ELECTROMAGNETISMO I

Profesora Responsable: Encarnación Muñoz Serrano

TITULACIÓN: GRADO DE FÍSICA (UCO), 3er CURSO

Boletín de Problemas 2

Solución de Problemas Electrostáticos:

2.1.- Método de imágenes

1. Se tiene una carga q a una distancia d de un plano conductor infinito que se encuentra a potencial nulo. Determine:

    a. La fuerza sobre la carga.
    b. La densidad superficial de carga inducida en el plano y, por integración directa, el valor de la carga total inducida en él.
    c. El potencial y el campo electrostático en el punto medio entre la carga y el plano.
    d. Obtenga una expresión aproximada del potencial a grandes distancias del plano. Interprete el resultado obtenido.

2. Una esfera metálica aislada de radio a tiene carga Q. A una distancia D del centro de la esfera ($D>a$) se coloca una carga puntual q. Calcule:

    a. El valor de q para que la fuerza a la que se encuentra sometida esta carga sea nula.
    b. El trabajo mínimo necesario para llevar la carga q a una distancia infinita de la esfera (por integración directa a partir de la fuerza obtenida en el apartado a).

3. Un dipolo eléctrico $\vec{p}$ está situado a una distancia d del centro de una esfera metálica de radio a ($a < d$) que está conectada a tierra. La orientación del dipolo es radial respecto al centro de la esfera. Calcule:

    a. La forma, magnitud y posición de la imagen del dipolo.
    b. El potencial y el campo electrostáticos en un punto cualquiera del espacio.
    c. ¿Cuál será el momento multipolar predominante en puntos alejados del sistema?

4. Una superficie plana en forma de corona circular de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) está cargada con una densidad superficial de carga constante σ y situada en el plano z = 0 con su centro coincidiendo con el origen de coordenadas O. Una esfera conductora de radio a ($a < R_1$) aislada y previamente cargada con una carga Q, se coloca coincidiendo su centro con el de la corona. Calcule:

   a. La forma y densidad de la imagen de la corona circular.
   b. El potencial que tendrá, en esta situación, la esfera conductora.
   c. Si se coloca un pequeño dipolo de valor $\overrightarrow{p_0}$ a una distancia d del centro de la esfera sobre el eje de la corona y orientado a lo largo del eje, ¿cuáles serán los efectos mecánicos a los que se vería sometido el dipolo?

2.2.- Método de separación de variables

5. La máxima intensidad del campo eléctrico que puede existir en el aire, en condiciones normales de presión y temperatura, sin que se produzca ruptura eléctrica es 3 MV/m. Calcule:

   a. El mayor potencial eléctrico a que se puede conectar una esfera conductora de 10 cm de radio sin que se produzca ruptura.
   b. ¿Hay ruptura eléctrica si, manteniendo conectada la esfera a dicho potencial, se le rodea con otra esfera conductora de 20 cm de radio, concéntrica con ella y conectada a tierra?

6. El potencial en la superficie de una esfera de radio R está dado por $V_0 = kcos(3\theta)$ donde k es una constante y θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas. Calcule:

   a. El potencial dentro y fuera de la esfera.
   b. La densidad superficial de carga en la esfera.

7. Una superficie esférica de radio R con centro en el origen de coordenadas posee una densidad de carga $\sigma(\theta) = \sigma_0 cos\theta$, siendo θ el ángulo polar de coordenadas esféricas. Calcule:

   a. El potencial electrostático en todo el espacio.
   b. El campo electrostático. Interprete el resultado obtenido.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Obténgase el problema equivalente según el Método de Imágenes para los siguientes casos, indicando cuál es la carga total inducida en cada superficie conductora, cómo se calcularía la densidad superficial de carga inducida en cada caso y el potencial al que quedaría dicha superficie conductora:

   a. Plano conductor infinito a tierra frente a una carga puntual q situada a una distancia d del plano.
   b. Esfera conductora colocada a tierra frente a una carga puntual q situada a una distancia d del centro de la esfera.
   c. Esfera conductora conectada a una batería de V voltios, frente a una carga puntual q situada a una distancia d del centro de la esfera.
   d. Esfera conductora aislada y descargada frente a una carga puntual q situada a una distancia d del centro de la esfera. ¿Y si la esfera tuviera una carga Q?

2. Una esfera hueca metálica de radio *a* se mantiene a potencial nulo. Dentro de la esfera se tienen dos cargas puntuales de valor *q* situadas sobre un diámetro, una a cada lado del centro y a la distancia *a/2* del centro. Determine:

   a. El valor modular de la fuerza electrostática sobre una de estas cargas e indique si la fuerza aleja o acerca la carga al centro de la esfera.

   Solución:
   $F = \frac{2q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{25}\right] \approx 0.392\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}$. La aleja.

3. Una línea cargada con densidad lineal de carga λ se coloca paralelamente y a una distancia *R* del eje de un cilindro conductor indefinido de radio *b* que se mantiene a un potencial fijo *V*. Calcule:

   a. La forma, magnitud y posición de la imagen de la línea.
   b. El potencial en un punto cualquiera (expresado en coordenadas polares con origen en el eje del cilindro y la recta que va desde el origen a la línea cargada como eje X).
   c. La densidad superficial de carga inducida en el cilindro.
   d. La fuerza por unidad de longitud ejercida sobre la línea cargada.

   Solución:
   (a) Línea indefinida con una densidad lineal de carga λ situada a una distancia del eje del cilindro $d' = \frac{b^2}{R}$.
   (b) $\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{\sqrt{\rho^2+\left(\frac{b^2}{R}\right)^2-2\rho\frac{b^2}{R}cos\theta}}{\sqrt{\rho^2+R^2-2\rho R cos\theta}} + C$

(d) $\frac{d\vec{F}}{dl} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0\left(R-\frac{b^2}{R}\right)}\overrightarrow{u_x}$

4. Una espira circular de radio R de un conductor muy delgado, se carga con una carga Q uniformemente distribuida en su longitud. Se toma una esfera metálica aislada (y previamente descargada) de radio R (igual al de la espira) y se coloca de manera que el plano de la espira es tangente a la esfera. Calcule:

   a. Forma y densidad de carga de la imagen de la espira circular.
   b. El potencial que tendrá la esfera en esta situación.
   c. Si se coloca una carga puntual q (q<<Q) en el eje de la espira, a una distancia d = *10R* del centro de la esfera, ¿cuál sería la diferencia de energía potencial que experimenta la carga puntual cuando se lleva al infinito?

   Solución:
   (a) Espira imagen, $\lambda' = -\sqrt{2}R\lambda$; R´=R/2; $q' = -\sqrt{2}\pi R\lambda$.
   (b) $\varphi = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\varepsilon_0}$.
   (c) $\Delta U = q\left(\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+(9R)^2}} + \frac{\lambda' R/2}{2\varepsilon_0\sqrt{(R/2)^2+(19R/2)^2}} + \frac{\sqrt{2}\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 10R}\right)$.

5. El potencial en la superficie de una esfera hueca de radio R es $V(\theta) = ksen^2(\theta/2)$. (a) Calcule:

   a. El potencial dentro y fuera de la esfera.
   b. La densidad superficial de carga sobre la esfera.

   Sugerencia: Use la fórmula del ángulo mitad: $\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$, para escribir $V(\theta)$ como un polinomio en *cos θ*.

   Solución:
   a) $\varphi_d(r,\theta) = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right)$; $\varphi_f(r,\theta) = \frac{kR}{2r}\left(1 - \frac{R}{r}\cos\theta\right)$ b) $\sigma = \frac{\varepsilon_0 k}{2R}[1 - 3\cos\theta]$

6. Una esfera hueca de radio R con centro en el origen de coordenadas tiene una densidad superficial de carga dada por $\sigma(\theta) = \sigma_0 cos^2\theta$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas y σ_0 es una constante. Halle el potencial en todo el espacio: dentro de la esfera, fuera de ella y sobre la esfera (tome potencial nulo en el infinito).

   Solución: $\varphi_d(r,\theta) = \frac{\sigma_0 R}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma_0 r^2}{15\varepsilon_0 R}(3\cos^2\theta - 1)$; $\varphi_f(r,\theta) = \frac{\sigma_0 R^2}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma_0 R^4}{15\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$