TRABAJO PRÁCTICO Nº 8 – ANÁLISIS COMBINATORIO – 2024

OBJETIVOS: Resolver problemas sobre agrupamiento de objetos. Determinar el número de maneras en que un evento compuesto puede suceder. Evaluar un factorial. Reconocer la fórmula del binomio de Newton.

Los principios elementales de la **enumeración o conteo** constituyen la base del **análisis combinatorio**. Las técnicas de la enumeración no sólo tienen aplicación en la aritmética, sino también en otras áreas de la matemática, tales como la teoría de la probabilidad, la estadística, y en informática, por ejemplo, en la teoría de la codificación y en el análisis de algoritmos.

…La idea en que se fundamenta el análisis combinatorio y, por lo tanto, el conteo, es la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos: el de los elementos a contar y el de los números naturales. *(García Merayo, Félix – Matemática Discreta – 2º edición- Editorial Thomson – 2005)*

1. **Define:** Permutación sin repetición – Arreglo o variación simple – Combinaciones sin repetición.

2. ¿Las siguientes expresiones son arreglos? En caso afirmativo, resuélvalo. **Actividad a cargo del alumno. Justifique.**

$a)\ A_3^4 \qquad b)\ A_3^{10} \qquad c)\ A_{-5}^5 \qquad d)\ A_5^5 \qquad e)\ A_{13}^8 \qquad f)\ A_5^{11}$

3. ¿Las siguientes expresiones son permutaciones? En caso afirmativo, resuélvalo. **Actividad a cargo del alumno. Justifique.**

$a)\ P_8 \qquad b)\ P_{-5} \qquad c)\ P_{\frac{2}{5}} \qquad d)\ P_{10} \qquad e)\ P_0 \qquad f)\ P_6$

4. ¿Las siguientes expresiones son combinaciones? En caso afirmativo, resuélvalo. **Actividad a cargo del alumno**

$a)\ C_4^8 \qquad b)\ C_{2/5}^5 \qquad c)\ C_5^{10} \qquad d)\ C_{-6}^0 \qquad e)\ C_7^2 \qquad f)\ C_{24}^{24}$

5. Determina, si existe, el valor del número natural *m* en las siguientes expresiones:

$a)\ A_2^m = 6C_3^m$

$b)\ C_2^m = \dfrac{3}{2} C_{m-3}^m$

$c)\ \dbinom{m+1}{3} = 2\dbinom{m}{2}$

$d)\ \dfrac{4}{3} A_2^{m+3} - \dfrac{3}{2} A_2^{m+2} = 10$

$e)\ A_2^m + C_3^m = A_2^{m-1} + C_2^m$

$f)\ C_2^m + A_2^m = A_3^m$

$g)\ 3C_4^m + \dfrac{1}{2} A_3^m = 3C_4^{m+1}$

$h)\ A_2^m + C_2^m = A_3^m - C_2^m$

6. **<u>Problemas de aplicación</u>:**

a) ¿Cuántas aristas (que no sean bucles) distintas pueden formarse en un grafo con 7 vértices? ¿Y si en lugar de un grafo fuera un digrafo?

b) ¿Cuántos números distintos con cifras no repetidas puede formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

i) ¿Cuántos comienzan con 2?

ii) ¿Cuántos comienza con 5 y terminan en 3?

c) Un profesor de gimnasia divide a sus veinte alumnos en dos grupos de diez, para una exhibición de fin de año. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? ¿En cuántas de ellas Julio y Agustín formarán parte del mismo grupo?

d) Entre veinticinco chicas y treinta y dos varones se elegirán los representantes estudiantiles de una institución educativa. ¿De cuántas maneras se puede formar una comisión de 5 jóvenes de modo tal que contenga:

i) una chica o un varón?

ii) 3 hombres y 2 mujeres?

iii) por lo menos tres hombres y una mujer?

iv) más mujeres que hombres?

v) a una pareja de novios o no los incluya a ninguno de los dos?

e) Las patentes de los automóviles tenían tres letras (de las 26 del alfabeto) y luego 3 dígitos. Por ejemplo, $\boxed{\text{OVB 848}}$.

i) ¿Cuántas patentes se pudo emitir sin que se repitan los dígitos y las letras?

ii) ¿Cuántas de las patentes halladas en *i)* comienzan con una vocal?

iii) ¿Cuántas patentes halladas en *i)* contienen al menos un número par?

7. Reescribe y evalua, si es posible, las siguientes sumas.

$a)\sum_{i=1}^{4}(3i)^2$ $\quad b)\sum_{j=8}^{0}\left(\frac{2}{j+1}\right)$ $\quad c)\sum_{k=0}^{5}\left(k-k^2\right)$ $\quad d)\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{i}\right)$

$e)\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{1}{j}+2\right)$ $\quad f)\sum_{k=3}^{7}\left(\frac{k}{k^2-k}\right)$ $\quad g)\sum_{i=1}^{4}(-1)^i(2i)$ $\quad h)\sum_{j=0}^{4}(5^j-1)$

8. ¿Las siguientes expresiones representan números combinatorios? En caso afirmativo, resuélvalo. **Actividad a cargo del alumno. Justifique.**

$a)\binom{5}{12}$ $\quad b)\binom{12}{6}$ $\quad c)\binom{-7}{15}$ $\quad d)\binom{5}{2/3}$ $\quad e)\binom{21}{21}$ $\quad f)\binom{24}{12}$

9. <u>Binomio de Newton</u>:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{\mathrm{m}}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{m}}\binom{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\mathrm{a}^{\mathrm{m}-\mathrm{k}}.\mathrm{b}^{\mathrm{k}}=\binom{\mathrm{m}}{0}\mathrm{a}^{\mathrm{m}}.\mathrm{b}^0+\binom{\mathrm{m}}{1}\mathrm{a}^{\mathrm{m}-1}.\mathrm{b}^1+\binom{\mathrm{m}}{2}\mathrm{a}^{\mathrm{m}-2}.\mathrm{b}^2+\ldots.+\binom{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\mathrm{a}^0.\mathrm{b}^{\mathrm{m}}$$

<u>Desarrolla los siguientes binomios:</u>

$a)\ (2a-b)^4$ $\quad b)\ (5+y^2)^5$ $\quad c)\left(\frac{x}{-2}+\frac{2}{y}\right)^4$ $\quad d)\left(\sqrt{a}-6\sqrt{b}\right)^6$

$e)\left(x+\frac{1}{3}y^2\right)^6$ $\quad f)\left(x^3-3y^{-2}\right)^4$ $\quad g)\left(3^2-\frac{1}{2}\right)^8$ $\quad h)\ \left(a^{2/3}+a^{-1/2}\right)^7$

10. En los siguientes casos halla:

a) El 11º término de $(x-3)^{17}$

b) El o los términos centrales de $\left(3x^3-\frac{2}{x}\right)^5$

c) El o los términos centrales de $\left(2u-3v^2\right)^{10}$

d) El término independiente en la expansión de $\left(3x^2-\frac{2}{x^3}\right)^{15}$

e) El coeficiente del término que contiene $a^{48}b^8$ en el desarrollo de $\left(a^2+a^3b\right)^{20}$