ENS RENNES

Théorie de Morse

Auteur :
Guillhem Artis

Superviseur :
Vincent Humilière

28 août 2022

école
normale
supérieure
rennes

Remerciements

Je remercie L'IMJ Paris rive gauche de m'avoir accueilli dans de très bonnes conditions, les doctorants qui m'ont fait participer à de nombreux séminaires, notamment Francesco Morabito, et enfin Monsieur V. Humilière qui a été un maître de stage disponible, arrangeant, motivé et de très bons conseils.

Introduction :

Ce stage avait pour trame de fond, le théorème du h-cobordisme. Démontré par Stephen Smale peu avant les années 1960 (ce qui lui valut la médaille Fields en 1966), il a pour énoncé : "Soit W une variété lisse compacte ayant pour bord deux composantes connexes, V et V', telles que V et V' soient des rétractes par déformation de W (W est appelé h-cobordisme entre V et V'). Si V et V' sont simplement connexes et de dimension supérieure à 4, alors W est difféomorphe à $V \times [0,1]$ et par conséquent V et V' sont difféomorphes." Ce théorème permet de classer certaines variétés en grande dimension et a de nombreuses conséquences dont une démonstration de la conjecture de Poincaré en dimension supérieure à 5.

Durant ce stage, nous avons suivi la preuve publiée dans le *Princeton University Press* en 1965 par John Milnor. Suite aux travaux de Morse et Munkress, Milnor utilise les fonctions de Morse *(voir définition en* 2.2.1*)* sur une variété pour démontrer le précédent théorème. Sa démonstration est issue de l'observation d'une condition suffisante. Si une triade (W, V_0, V_1) *(voir définition en* 2.2.1*)* possède une fonction de Morse n'ayant aucun point critique, alors W est difféomorphe à $V \times [0,1]$. Dès lors, exhiber une telle fonction suffit à démontrer le théorème du h-cobordisme. Pour ce faire Milnor montre, dans un premier temps, que toute triade de variétés compactes lisses (W, V_0, V_1) possède une fonction de Morse ayant un nombre fini de points critiques tous non dégénérés. Grâce à l'observation précédente, un cobordisme *(voir définition dans la sous-partie* 3.1*)* peut s'écrire comme produit de cobordismes élémentaires *(voir définition dans la sous-partie* 3.1*)*. L'étude en détail de ce papier s'est arrêtée à ce point. Ensuite, l'auteur prouve un résultat (*rearrangment of coborsisms*) permettant de placer les ponts critiques dans le sens décroissant de leurs indices *(voir définition dans le point 3 de la démonstration en* 2.1*)*. Dans un dernier temps, grâce aux hypothèses de l'énoncé, Milnor supprime les points critiques deux à deux. La condition suffisante lui permet ainsi de conclure.

Sommaire :

1 Préliminaires

Références utilisées : [Mas], [Pau]

Il s'agit ici de présenter des définitions et résultats indispensables à la compréhension de ce rapport.

1.1 Variétés topologique et partition de l'unité

Définition : Une variété topologique (de dimension $n \in \mathbb{N}^*$) est un espace topologique M tel que :

— M est séparé est à base dénombrable,

— tout point de M admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (i.e. un couple (U, ϕ)),

On appelle l'ensemble des couples (U, φ) tel que $\cup U = M$, un atlas de cartes.

Fixons maintenant M une variété topologique de dimension n (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Définition : Soit $\mathcal{A}$ un ensemble. Une partition de l'unité de M est une famille $\phi_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonctions continues sur M dans $[0, 1]$, dont la famille des supports est localement finie et qui vérifie :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha = 1$$

Sout I un ensemble et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M. Une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ est une partition de l'unité $(\phi_i)_{i \in I}$ de M, telle que $Supp(\phi_i) \subset U_i$ pour tout $i \in I$.

Proposition : Tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de M admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.

Démonstration :

1. *Montrons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout voisinage U de x_0, il existe une fontction lisse de $\mathbb{R}^n$ dans [0,1] de support contenu dans U et constante égale à 1 sur un voisinage de x_0.*

Soit $0 < a < b$, considérons l'application lisse :

$$\left[\begin{array}{cccc} f_{a,b} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } t \leq a \\ 0 \text{ si } t \geq b \\ (1 + exp(\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}))^{-1} \text{ si } a < t < b \end{cases} \end{array}\right]$$

(On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|.\|$.) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \subset U$. Il suffit alors de considérer l'application suivante :

$$\left[\begin{array}{c} f : \quad \mathbb{R}^{\ltimes} \to [0,1] \\ \quad x \mapsto f_{\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon} \end{array}\right]$$

2. *Nous avons maintenant besoin d'une nouvelle propriété sur les variétés topologiques, à savoir, leur paracompacité.* Puisque M est localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, elle est métrisable. Notons d une distance sur M et fixons $x \in M$,

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_p = \mathcal{B}_d(x, p+1).$$

Enfin écrivons $K'_0 = K_0$ et,

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad K'_p = K_p \setminus \mathring{K'}_{p-1}.$$

On a :

$$M = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} K'_p$$

Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M. Introduisons les ouverts suivant :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in A \quad V_{p,\alpha} = U_\alpha \cap (\mathring{K}_{p+2} \setminus K_{p-1}).$$

Donc $(V_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de K'_p. Par compacité de K'_p, il existe un sous recouvrement fini $(V_{p,\alpha})_{\alpha \in A_p}$ (où A_p est un sous ensemble de A). Ainsi, $(V_{p,\alpha})_{p \in \mathbb{N}, \alpha \in A_p} := \mathcal{V}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$. Soit $\varepsilon > 0$, $y \in M$ et $m = \lfloor d(y,x) \rfloor + 2$. Quitte à réduire ε, supposons que $V = \mathcal{B}_d(y, \varepsilon) \subset \mathcal{B}_d(x, m) = K_m$. On a alors,

$$card(V \cap \mathcal{V}) \leq card(K_m \cap \mathcal{V}) = \sum_{p=0}^{m} card(A_p) < +\infty$$

. Donc $\mathcal{V}$ est localement fini et par conséquent M est paracompacte.

3. *Montrons l'existence d'une partition de l'unité.* Soit $x \in M$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K'_p$, et $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U$.

$$\exists W_x \in \mathcal{V}(x) \quad ouvert \quad \left\{ \begin{array}{c} W_x \subset U \\ \exists \Psi : W_x \to \Psi(W_x) \end{array} \right.$$

où $\Psi(W_x)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et Ψ un homéomorphisme.
Grâce au premier point, il existe, $\Psi' : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ telle que :

- Ψ' soit continue,
- $Supp(\Psi') \subset \Psi(W_x)$,
- $\exists w_x \in \mathcal{V}(\Psi(x)) \quad ouvert \quad \left\{ \begin{array}{c} w_x \subset \Psi(W_x) \\ \Psi'_{|w_x} = 1. \end{array} \right.$

Considérons $\varphi_x = \Psi' \circ \Psi : W_x \to [0,1]$. Elle vérifie :

- φ_x continue,
- $Supp(\Psi') \subset \Psi^{-1\prime}(Supp(\Psi')) \subset \Psi^{-1}(\Psi(W_x)) \subset W_x$
- $\varphi_{x_{|\underbrace{\Psi^{-1}(w_x)}_{:=V_x}}} = 1$

Comme $\Psi^{-1}(Supp(\Psi'))$ est fermé dans W_x ouvert on peut prolonger ϕ_x continûment en une application en une application continue,

$$\left[\begin{array}{ccc} \Phi_x : & & M \to [0,1] \\ & y \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} \varphi_x(y) \text{ si } y \in W_x \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$(V_x)_{x \in K'_p}$ recouvre K'_p. On se donne alors B_p une partie finie de K'_p telle que $(V_x)_{x \in B_p}$ recouvre K'_p. Posons maintenant :

$$\mathcal{A} = \{x \in M | \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad x \in B_p\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x \in B_p\}$$

L'application $\Phi = \sum_{x \in \mathcal{A}} \Phi_x$ est bien définie car l'image de tout point est une somme finie. Elle est continue, car pour tout point de M, il existe un voisinage autour de ce point tel que Φ soit égale à une somme finie de $(\Phi_x)_{x \in \mathcal{A}}$ continues. Enfin comme $(V_x)_{x \in \mathcal{A}}$ recouvre M, Φ ne s'annule pas sur M. On peut donc considérer les applications continues :

$$\forall x \in \mathcal{A} \quad \Phi'_x = \frac{\Phi_x}{\Phi}.$$

On a alors les deux points suivants :

— $Supp(\Phi'_x) \subset W_x$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ (et il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $_x \in U$). Comme $(W_x)_{x\in\mathcal{A}}$ recouvre M, $\{Supp(\Phi'_x)\}_{x\in\mathcal{A}}$ est localement fini.

— $\sum_{x\in\mathcal{A}} = 1$

Ainsi $(\Phi'_x)_{x\in\mathcal{A}}$ est une partition de l'unité.

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant pour terminer cette démonstration.

Lemme : Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M et $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une partition de l'unité vérifiant :

$$\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \exists i \in I \quad Supp(\varphi_\alpha) \subset U_i.$$

Alors en prenant :

$$\left[\begin{array}{ll} f: & \mathcal{A} \to I \\ & \alpha \mapsto i \text{ tel que } Supp(\varphi_\alpha) \subset U_i, \end{array}\right]$$

$(\underbrace{\sum_{\alpha\in f^{-1}(\{i\})} \varphi_\alpha}_{\Phi_i})_{i\in I}$ est une partition de l'unité.

Démonstration :

1. Comme $\{Supp(\varphi_\alpha) \quad | \quad \alpha \in \mathcal{A}\}$ est localement fini, pour tout $i \in I$, Φ_i est continue car elle localement égale à une somme finie de fonctions continues.
2. En sommant par paquets,
$$\sum_{i\in I} \Phi_i = \sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in f^{-1}(\{i\})} \varphi_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \varphi_\alpha = 1$$
3. Soit $x \in M$ et $i \in I$
$$\exists V \in \mathcal{V}(x) \quad card(\{\alpha \in \mathcal{A} \quad | \quad Supp(\varphi_\alpha) \cap V \neq \varnothing\}) < +\infty$$
Notons $D = \{\alpha \in \mathcal{A} \quad | \quad Supp(\varphi_\alpha) \cup V \neq \varnothing\}$. Si,
$$\forall \alpha \in D \quad f(\alpha) \neq i,$$
alors $Supp(\Phi_i) \cap V = \varnothing$. Donc comme les $(f^{-1}(\{i\}))_{i\in I}$ sont deux à deux disjointes, on a :
$$|\{i \in I, \quad Supp(\Phi_i) \cap V \neq \varnothing\}| \leq |\{\alpha \in \mathcal{A}, \quad Supp(\varphi_\alpha) \cap V \neq \varnothing\}|.$$
Et il vient,
$$card(\{i \in I, \quad Supp(\Phi_i) \cap V \neq \varnothing\}) < +\infty.$$

4. Enfin,
$$\forall i \in I \quad Supp(\Phi_i) \subset \bigcup_{\alpha \in f^{-1}(\{i\})} Supp(\varphi_\alpha) \subset U_i.$$

Ainsi $(\Phi_i)_{i \in I}$ est bien une partition de l'unité adaptée à $\mathcal{U}$.

Ce lemme termine la preuve de l'existence d'une partition de l'unité continue adaptée à un recouvrement ouvert donné sur une variété.

1.2 Variétés différentielles et applications différentiables

Le théorème du h-cobordisme ayant pour objet les variétés différentielles lisses (que nous appellerons plus simplement variétés différentiables), nous en donnons ici une définition et quelques propriétés.

Définition : Soit $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, un atlas d'une variété topologique M. Les changements de cartes de $\mathcal{A}$ sont les homéomorphismes :

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} :\to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

Un atlas est dit lisse si tous les changements de cartes sont lisses.

Définition : On dit que deux atlas lisses sont compatibles sur M si leur réunion est un atlas lisse sur M. C'est équivalent à dire que les changements entre les cartes de l'un et les cartes de l'autre sont des difféomorphismes lisses (que nous appellerons plus simplement difféomorphismes).

Proposition : La compatibilité entre atlas est une relation d'équivalence sur les atlas lisses de M.

Démonstration : On se donne A, A' et A'' trois atlas sur M. On notera la relation de compatibilité. Celle-ci est clairement réflexive et symétrique, montrons qu'elle est transitive. Supposons que A' soit compatible avec A et A''. Soit $(U, \varphi) \in A, (U', \varphi') \in A', (U'', \varphi'') \in A''$. Notons $a = U \cap U' \cap U''$. Puisque,
$$\begin{cases} \varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U') \\ \varphi'' \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi''(U \cap U') \end{cases}$$
sont lisses,
$$\begin{cases} \varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(a) \to \varphi'(a) \\ \varphi'' \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(a) \to \varphi''(a) \end{cases}$$

le sont sont aussi (et a est bien un ouvert de $U \cap U''$). Donc par composée,

$$\varphi'' \circ \varphi^{-1} : \varphi(a) \to \varphi''(a)$$

est lisse. Ainsi comme les ouverts de A' recouvrent M, $\varphi'' \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme sur tout ouvert de $U'' \cap U$. Donc

$$\varphi'' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi''(U \cap U')$$

est un difféomorphisme. Ainsi A et A'' sont compatibles.

Définition : Une variété différentiable (pour variété différentielle lisse) est un couple $(M, \sum)$ où M est une variété topologique et $\sum$ une classe d'équivalences d'atlas lisses sur M.

Remarque : Dans ce rapport une variété désignera une variété différentiable compacte.

Définition : Soit X, Y deux variétés, et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est différentiable en $x \in X$ s'il existe des cartes $\varphi_x : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi_x : V \hookrightarrow \mathbb{R}^p$ autour de x et $f(x)$ respectivement telles que,

$$\psi_x \circ f \circ \phi_x^{-1} \to \psi_x(V)$$

soient différentiables. On dit que f est lisse si pour tout $x \in X$, $\psi_x \circ f \circ \phi_x^{-1}$ l'est.

Enfin nous avons besoin de deux derniers résultats pour l'ensemble des preuves de ce rapport. Le premier est l'extension de l'existence d'une partition de l'unité sur les variétés et le second est le théorème suivant :

Théorème : Toute variété se plonge dans un espace affine $\mathbb{R}^n$.

Les variétés que nous aborderons seront, grâce au théorème précédent, des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, sauf quand le transport d'un résultat de $\mathbb{R}^n$ dans le domaine des variétés ne sera pas immédiat.

2 Fonction de Morse

Références utilisées : [Leb], [Mil 2]

2.1 Lemme de Morse

On se place sur M, une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et on considère $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Le but de cette partie est de démontrer le lemme suivant :

Lemme : Si $p \in V$ est un point critique non dégénéré de f alors il existe un voisinage coordonnées autour de p et $\lambda \in [\![0, n]\!]$ (l'indice du point critique) tels que :

$$f(x_1, ..., x_n) = f(p) - x_1^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_n^2$$

Démonstration :

1. *Il existe $S : M \to \mathbb{R}^n$ lisse telle que,*

$$\forall x \in M \quad f(x) = f(p) + x^T S(x) x.$$

Comme f est lisse il suffit d'utiliser la formule de Taylor reste intégral :

$$\forall x \in M \quad f(x) = f(p) + df(p).(x) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(p+tx).(x,x) dt$$

Le théorème de Schwartz indique alors que $S(x) = \int_0^1 (1-t) d^2 f(p+tx) dt$ est symétrique, et on obtient le résultat souhaité.

2. *Montrons qu'il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme h de Ω dans $\mathbb{R}^n$ tels que, en notant $J = d^2 f(p)$, on ait :*

$$\forall x \in \Omega \quad x^T S(x) x = h(x)^T J h(x).$$

Considérons :

$$\left[\begin{array}{ccccc} \Phi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & M^T J M \end{array} \right]$$

une application bilinéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie. Elle est donc lisse. Comme toute matrice symétrique est la moyenne arithmétique entre sa transposée et elle même et, $d\Phi(I_n).H = JH + (JH)^T$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d\Phi(I_n)$ est surjective de noyau $J^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Si F désigne un supplémentaire du noyau alors $d\Phi_{|F} : F \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme. D'après le théorème d'inversion locale, il existe :

— U un voisinage ouvert de I_n dans F,

— V un voisinage ouvert de $\Phi(I_n) = J$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

tels que $\Phi : U \to V$ soit un difféomorphisme. En posant $\Psi = \Phi^{-1}$, on a :

$$\forall A \in V \quad A = \Psi(A)^T J \Psi(A).$$

S est continue en 0 et,

$$S(0) = \int_0^1 (1-t) d^2 f(p) dt = \left(\int_0^1 (1-t) dt \right) J = \frac{1}{2} J.$$

Donc il existe Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $S(\Omega) \subset V$. Par conséquent,

$$\forall x \in \Omega \quad S(x) = \Psi(S(x))^T J \Psi(S(x))$$

Posons maintenant :

$$\left[\begin{array}{cccc} h & : & \Omega & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & \Psi(S(x))x \end{array} \right]$$

D'une part,

$$\forall x \in \Omega \quad x^T S(x) x = h(x)^T J h(x),$$

et d'autre part, quitte à diminuer Ω, h est un difféomorphisme. En effet, en notant $id = id_{\mathbb{R}_n}$, comme $h = \Psi \circ S \times id$, on a :

$$\begin{aligned} dh(0) &= d(\Psi \circ S)(0) \times id(0) + (\Psi \circ S)(0) \times d(id)(0) \\ &= d(\Psi \circ S)(0) \times 0 + (\Psi \circ S)(0) \times id \\ &= I_n \times id \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le théorème d'inversion locale.

3. *Obtention de la forme souhaitée.* J est la matrice d'une forme quadratique réelle. Comme elle est inversible, la forme est non dégénérée. Le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier unique $\lambda \in [\![0, n]\!]$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que,

$$J = P^T \underbrace{\begin{pmatrix} -I_\lambda & 0 \\ 0 & I_{n-\lambda} \end{pmatrix}}_{=R} P.$$

Ainsi en considérant le difféomorphisme $\phi = Ph$, il vient :

$$\forall x \in \quad f(x) = f(p) + \phi(x)^T R\Phi(x).$$

En modifiant avec ϕ pour modifier la carte locale, on obtient finalement :

$$\forall x \in \Omega \quad f(x) = f(p) - x_1^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_n^2.$$

2.2 Existence d'une fonction de Morse sur les triades

2.2.1 Quelques définitions : [Mil 1], [Mun]

Définition : On dit que (W, V_0, V_1) est une triade de variétés si W est une variété ayant pour frontières deux composantes connexes V_0 et V_1.

Remarque : Par soucis de simplification, nous appellerons "triade", toute triade de variétés. Nous fixons $T = (W, V_0, V_1)$, une triade.

Définition : Une fonction de Morse sur un T est une fonction lisse $f : W \to [a, b]$ (avec $a < b$) telle que :

— $V_0 = f^{-1}(a), \quad V_1 = f^{-1}(b)$

— Tous les points critiques sont intérieurs à W et sont non dégénérés

Proposition : Toute fonction de Morse sur T a un nombre fini de points critiques.

Démonstration : Le lemme de Morse indique que les points critiques de f sont isolés. Par compacité de W, on en déduit qu'elle n'en possède qu'un nombre fini.

2.2.2 Toute triade possède une fonction de Morse

Dans un premier temps, démontrons le théorème suivant :

Théorème : Il existe $f : W \to [0, 1]$ lisse telle que :

— $V_0 = f^{-1}(0), \quad V_1 = f^{-1}(1)$
— f n'a pas de points critiques au voisinage de ∂W

Démonstration :

1. *Il existe un recouvrement de W par des ouverts coordonnées qui ne rencontrent pas V_0 et V_1 à la fois.*
   Donnons-nous $\mathcal{U} = (U_1, ..., U_p)$ un recouvrement par des ouverts coordonnées de W. Notons $V := U_1$ et supposons que $V \cap V_0 \neq \varnothing$, $V \cap V_1 \neq \varnothing$. Écrivons maintenant :
$$h = d(V_0 \cap V, V_1 \cap V)$$
$$\Gamma_0 = \left\{ x \in V, \quad d(x, V_0) < \frac{h}{2} \right\}$$
$$\Gamma_1 = \left\{ x \in V, \quad d(x, V_1) < \frac{h}{2} \right\}$$
$$\gamma_0 = \left\{ x \in V, \quad d(x, V_0) < \frac{h}{4} \right\}$$
$$\gamma_1 = \left\{ x \in V, \quad d(x, V_1) < \frac{h}{4} \right\}$$
   Avec ces écritures, $K := V \setminus (\Gamma_0 \sqcup \Gamma_1)$, est un compact de V. Recouvrons le par un nombre fini d'ouverts contenu dans $V \setminus (\gamma_0 \sqcup \gamma_1)$ et sur lesquels on restreint la carte définie sur V. La structure lisse obtenue sur K est compatible avec celle sur W. En reproduisant ce procédé pour chaque U_i, on obtient une structure de variété lisse sur W telle que chaque ouvert ne rencontre pas V_0 et V_1 à la fois.

2. *Construisons une telle fonction f.*
   Considérons $\mathcal{U} = (U_1, ..., U_p)$ le recouvrement donné par le point précédent. Soit $h_1, .., h_p$ les difféomorphismes locaux. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ définissons $f_i : U_i \to [0, 1]$ de la façon suivante :
   — si $U_i \cap V_0 \neq \varnothing$, alors $f_i = \pi_n \circ h_i$,
   — si $U_i \cap V_1 \neq \varnothing$, alors $f_i = 1 - \pi_n \circ h_i$,
   — sinon $f_i = \frac{1}{2}$
   Considérons maintenant $\{\varphi_i\}_{1 \leq p}$ une partition de l'unité adaptée à $\mathcal{U}$. Soit,
$$\left[\begin{array}{cccl} f & : & W & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & \varphi_i(x) f_i(x) \text{ si } x \in U_i \end{array} \right]$$

3. *Montrons que f vérifie les hypothèses.*

   f est lisse sur chaque U_i donc elle est lisse sur $W = \bigcup\limits_{i=1}^{p} U_i$.

   Soit $x \in W$.

   <u>1^{er} cas :</u> $x \in \mathring{W}$. Donc,

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad x \in U_i \implies 0 < f_i(x) < 1$$

   Donc $0 < f(x) < \sum\limits_{i=1}^{p} \varphi_i(x) = 1$.

   <u>2^e cas :</u> $x \in V_0$. Donc,

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad x \in U_i \implies f_i(x) = 0$$

   Donc $f(x) = \sum\limits_{i=1,\ x \in U_i}^{p} \varphi_i(x) f_i(x) = 0$.

   <u>3^e cas :</u> $x \in V_1$. Donc,

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad x \in U_i \implies f_i(x) = 1$$

   Donc $f(x) = \sum\limits_{i=1,\ x \in U_i}^{p} \varphi_i(x) f_i(x) = 1$.

   Ainsi : $V_0 = f^{-1}(0)$, et $V_1 = f^{-1}(1)$.

   Fixons $x \in \partial W$, i.e. $x \in V_\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Il existe $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi_j(x) > 0$ (donc $x \in U_j$). Notons $h_j = (x_1, ..., x_p)$ le difféomorphisme donné par la structure lisse sur U_j et plaçons-nous sur U_j. On a :

$$f = \sum_{i=1,\ x \in U_i}^{p} \varphi_i f_i$$

   Donc pour tout réel $t \neq 0$

$$\frac{1}{t}\left(f(x + t x_n(x)) - f(x)\right) = \sum_{i=1,\ x \in U_i}^{p} \frac{1}{t}\left((\varphi_i f_i)(x + t x_n(x)) - (\varphi_i f_i)(x)\right)$$

En faisant tendre t vers 0, il vient :

$$\begin{aligned}
Df_{x_n(x)}(x) &= \sum_{i=1,\ x\in U_i}^{p} D\varphi_i f_{i_{x_n(x)}}(x) \\
&= \sum_{i=1,\ x\in U_i}^{p} f_i(x)\left(D\varphi_{i_{x_n(x)}}(x)\right) + \varphi_i(x)\left(Df_{i_{x_n(x)}}(x)\right) \\
&= \varepsilon D\left(\sum_{i=1,\ x\in U_i}^{p} \varphi_i\right)_{x_n(x)}(x) + (-1)^\varepsilon \sum_{i=1,\ x\in U_i}^{p} \varphi_i(x) \\
&= \varepsilon\, \underbrace{D(1)_{x_n(x)}(x)}_{=0} + (-1)^\varepsilon \times 1 \\
&= (-1)^\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $df(x) \neq 0$. Par conséquent, df ne s'annule pas sur ∂W, et comme df est continue, df ne s'annule pas au voisinage de ∂W.

Ensuite, il reste à démontrer que l'on peut choisir une telle fonction qui n'a, en plus, que des points critiques non dégénérés. Pour ce faire, J. Milnor prouve tout d'abord trois lemmes que nous ne démontrerons pas.

Lemme : Si f est une application réelle $\mathcal{C}^2$ sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour presque toute forme linéaire $L \in \mathbb{R}^{n^*}$ (i.e. hormis pour un ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{n^*} \cong \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle), $f+L$ n'a que des points critiques non dégénérés.

Définition : On considère M une variété compacte. On appelle topologie $\mathcal{C}^2$, la topologie induite sur $\mathcal{C}^2(M,\mathbb{R})$ par la norme $\|.\|$, définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(M,\mathbb{R}) \quad \|f\| = \|f\|_\infty + \|df\|_\infty + \|d^2f\|_\infty.$$

Si A est une sous-variété de W, $\|.\|_A$ désignera la norme sur $\mathcal{C}^2(A,\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(A,\mathbb{R}) \quad \|f\|_A = \|f\|_{\infty,A} + \|df\|_{\infty,A} + \|d^2f\|_{\infty,A}.$$

Lemme : Soit K un sous-ensemble compact d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}_2$ et n'a que des points fixes non dégénérés sur K, alors il existe un voisinage de f dans $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ tel que toute fonction sur ce voisinage n'a pas de point critique dégénéré sur K.

Lemme : Soit U, U' des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $K \subset U$, $K' \subset U'$ des compacts. Si $h : U \to U'$ est un difféomorphisme tel que $h(K) = K'$ alors pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute application lisse $f : U' \to \mathbb{R}$ vérifiant $\|f\|_{K'} < \delta$ alors $\|f \circ h\|_K < \varepsilon$.

Grâce à ces lemmes nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème : L'ensemble des fonctions de Morse sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, dans le cas où $\partial M \neq \varnothing$, forme un ouvert dense pour la topologie $\mathcal{C}^2$.

Démonstration : On fixe $(U_1, h_1), ..., (U_p, h_p)$ un recouvrement de M par des ouverts coordonnées (on a utilisé l'hypothèse de variété sans bord).

Dans un premier temps, montrons qu'il existe un sous recouvrement compact de $\mathcal{U} = (U_1, ..., U_p)$. Comme M est métrisable,

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \forall x \in U_i \quad \exists V_x \in \mathcal{V}_M(x) \quad V \subset \overline{V} \subset U.$$

On a alors :

$$M = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{x \in U_i} V_x.$$

Comme M est compacte, il existe $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in M$ tels que :

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{V_{x_i}}.$$

Et de plus, tout élément de $\mathcal{V} = (\overline{V_{x_1}}, ..., \overline{V_{x_m}})$ est un compact contenu dans un élément de $\mathcal{U}$. Nous noterons plus simplement $C_i := \overline{V_{x_i}}$ et nous dirons qu'une fonction est bonne sur un sous-ensemble $S \in M$ lorsqu'elle n'a pas de points critiques dégénérés sur S.

1. *L'ensemble des fonctions de Morse est ouvert.*
   Soit f une fonction de Morse sur M. D'après le second lemme, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe un voisinage Ω_i de f dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ tel que toute fonction dans Ω_i soit bonne sur C_i. Donc, sur le voisinage $\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_m$ de f, toutes les fonctions sont bonnes sur $C_1 \cup ... \cup C_m = M$.

2. *L'ensemble des fonctions de Morse est dense.*
   Rappelons que l'on se place dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ muni de la topologie $\mathcal{C}^2$. Soit f un élément de cet espace et V un voisinage de f. Considérons $\varphi : M \to [0, 1]$ lisse, valant 1 sur un voisinage de C_1 et 0 sur un voisinage de $M \setminus C_1$ (l'existence d'une telle fonction a été prouvée dans la partie

préliminaire). D'après le premier lemme, on peut choisir $L \in \mathbb{R}^{\ltimes^*}$ telle que la fonction,

$$f_1 = f + \varphi L \circ h_1,$$

soit bonne. Quitte à composer L à gauche par une dilatation de rapport très faible, on peut supposer que f_1 appartienne à V. En utilisant à nouveau le second lemme, il existe un voisinage V_1 de f dans V tel que toute fonction dans ce voisinage soit bonne sur C_1.

Il suffit de répéter ce procédé avec f_1 sur V_1 pour obtenir $f_2 \in V_1$ qui soit bonne sur C_2 (en déformant localement f_1 par une forme linéaire choisie grâce au premier lemme), puis $V_2 \subset V_1$ telle que toute fonction dans ce voisinage soit bonne sur C_2 (par le second lemme). De plus elles sont aussi bonnes sur C_1. De proche en proche, on obtient,

$$f_m \in V_m \subset ... \subset V_1 \subset V$$

qui est bonne sur $C_m \cup ... \cup C_1 = M$.

Maintenant nous avons tous les ingrédients pour démontrer le théorème faisant l'objet de cette sous-partie :

Théorème : Toute triade (W, V_0, V_1) possède une fonction de Morse.

Démonstration : La notation, $\mathcal{V}_W(A)$, désigne la collection des voisinages de $A \in W$ dans W. Par la sous-partie précédente, on peut se donner f : $W \to \mathbb{R}$ lisse telle que :

— $f^{-1}(0) = V_0, \quad f^{-1}(1) = V_1$

— f n'a aucun point critique dégénéré sur $U \in \mathcal{V}_W(\partial W)$

D'après le second lemme, il existe $N \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})}(f)$ (pour la topologie $\mathcal{C}^2$) tel que toute fonction dans ce voisinage n'a aucun point critique dégénéré sur $\overline{U}$.

Comme sur l'ouvert $W \setminus \overline{U}$, $0 < f < 1$, il existe $N' \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})}(f)$ telle que toute fonction dans ce voisinage soit à valeurs dans $]0, 1[$ sur l'ouvert $W \setminus \overline{U}$.

Comme $W \setminus U$ est une variété compacte sans bord, d'après le théorème précédent, il existe $N'' \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})}(f)$ telle que toute fonction dans ce voisinage soit bonne sur $W \setminus U$.

Pour terminer la preuve, il suffit de prendre un élément dans $N \cap N' \cap N''$.

3 Cobordisme et cobordisme produit

Références utilisées : [Mil 1], [Mil 2]

3.1 Observation fondamentale

Définition : Soient deux n-variétés lisses sans bord M_0 et M_1 compactes.

Un cobordisme entre M_0 et M_1 est un quintuple, (W, V_0, V_1, h_0, h_1), où (W, V_0, V_1) est une triade et où $h_i : V_i \to M_i$ est un difféomorphisme pour $i \in \{1, 2\}$.

On identifie le triade (W, V_0, V_1), au cobordisme $(W, V_0, V_1, id_{V_0}, id_{V_1})$.

Un triade (W, V_0, V_1) est appelé cobordisme produit lorsqu'il est difféomorphe à $(V_0 \times [0, 1], V_0 \times \{0\}, V_1 \times \{1\})$.

Grâce à la partie précédente nous pouvons donner la définition suivante :

Définition : On appelle indice de Morse du triade $T = (W, V_0, V_1)$ l'entier naturel $\mu(T)$ correspondant au minimum du nombre de points critiques de toutes les fonctions de Morse sur T. Si $\mu(T) = 1$ on dit que T est un cobordisme élémentaire.

Nous allons démontrer le théorème constituant l'observation fondamentale que nous avons abordée en introduction.

Théorème : Soit $T = (W, V_0, V_1)$ un triade. Si $\mu(T) = 0$ alors T est cobordisme produit.

Démonstration : Grâce à la partie précédente nous pouvons considérer une fonction de Morse $f : W \to [0, 1]$ n'ayant aucun point critique. De plus nous supposons que W est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'utiliser le gradient de f, noté ∇f (sinon nous aurions introduit une métrique riemanienne). Comme f n'a pas de point critique, $\nabla f > 0$ sur W. Notons alors X, le champ de vecteurs lisse :

$$X = \frac{\nabla f}{[\![\nabla f]\!]^2}$$

où $[\![.]\!]$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire. Par théorème on peut introduire le flot du champ de vecteur $\varphi : [a, b] \to W$. Celui-ci vérifie donc :

$$\varphi' = X(\varphi).$$

Mais alors en dérivant,

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)'(t) &= < \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) > \\ &= < \nabla f(\varphi(t)), X(\varphi(t)) > \\ &= < \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) > \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc quitte à effectuer un changement de variable affine (pour enlever la constante) on obtient :

$$\forall t \in [a,b] \quad f\circ\varphi(t) = t$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz chaque courbe intégrale peut être uniquement étendue sur un intervalle maximal. Par compacité de W cet intervalle maximal est nécessairement $[0,1]$. Donc pour chaque $x \in W$, il existe une unique courbe intégrale maximale passant par x :

$$\varphi_x : [0,1] \to W,$$

vérifiant $f\circ\varphi_x(t) = t$ sur $[0,1]$. Par théorème de régularité sur le flot, φ est une fonction lisse en les deux variables x et t. Finalement l'applicatio :,

$$\left[\begin{array}{lc} h: & V_0\times[0,1] \to W \\ & (x,t) \mapsto \varphi_x(t) \end{array}\right]$$

de réciproque,

$$\left[\begin{array}{lc} h^{-1}: & W \to V_0\times[0,1] \\ & x \mapsto (\varphi_x(0), f(x) \end{array}\right]$$

est un difféomorphisme. Ce qui termine la preuve.

Grâce à ce théorème, nous pouvons énoncer deux théorèmes qui nous seront très utiles par la suite :

3.2 Théorèmes des voisinages collier et bicollier

Théorème : (du voisinage collier)

Si W est une variété à bord, alors il existe un voisinage de ∂W, appelé voisinage collier difféomorphe à $\partial W \times [0,1[$.

Démonstration : On se donne $(U_1,h_1),...,(U_p,h_p)$ un recouvrement de W par des ouverts coordonnées. Définissons $f_i : W \to [0,1[$ de la manière suivante :

— si $U_i \cap \partial W \neq \varnothing$, alors $f = \pi_n \circ h_i$,

— sinon $f_i = \frac{1}{2}$.

Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U} = (U_1, ..., U_p)$. Définissons une fonction lisse $f : W \to \mathbb{R}$ de la manière suivante ;

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad f_{|U_i} = \varphi f_i$$

Tout d'abord, on a $f^{-1}(0) = \partial W$. Ensuite, fixons $x \in \partial W$ et $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi_j(x) > 0$. Notons $h_j = (x_1, ..., x_n)$. Sur U_j, on a :

$$f = \sum_{i=0,\ x \in U_j}^{p} \varphi_i f_i$$

Calculons le vecteur dérivé de f en x selon la direction $x_n(x)$.

$$\begin{aligned}
Df_{x_n(x)}(x) &= \sum_{i=1,\ x \in U_i}^{p} D\varphi_i f_{i_{x_n(x)}}(x) \\
&= \sum_{i=1,\ x \in U_i}^{p} \underbrace{f_i(x)}_{=0} \left(D\varphi_{i_{x_n(x)}}(x)\right) + \varphi_i(x) \underbrace{\left(Df_{i_{x_n(x)}}(x)\right)}_{=1} \\
&= \sum_{i=1,\ x \in U_i}^{p} \varphi(x) \\
&= 1 \qquad \text{(car } (\varphi_1, ..., \varphi_p) \text{ est une partition de l'unité)}
\end{aligned}$$

Donc $df(x) \neq 0$ et, par conséquent, df ne s'annule pas sur ∂W. Par continuité de df, elle ne s'annule pas sur U, un voisinage de ∂W. Ainsi on obtient $f : W \to [0, 1[$ telle que $f^{-1}(0) = \partial W$ et $df \neq 0$ sur U. Par continuité de f, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}[0, \varepsilon] \subset W \setminus U$. Donc f est une fonction de Morse sur $f^{-1}[0, \varepsilon]$, et le théorème de la section précédente affirme que $f^{-1}[0, \varepsilon[$ est difféomorphe à $\partial W \times [0, 1[$.

Définition : Une sous-variété $M^{n-1} \subset \mathring{W}^n$ connexe est dite à deux côtés s'il existe un voisinage V de M^{n-1} dans W^n, tel que si M^{n-1} est retiré, V a deux composantes connexes.

Théorème : (du voisinage bicollier)
Soit W une variété de dimension n. Si toute sous-variété connexe de dimension $n-1$ M est à deux côtés, alors il existe un voisinage de M dans W qui soit difféomorphe à $M \times]-1, 1[$ tel que M soit la préimage de $M \times \{0\}$.

La preuve de ce théorème est admise (aucun détail n'est à ajouter à la preuve de Milnor).

Grâce à ces théorèmes nous pouvons donner quelques propriétés de la classe des cobordismes. Les prochaines sections n'ont aucun autre but que celui de présenter des prérequis à la bonne compréhension du livre de Milnor.

4 Classe de cobordismes

Références utilisées : [Mil 1], [Mas]

Nous rappelons tout d'abord la définition d'un cobordisme.

Définition : Soit deux n-variétés lisses sans bord M_0 et M_1 compactes. Un cobordisme entre M_0 et M_1 est un quintuple, (W, V_0, V_1, h_0, h_1), où (W, V_0, V_1) est un triade et où $h_i : V_i \to M_i$ est un difféomorphisme pour $i \in \{1, 2\}$.

Définition : Deux cobordismes (W, V_0, V_1, h_0, h_1), $(W', V_0', V_1', h_0', h_1')$ de M_0 à M_1 sont dits équivalents lorsqu'il existe un difféomorphisme $g : W \to W'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h_i"'] & & V_i' \arrow[dl, "h_i'"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

pour $i \in \{0, 1\}$.

Propriété : La relation introduite dans la définition précédente est une relation d'équivalence sur les cobordismes de M_0 à M_1.

Idée de la preuve : C'est une conséquence directe des propriétés élémentaires suivantes :

— L'identité sur une variété est un difféomorphisme.

— L'inverse d'un difféomorphisme entre deux variétés est un difféomorphisme.

— La composée de difféomorphismes est un difféomorphisme.

Recollement de triades

En premier lieu, nous allons voir comment recoller des variétés. Considérons W, W' deux variétés (non nécessairement compactes) munies d'atlas maximaux (et donc de topologies sous-jacentes τ, τ'), telles qu'il existe un difféomorphisme $h : \partial W \to \partial W'$. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'identification de tout élément $x \in \partial W$ avec son image $h(x) \in \partial W'$, et

$$\pi : W \cup W' \twoheadrightarrow {}^{W \cup W'}\!/_{\mathcal{R}},$$

la projection canonique sur le quotient. On note $W \cup_h W'$ l'espace topologique,

$$ {}^{W \cup W'}\!/_{\mathcal{R}},$$

muni de la topologie quotient $\mathcal{T}$, définie par :

$$\mathcal{T} := \left\{ O \in {}^{W \cup W'}\!/_{\mathcal{R}}, \quad \pi^{-1}(O) \in \tau \cup \tau' \right\}.$$

C'est la topologie la plus fine sur ${}^{W \cup W'}\!/_{\mathcal{R}}$, rendant π continue.

Recollons maintenant deux triades.

Soit (W, V_0, V_1), (W', V_1', V_2') deux triades telles qu'il existe un difféomorphisme $h : V_1 \to V_1'$. Nous considérons l'espace topologique recollé $W \cup_h W'$.

Lemme : Il existe une structure lisse sur $W \cup_h W'$ qui soit compatibles avec les structures sur W et W', i.e. telles que les injections canoniques :

$$W \hookrightarrow W \cup_h W \quad W' \hookrightarrow W \cup_h W'$$

soient des difféomorphismes sur leurs images.

Démonstration : Par le théorème du collier, il existe deux voisinages U_1, U_1' de V_1, V_1' dans W, W' et des difféomorphismes,

$$f : V_1 \times (0,1] \to U_1 \quad f' : V_1' \times [1,2) \to U_1'$$

tels que,

$$f(.,1) = id_{|V_1} \quad f'(.,1) = id_{|V_1'}.$$

Notons i et i' les injections canoniques de W et W' dans $W \cup_h W'$. Enfin introduisons l'application :

$$\left[\begin{array}{cccl} g & : & V_1 \times]0,2[& \to & W \cup_h W \\ & & (x,t) & \mapsto & \begin{cases} i \circ f(x,t) \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ i' \circ f'(h(x),t) \text{ si } 1 \leq t < 2 \end{cases} \end{array} \right]$$

Or $g(V_1 \times]0,2[)$ possède une structure lisse compatible avec $i(W \setminus V_1)$ et $i'(W' \setminus V_1')$. De plus $i(W \setminus V_1)$ et $i'(W' \setminus V_1')$ n'ont aucune carte en commun. Donc il existe une structure lisse sur

$$i'(W' \setminus V_1') \cup i(W \setminus V_1) \cup g(V_1 \times]0,2[) = W \cup_h W.$$

Par conséquent, nous pouvons citer le théorème suivant :

Théorème : $(W \cup_h W', V_0, V_2')$ est un triade de variétés.

Définition : On dit que $T = (W, V_0, V_1)$, une triade, est un cobordisme élémentaire lorsque $\mu(T) = 1$.

Le théorème précédent a pour conséquence :

Conséquence fondamentale : Tout cobordisme s'écrit comme produit de cobordismes élémentaires.

Démonstration : Soit $T = (W, V_0, V_1)$, un triade, et f une fonction de Morse sur T tel que son indice de Morse soit égale à $m := \mu(T)$. On note $p_1, ..., p_m \in W$ les points critiques de f, $v_1, .., v_m \in]0,1[$ les valeurs critiques associées que l'on suppose deux à deux distinctes et enfin pour tout $i \in [\![0, m]\!]$,

$$W_i = f^{-1}([v_i, v_{i+1}]) \quad \text{avec la convention : } v_0 = 0, v_{m+1} = 1.$$

Chaque cobordisme $T_i := (W_i, f^{-1}(v_i), f^{-1}(v_{i+1}))$ sont des cobordimes élémentaires, et par le théorème précédent, T s'écrit de la forme :

$$T = \bigcup_{i=0}^{m} T_i$$

Définition : Soit (W, V_0, V_1), (W', V_1', V_2') deux triades telles qu'il existe un difféomorphisme $h : V_1 \to V_1'$. On appelle cobordisme composé, le cobordisme $(W \cup_h W', V_0, V_2')$.

Soit V_0, V_1, V_2 trois variétés, c (respectivement c') une classe d'équivalence de cobordismes V_0 à V_1 (respectivement de V_1 à V_2). On appelle composition de c et c' la classe de représentants de cobordimes entre V_0 et V_2 issue de la composition d'un cobordisme entre V_0 et V_1 avec un cobordisme entre V_1 et V_2 et on la note cc'.

Propriété : La compositionn des classes de cobordismes est associative.

Démonstration : C'est une conséquence de la démonstration du théorème précédent.

Définition : La classe identité d'une variété V est la classe d'équivalence i_V du cobordisme :

$$(V \times \{0,1\}, V \times 0, V \times 1, id_{|V}, id_{|V})$$

Proposition : Pour toute variété V_1, V_2, s'il existe une classe de cobordisme de V_1 à V_2, alors :

$$i_{V_1} c = c = i_{V_2}$$

Remarque On obtient une catégorie dont les objets sont les variétés et les morphismes, des classes d'équivalence de cobordismes.

5 Pseudo-gradient

Références utilisées : [Mil 1]

Dans cette partie nous allons démontrer l'existence d'un pseudo-gradient sur les triades. Avoir un pseudo gradient permet de considérer les lignes de gradient associées. Les points du cobordisme peuvent être envoyer par flottement le long de ses lignes (à part le point critique) : le plongement caractéristique. Cet outil est à la base de la chirugie, une opération mathématique inventée par Milnor et très utilisée dans sa démonstration du h-cobordisme.

On se place sur un cobordisme élémentaire $T = (W, V_0, V_1)$, et on se donne $f : W \to [0,1]$ n'ayant qu'un point critique p. Le but de cette partie est d'amener le concept de chirurgie sur les variétés.

Par le lemme de Morse, nous savons qu'il existe un voisinage ouvert U de p dans W tel que sur ce voisinage :

$$f = -x_1^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_n^2$$

Lemme : Il existe un pseudo gradient ∇f de f c'est à dire un champ de vecteurs ∇ sur W tel que :

- $\nabla f > 0$ sur $W \setminus \{p\}$,
- Il existe un voisinage de p dans W tel que $\nabla f(p) = (-x_1, ..., -x_\lambda, x_{\lambda+1}, ..., x_n)$ sur ce voisinage.

Démonstration : Nous admettons l'existence d'une structure riemanienne sur W. Ce qui nous permet de considérer le gradient de f, noté w, associé à ce produit scalaire. Sur U posons

$$w' = (-x_1, ..., -x_\lambda, x_{\lambda+1}, ..., x_n).$$

Soit Ω ouvert tel que $\overline{\Omega} \subset U$. Considérons une partition de l'unité (φ, ψ) adaptée au recouvrement ouvert $(U, W \setminus \overline{\Omega})$. Quitte à modifier φ supposons qu'elle soit égale à 1 sur Ω. Pour terminer la preuve il suffit alors de remarquer que

$$\varphi w' + \psi w$$

est un pseudo-gradient.

6 Conclusion

Ce rapport constitue un prérequis, pour un élève de L3/M1, à la lecture du livre de J. Milnor. Le travail pour parvenir au théorème du h-cobordisme est encore long, notamment, le procédé de chirurgie sur les variétés est à introduire. Depuis 1961 ce théorème a été généralisé, affiné et augmenté. Une généralisation en est le théorème du s-cobordisme, dans lequel les variétés constituant le bord ne sont plus supposées simplement connexes. D'autres preuves plus algébriques ont aussi été publiées mais le livre de Milnor constitue toujours la référence. Le plaisir à lire cet ouvrage fut réel. Il aurait été intéressant de mener consistant à prouver la conjecture de Poincaré en grande dimension et en admettant le théorème du h-cobordisme. Mais ceci supposait de prendre en compte des notions d'homologie et de cohomologie.

7 Bibliographie

- *[Mil 1] :* John Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1965
- *[Mil 2] :* John Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963
- *[Mas] :* Patrick Massot, Topologie différentielle
- *[Pau] :* Frédéric Paulin, Géométrie différentielle élémentaire, Cours de première année de Master ENS, 2006-2007
- *[Mun] :* James Munkres, Elementary Differential Topology, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963
- *[Leb] :* Jeremy Le Borgne, Algèbre linéaire et bilinéaire, 2020-2021