SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$Ax + By + C = 0$$

ECUACIÓN LINEAL DE DOS VARIABLES (ec. de una recta)

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ECUACIÓN LINEAL DE TRES VARIABLES (ec. de un plano)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

ECUACIÓN LINEAL DE n VARIABLES

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}.x_j = b_1$$

Que es la misma expresada en forma de sumatoria, y en la que:
a_{1j}: son los coeficientes
b_1: es el término independiente.

$$\left(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n \right)$$

n-upla que será solución de la ecuación si cumple que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1\,j} . x_j = b_1$$ **es Verdadera.**

Generalizando para m ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$con\ 1 \le i \le m$$

a_{ij}: son los coeficientes
x_j : variables
b_i: es el término independiente.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

Expresión en forma matricial, en la que se encuentran:
Matriz de los coeficientes
Matriz de las incógnitas
Matriz de los términos independientes

$$[A]_{mxn} \,.\, [X]_{nx1} = [B]_{mx1}$$

$[A]^{mxn}$ o $A \in K^{mxn}$ matriz de los coeficientes

$[X]^{nx1}$ o $X \in K^{nx1}$ matriz de las incógnitas

$[B]^{mx1}$ o $B \in K^{mx1}$ matriz de los resultados o de los términos independ.

Particularizando para un sistema de *dos ecuaciones con dos incógnitas*. Utilizando el lenguaje matricial, podemos escribir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$[A]^{2x2}$ o $A \in K^{2x2}$ matriz de los coeficientes

$[X]^{2x1}$ o $X \in K^{2x1}$ matriz de las incógnitas

$[B]^{2x1}$ o $B \in K^{2x1}$ matriz de los resultados o de los términos independ.

Clasificación según la matriz de los coeficientes

Según el número de ecuaciones "m" y el número de incógnitas "n"

- $m = n \rightarrow$ sistema cuadrado
- $m \neq n \rightarrow$ sistema rectangular o general

Clasificación según la matriz de los resultados o de los términos independientes

Según la matriz de los términos independientes

- $A . X = B \wedge B \neq 0$

  Sistema no homogéneo

- $A . X = B \wedge B = 0$

  Sistema homogéneo

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS SEGÚN EL CONJUNTO SOLUCIÓN

- Tengan o no solución
  - Compatibles
    - Determinados: única solución
    - Indeterminados: infinitas soluciones
  - Incompatibles
    - sin solución

Sistemas Cramerianos:

Si en un sistema de ecuaciones lineales se tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, es decir m=n, el sistema es cuadrado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$[\mathrm{A}]_{\mathrm{nxn}} \,.\, [\mathrm{X}]_{\mathrm{nx1}} = [\mathrm{B}]_{\mathrm{nx1}}$$

Si además |A| ≠ 0, es decir, la matriz [A] es regular o inversible, el sistema recibe el nombre de Crameriano.

$$\text{un sistema es crameriano} \iff \quad m = n \wedge |A| \neq 0$$

REGLA DE CRAMER

En un sistema crameriano cada incógnita es el cociente entre el determinante asociado a esa incógnita y el determinante del sistema.
Que se puede expresar como:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

(tiene demostración)

TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Permite prever lo que va a suceder al resolver el sistema, aunque no nos da el resultado, y tiene la ventaja de ahorrar el trabajo de resolver un sistema que no tiene solución.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

considerando vectores columna:

$$A = \left(A_1;\, A_2;\, \ldots.;\, A_n \right)$$

$$A' = \left(A_1;\, A_2;\, \ldots.;\, A_n;\, B \right)$$

Rg(A)=Rg(A′)
Sistema Compatible
(tiene solución)

Rg(A)=Rg(A′)=n
Sistema Compatible Determinado
(*una solución única*)

[Rg(A)=Rg(A′)] < n
Sistema Compatible Indeterminado
(*infinitas soluciones*)

Rg(A) ≠ Rg(A′)
Sistema Incompatible
(NO tiene solución)

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles, rg(A)=rg(A′)
Determinados, tienen una única solución que es la **trivial**.
Indeterminados, tienen infinitas soluciones además de la trivial.

Dos sistemas ***son equivalentes*** cuando tienen las mismas soluciones.
Para obtener un sistema equivalente de uno dado, se efectúan en el dado operaciones elementales.

Las operaciones elementales que podemos realizar en un sistema de ecuaciones lineales son:

- Permutar el orden de las ecuaciones.
- Multiplicar una de la ecuaciones por un escalar

$$k \ / \ k \in R-\{0\}$$

- Sumar una ecuación a otra cualquiera de ellas. Sumar a una ecuación cualquier combinación lineal de ella misma con otra/s ecuación/ecuaciones del sistema, siempre que el coeficiente de la combinación lineal sea distinto de cero.

Método de Gauss - Jordan:

El método consiste en obtener una matriz equivalente a la dada, en la cual, aparezcan la mayor cantidad posible de vectores columna canónicos, aplicando operaciones elementales.

Sea una matriz no nula $[A]_{mxn}$, por ejemplo, de orden 3x4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

1- La fila del pivote se divide por el valor del pivote.

2- Cada elemento que está en una fila que no es la del pivote, se transforma, restándole a cada elemento el producto de los valores que están en su fila y columna y en la fila y columna del pivote, todo ello dividido por el mismo pivote.

Síntesis del método:

1 – Se elige un pivote, distinto de cero, preferentemente unitario (igual a la unidad).

2 – La fila del pivote se divide por el pivote.

3 – Los elementos de la columna del pivote se transforman en cero, excepto el pivote, que se transforma en uno.

4 – Los demás elementos se transforman por la regla del rectángulo.

5 – Se repite el procedimiento eligiendo otro pivote que no pertenezca ni a la fila ni a la columna del pivote antes elegido.

Ejemplo:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ -x + y + z = 9 \end{cases}$$

Resolver por:

Regla de Cramer

Gauss

su expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio de introducción:

$$p_C = 0.4\, p_E + 0.6\, p_A$$

$$p_E = 0.6\, p_C + 0.1 p_E + 0.2\, p_A$$

$$p_S = 0.4\, p_C + 0.5 p_E + 0.2\, p_A$$

$$\begin{cases} p_C - 0.4\, p_E - 0.6\, p_A = 0 \\ -0.6\, p_C + (1-0.1)\, p_E - 0.2\, p_A = 0 \\ -0.4\, p_C - 0.5 p_E + (1-0.2)\, p_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_C - 0.4\, p_E - 0.6\, p_A = 0 \\ -0.6\, p_C + 0.9 p_E - 0.2\, p_A = 0 \\ -0.4\, p_C - 0.5 p_E + 0.8\, p_A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,9 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & -0,5 & 0,8 & 0 \\ \hline 10 & -4 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & 8 & 0 \\ \hline 10 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 66 & -56 & 0 \\ 0 & -66 & 56 & 0 \\ \hline 10 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 66 & -56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 p_C - 0.4 p_E - 0.6 p_A = 0 \\ 6.6 p_E - 5.6\, p_A = 0 \end{cases}$$

$$6.6 p_E = 5.6 p_A \Rightarrow p_E = \frac{28}{33} p_A \cong 0.85 p_A$$

$$p_C = (0.4\, x 0.85)\, p_A + 0.6 p_A = 0.94 p_A$$

$$\Leftarrow$$

Vector precios

$$p = \begin{bmatrix} p_C \\ p_E \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 p_A \\ 0.85 p_A \\ p_A \end{bmatrix} = p_A \begin{bmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{bmatrix}$$