Guillermo Segura Gomez
17 de septiembre de 2023

Tarea 4

1 Método de factorización LU - Doolittle.

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones es posible utilizar matrices para resolver iterativamente o utilizando algún método específico.

Existen distintos métodos, entre ellos esta el método de factorización LU el cual es un método para resolver sistemas como $Ax = b$ donde A es una matriz cuadrada de $n \times n$. Resolvemos encontrando $A = LU$ con L una matriz diagonal inferior y U una matriz diagonal superior. Uno de los métodos para encontrar $A = LU$ es la factorización Doolittle.

Ya que necesitamos resolver el sistema $A = LU$, se tiene que cumplir que para cada elemento en A lo siguiente:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} \longrightarrow A = LU.$$

En el método de doolittle L es una matriz con 1 en su diagonal, mientras que U solo es una matriz diagonal superior. Para calcular los elementos de U y de L tenemos lo siguiente:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad \text{para } i \leq j$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right) \qquad \text{para } i > j$$

Primero comenzamos inicializando las matrices L y U como sigue:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para un ejemplo de $n = 3$

→ Tenemos la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}_{U}$$

- $u_{11} = a_{11} - (l_{11} \cdot u_{11})^{\to 0} = a_{11}$
  $u_{12} = a_{12}$
  $u_{13} = a_{13}$

$$\longrightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la primera columna de L

$$l_{21} = \frac{1}{u_{11}} \left(a_{21} - \cancel{l_{21}}^{\,0} \cdot u_{11} \right) = \frac{2}{1} = 2$$

$$l_{31} = \frac{1}{u_{11}} \left(a_{31} - (l_{31}^{\to 0} \cdot u_{11} + l_{32}^{\to 0} \cdot u_{23}) \right) = 3 \longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos la segunda fila de U y la segunda columna de L

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 8 - 4 = 4$$
$$u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} = 5 - 6 = -1 \longrightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \left(a_{32} - l_{31} u_{12} \right) = \frac{9-6}{4} = \frac{3}{4} \to \boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Finalmente $u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23}$

$\Rightarrow u_{33} = 7 - 3 \cdot 3 + 3/4 = -1.25$

$$\to \boxed{U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1.25 \end{pmatrix}}$$