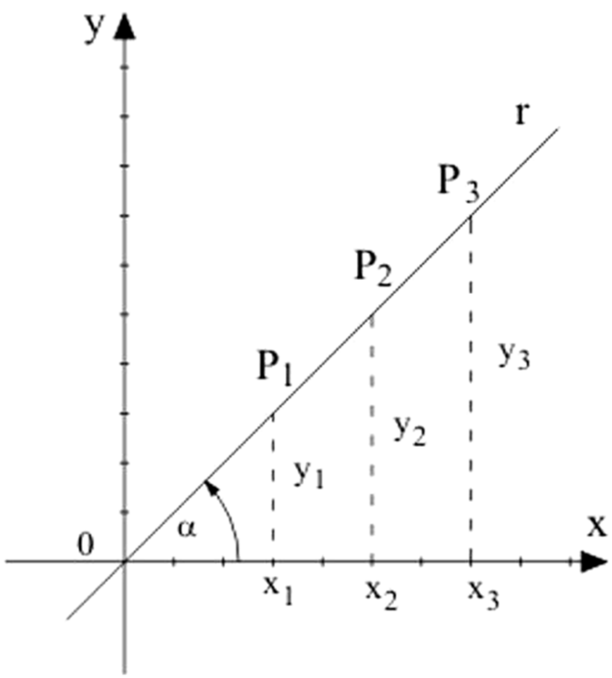
Recta que pasa por el origen de Coordenadas

Consideremos una recta que pasa por el origen de coordenadas

$$P_1(x_1; y_1);\ P_2(x_2; y_2);\ P_3(x_3; y_3) \in r$$

sus ordenadas $y_1; y_2; y_3$

y sus abscisas $x_1; x_2; x_3$



Considerando la tangente de un ángulo

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \cdots = constante$$

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{r} \Rightarrow \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = m \Rightarrow \quad \mathbf{y = m\,x}$$

Ecuación explícita de la recta que pasa por el origen

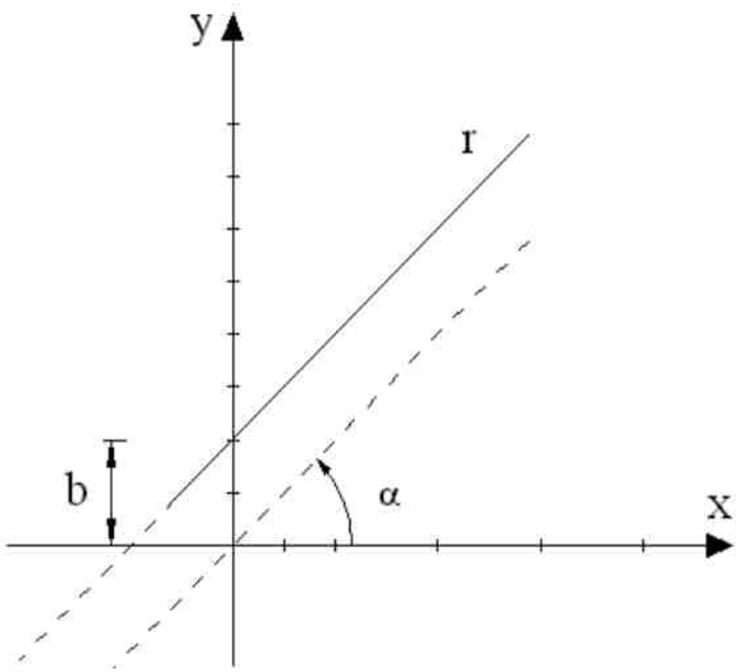
$$\mathrm{m} = \mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

Recta que no pasa por el origen

la recta "r" no pasa por el origen, es paralela a otra que pasa por el origen.

si $x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow (0, b) \in r$

$$\boxed{y = m\,x + b}$$



$$siendo \begin{cases} m = \text{pendiente} \\ b = \text{ordenada al origen} \end{cases}$$

Recta que no pasa por el origen

<u>Ejemplos</u>

$y = x + 2$

x	y
0	2
-3	-1

b = 2

$y = 2x -3$

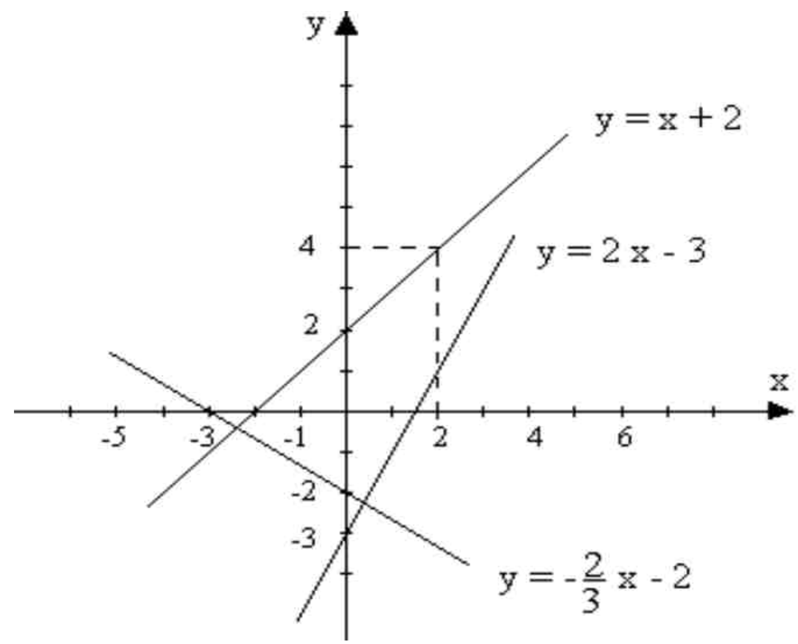
x	y
0	-3
1	-1

b = -3

$$y = -\frac{2}{3}x - 2$$

x	y
0	-2
-3	0

b = -2



Ecuación general de la recta

La ecuación $y = m x + b$ puede ser escrita en forma implícita

$m x - y + b = 0$ que es del tipo **$Ax + By + C = 0$**

Ecuación General de la Recta

Despejando *y* $\Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ donde $\begin{cases} -\frac{A}{B} = m \\ -\frac{C}{B} = b \end{cases}$

Se obtiene $y = m x + b$

Ecuación general de la recta

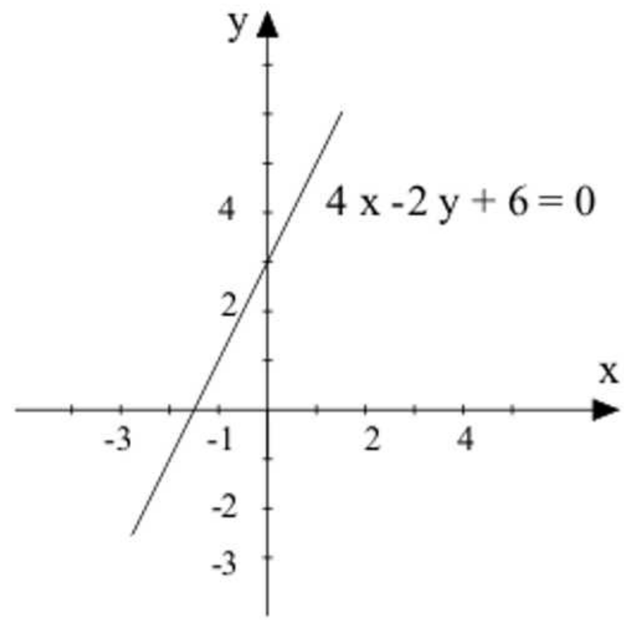
Ejemplo:

$$4x - 2y + 6 = 0$$

$$m = -\frac{A}{B} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{4}{-2} \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

$$b = -\frac{C}{B} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{6}{-2} \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

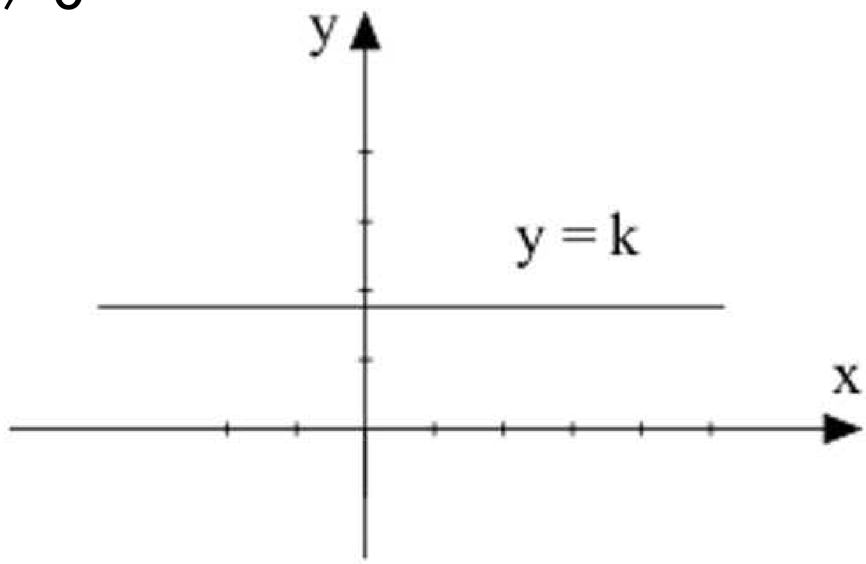
$$\boxed{\therefore \quad \mathbf{y = 2x + 3}}$$



Posiciones particulares de una recta respecto a los ejes coordenados

Dada la ecuación general de la recta $A\,x + B\,y + C = 0$

i) Si $A = 0 \quad \wedge \quad B \neq 0 \quad \wedge \quad C \neq 0$



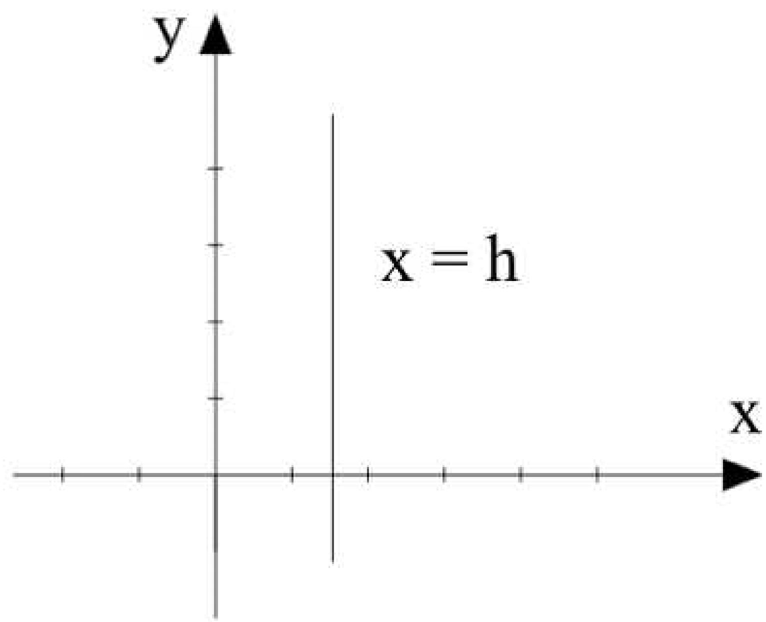
$$\Rightarrow \quad B\,y + C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{C}{B}$$

$\Rightarrow \quad y = k$ la recta es paralela al eje de las x

Posiciones particulares de una recta respecto a los ejes coordenados

ii) Si $A \neq 0 \quad \wedge \quad B = 0 \quad \wedge \quad C \neq 0$

$$\Rightarrow \quad Ax + C = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{C}{A}$$



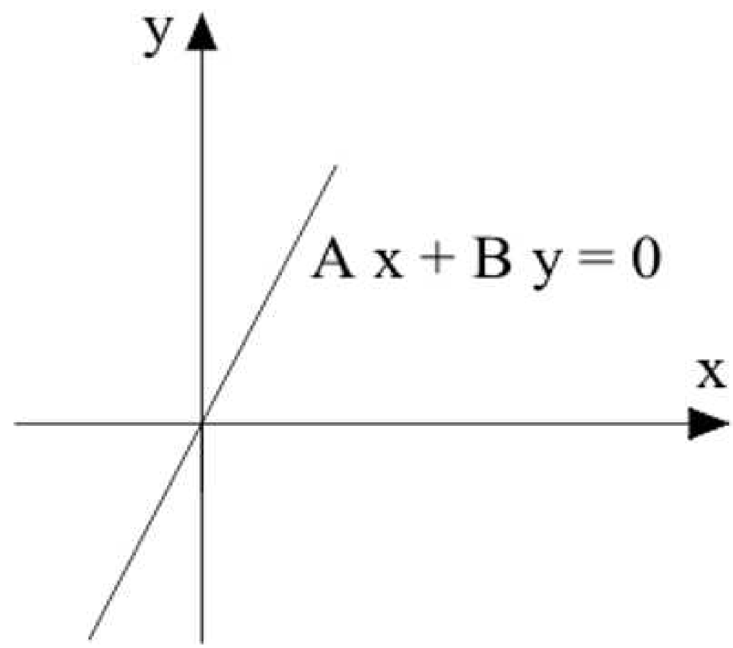
$\Rightarrow \quad x = h$ la recta es paralela al eje de las x

Posiciones particulares de una recta respecto a los ejes coordenados

iii) Si $A \neq 0 \quad \wedge \quad B \neq 0 \quad \wedge \quad C = 0 \quad \Rightarrow$

$A\,x + B\,y = 0 \;\Rightarrow$

$$\boxed{y = -\frac{A}{B}\,x}$$



la recta pasa por el origen de coordenadas

Ecuación segmentaria de la recta

Demostración:

Dada : $A\,x + B\,y + C = 0$ donde $A \neq 0 \;\wedge\; B \neq 0 \;\wedge\; C \neq 0$

$A\,x + B\,y = -C$ (pasamos C al 2º miembro)

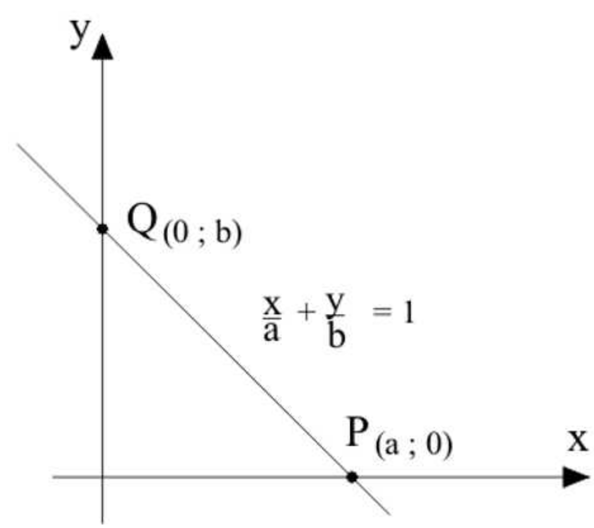
$$\frac{A}{-C}\,x + \frac{B}{-C}\,y = 1$$ (dividimos por -C)

$$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \quad \text{haciendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{C}{A} = a \\ -\frac{C}{B} = b \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = a \Rightarrow P_{(a\,;\,0)}$$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b \Rightarrow Q_{(0\,;\,b)}$$

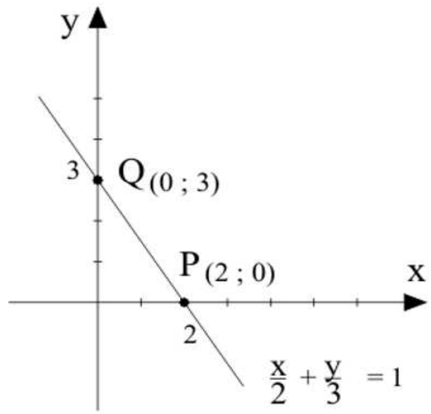
$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv \text{abscisa al origen} \\ b \equiv \text{ordenada al origen} \end{cases}$$



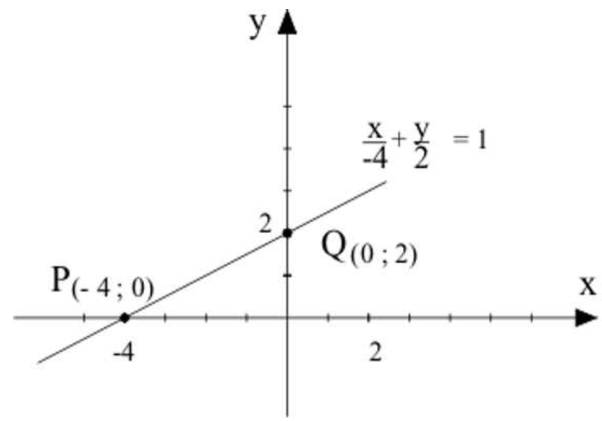
Ecuación segmentaria de la recta

Ejemplos:

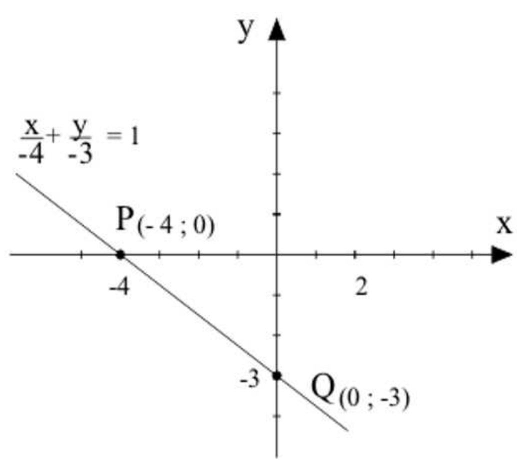
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$$



$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$$



$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$$



Ecuación del haz de rectas

La ecuación de toda recta del plano dada en su forma explícita es

$$y = m.x + b \quad ①$$

Si la recta pasa por $P_1(x_1; y_1)$

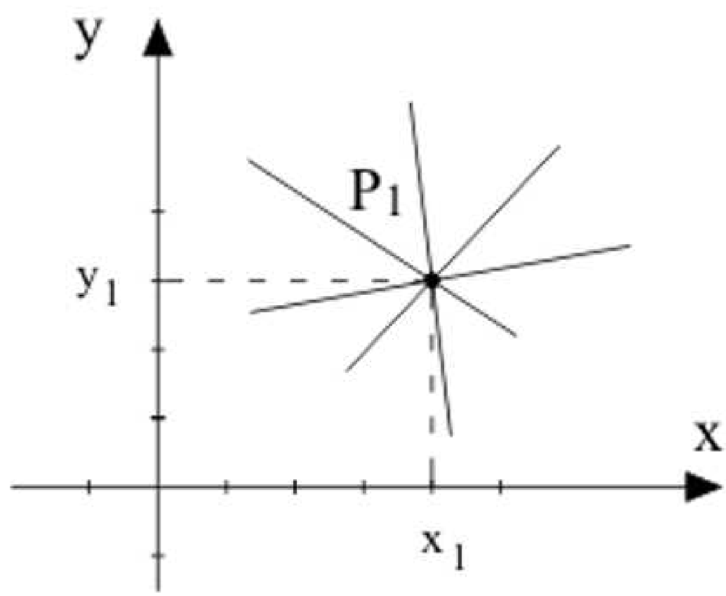
las coordenadas satisfacen

$$y_1 = m.x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - m.x_1$$

Se reemplaza en 1:

$$y = m.x + y_1 - m.x_1 \Rightarrow$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Ecuación del haz de rectas.

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente "m".

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1 ; y_1)$ y $P_2(x_2 ; y_2)$

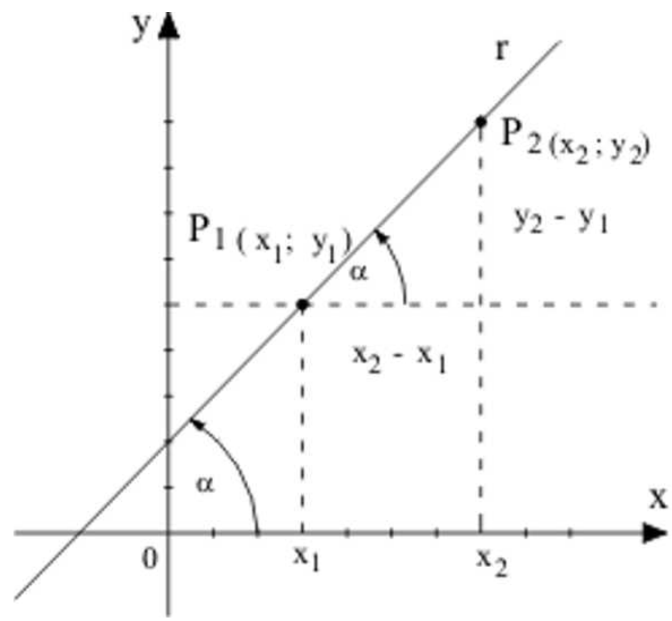
La ecuación de las rectas que pasan por P_1 es $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ ①

Si se conoce el punto P_2 perteneciente a una de las rectas que pasa por P_1

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Reemplazando en ①:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)}$$



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

<u>Ejemplo</u>:

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: A (4 ; 5) y B (-2 ; 2)

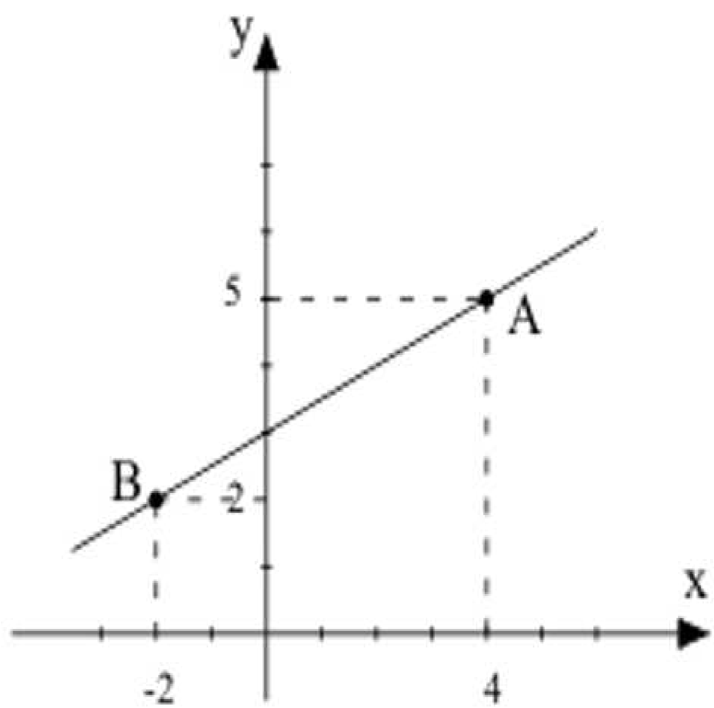
Reemplazamos los valores en

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{2 - 5}{-2 - 4}(x - 4)$$

$$y - 5 = \frac{-3}{-6}(x - 4)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 3}$$



Distancia entre dos puntos

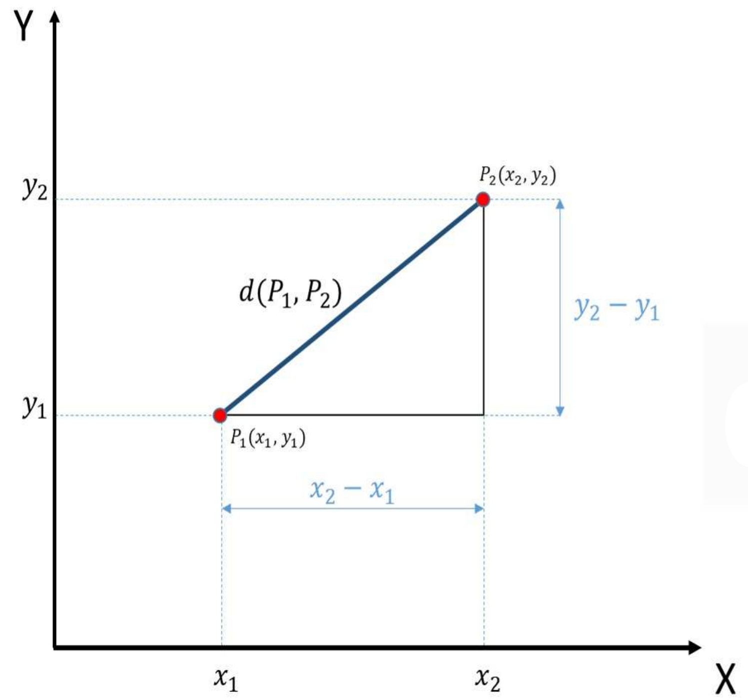
Utilizando la figura anterior podemos también calcular la distancia que existe entre los dos puntos, utilizando el teorema de Pitágoras suponiendo que la distancia es la hipotenusa nos queda

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{P_1N}\right)^2 + \left(\overline{NP_2}\right)^2$$

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

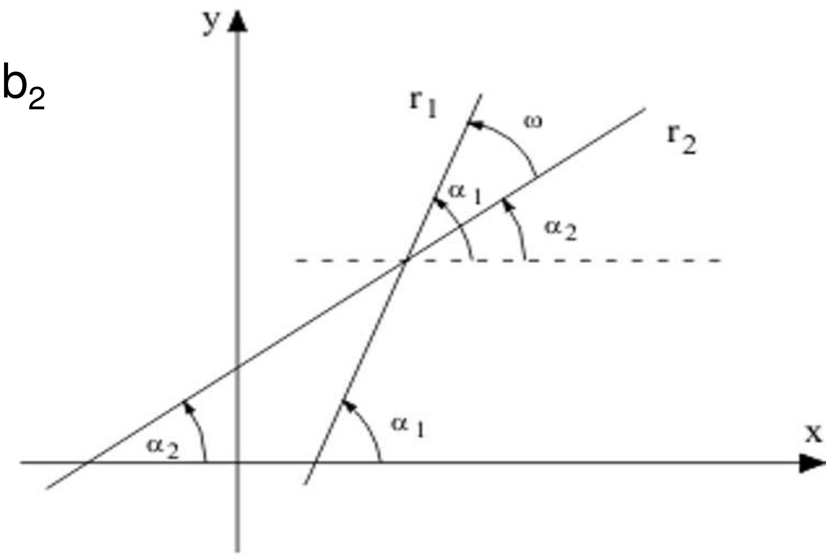
$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$



Ángulo formado por dos rectas

Sean dos rectas r_1 y r_2 de ecuaciones

$r_1 \equiv y = m_1 x + b_1$ $\qquad$ $r_2 \equiv y = m_2 x + b_2$



r_1 determina con el eje X el ángulo α_1

r_2 determina con el eje X el ángulo α_2

$\omega = \alpha_1 - \alpha_2 \qquad \Rightarrow \qquad tg\,\omega = tg\,(\alpha_1 - \alpha_2)$

$$\Rightarrow \qquad tg\omega = \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_2}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} \qquad ①$$

$m_1 = tg\,\alpha_1 \quad \wedge \quad m_2 = tg\,\alpha_2$ $\qquad$ reemplazando en ①

$$tg\omega = \frac{\boldsymbol{m_1 - m_2}}{1 + \boldsymbol{m_1 \cdot m_2}} \qquad \hat{\omega} = arc\ \ tg\ \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

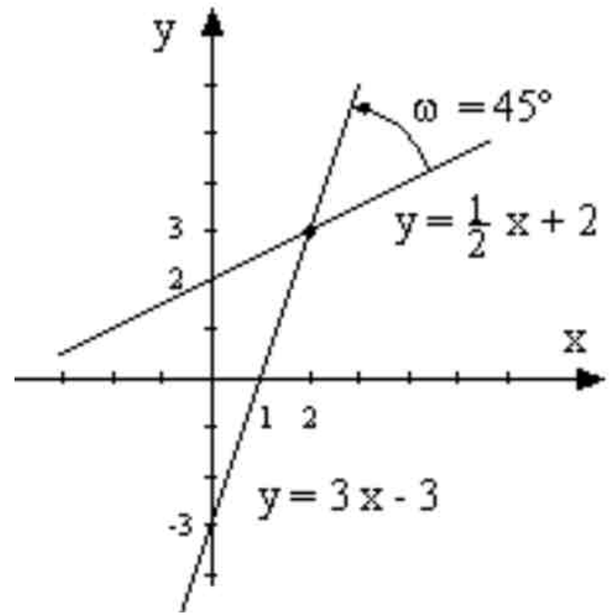
Ángulo formado por dos rectas

Ejemplo:

Calcular el ángulo formado por las rectas

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{2}$$

$$y = 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 3$$



reemplazando $\quad \operatorname{tg}\omega = \dfrac{3 - \dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{1}{2} \cdot 3} = \dfrac{\dfrac{5}{2}}{\dfrac{5}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \hat{\omega} = 45^{\circ}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO:

Si dos rectas son paralelas el ángulo que forman entre ellas es de valor 0 por tal motivo la tangente trigonométrica de 0 es igual a 0 donde:

$$tg\ \omega = \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} \right) = 0$$

Para que este cociente sea cero el numerador debe ser cero

$$\Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \qquad m_2 = m_1$$

Conclusión: Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:

Si dos rectas son perpendiculares el ángulo que forman entre ellas es de 90º por tal motivo, como la tangente trigonométrica de 90º tiende a infinito:

$$tg\,\omega = \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} \right) \to \infty$$

Para que este cociente sea infinito el denominador debe ser cero

$$\Rightarrow 1 + m_2 . m_1 = 0$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Conclusión: Dos rectas son perpendiculares sí y solo sí sus pendientes son inversas y opuestas de manera simultánea.

Ejemplo:

Dada la recta   y = 2 x -3

a) Determinar la recta paralela a la dada de ordenada al origen 1

b) Determinar la recta perpendicular a la dada de ordenada al origen 3

a) $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2 \;\; ; \;\; m_2 = 2 \;\; y \;\; b = 1 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{y = 2\,x + 1}}$ recta paralela

b) $m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \quad \Rightarrow \; m_1 = 2 \; ; \;\; m_2 = -\dfrac{1}{2}$

y $\quad b = 3 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}\,x + 3}}$ recta perpendicular.