T.P. Nº 6 – SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES EN EL PLANO

OBJETIVOS: Analizar, resolver y clasificar los distintos sistemas de ecuaciones para determinar el tipo de soluciones del mismo. Representar gráficamente inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos variables en el plano

1.- Resolver en forma analítica y gráfica. Clasificar según su solución:

$a)\begin{cases} 3x - y = -5 \\ y - 3x = -2 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} y = -3x + 5 \\ 4y + 12x = 20 \end{cases}$ $\quad c)\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

$d)\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$ $\quad e)\begin{cases} 3y = -x - 15 \\ x + y = -5 \end{cases}$ $\quad f)\begin{cases} \frac{4}{3}y + x = 8 \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4 \end{cases}$

2.- Escribir sistemas de ecuaciones con las siguientes soluciones:

a) (-2, 1) **b)** (3,-4)

c) Ninguna solución. **d)** Una infinidad de soluciones.

3.- Resolver los siguientes problemas:

i) La suma de dos números es (-42). El primero de ellos menos el segundo es 52. Calcular estos números

ii) La diferencia entre dos números es 11. El doble del más pequeño más tres veces el mayor es 123. ¿Cuáles son los números?

iii) Se invirtió un total de $\$27.000,^{00}$, una parte al 10% y el resto al 12%. El rendimiento total fue de $\$2.990,^{00}$. ¿Cuánto se invirtió a cada tipo de interés?

iv) Se vendieron 117 entradas para un concierto. Cada adulto pagó \$6.500, y cada niño \$3.500. En total, se vendieron entradas por \$619.500. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron?

4.- Dados los siguientes sistemas de ecuaciones:

- Expresarlos matricialmente.
- Si es posible, hallar el conjunto solución.
- Analizar aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius y clasificarlos
- Identificar en cada sistema la matriz ampliada:

$$a)\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+6y-8z=4 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 4x-2y-3z=5 \\ -8x-y+z=-5 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ -x=-2y-2z+9 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} -x+y+2z=0 \\ x+5y+7z=9 \\ 3x+15y+21z=-11 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} 2x+y+2z=11 \\ 3x+2y=-2z+8 \\ -3x-2y=2z-8 \end{cases} \qquad f)\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ x+6y=-3z+4 \\ -2x-12y=6z-4 \end{cases}$$

Se pueden crear modelos matemáticos para encontrar soluciones óptimas con base en ciertos límites, o restricciones. Por ejemplo, se puede crear un modelo para maximizar ganancias o minimizar costos, dados los límites de producción, las restricciones de tiempo, o la ubicación específica de los recursos. Se llama <u>Programación Lineal</u> al campo de la matemática en que los sistemas de inecuaciones o desigualdades lineales son la base del modelo ***(SMITH, Stanley y otros - Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica - Ed. Addison Wesley Longman – 1998)***

5.- Determinar si los siguientes pares ordenados: (0; 1), (-4; 2), (0; 3), (-1; 5) son solución de:

$3x - y < -3$

6.- Representar gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$i)\begin{cases} y \geq x \\ x+y \leq 4 \end{cases} \qquad ii)\begin{cases} 3x+4y \geq 12 \\ 5x+6y \leq 30 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad iii)\begin{cases} 5x+6y \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \qquad iv)\begin{cases} 4y-3x \geq -12 \\ 4y+3x \geq -36 \\ y \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplo de Programación lineal:

Los alumnos deben rendir una prueba en la que las preguntas del tipo A valen 10 puntos y las del tipo B valen 15 puntos. Se tarda 3 minutos contestar una pregunta del tipo A y seis minutos una del tipo B. El tiempo máximo permitido para la solución es de 60 minutos, y no puedes contestar más de 16 preguntas. Suponiendo que todas tus respuestas son correctas, ¿cuántas preguntas de cada tipo deberías resolver para obtener la calificación máxima?

Solución: para resolver este problema, recurrimos a la programación lineal

x = número de preguntas del tipo A

y = número de preguntas del tipo B

Puntuación total: T = 10 x + 15 y, por lo tanto, el conjunto de pares (x; y), está determinado por las siguientes restricciones:

$3x + 6y \leq 60$ ***{Tiempo}***

$x + y \leq 16$ ***{Total de preguntas permitidas}***

$x \geq 0$ ***{nº de preguntas del tipo A, responde ninguna o algunas}***

$y \geq 0$ ***{nº de preguntas del tipo B, responde ninguna o algunas}***

Armamos el sistema y graficamos (para ello, trazamos la gráfica de la ecuación lineal correspondiente):

$$\begin{cases} 3x+6y\leq 60 \\ x+y\leq 16 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+10 \\ y=-x+16 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

La gráfica está compuesta por un polígono y su interior.

T tiene un valor máximo y un valor mínimo representado en cada uno de los vértices del polígono.

Las coordenadas de los vértices son: (0; 0) ; (16; 0) ; (12; 4) ; (0; 10). Reemplazamos esas coordenadas en **T = 10 x + 15 y** :

$$T_{(0;0)} = 10.0+15.0=0 \quad (mínimo)$$

$$T_{(16;0)} = 10.16+15.0=160$$

$$\boxed{T_{(12;4)} = 10.12+15.4=180 \quad (máximo)}$$

$$T_{(0;10)} = 10.0+15.10=150$$

Para lograr la puntuación máxima debe responder 12 preguntas del tipo A y 4 preguntas del tipo B.

El teorema fundamental para resolver problemas de Programación Lineal es:

Fuente: ***(SMITH, Stanley y otros - Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica - Ed. Addison Wesley Longman – 1998), pág. 209-210***

Consultar también: https://www.questionpro.com/blog/es/programacion-lineal/