MATEMÁTICA

TUP

UD. 7:

COMBINATORIA

Cuando se tiene una suma cuyos términos admiten una misma ley de formación, se puede resumir con la utilización del símbolo sumatoria.

$\Sigma \longrightarrow$ **SÍMBOLO SUMATORIA**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i$$

Generalizando:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EJEMPLO:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

1 $$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

2 $$\sum_{i=1}^{n}(\lambda . a_i) = \lambda . \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3 $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

LA FUNCIÓN FACTORIAL: $f : N_0 \longrightarrow N$ **definida por:**

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \\ f(h+1) = (h+1).f(h) \quad si\ h > 1 \end{cases}$$

La función factorial tiene como símbolo característico el signo de exclamación [!] y se escribe h! para indicar *f(h)*, lo anterior se escribirá como:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ (h+1)! = (h+1).h! \end{cases}$$

y se lee factorial de h o h factorial.

Entonces, el factorial de un natural que sea mayor o igual que 2 será igual al producto de los n primeros números naturales:

$$n! = 1.2.3.....n = n.(n-1).(n-2)....3.2.1$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

ANÁLISIS COMBINATORIO

Tiene como finalidad determinar el número de agrupaciones que se pueden formar a partir de un número determinado de elementos de cualquier naturaleza.

Las agrupaciones se diferencian entre sí por el orden en el que se encuentran colocados o por la naturaleza de los mismos.

Se distinguen 3 formas de agrupaciones:

- Arreglos
- Combinaciones
- Permutaciones

Se distinguen:

Análisis Combinatorio Simple (o sin repetición), donde los elementos no pueden repetirse.

Análisis Combinatorio con Repetición, donde los elementos pueden repetirse.

ARREGLOS SIMPLES: A_n^m

Arreglos o variaciones simples de "m" elementos distintos tomados de a "n", siendo n menor o igual que m son los distintos subconjuntos que se pueden formar, de modo que:

En cada subconjunto intervienen n elementos de los m dados.

Dos subconjuntos se consideran distintos si difieren en algún elemento o si, teniendo los mismos elementos, difieren en el orden.

$$A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}, \quad \text{con } m; n \in \mathbb{N}, n \le m$$

PERMUTACIONES SIMPLES: P_n

Permutaciones de “n” elementos es el conjunto ordenado de los mismos.

Dos grupos difieren entre sí solamente en el orden de colocación de los mismos.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

$$P_n = n! \quad \text{con n} \in \mathrm{N}$$

COMBINACIONES SIMPLES: C_n^m

Combinaciones simples de "m" elementos distintos tomados de a "n", siendo n menor o igual que m son los distintos subconjuntos que se pueden formar, de modo que:

En cada subconjunto intervienen n elementos de los m dados.

Dos subconjuntos se consideran distintos si y solo si difieren en algún elemento.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!},$$

$$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!} \text{ con m; n } \in \text{ N, n} \leq \text{m}$$

NÚMEROS COMBINATORIOS:

Sean los enteros no negativos n y k tales que n sea mayor o igual que k se llamará número combinatorio n sobre k:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ con } n;k \in \mathrm{N}_0, \; n \geq k$$

n es llamado numerador (o también parte superior) mientras que k es el denominador (o también parte inferior).

Ejemplo:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3.2} = 7.5 = 35$$

NÚMEROS COMBINATORIOS – casos particulares:

$$\binom{0}{0}=\frac{0!}{0!\left(0-0\right)!}=1$$

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\left(n-n\right)!}=1$$

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\left(n-0\right)!}=1$$

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{\left(n-1\right)!\left(n-\left(n-1\right)\right)!}=n$$

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\left(n-1\right)!}=n$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

Si dos números combinatorios de igual numerador son tales que la suma de sus denominadores es igual al numerador se llaman números combinatorios de órdenes complementarios.

Dos números combinatorios complementarios son iguales.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} = \frac{n!}{\left(n-k\right)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

Puesto que: $k! = \left(n - \left(n - k\right)\right)!$

Ejemplo: $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

La suma de dos números combinatorios no es, en general, otro número combinatorio, pero si tienen igual denominador y denominadores consecutivos, es válida la fórmula:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

que se conoce como Teorema de Stieffel.

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{k.(n-1)!}{k.(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{k.(n-1)!}{k!(n-k)!}+\frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(k+n-k)$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\Rightarrow\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA O DE PASCAL

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

1) ***Existen $(m+1)$ números combinatorios de numerador "m".***
2) ***Los extremos son números combinatorios iguales a 1.***
3) ***Los números interiores se obtienen aplicando el teorema de Stieffel.***
4) ***El triángulo es simétrico respecto a la altura.***

POTENCIA DE UN BINOMIO – BINOMIO DE NEWTON

En la potencia de un binomio se aplican los números combinatorios, siempre que el exponente de la potencia sea un natural. En estas condiciones, el desarrollo del binomio recibe el nombre de binomio de Newton.

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^m b^0 + \binom{m}{1} a^{m-1} b^1 + \ldots\ldots\ldots + \binom{m}{m-1} a^{m-m+1} b^{m-1} + \binom{m}{m} a^0 b^m$$

$$a \wedge b \in R;\ a \neq 0 \wedge b \neq 0;\ \ m \in N$$

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}\ b^k$$

$$\binom{m}{k} a^{m-k}\ b^k \rightarrow \text{término general del desarrollo}$$

Demostración:

$$(a+b)^{h+1} = (a+b)(a+b)^h$$

$$\binom{h}{0}a^h b^0 + \binom{h}{1}a^{h-1}b^1 + \ldots + \binom{h}{h-1}a^1 b^{h-1} + \binom{h}{h}a^0 b^h$$

$$(a+b)$$

$$\binom{h}{0}a^{h+1}b^{\circ} + \binom{h}{1}a^h b^1 + \binom{h}{2}a^{h-1}b^2 + \ldots\ldots + \binom{h}{h-1}a^2 b^{h-1} + \binom{h}{h}a^1 b^h$$

$$\binom{h}{0}a^h b^1 + \binom{h}{1}a^{h-1}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{h}{h-1}a^1 b^h + \binom{h}{h}a^0 b^{h+1}$$

$$\binom{h}{0}a^{h+1}b^0 + \binom{h+1}{1}a^h b^1 + \binom{h+1}{2}a^{h-1}b^2 + \ldots + \binom{h+1}{h-1}a^2 b^{h-1} + \binom{h+1}{h}a^1 b^1 + \binom{h}{h}a^0 b^{h+1}$$

Como

$$\binom{h}{0} = \binom{h+1}{0} = 1 \qquad \binom{h}{h} = \binom{h+1}{h+1} = 1 \qquad \binom{h}{1} + \binom{h}{0} = \binom{h+1}{1}$$

Entonces haciendo los reemplazos correspondientes

$$\boxed{\binom{h+1}{0} a^{h-1} b^{0} + \binom{h+1}{1} a^{h} b^{1} + \ldots. + \binom{h+1}{h} a^{1} b^{h} + \binom{h+1}{h+1} a^{0} b^{h+1}}$$

El desarrollo de la potencia m-ésima de un binomio tiene m+1 términos, según lo indica la variación de k:

$$0 \leq k \leq m$$

Cada término del desarrollo tiene como coeficiente un número combinatorio de numerador igual al exponente de la potencia y denominador variable de 0 a m.

El exponente de a es la diferencia entre el numerador y el denominador. La suma de los exponentes de a y b es igual a m para todos los términos. Es decir, a decrece desde m hasta 0 y b crece desde 0 hasta m.

$$T_h = \binom{m}{h-1} a^{m-h+1}\, b^{h-1}$$

Es el término de lugar h en el desarrollo, en el cual el denominador del número combinatorio es una unidad menor al lugar que ocupa el término.

Los términos equidistantes de los extremos tienen igual coeficiente por ser números combinatorios de órdenes complementarios.

TÉRMINO – K-ÉSIMO y TÉRMINO CENTRAL

$$(a+b)^m \Rightarrow \begin{cases} T_K = \begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} a^{m-(k-1)} b^{k-1} \\ T_C \Rightarrow \begin{cases} Si\ m\ es\ par \Rightarrow C = \dfrac{m}{2}+1 \\ Si\ m\ es\ impar \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{m+1}{2} \\ C_2 = \dfrac{m+3}{2} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

a) $\binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{?}$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{x} \quad \Rightarrow \quad 2 + x = n + 1 \quad \Rightarrow \quad x = n + 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = n - 1$$

b) $\binom{n}{3} + \binom{n+1}{5} + \binom{n}{4} + \binom{n+2}{6} = \binom{n+3}{9}$

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n+1}{5} + \binom{n+2}{6} = \binom{n+3}{9}$$

$$\binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{5} + \binom{n+2}{6} = \binom{n+3}{9}$$

$$\binom{n+2}{5} + \binom{n+2}{6} = \binom{n+3}{9}$$

$$\binom{n+3}{6} = \binom{n+3}{9}$$

n+3 = 6+9

n = 12

13) Resolver las siguientes ecuaciones aplicando las propiedades correspondientes: