegirse de forma que **la superficie de dicho circuito de Ampere tenga lados paralelos al campo magnético**. Los lados restantes, si los hay, deberían ser perpendiculares al campo magnético. Para ello, debemos adivinar **la dirección del campo magnético usando la regla de la mano derecha**. Por otra parte, **el circuito de Ampere debe estar atravesado por la corriente que genera el campo**.

En este caso, un trozo del circuito de Ampere debe tener la dirección  $\vec{u}_z$  por el interior del arrollamiento, para que sea colineal con el campo magnético. Ponemos otro por el exterior, para poder comparar el campo magnético interior y exterior y los dos lados restantes, perpendiculares a la dirección  $\vec{u}_z$ . De esta forma, el circuito de Ampere será un marco rectangular de altura  $L$  con un lado dentro del arrollamiento y otro lado fuera, de forma que la corriente que atraviesa la superficie limitada por el circuito de Ampere es  $I_{enc} = NI$ .

Observamos que **la posición de los lados es indiferente** y que siempre le atraviesa la misma corriente. De esta manera deducimos que **el campo magnético tanto dentro como fuera del arrollamiento debe ser constante**. Y además, el campo exterior debe ser nulo, para que en el infinito el campo magnético también se anule. Por lo tanto, la integral de Ampere resulta:

$$HL = NI$$

Con lo que podemos despejar  $H$  y ponerle la dirección  $\vec{u}_z$ . Para obtener  $\vec{M}$  tenemos que multiplicar por  $\chi_m \vec{H}$ , y para obtener  $\vec{B}$ , podemos usar la expresión que los relaciona:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Las densidades de corriente de magnetización se pueden obtener a partir de su definición:

$$J_m = \nabla \times \vec{M}$$
$$j_m = \vec{M} \times \vec{n}$$

La fuerza magnetomotriz en un circuito magnético es tan solo el producto de la corriente que atraviesa el arrollamiento por el número de vueltas. Para un segmento de longitud  $L$

$$fmm = NI$$

Observamos que las unidades son las que nos sugiere el enunciado. Por otra parte, la reluctancia estaba relacionada con la permeabilidad magnética  $\mu_1$ , el área  $A$  y la longitud  $L$ .

$$R = \frac{L}{\mu_1 A} = \frac{L}{\mu_0(1 + \chi_m)\pi a^2}$$

# Problemas Examen 2a convocatoria 24/25

 Note

## Problema de electrostática

Un condensador esférico está formado por dos esferas de conductor eléctrico perfecto (CEP) de radios  $a$  y  $c$ , con  $a < c$ . La esfera exterior está conectada a tierra, mientras que la esfera interior está aislada y tiene una carga total  $Q$ . El dieléctrico intermedio se divide en 2 regiones de permitividades relativas  $\epsilon_1 = \epsilon_{1r}\epsilon_0$  (constante) para  $r < b$ , y  $\epsilon_2(r) = k\epsilon_0 r$  con  $k$  constante, para  $r > b$ .

- A) Obtenga el valor de  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$  en todos los puntos del espacio entre las dos esferas de CEP (4 puntos).
- B) El potencial  $V$  al que se encuentra la esfera de CEP interna de radio  $a$  (3 puntos).
- C) La capacidad de cada una de las dos regiones de permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2(r)$ ? ¿Cuánto vale la capacidad total? (3 puntos).

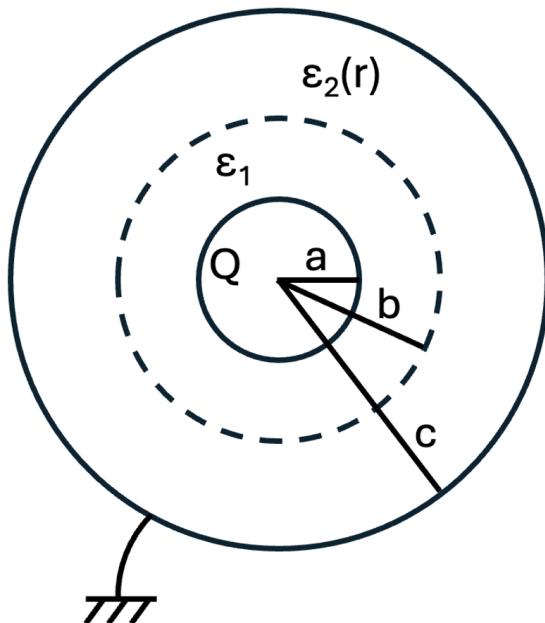


Fig. 32 Figura 1.

Este problema tiene simetría esférica, y además nos dan la carga central, por lo que se puede resolver por Gauss. Además, la ley de Gauss es conveniente por que se puede poner para medios materiales y obtener  $\vec{D}$  directamente.

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

### Note

**Debemos elegir una superficie cerrada de Gauss conveniente** para resolver el problema. Debemos poder deducir la dirección que tendrá el campo eléctrico a través de la simetría del problema. Las condiciones que buscamos son:

- La superficie debería ser **perpendicular** al campo eléctrico.
- El campo eléctrico debe ser **constante** en la superficie.
- **La carga encerrada** por la superficie debe ser conocida.

En este caso, **la simetría del problema nos indica que el campo eléctrico va a ser radial**, por lo que la superficie cerrada que cumple las condiciones es **una esfera**. Elegimos por lo tanto una esfera de radio  $r$ , es decir, el tamaño de la esfera es arbitrario.

Claramente, si  $r < a$ , la carga encerrada es 0. Del mismo modo, si  $r > c$ , la carga encerrada es la del CEP interior y la del CEP exterior, que no está indicada en el dibujo pero sabemos que debe ser  $-Q$ , como en todos los condensadores. *Por lo tanto, el rango que nos interesa es  $r \in [a, c]$ .* La carga encerrada es  $Q$  en este rango, mientras que al ser  $\vec{D}$  constante y perpendicular a la superficie:

$$D4\pi r^2 = Q$$

De donde podemos despejar  $D$ , y ponerle la dirección radial  $\vec{u}_r$ . Para obtener el campo eléctrico  $\vec{E}_1$  o  $\vec{E}_2$ , no tenemos más que dividir entre  $\epsilon_1$  o  $\epsilon_2(r)$ , mientras que para obtener  $\vec{P}_1$  o  $\vec{P}_2$ , usamos la ecuación que relaciona las tres:

$$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} + \vec{P}$$

Para obtener el potencial, podemos usar la relación definición de potencial:

$$\Phi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

**Debemos elegir un camino conveniente.** El camino debería dar igual, por que al ser un campo conservativo, el resultado de la integral es el mismo independientemente del camino, pero podemos elegir uno que simplifique el calculo.

**i** Note

Para la integral de camino del potencial, **es conveniente elegir un camino que sea colineal con el campo eléctrico**, para que el producto escalar se iguale al producto de los modulos de los vectores. Además, es necesario tener **cuidado con los límites de integración**, y poner los límites empezando donde conocemos el potencial.

En este caso, el camino más conveniente es una linea radial empezando en  $r = c$  y acabando en  $r = a$ , ya que  $\Phi = 0$  en  $r = c$  y  $\Phi = V$  en  $r = a$ . **¡Cuidado!** La expresión de  $E$  es diferente si  $r$  es mayor o menor que  $b$ , por lo que la integral debe dividirse en los dos tramos.

$$V = - \int_{r=c}^{r=a} E dr = - \int_{r=c}^{r=b} E_2 dr - \int_{r=b}^{r=a} E_1 dr$$

Como la expresión de  $\vec{E}$  está obtenida del apartado anterior, se puede calcular facilmente. La expresión que nos da es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{8\pi k \varepsilon_0} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right)$$

 Note

## Problema de magnetostática

Una bobina de sección rectangular tiene un radio interior  $a$ , un radio exterior  $b$  y una altura  $h$ . La bobina tiene un arrollamiento de  $N$  espiras rectangulares de dimensiones  $b - a$  y  $h$  por las que circula una corriente  $I$ . El interior de la bobina tiene un material con permitividad magnética  $\mu_0$ .

- A) Calcule el campo magnético en el interior de la bobina de sección rectangular. Tenga en cuenta que depende de la coordenada radial  $s$  de las coordenadas cilíndricas (4 puntos).
- B) Calcule el flujo magnético que atraviesa la bobina (3 puntos).
- C) ¿Cuál es la autoinducción de la bobina? (3 puntos).

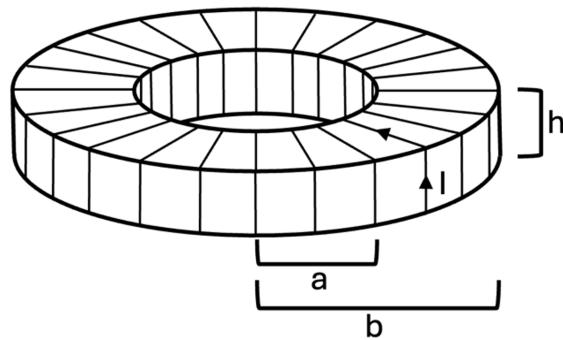


Fig. 33 Figura 1.

Este problema tiene simetría cilíndrica, es decir, si rotamos el dibujo un ángulo  $\phi$  de cilíndricas cualquiera, el diagrama es el mismo, suponiendo que las espiras son suficientemente numerosas como para hacer un arrollamiento denso. Por lo tanto, parece que podemos usar la ley de Ampere.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Debemos deducir por la regla de la mano derecha la dirección del campo magnético, que en este caso, sera la dirección  $-\phi$ .

### Note

El circuito de Ampere debe elegirse de forma que **la superficie de dicho circuito de Ampere tenga lados paralelos al campo magnético**. Los lados restantes, si los hay, deberían ser perpendiculares al campo magnético. Para ello, debemos adivinar **la dirección del campo magnético usando la regla de la mano derecha**. Por otra parte, **el circuito de Ampere debe estar atravesado por la corriente que genera el campo**.

En este caso, el circuito de Ampere conveniente es un círculo de radio  $s$  en el interior de la bobina. De esta forma, la corriente que atraviesa el interior del circulo es todos los trozo internos de los hilos de corriente, por lo que  $I_{enc} = NI$ . Así:

$$B2\pi s = \mu_0 NI$$

**Observemos que esta solución depende de  $s$ .** En el problema B6.6 de los boletines de problemas suponiamos que la bobina era pequeña y este campo magnético era prácticamente constante, pero en general esto no tiene por qué ser así. Por lo tanto, la integral del flujo magnético  $\Phi$  no se puede simplificar al producto  $BS$ , sino que hay que hacer la integral. Otra cosa que observamos es que si el circuito de Ampere estuviera fuera de la bobina, la corriente encerrada sería 0, y por tanto  $B = 0$  fuera de la bobina.

Para calcular el flujo magnético  $\Phi$ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

**La superficie debe ser la superficie encerrada por el circuito**, es decir, es un marco rectangular con  $z \in [0, h]$  y  $s \in [a, b]$ , siendo el diferencial de superficie  $d\vec{S} = -dsdz\vec{u}_\phi$ . Le hemos puesto la misma dirección que el campo magnético. Además, observamos, como es común en las bobinas bien diseñadas, que **el flujo magnético atraviesa el circuito  $N$  veces**, por lo que calculamos el flujo de la siguiente manera:

$$\Phi = N \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=a}^{r=b} B ds dz$$

Con esto, el resultado de la integral da:

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

El coeficiente de autoinducción se obtiene de su definición:

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

*Ultima actualización: 06/02/25*