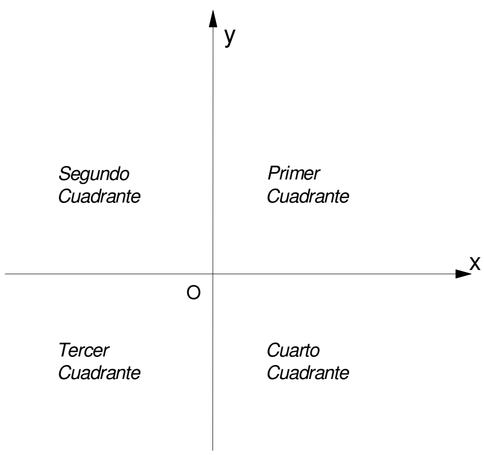
LA RECTA EN EL PLANO

Un sistema de coordenadas rectangulares en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersectan en un punto O al que se conoce con el nombre de origen de coordenadas. Se acostumbra a representar a una de las rectas en posición horizontal y se la denomina eje de las abscisas o eje “X” en tanto que, la otra recta se representa en posición vertical y se la denomina eje de las ordenadas o eje “Y”. Las dos rectas mencionadas constituyen el sistema de ejes coordenados rectangulares, los cuales dividen el plano en cuatro partes llamadas “cuadrantes”. El mencionado sistema también es conocido como sistema cartesiano en honor al filósofo francés René Descartes, que fue el primero en proponer la resolución de problemas geométricos por medio del álgebra a partir de un sistema de coordenadas rectangulares.

Un sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia uno a uno entre cada punto del plano y una pareja ordenada de números reales.



La posición de un punto P en el plano queda definida por una pareja ordenada de números reales (x;y) de los cuales el primero representa la distancia del punto al eje coordenado Y, en tanto que el segundo representa la distancia del punto al eje coordenado de las X, lo cual se representa como: P(x;y).

Figura 1: Cuadrantes

Pendiente de una recta. Ecuación explícita

Si se consideran los puntos $P_1(x_1;y_1);\ P_2(x_2;y_2);\ P_3(x_3;y_3)\ldots P_n(x_n;y_n)$ que pertenecen todos a la misma función lineal, llamada recta (la cual, en este caso, pasa por el origen de coordenadas) podemos hallar la ecuación de la misma. En la figura, se puede observar que todos esos puntos forman triángulos semejantes ya que todos ellos tienen un ángulo en común (α).

Por la condición de triángulos semejantes, se verifican las siguientes proporciones:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\ldots=\frac{y_n}{x_n}=m$$

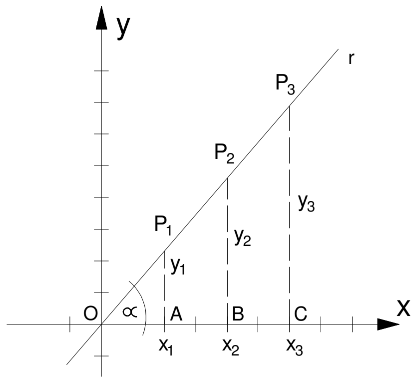


Figura 2: Pendiente de una recta.

Generalizando $\forall\ P \in\ r : \dfrac{y}{x} = m$, si se despeja la variable “y” se puede escribir la ecuación $y = mx$, denominada ecuación de la recta que pasa por el origen y contiene a los puntos

$P_1(x_1; y_1);\ P_2(x_2; y_2);\ P_3(x_3; y_3) \ldots P_n(x_n; y_n)$

El valor de “m” recibe el nombre de *pendiente o coeficiente angular de la recta* y representa la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las abscisas:

$$m = tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$

Si a todas las ordenadas de los puntos les sumamos un valor constante “b” llamado ordenada al origen o parámetro de posición, obtenemos la ecuación explícita de la recta. Así lo muestra la figura siguiente cuya ecuación es: $\boldsymbol{y = mx + b}$

Nótese que si b=0, entonces la recta pasa por el origen y la ecuación explícita toma la forma particular $\boldsymbol{y = mx}$

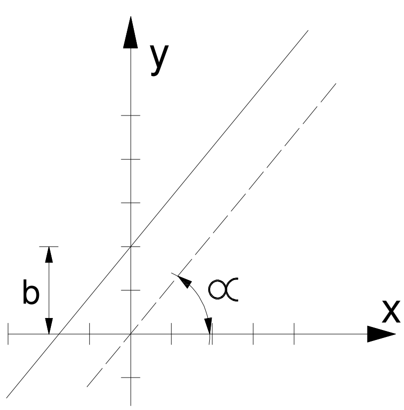


Figura 3: Ordenada al origen (b).

Ecuación General

La ecuación de la recta $y = mx + b$ se puede escribir de la forma $mx - y + b = 0$, que a su vez se puede expresar como $Ax + By + C = 0$ denominada ecuación general o implícita de la recta, que es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Si despejamos la variable "y":

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ la cual se compara con la expresión $y = mx + b$, de donde:

$m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Por ejemplo, para la recta de ecuación $6x - 2y + 4 = 0$

$$m = -\frac{A}{B} \Rightarrow \quad m = -\frac{6}{-2} \Rightarrow \quad m = 3$$

$b = -\frac{C}{B} \Rightarrow \quad b = -\frac{4}{-2} \Rightarrow \quad b = 2$, por lo tanto: $\quad y = 3x + 2$

En función de los valores que adopten los coeficientes A, B y C tenemos posiciones relativas a los ejes:

1) Si A=0, quedará $y = -\frac{C}{B}$, con $C \neq 0;\ B \neq 0$. Gráficamente, es una recta paralela al eje de las abscisas (eje x)

2) Si B=0, quedará $x = -\frac{C}{A}$, con $C \neq 0;\ A \neq 0$. Gráficamente, es una recta paralela al eje de las ordenadas (eje y)

3) Si C=0, quedará $y = -\frac{A}{B}$, con $A \neq 0;\ B \neq 0$. Gráficamente, es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

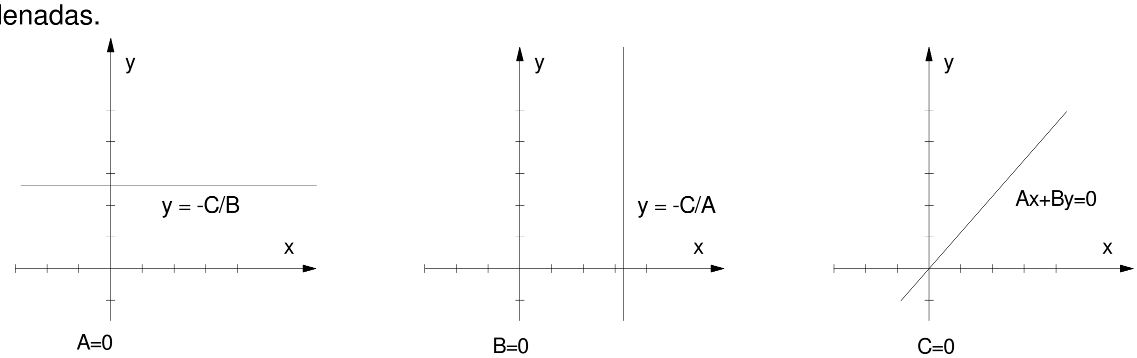


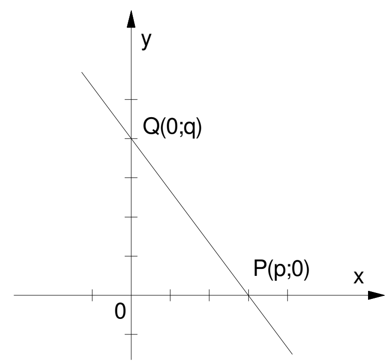
Figura 4: Posiciones particulares de una recta.

Ecuación segmentaria

A partir de la ecuación general se puede escribir de otra manera a la ecuación de la recta llamada "ecuación segmentaria".

$Ax + By + C = 0$

pasando C al segundo miembro.



$Ax + By = -C$

dividiendo por –C

$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = \frac{-C}{-C}$

reordenando:

$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$ y si se llama p y q a las fracciones de los denominadores:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$ **que es la denominada ecuación segmentaria de la recta.**

Donde los valores "p" y "q" son los segmentos que forma la recta con los ejes coordenados; o, dicho de otra manera, son los puntos donde la recta corta a los ejes coordenados (p;0) y (0;q).

Donde "p" recibe el nombre de abscisa al origen y "q" es de ordenada al origen.

Ecuación del haz de rectas que pasan por un punto

Por un punto pasan infinitas rectas, todas tienen en común el mismo punto, pero varían en la inclinación respecto del eje X es decir tienen distintas pendientes por ello podemos hacer el siguiente análisis:

Si partimos de la ecuación explicita $y = mx + b$ como dicha ecuación verifica las coordenadas del punto $P_1(x_1; y_1)$ entonces nos queda $y_1 = mx_1 + b$ si despejamos de esta última expresión el valor de la ordenada al origen "b" tenemos:

$b = y_1 - mx_1$ y reemplazando en la ecuación $y = mx + b$, quedando de la siguiente manera: $y = mx + y_1 - mx_1$ en ella, sacando factor común "m" y despejando tenemos la ecuación buscada

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

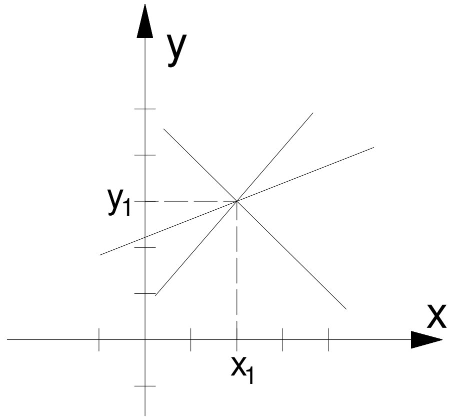


Figura 6: Haz de rectas.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos nos basamos en la ecuación de las infinitas rectas que pasan por un punto salvo que esta al tener una pendiente definida es única. Si conocemos las coordenadas de los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ podemos razonar de la siguiente manera, como la pendiente "m" de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el semieje positivo de las x tenemos que:

$tg\,\alpha = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y reemplazando en la ecuación del haz de rectas que pasan por un punto tenemos:

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ que es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

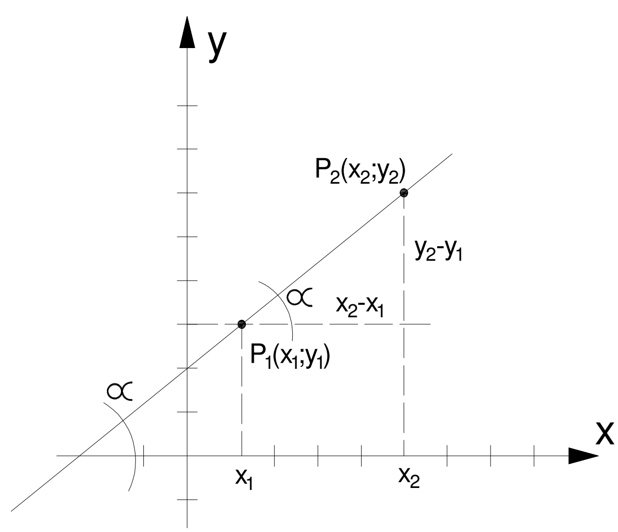


Figura 7: Recta que pasa por dos puntos.

Distancia entre dos puntos

Utilizando la figura anterior podemos también calcular la distancia que existe entre los dos puntos, utilizando el teorema de Pitágoras suponiendo que la distancia es la hipotenusa nos queda:

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{P_1N}\right)^2 + \left(\overline{NP_2}\right)^2$$

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

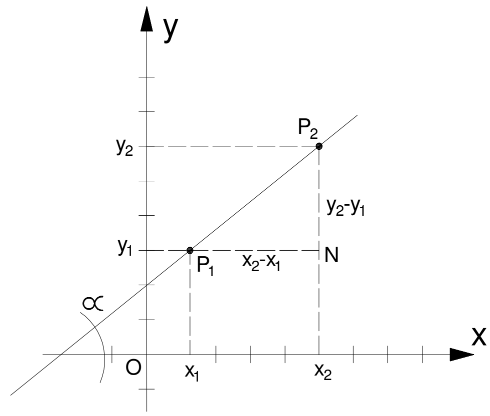


Figura 8: Distancia entre puntos.

Ángulo entre dos rectas.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Para determinar el ángulo que forman un par de rectas es necesario tener como datos las dos rectas dadas en forma explícita ya que vamos a demostrar que la forma para calcular dicho ángulo se basa en el uso de sendas pendientes.

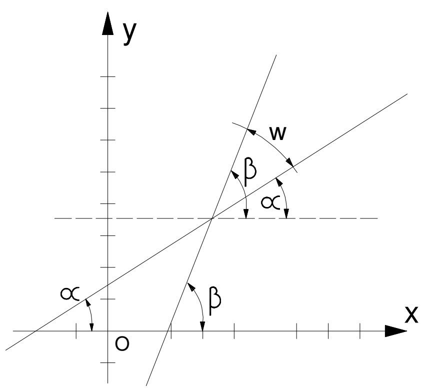


Figura 9: Ángulo entre dos rectas.

Datos

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \Rightarrow m_1 = tg\alpha \\ y = m_2 x + b_2 \Rightarrow m_2 = tg\beta \end{cases}$$

Si llamamos ω al ángulo que forman las rectas vemos según el gráfico que $\omega = \beta - \alpha$ y usando las fórmulas de la trigonometría vemos que la:

$$tg\,\omega = tg\left(\beta - \alpha\right) = \frac{tg\,\beta - tg\,\alpha}{1 + tg\,\beta . tg\,\alpha}$$

Pero como nosotros buscamos el ángulo ω aplicamos el arco tangente y nos queda:

$$\omega = arc\,tg\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}\right)$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO:

Si dos rectas son paralelas el ángulo que forman entre ellas es de valor 0 por tal motivo la tangente trigonométrica de 0 es igual a 0 donde:

$$tg\ \omega = \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} \right) = 0$$

Para que este cociente sea cero el numerador debe ser cero $\Rightarrow m_2 - m_1 = 0$, por tal motivo: $m_2 = m_1$

Conclusión: Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:

Si dos rectas son perpendiculares el ángulo que forman entre si es de 90º y la tangente trigonométrica de un ángulo recto es infinito, por tal motivo para que un cociente sea infinitamente grande el denominador de dicho cociente tiene que ser infinitamente pequeño, podemos intuir entonces que en el cociente el denominador es igual a cero:

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} \rightarrow \infty$$

$$1 + m_1 . m_2 = 0 \quad \therefore \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Conclusión: Dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y opuestas.

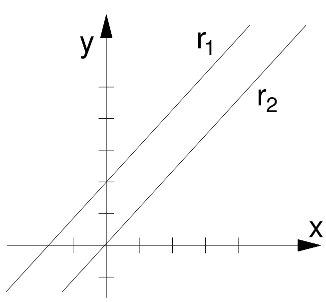


Figura 10: Rectas paralelas.

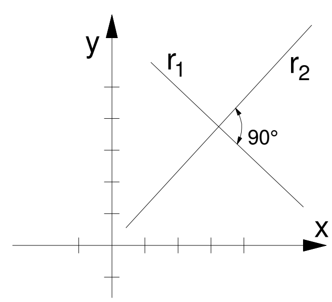


Figura 11: Rectas perpendiculares.

Distancia de un punto a una recta

Mediante la ecuación normal de la recta podemos calcular la distancia que existe entre un punto de coordenadas conocidas y la recta cuya ecuación también es conocida.

Dada la ecuación normal de la recta r y el punto P1:

$$x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha - d_1 = 0 \quad \text{y} \quad P_1(x_1; y_1)$$

Para la demostración buscamos una recta r` que pasa por el punto P1 y es paralela a la recta dada r y la distancia buscada la vamos a llamar d y está dado por el segmento $\overline{QP_1} = d$, perpendicular a la dirección de la recta r, siendo entonces la menor distancia. Por lo tanto, la ecuación de la nueva recta paralela a r tendrá como ecuación:

$x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha - (d + d_1) = 0$

Como la recta pasa por el punto verifica entonces sus coordenadas y sacando los paréntesis y despejando d nos queda:

$d = x_1\cos\alpha + y_1\,sen\,\alpha - d_1$

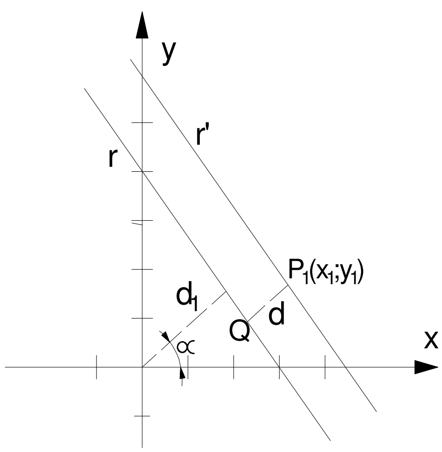


Figura 13: Distancia de un punto a una recta.

No siempre se tiene como dato la ecuación normal de la recta por lo tanto para calcular la distancia entre la recta y un punto se utiliza la ecuación HESSIANA que no es nada más ni nada menos la ecuación normal escrita con los coeficientes de la ecuación general de la recta lo que hace mucho más sencillo el cálculo de la distancia, dicha ecuación si bien no la demostramos la indicamos:

$$d = \frac{A.x_1 + B.y_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

Para obtener la distancia que existe entre dos rectas paralelas no hay una fórmula específica, utilizamos la fórmula que permite calcular la distancia de un punto a una recta.

El procedimiento para calcular la distancia entre las rectas se procede de la siguiente manera: se debe tener como dato las ecuaciones de ambas rectas una en forma explícita y la otra en forma general, con la ecuación explícita encontramos un punto que pertenece a dicha recta y luego calculamos la distancia que existe entre ese punto y la otra recta utilizando la fórmula de distancia vista en el tema anterior, y el problema está resuelto.