TECNICATURA UNIVERSITARIA
EN PROGRAMACIÓN

CURSILLO NIVELATORIO 2024
MÓDULO MATEMÁTICA

Profesores: Mgter. Esp. Lic. Prof. Ethel Carina Ramona Jovanovich.
Mgter. Esp. Lic. Prof. Daniel Luis Mosqueda.
Prof. Mónica Leguiza (Sede Goya)

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

Conjuntos

Desde el punto de vista matemático, un ***conjunto*** es un término que no se define, pero en general puede conceptualizarlo como aquello que está integrado por objetos con características comunes y los objetos que integran el conjunto se llaman ***elementos*** de ese conjunto.

Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

- El conjunto de los números enteros.
- El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
- El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la T.U.P.
- El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.

Un conjunto sin elementos se denomina ***conjunto vacío***.

En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si ***a*** es un elemento de un conjunto **A** se escribe ***a*** ∈ ***A*** y se lee ***a pertenece a A*** o bien, *a es un elemento de A*. Si ***a*** no es un elemento del conjunto ***A*** se escribe ***a*** ∉ ***A*** y se lee ***a no pertenece a A*** o bien, ***a*** *no es elemento de* ***A***.

Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.

$\mathbb{I}$: el conjunto de los números irracionales

$\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto:

Por *extensión*: es decir, listando todos los elementos del conjunto separados por punto y coma y encerrando todo entre llaves:

A = {1; 2; 3; 4}

B = {a; e; i; o; u}

C = {amarillo; rojo; azul}.

El orden en el cual se enumeran los elementos del conjunto no es importante, y los elementos se consideran una sola vez.

Ejemplo: A = {1; 2; 3; 4} o bien A = {2; 4; 1; 3}

Por Comprensión: es decir, enunciando una propiedad de los elementos que lo integran:

A = {x | x cumple la propiedad P}.

Esto se lee: "el conjunto de los x tales que x cumple la propiedad P.

Ejemplo 1: A = {x | x es natural y 1≤ x ≤ 4}

El conjunto A está formado por todos los números naturales mayores o iguales a 1 y menores o iguales a 4.

Definido por extensión: A = {1; 2; 3; 4}

Ejemplo 2: B = {x | x es par y x ≥ 4}

El conjunto B está formado por todos los números pares mayores o iguales a 4 pero, es un conjunto infinito de elementos, por lo tanto, no podemos definirlo por extensión.

Conjunto Vacío

Al *conjunto vacío* se lo denota con el símbolo ∅ o {}.

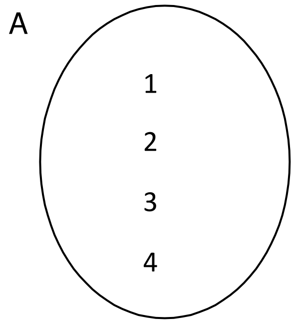
Ejemplo: C = {x | x es entero y 1≤ x ≤ 2}

El conjunto C es vacío ya que no existen elementos entre 1 y 2, por lo tanto lo denotamos

C = ∅ o C = { }.

Diagramas de Venn.

Los **diagramas de Venn** son esquemas usados en la teoría de conjuntos. Estos diagramas muestran colecciones (*conjuntos*) de cosas (*elementos*) por medio de líneas cerradas. Por ejemplo, el diagrama de Venn para el conjunto A = {1; 2; 3; 4} es:



Subconjuntos: Un conjunto A se dice que es *subconjunto* de otro B, si cada elemento de A es también elemento de B, es decir, cuando se verifique:

$x \in A \Rightarrow x \in B$, sea cual sea el elemento x. En tal caso, se escribe $A \subset B$.

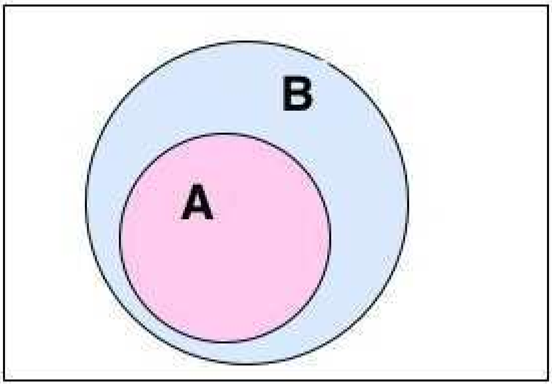


Diagrama de Venn que muestra $A \subset B$

Consideremos los conjuntos

A = {1; 2; 3; 4}, y B = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Como podemos ver, los elementos de A: 1; 2; 3 y 4, también son elementos de B. Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B, o que A está *incluido en* B.

En particular, todo conjunto está incluido en sí mismo.

Ejemplo: A = {1; 2; 3; 4} está incluido en A, y lo escribimos $A \subset A$.

Conjunto Universal: El conjunto que contiene a todos los elementos a los que se hace referencia recibe el nombre de conjunto Universal, este conjunto depende del problema que se estudia, se denota con la letra U

Ejemplo1:

A = {x | x es un natural par}

B = {x | x es un natural mayor que 4}

C = {x | x es un natural menor que 23},

Son conjuntos cuyos elementos son números naturales.

Ejemplo 2: Los elementos de los conjuntos X, Y, Z:

X = {cuadrado; rectángulo; rombo}

Y = {triángulo; hexágono}

Z = {decágono, eneágono, octógono, heptágono}

Tienen la propiedad de ser polígonos.

Resulta entonces conveniente considerar *un* conjunto que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina *conjunto universal*, y lo denotamos con la letra U.

Operaciones con Conjuntos:

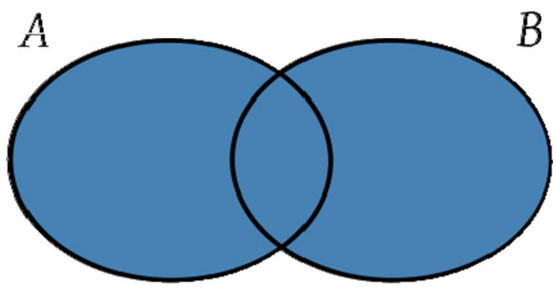
UNION

La unión de dos conjuntos A y B la denotaremos por $A \cup B$ y es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a al menos a uno de ellos o a los dos. Lo que se denota por:

$$A \cup B = \{ x/x \in A \text{ o } x \in B \}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A=\{1; 2; 3; 4\}$ y $B=\{8; 10; 12\}$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 8; 10; 12\}$$



$A \cup B$

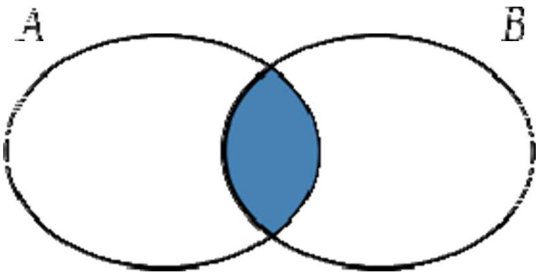
INTERSECCIÓN

Sean $A=\{1; 2; 3; 4\}$ y $B=\{2; 3; 8; 10; 12\}$

Los elementos comunes a los dos conjuntos son: 2 y 3. A este conjunto se le llama intersección de A y B; y se denota por $A \cap B$, algebraicamente se escribe así:

$A \cap B = \{ x/x \in A \text{ y } x \in B \}$; $A \cap B = \{2; 3\}$

Y se lee el conjunto de elementos x que pertenecen simultáneamente A y a B.



$A \cap B$

COMPLEMENTO

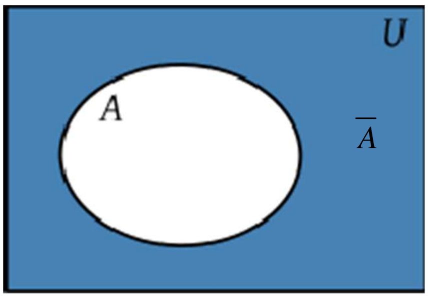
El complemento de un conjunto respecto al universo U es el conjunto de elementos de U que no pertenecen a A y se denota como **A' o** $\overline{A}$ y que se representa por comprensión como:

$$A' = \overline{A} = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplo:

Sea U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 } ; A= {1; 3; 5; 7; 9 } donde $A \subset U$

El complemento de A estará dado por: $A' = \overline{A} = \{ 2; 4; 6; 8 \}$



DIFERENCIA

Sean A y B dos conjuntos. La diferencia de A y B se denota por **A – B** y es el conjunto de los elementos de A que no están en B y se representa por comprensión como:

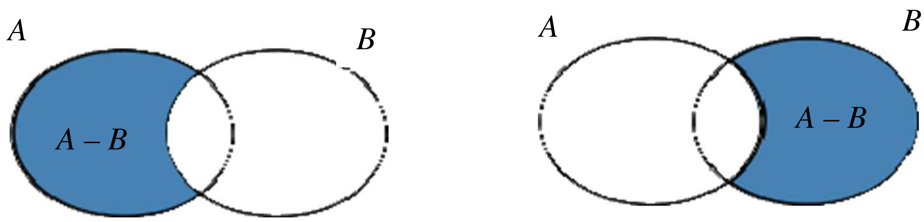
$$A - B = \{ x/x \in A \text{ ; } x \notin B \}$$

Ejemplo: Sea A= {a; b; c; d} y B= {a; b; c; g; h; i} ; A – B = {d}

En el ejemplo anterior se observa que solo interesan los elementos del conjunto A que no estén en B. Si la operación fuera B – A, el resultado es: **B – A = {g; h; i }**

E indica los elementos que están en B y no en A.

Diagramas de Venn de (A – B) y (B – A) respectivamente



EJERCICIOS

1.- Escribir los siguientes conjuntos por comprensión:

A= {verde, violeta, naranja}

Rta:A= {x/x es un color secundario} o A={colores secundarios}

B= {do, re, mi, fa, sol, la, si}

C= {a, b, c, d, e, f, g, h}

D= {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20}

E= {paralelogramo, cuadrado, rectángulo, trapecio, rombo, romboide}

2.- Escribir los siguientes conjuntos por extensión:

A= {Planetas del sistema solar}

B= {Números impares del 1 al 50}

C= {Frutas cuyo nombre comiencen con M}

D= {Puntos de intersección de dos paralelas}

E= {vehículos de dos ruedas}

Rta= {motocicleta, bicicleta, monopatín}

3.- Decir cuáles de los siguientes conjuntos están mal definidos y por qué:

A= {Flores de color claro}

B= {x ϵ R y x es el número siguiente al 999}

C= {Frutas ricas}

D = {x / x es una ciudad cercana a Barranqueras}

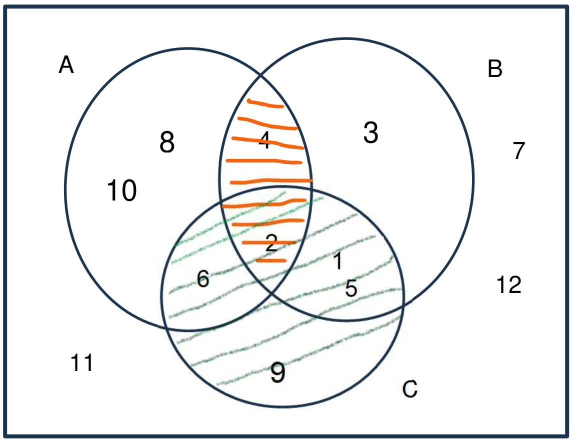
Rta: mal definido porque, no está establecido cuantos km se consideran cerca, por ejemplo, para algunas personas, cerca serían 2 km, para otras, serían 5 km

4.- Dados los siguientes conjuntos:

U = { x/x ∈ N ∧ 1≤ x <12}; A = { 2; 4; 6; 8; 10 } , B = { 1; 2; 3; 4; 5} y C = { 1; 2; 6; 5; 9}

Resolver por extensión y diagramas de Venn:

a) A – B **b) (A ∩ B) U C** **c)** $\overline{A}$ **d) B – C** **e)** $\overline{B \cap C}$



(A ∩ B) = {2; 4}

C= {1; 2; 6; 5; 9}

(A ∩ B) U C: {1; 2; 4; 6; 5; 9}

todo lo pintado

CONJUNTOS NUMÉRICOS

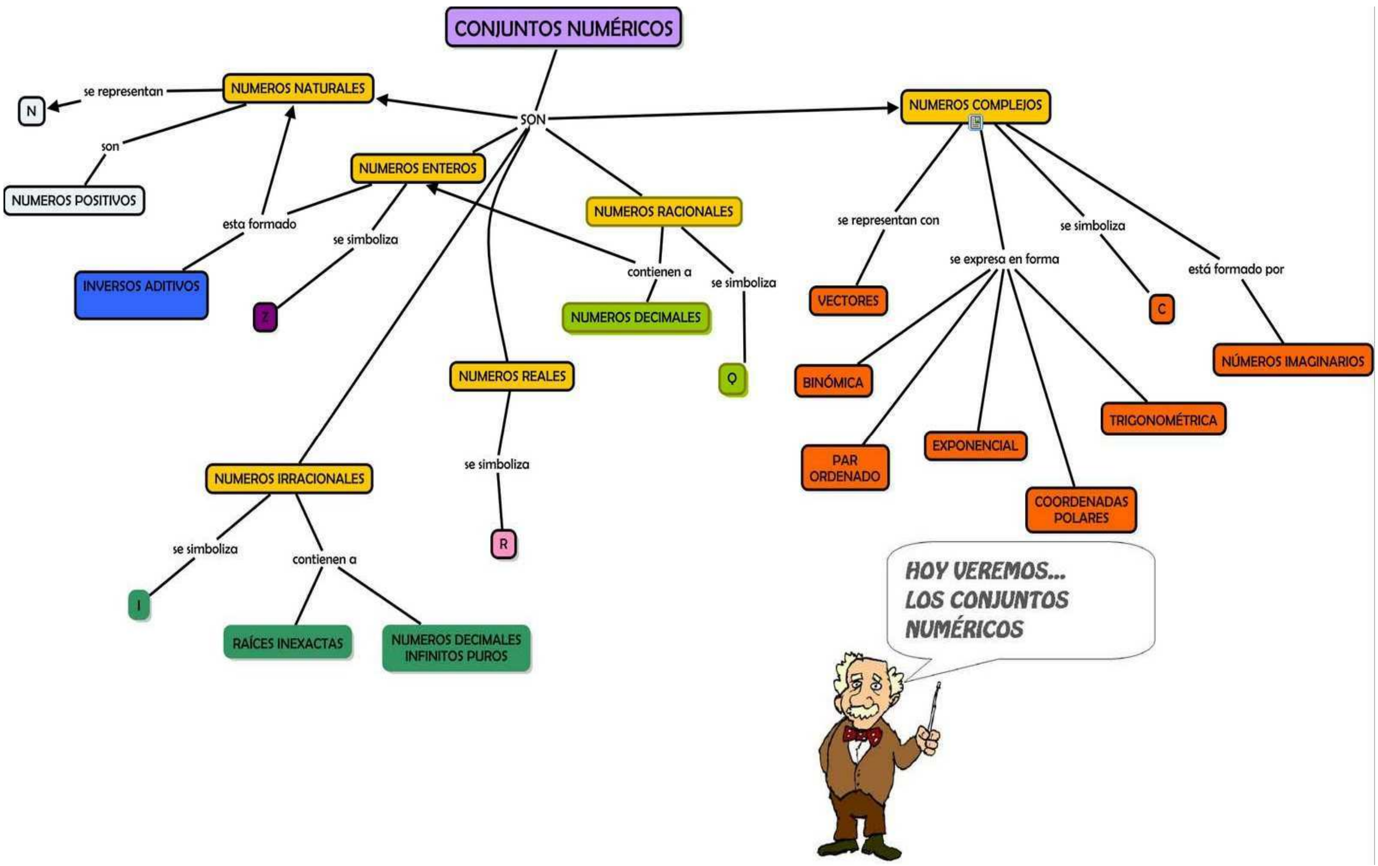
Como ya se mencionó, un conjunto a una colección de objetos, cada uno de los cuales recibe el nombre de *elemento* del conjunto.

Un conjunto puede ser finito o infinito, ello depende de la cantidad de elementos que lo conforman.

Los conjuntos, cuyos elementos son los números, se denominan "**conjuntos numéricos**".

En Matemática se definen varios conjuntos numéricos, cada uno de los cuales tiene propiedades específicas que permiten efectuar operaciones entre los mismos.

Definimos los mismos en el siguiente cuadro conceptual:



Números Naturales

Los números naturales aparecen como elementos para ordenar y contar. Se los designa con el símbolo $\mathbb{N}$, si incluimos al cero, lo designamos $\mathbb{N}_0$.

Este conjunto se caracteriza porque:

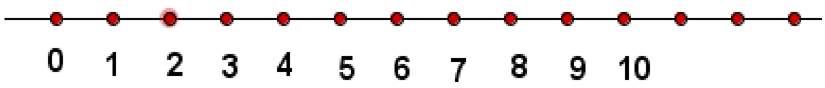
- Todo número natural tiene un siguiente, el conjunto de números naturales tiene primer elemento (el 1), pero no tiene último elemento, por ello se dice que es un conjunto **infinito**.
- Entre dos números naturales no consecutivos existe un número finito de números naturales, por eso el conjunto es **discreto**.
- Cada elemento de este conjunto se obtiene de sumar una unidad al anterior.

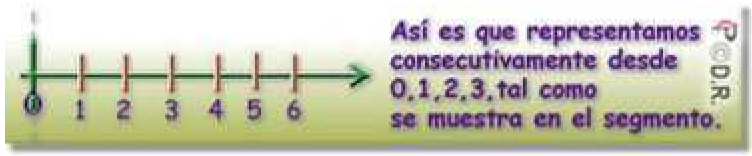
La forma de representar a los números naturales como un conjunto es:

N = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;.......} N_0 = { 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6;.... }

Representación gráfica

Los números naturales se pueden representar gráficamente, para esto se usa una recta sobre la que se considera un punto cualquiera como el origen "0" y se utiliza un segmento arbitrario como unidad.





Con los números naturales contamos los elementos de un conjunto (número cardinal). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (ordinal).

La s**uma y el producto** de **dos números naturales es otro número natural**.

La **diferencia** de **dos números naturales *no* siempre es un número natural**. Será natural siel minuendo es mayor que el sustraendo:

5 – 3 = 2 (N)   ; 3 – 5 = -2 (No es N)

El **cociente** de **dos números naturales *no* siempre es un número natural**. Es natural si en la división entera se obtiene resto 0:

$$6 : 2 = 3 \in \mathbb{N} \quad ; \quad 2 : 6 = ¿? \text{ (no es } \mathbb{N})$$

Podemos utilizar **potencias**, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

Números Enteros

- Nos permiten expresar: el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.
- Este conjunto surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Conjuntos Naturales y Cardinales
- **A este conjunto se lo denota con el símbolo $\mathbb{Z}$, el mismo es ordenado e infinito.**
- Entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros, por eso se dice que $\mathbb{Z}$ en un **conjunto discreto**
- Para ello definimos el conjunto de los números negativos, donde un número negativo es el número opuesto de cada natural **n**; y se le denota **(–n)** (Ahora, si n es entero, ¿-n es negativo?)

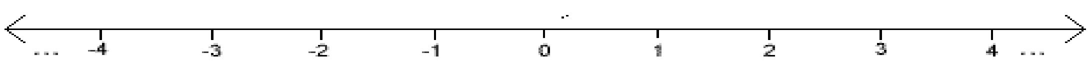
Por ejemplo, el opuesto de 7 es (–7) (se lee “menos siete“); el cero no tiene opuesto. Luego

el conjunto de los negativos unido al de los naturales con el cero forma el conjunto $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Representación gráfica:

Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un punto simétrico, situado a la izquierda del cero. Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él).



La **suma**, la **diferencia** y el **producto** de **dos números enteros es otro número entero**.

El **cociente** de **dos números enteros *no* siempre es un número entero**, sólo ocurre si en la división entera se obtiene resto 0:

$$8:2=4\in \mathbb{Z}\ ; \qquad 2:8=¿?\notin \mathbb{Z}$$

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **natural**:

$$(-2)^5=-32\in\mathbb{Z} \quad ; (-2)^{(-5)}=-\frac{1}{2^5}=-\frac{1}{32}\notin\mathbb{Z}$$

La raíz de un **número entero *no* siempre es un número entero**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta:

$$\sqrt{2}=\ 2\ \in\mathbb{Z} \qquad ; \quad \sqrt{5}\ =¿?\ \notin\mathbb{Z}$$

Números Racionales

En el conjunto $\mathbb{Z}$, las divisiones no siempre son posibles, si el dividendo es múltiplo del divisor, el resultado es un entero, pero, si el dividendo no es múltiplo del divisor, no pueden resolverse.

Para solucionar este problema se crea un nuevo conjunto, llamado **números racionales**, denotado con el símbolo $\mathbb{Q}$.

Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como una fracción $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Definimos las fracciones como la relación formada entre dos enteros a y b cualesquiera, siendo b no nulo.

Los números $\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}\ ; \frac{9}{7}$; son ejemplos de fracciones

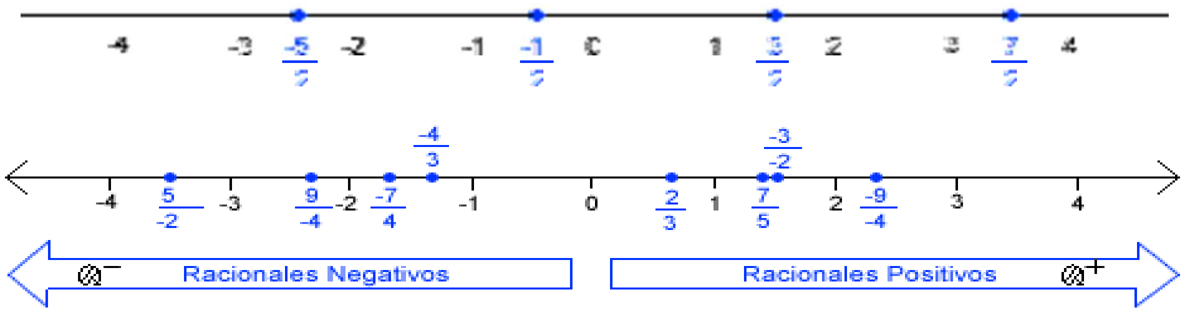
$$A=\left\{\frac{a}{b}/\,a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z};\ b\neq 0\right\}$$

Los **números decimales** (cuya expresión decimal puede ser exacta o periódica) son **números racionales pues pueden expresarse como fracciones**; pero los números decimales ilimitados no periódicos, no:

$$\frac{3}{4}=0,75\ (decimal\,exacto)\quad , \quad -\frac{2}{3}=0,\widehat{6}\ (decimal\ periódico)$$

Representación gráfica de $\mathbb{Q}$

Los números racionales se pueden representar construyendo las fracciones sobre la recta $\mathbb{Z}$. Esto se hace subdividiendo geométricamente cada una de las divisiones de la recta como indica la fracción y asignando luego las coordenadas respectivas.

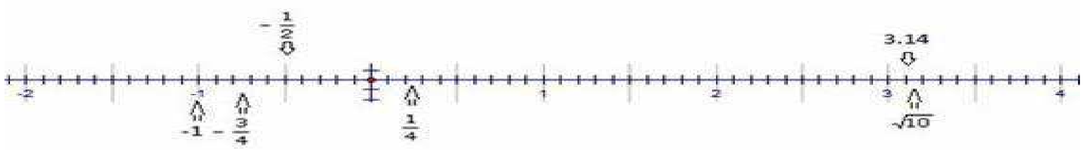


Números Irracionales

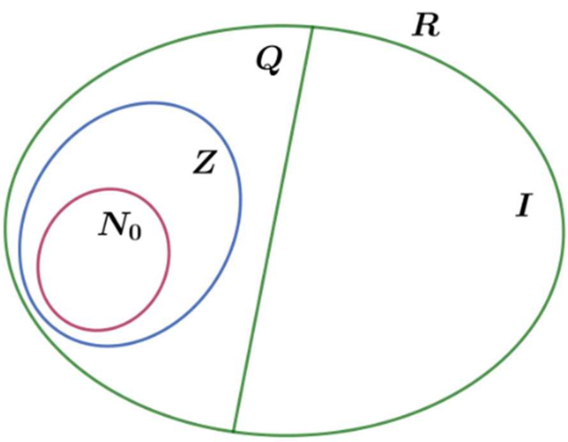
Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las raíces inexactas ya todos los números decimales infinitos puros que no pueden transformarse en una fracción, se los denota con la letra $\mathbb{I}$. Ejemplos:

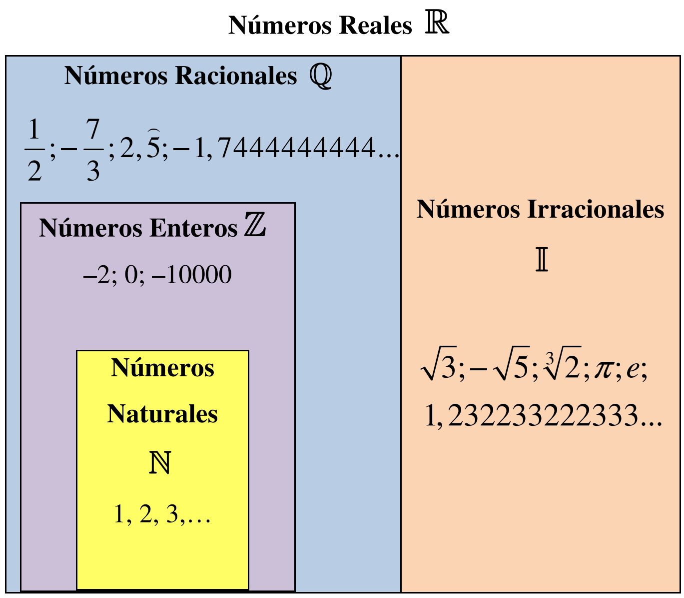
$$\pi = 3{,}14159265359... \; ; \; e = 2{,}718281828459... \; ; \; \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749... \, ; \, 2{,}010010001\ldots$$

Los racionales y los irracionales forman los elementos de un nuevo conjunto llamado Números Reales ($\mathbb{R}$). A cada punto de la recta numérica le corresponde un número real y viceversa; es decir, existe una correspondencia **uno a uno** entre los puntos de la recta numérica y los números reales.



Números Reales





Importante:

Con números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas con dos excepciones importantes:

1.- No **existen raíces** de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc.) de radicandos negativos en números reales, razón por la cual existe el conjunto de los **números complejos** donde estas operaciones sí están definidas.

2.- No existe la **división entre cero**, pues carece de sentido dividir entre nada o entre nadie; es decir, no existe la operación de dividir entre nada.

Operaciones Aritméticas

Una **operación** es un conjunto de reglas que permiten obtener otras cantidades o expresiones.

Las operaciones son:

1) Adición o Suma
2) Sustracción o Resta
3) Multiplicación
4) División
5) Potenciación
6) Radicación
7) Logaritmación

1) Suma: Esta operación consiste en obtener el número total de elementos a partir dos o más cantidades: $a + b = c$

Los términos de la suma, **a** y **b**, se llaman **sumandos** y el resultado, **c**, **suma**.

Propiedades de la suma

1) **Asociativa**: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2) **Conmutativa**: $a + b = b + a$
3) **Elemento neutro**: $a + 0 = a$
4) **Elemento opuesto:** $a - a = 0$

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

La suma de números naturales no cumple esta propiedad.

2) Resta:

La resta o sustracción es la operación inversa a la suma: **a - b = c**

Los términos que intervienen en una resta se llaman: **a, minuendo** y **b, sustraendo**.

Al resultado, **c,** lo llamamos **diferencia.**

La resta NO es Conmutativa: a – b ≠ b – a

Suma Algebraica: Es toda sucesión de sumas y restas; sus elementos se denominan términos.

Ejemplo: 15 + 3 -16 -2 + 4= -1

3) Multiplicación:

Multiplicar dos números consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor: **a · b = c**

Los términos **a** y **b** se llaman **factores** y el resultado, **c**, **producto.**

Propiedades de la multiplicación

Asociativa: **(a · b) · c = a · (b · c)**

Conmutativa: **a · b = b · a**

Elemento neutro: **a · 1 = a**

Elemento inverso: $a.\frac{1}{a}=1$

Distributiva: **a · (b + c) = a · b + a · c**

Sacar factor común: Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

a · b + a · c = a · (b + c)

4) División:

La **división o cociente** es una operación aritmética que consiste en averiguar cuántas veces un número está contenido en otro número: **D : d = c**

Los términos que intervienen en un cociente se llaman, **D**: **dividendo** y **d: divisor.** Al resultado, **c,** lo llamamos **cociente.**

Tipos de divisiones

1. División exacta: Cuando el resto es cero: **D = d · c**

2. División entera: Cuando el resto es distinto de cero: **D = d · c + r**

Propiedades de la división:

i. No es Conmutativo: $a : b \neq b : a$

ii. Cero dividido entre cualquier número da cero: $0 : a = 0$

iii. No se puede dividir por 0.

5) Potenciación:

La **potenciación** es una multiplicación de varios factores iguales. $\mathbf{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots = a^n}$

Base: Es el número que multiplicamos por sí mismo.

Exponente: Indica el número de veces que multiplicamos la base.

Propiedades de la Potencia:

1) $\mathbf{a^0 = 1}$
2) $\mathbf{a^1 = a}$
3) $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ $(2^5 . 2^2 = 2^{5+2} = 2^7)$
4) $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$ $(2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3)$
5) $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ $((2^5)^2 = 2^{5 . 2} = 2^{10})$
6) $\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ $(2^5 . 3^5 = (2 . 3)^5)$
7) $\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$ $(2^5 : 3^5 = (2 : 3)^5)$

6) Radicación:

Es la **operación inversa a la potenciación**. Consiste en que, dados dos números, llamados **radicando** e **índice**, hallar un tercero, llamado **raíz**, tal que, elevado al índice, sea igual al radicando.

$$\sqrt[índice]{Radicando} = Raíz \Rightarrow (Raíz)^{índice} = Radicando$$

$$Ejemplo : \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$$

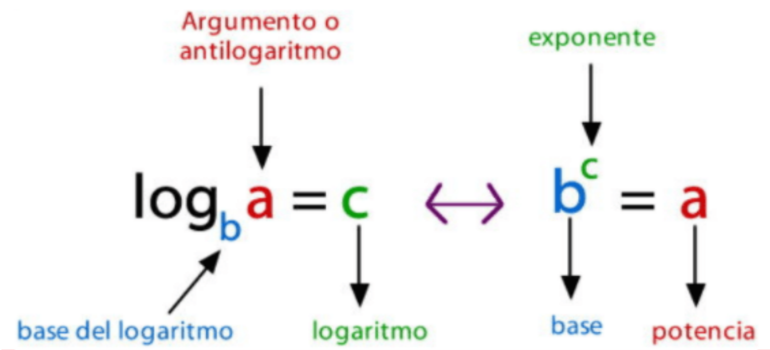
Raíz cuadrada exacta: Radicando = (Raíz exacta)^2

Raíz cuadrada entera: Radicando = (Raíz entera)^2 + Resto

7) Logaritmación:

El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número. El cálculo de logaritmos es la operación inversa a la potenciación de la base del logaritmo: **$y = \log_a x$; significa $x = a^y$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$**

Por ejemplo: **$\log_{10}(1000) = 3$; $(10)^3 = 1000$**



Propiedades de los logaritmos

1. **No existe** el **logaritmo** de un número con **base negativa**.
2. **No existe** el **logaritmo** de un **número negativo**.
3. **No existe el logaritmo de cero.**
4. **El logaritmo de 1 es cero.**
5. **El logaritmo en base a de a es uno.**
6. **El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente: $\log_a a^n = n$**

En los siguientes cuadros veremos las operaciones que realizamos con números y sus respectivas propiedades, las mismas nos serán útiles para resolver los ejercicios propuestos

OPERACIÓN	NOTACIÓN SIMBÓLICA	ELEMENTOS
Adición	$a+b=c$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ab+bc}{bd}$	$\left.\begin{matrix} a,b \\ \frac{a}{b},\frac{c}{d} \end{matrix}\right\}$ sumandos
Resta	$a-b=c\ ;(a>b)$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$	$a;\frac{a}{b}\Rightarrow$ minuendo $b;\frac{c}{d}\Rightarrow$ sustraendo
Multiplicación	$ab=c$ $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$	$a.b;\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\Rightarrow$ factores $c;\frac{a.c}{b.d}\Rightarrow$ producto
División	$a:b=c;(b<>0)$ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}\right)^{-1};(b,c<>0)$	$a;\frac{a}{b}\Rightarrow$ dividendo $b;\frac{c}{d}\Rightarrow$ divisor $c;\frac{d}{c}\Rightarrow$ cociente
Potenciación	$a^n=b;\ a^1=a;\ a^0=1;\ 0^n=0$ $a^{-n}=\frac{1}{a^n};\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ ;a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	$a\Rightarrow$ base $n\Rightarrow$ exponente $b\Rightarrow$ potencia
Radicación	$\sqrt[n]{a}=b\quad;\ (si\, b^n=a)$ $\sqrt[n]{-a}=-b\ (n impar);\ \sqrt[n]{a}=\pm b(n\, par)$ $\sqrt[n]{a^n.b}=\sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b}=a.\sqrt[n]{b}$ $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n.b}$	$a\Rightarrow$ radicando $b\Rightarrow$ raíz $n\Rightarrow$ índice

Valor Absoluto	$\lvert a\rvert\geq 0$ $\lvert a+b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ $\lvert a.b\rvert=\lvert a\rvert.\lvert b\rvert$ $\lvert a-b\rvert\geq\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$ $\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}=\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$	*Definición* : $\forall a\in R$ *se define el "valor absoluto" de a :* $\lvert a\rvert\begin{cases} a\ si\ a\geq 0 \\ -a\ si\ a<0 \end{cases}$

CONMUTATIVA	$\Rightarrow a+b=b+a \;;\; a.b=b.a$
ASOCIATIVA	$\Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c) \;;\; (a.b).c=a.(b.c)$
DISTRIBUTIVA	$\begin{cases}(a\pm b).c=a.c\pm b.c\\(a\pm b):c=a:c\pm b:c\\(a.b)^n=a^n.b^n\\(a:b)^n=a^n:b^n\\\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\\\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}\end{cases}$
EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO	$\begin{cases}a+0=a\\a\,.\,1=a\end{cases}$
CLAUSURA $\Rightarrow$	$Si\;\; a,\, b \in N \;;\; a*b=c \;\;/\;\; c\in N$
UNICIDAD $\Rightarrow$ La operación entre dos números naturales tiene resultado único	
PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	$\left\{ a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \right.$
COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	$\left\{ a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \right.$

POTENCIA DE OTRA POTENCIA	$\begin{cases}\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}.\frac{p}{q}}\\(a^m)^n=a^{m\,.\,n}\\(a^m.b^n)^p=a^{m.p}.b^{n.p}\\\left(\dfrac{a^m}{b^n}\right)^p=\dfrac{a^{m.p}}{b^{n.p}}\end{cases}$
DISTRIBUTIVIDAD DE LA POTENCIA	$\begin{cases}(a.b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}\\(a:b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}\end{cases}$
RAÍZ DE RAÍZ	$\Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m.n]{a}$
SIMPLIFICACIÓN	$\Rightarrow \sqrt[m.n]{a^{n.p}}=\sqrt[m]{a^p}$

Ejercicios:

1.- Realizar las siguientes operaciones aplicando las propiedades correspondientes (sin usar calculadora):

a) $(-2)^2 \cdot (-2)^{-3} \cdot (-2)^4 =$ $\boxed{(-2)^{2+(-3)+4} = (-2)^{2-3+4} = (-2)^3 = -8}$

b) $(-4) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^0 (-2) =$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 16 =$

d) $6^2 : 6^3 =$

e) $5^{-2} : 5^3 =$

f) $(-4)^2 : (-4)^{-3} =$

g) $[(-2)^{-2}]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

h) $[(-3)^6 : (-3)^2]^3 \cdot (-3) \cdot (-3)^{-4} =$

2.- Realizar las siguientes operaciones teniendo en cuenta su prioridad (sin usar calculadora):

a. $22 + 3 - 45 : 5 + 16 =$

b. $(2 \cdot 5 - 12)(6 + 3) =$

c. $3 \cdot 5 + (6 + 7 - 3) - 12 : 4 =$

d. $6 + 5 \cdot (2 \cdot 3)^3 =$

e. $[(-2)^5 - (-3)^3]^2 =$ $\boxed{[-32 - (-27)]^2 = [-32 + 27]^2 = [-5]^2 = 25}$

f. $(-5 + 3 \cdot 2 : 6 - 4) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 9 : 3 - 2)^2 =$

3.- Extraer, si es posible, factores del radical sino, justificar

1) $\sqrt[3]{27.x^5.y^6.\frac{1}{8}}$ 2) $\sqrt[4]{81.x^8.y^2.x^{12}}$ 3) $\sqrt{16.\frac{b^4}{c^6}}$

4.- Indique si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS O FALSAS.

a) -1200 $\in \mathbb{N}$ **(F)** **b)** 5,413 $\in \mathbb{Z}$ **c)** 3,14 $\in \mathbb{Q}$ **d)** 0 $\in \mathbb{Z}$

e) $560{,}12 \notin N$ **f)** $12 \notin N$ g) $\sqrt{8} \notin I$ h) $\frac{2}{5} \in Q$ **(V)**

i) $\sqrt[3]{-27} \in R$ **j)** $[-1; 6] \in N_0$ **k)** $3{,}27 \in [3; 5]$ y $[3; 5] \in Z$

k) Todo número natural tiene un consecutivo:…....

l) Todo número natural tiene un antecesor:……..

m) El conjunto de los números naturales tiene un último elemento:…….

5.- Completar las frases siguientes:

- Si el opuesto de un número entero es 4, el siguiente del número es……..
- Si el opuesto del siguiente de un número es 8, el siguiente del número es…..

Lógica proposicional - Conectivos

Formalmente hablando, se define una **proposición** como una oración declarativa que puede ser verdadera (V) o falsa (F), pero no ambas a la vez.

Ejemplo: Tenemos cuatro oraciones diferentes: una interrogativa, una orden y dos declarativas

1. ¿Quién viaja?
2. Deténgase
3. 3,1415…. , es un número entero
4. Santiago juega al básquet

De las dos primeras no podemos afirmar que sean verdaderas o falsas pero, de las dos últimas, que son declarativas, podemos decir si son verdaderas o falsas, por lo tanto son proposiciones.

Las proposiciones se representan mediante variables proposicionales simbolizadas con letras minúsculas: p, q, r, s, t, …..; cada una de ellas representa una proposición simple y a partir de ellas podemos generar proposiciones compuestas utilizando símbolos conocidos como conectivos lógicos, a saber:

Conectivo	Operación asociada	Notación	Significado
$\neg$, $\sim$, $-$	Negación	$\sim p$	No p o, no es cierto que p
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	$p \wedge q$	p y q
$\vee$	Disyunción o suma lógica	$p \vee q$	p o q o ambos (en sentido incluyente)
$\underline{\vee}$	Diferencia simétrica	$p \,\underline{\vee}\, q$	p o q pero no ambos (en sentido excluyente)
$\Rightarrow$	Condicional	$p \Rightarrow q$	p entonces q
$\Leftrightarrow$	Bicondicional	$p \Leftrightarrow q$	p sí y solo sí q

Ejemplos:
Supongamos las siguientes proposiciones:

$p:$ 5 es un número natural

$q:$ todos los triángulos son rectángulos

Entonces:

$\sim p:$ 5 no es un número natural

$p \wedge q:$ 5 es un número natural y todos los triángulos son rectángulos.

$p \vee q:$ 5 es un número natural o todos los triángulos son rectángulos.

$p \Rightarrow q:$ Si 5 es un número natural, entonces todos los triángulos son rectángulos.

De esta manera se podrían formar las proposiciones: $p \wedge (q \vee r)$; $(p \vee -q) \Rightarrow r$

Tablas de verdad

La tabla de verdad de una sentencia es una tabla en la que se presentan todas las posibles interpretaciones de las variables proposicionales que constituyen la sentencia y el valor de verdad de la misma para cada interpretación.

- **Negación** (¬)

Consiste en cambiar el valor de verdad de una variable proposicional.

p	¬p
V	F
F	V

- **Disyunción** (∨)

La sentencia será verdadera cuando una o ambas variables proposicionales sean verdaderas.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Conjunción** (∧)

La sentencia será verdadera sólo cuando ambas variables proposicionales sean verdaderas.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Condicional** (⇒)

Las proposiciones p y q se denominan antecedente y consecuente respectivamente. La sentencia será falsa sólo cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Bicondicional** (⇔)

La sentencia será verdadera cuando ambas variables proposicionales tengan el mismo valor de verdad.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- **Disyunción exclusiva** ($\underline{\vee}$)

La sentencia será verdadera sólo cuando una de las dos variables proposicionales sea verdadera, es decir, cuando los valores de verdad de las proposiciones sean diferentes.

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Valores de verdad:

- Tautología o validez: es una proposición que siempre es verdadera, es decir, que la última columna, para cualquier valor de verdad de las variables, sólo contendrá V.

- Contradicción: es una proposición que siempre es falsa, es decir, que la última columna, para cualquier valor de verdad de las variables, sólo contendrá F.
- Contingencia: es una proposición que puede ser verdadera o falsa, es decir, que la última columna, contendrá valores verdaderos o falsos

Funciones proposicionales. Su cuantificación

Definición: Función proposicional en una variable o indeterminada x es toda oración en la que figura **x** como sujeto u objeto directo, la cual se convierte en proposición para cada especificación de x.

El símbolo $P_{(x)}$ es la representación de un predicado o propiedad relativo al objeto indeterminado x, perteneciente a cierto universo o conjunto.

Ejemplo: si nos referimos a los números enteros y la propiedad es **ser impar**, la traducción de $P_{(x)}$ consiste en: **x es impar**, y se escribe: **$P_{(x)}$: x es impar**.

El enunciado **"x es impar"** no es una proposición, pues no podemos darle algún valor de verdad (V o F), para que adquiera tal denominación, debemos especificar x; cada asignación dada al sujeto x permite obtener su valor de verdad, transformando dicho enunciado en una proposición. Se llama a este tipo de expresiones: **funciones o esquemas proposicionales.**

Siguiendo el ejemplo arriba mencionado, tenemos las siguientes proposiciones:

$P_{(-4)}$: -4 es impar (F).

$P_{(5)}$: 5 es impar (V).

Se presentan también funciones proposicionales con dos variables o indeterminadas. Por ejemplo:

$P_{(x,y)}$: x es divisor de y

como en el caso anterior, para que esta expresión sea una proposición, debemos especificar x e y (siendo ambos enteros) así, para cada particularización de valores se tiene una proposición:

$P_{(-2,\ 6)}$: -2 es divisor de x (V)

$P_{(12,\ 6)}$: 12 es divisor de x (F)

Entonces, a partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado cuantificación.

Asociados a la indeterminada x, se introducen los símbolos $\forall x$ y $\exists x$, llamados cuantificador universal y existencial respectivamente.

Las expresiones: **Para todo x, se verifica $P_{(x)}$,** se denota: $\forall \mathbf{x}: \mathbf{P}_{(\mathbf{x})}$

Existe al menos un x, tal que se verifica $P_{(x)}$, se denota**:** $\exists \mathbf{x} / \mathbf{P}_{(\mathbf{x})}$

Una función proposicional cuantificada adquiere el carácter de proposición, como observamos en el primer ejemplo:

"Todos los números enteros son impares"

Es una proposición general cuyo valor de verdad es Falso; dicha expresión en forma simbólica se denota: $\forall$ x : x es impar

Si cuantificamos existencialmente la misma función proposicional: $\exists$ x / x es impar

Por lo tanto, el valor de verdad es Verdadero.

Para asegurar la verdad de una función proposicional cuantificada universalmente, todas las proposiciones particulares asociadas a ella deben ser verdaderas; en cambio, para asegurar la veracidad de una función proposicional cuantificada existencialmente, basta que sea verdadera alguna de las proposiciones asociadas a la misma.

Negación de los cuantificadores

La negación del cuantificador universal aplicado a la función proposicional $P_{(x)}$ es equivalente al cuantificador existencial aplicado a - $P_{(x)}$:

$$-[\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}: \mathbf{P}_{(\mathbf{x})}] \Leftrightarrow [\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A} / -\mathbf{P}_{(\mathbf{x})}]$$

La negación del cuantificador existencial aplicado a la función proposicional $P_{(x)}$ es equivalente al cuantificador universal aplicado a - $P_{(x)}$:

$$-[\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A} / \mathbf{P}_{(\mathbf{x})}] \Leftrightarrow [\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}: -\mathbf{P}_{(\mathbf{x})}]$$

Ejercicios

1.- Siendo p, q, r los siguientes enunciados:

p: escribiré un libro
q: limpiaré mi habitación
r: voy de compras

1.1- Traducir al lenguaje simbólico los siguientes enunciados:

i) Si voy de compras, entonces no limpiaré mi habitación $\boxed{(r \Rightarrow (-q))}$

ii) No limpiaré mi habitación y escribiré un libro

iii) Escribiré un libro sí y solo sí no voy de compras

1.2- Traducir al lenguaje corriente los siguientes enunciados:

a.) (-p) ∧ q b.) r ⇒ (p v q) c.) - r ⇒[(-q) v p] d.) [q ∧ (-p)] ⇔ r

- r ⇒ [(-q) v p]*= si no voy de compras entonces, no limpiaré mi habitación o escribiré un libro*

2.- Dadas las proposiciones "Luis lee *Clarín*" y "Luis va a Carrefour" se pide:

2.1 Expresión simbólica

2.2 Tabla de verdad

2.3 Enunciado en lenguaje coloquial de:

a) Conjunción de la primera con la negación de la segunda

b) Disyunción de las negaciones

c) Negación de la disyunción

$$-(p \vee q) = \text{No es cierto que, Luis lee Clarín o va a Carrefour}$$

p	q	$p \vee q$	$-(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

d) Implicación de la primera (antecedente) con la negación de la segunda (consecuente)

3.- Dados los siguientes enunciados determinar cuáles son tautología, contingencia o contradicción:

a.) p ∧ (-p) b.) p v (-p) c.) p ⇒ (q ⇒ p) d.) q ⇒ (q ⇒ p) e.) q v [(-q) ∧ p)

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

$\{\text{TAUTOLOGÍA}\}$

4.- Si p, r son enunciados verdaderos y, q, s son enunciados falsos, determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

$$a.)\ [(p \lor q) \lor r] \land s$$
$$[(V \lor F) \lor F] \land F$$
$$[(V) \lor F] \land F$$
$$V \land F$$
$$F$$

b.) - [(-p v q) v (-p v q)] c.) (p ⇒q) ⇒r d.) (p v r) ⇔ (r ∧ (-s))

5.- Dado el conjunto A = {1; 3; 5; 7}, hallar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

a)$\exists\ x \in A /\ x + 3 = 10$

b)$\forall\ x \in A$: $x + 3 \leq 12$

c)$\exists\ x \in A /\ x + 3 < 5$

d)$\forall\ x \in A$: $x + 3 \leq 7$

Bibliografía:

- GARCÍA MERAYO, F. (2015) - *Matemática Discreta,* 3º Edición, Ed. Paraninfo, España. (ISBN 978-84-283-3568-3)
- LIPSCHUTZ, SEYMOUR – *Matemáticas para Computación,* Serie Schaum

Bibliografía complementaria

- ALBERTO, M.; SCHWER, I.; FUMERO, Y.; LLOP, P.; CHARA, M. (2009)- *Matemática Discreta,* Universidad Tecnológica Nacional, FRSanta Fe. Argentina. (ISBN 978-9872666514)
- GROSSMAN, S., (2008) - *Álgebra Lineal,* 6º Edición, Ed. Mc Graw Hill, México. (ISBN: 978-970- 10-6517-4).
- GROSSMAN, S., (2015)- *Matemáticas 4: Álgebra Lineal*, 2º Edición, Ed. McGraw-Hill, México. (ISBN 10: 6071512964 - ISBN 13: 9786071512963).
- JOHNSONBAUGH, R., (2005) – *Matemáticas Discretas*, 6º edición, Ed. Prentice Hall. (ISBN: 9786074426151 - ISBN: 9702606373 – ISBN13: 9789702606376)
- KOLMAN, B.; HILL, D., (2006) - *Álgebra Lineal*, 8º Edición, Ed., PEARSON (ISBN: 970-26-0696-9).
- KOZAK, A., POMPEYA PASTORELLI, S.; VARDANEGA, P., (2009) - *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal*, Ed. Mc Graw Hill, Argentina. (ISBN: 978-970-10-6596-9)
- LARSON R.; EDWARDS, B., (2000)- *Introducción al Álgebra Lineal*, LIMUSA Noriega Editores, (ISBN: 978-968-18-4886-1).
- LARSON R., (2018)- *Matemáticas 4: Álgebra Lineal*, Cengage Learning Editores (ISBN 9786075265544).
- NAKOS G.; JOYNER, D., (2008) - *Álgebra Lineal*, 6º Edición, Ed. Mc Graw Hill, México (ISBN: 978-970-10-6517-4).
- PITA RUIZ C., (1991) - *Álgebra Lineal*, 1º Edición, Ed. Mc. Graw Hill, México (ISBN: 968-422-777- 9).
- ROJO, A., (2006)- *Ágebra I* - 21º Edición, Ed. Edit. Magister Eos, Argentina. (ISBN 10: 9872144885 – ISBN 13: 9789872144883)
- ROSEN, K., (2004)– *Matemática Discreta y sus Aplicaciones* – Ed. Mc. Graw Hill (ISBN: 9788448160302)