

Lectures dirigées : Mathématiques de la cage de Faraday

H. Muziot, G. Artis

Référent : B. Boutin

2021-2022

Résumé

On présente ici une étude de l'équation de Poisson dans le contexte d'une cage de Faraday. Après une étude générale de l'équation de Poisson on démontre dans certains cas un résultat de [1] qui confirme le phénomène physique en jeu dans les cages de Faraday : le champ est faible à l'intérieur de la cage.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Modélisation	2
1.2	Démarche et résultats	2
2	Preliminaires	3
3	Equation de Poisson 2D : unicite	4
3.1	Proprietes des fonctions harmoniques	4
3.2	Unicite de la solution a un probleme de Dirichlet	6
4	Existence d'une solution dans des cas particuliers	7
4.1	Equation de Poisson sur \mathbb{R}^2	7
4.2	Un probleme de Dirichlet sur \mathbb{H}	9
4.3	Probleme de Dirichlet sur une couronne	11
5	Demonstration originale du theoreme 1	16
6	Une deuxieme demonstration	17

1 Introduction

1.1 Modélisation

La cage de Faraday est un système physique permettant de repousser un champ électrique vers l'extérieur de la cage. La voiture en constitue un exemple ; les individus se trouvant à l'intérieur, lors d'un orage ne risquent rien. On se propose d'étudier ce phénomène. La modélisation choisie est la suivante : on se place dans le plan complexe constituant une région vide de charge (l'équation de Maxwell-Gauss donne alors $\operatorname{div} \vec{E} = 0$), et on considère $n \geq 2$ iso-potentielles en forme de disques placées en les racines n -èmes de l'unité. Notons alors ϕ le potentiel scalaire duquel le champ électrique \vec{E} dérive. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, il vient :

$$0 = \operatorname{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi$$

Nous étudierons donc l'équation suivante :

$$(E_{n,r}) : \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega_{n,r} \\ u = \phi_0 & \text{sur } \partial\Omega_{n,r} \end{cases}$$

Où $\Omega_{n,r}$ est le plan complexe privé de n disques (les barreaux de la cage de Faraday) de rayon $r > 0$ centrés en les racines n -ème de l'unité.

1.2 Démarche et résultats

D'un point de vue physique on s'attend à un champ faible à l'intérieur de la cage de Faraday. Autrement dit, on espère que le gradient de ϕ n'est pas trop important au voisinage de $(0, 0)$.

Le but est donc de montrer que le gradient en zéro d'une solution de (1) vérifie une certaine majoration. Plus précisément, on s'intéresse au résultat suivant tiré de [1] :

Théorème 1 : Étant donnés $R > 1$, $n \geq 4$ et $r \leq 1/n$, si ϕ est une solution de $(E_{n,r})$ avec $\phi_0 \in [-1, 1]$ vérifiant $|\varphi(z)| \leq 1$ sur $\Omega \cap B(0, R)$. Alors,

$$|\nabla \varphi(0)| \leq \frac{4|\log(r)|}{n \log(R)}.$$

Voici la démarche retenue :

- Dans la partie 2 on introduit quelques outils utiles par la suite.
- Dans la partie 3 on montre que, sous réserve d'existence, la solution à un problème de Dirichlet sur un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^2 est unique.
- Dans la partie 4 on s'intéresse à l'existence de solutions dans des cas particuliers.
- Dans la partie 5 on donne des éléments de preuve du théorème 1.
- Dans la partie 6 on donne une démonstration complète d'un résultat comparable au théorème 1.

2 Préliminaires

Nous commençons par démontrer quelques résultats qui nous seront utiles par la suite. Nous avons choisi de les simplifier au maximum pour nous limiter au strict nécessaire et pour n'employer que des outils simples.

Proposition : Formule d'intégration par parties pour un disque

Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 . Soit R un réel strictement positif on a :

$$\int_{B(0,R)} u(x,y) \partial_1 v(x,y) dx dy = \int_{\partial B(0,R)} u(x,y) v(x,y) n_1(x,y) ds - \int_{B(0,R)} \partial_1 u(x,y) v(x,y) dx dy.$$

Où

$$\int_{\partial B(0,R)} u(x,y) v(x,y) n_1(x,y) ds := \int_0^{2\pi} u(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) v(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) R \cos(\theta) d\theta.$$

Remarque : Cette formule est un cas particulier d'une formule bien plus générale (voir [2]).

Sans entrer dans les détails, si u et v sont suffisamment régulières sur Ω un ouvert de \mathbb{R}^n suffisamment régulier, on a :

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_i v(x) dx = \int_{\partial \Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds - \int_{\Omega} \partial_i u(x) v(x) dx.$$

Où dx est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n , ds est la mesure surfacique sur $\partial \Omega$ et $n_i(x)$ est la i -ème coordonnée de la normale (unitaire) à $\partial \Omega$ en x .

Dans le cas particulier ci-dessus on a : $n_1(x) = \cos(\theta)$ et $ds = R d\theta$.

Cependant, la formule générale ne nous sera pas utile dans la suite de cette étude. Nous nous limiterons donc à la preuve de cet énoncé dans deux cas particuliers.

Démonstration : D'après le théorème de Fubini (fonctions continues sur des compacts) on a :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} u(x,y) \partial_1 v(x,y) dx dy &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} u(x,y) \partial_1 v(x,y) dx dy \\ &= \int_{-R}^R \left\{ [u(x,y) v(x,y)]_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} - \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \partial_1 u(x,y) v(x,y) dx \right\} dy \\ &= \int_{-R}^R [u(x,y) v(x,y)]_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} dy - \int_{B(0,R)} \partial_1 u(x,y) v(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^R [u(x,y) v(x,y)]_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} dy \\ &= \int_{-R}^R u(\sqrt{R^2-y^2}, y) v(\sqrt{R^2-y^2}, y) dy - \int_{-R}^R u(-\sqrt{R^2-y^2}, y) v(-\sqrt{R^2-y^2}, y) dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) v(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) R \cos(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} u(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) v(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) R \cos(\theta) d\theta \\ &= \int_{\partial B(0,R)} u(x,y) v(x,y) n_1(x,y) ds. \end{aligned}$$

On obtient alors la formule annoncée. □

On démontre maintenant la formule d'intégration par parties dans un autre cas particulier.

Proposition : Formule d'intégration par parties pour le complémentaire d'un disque

Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 à supports compacts. Soit R un réel strictement positif on a

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,R)} u(x,y) \partial_1 v(x,y) dx dy = \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,R))} u(x,y) v(x,y) n_1(x,y) ds - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,R)} \partial_1 u(x,y) v(x,y) dx dy.$$

Où

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,R))} u(x,y) v(x,y) n_1(x,y) ds := - \int_0^{2\pi} u(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) v(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) R \cos(\theta) d\theta.$$

Démonstration : Comme u et v sont à supports compacts, on montre facilement que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \partial_1 v(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 u(x,y) v(x,y) dx dy.$$

Le résultat s'en déduit alors en utilisant la proposition précédente. \square

Remarque : Comme indiqué dans une remarque précédente, les propositions ci-dessus restent vraies si on change l'origine de la boule considérée ou si on considère des dérivées selon la deuxième variable plutôt que selon la première.

3 Équation de Poisson 2D : unicité

Etant donné un ouvert U de \mathbb{R}^2 , on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = -f \quad (1)$$

où $u \in \mathcal{C}^2(U)$ est l'inconnue, Δ l'opérateur laplacien et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction donnée. (1) est appelée équation de Poisson et prend le nom d'équation de Laplace lorsque f est nulle (auquel cas une solution est harmonique sur U).

Si $g \in \mathcal{C}(\partial U)$ et $f \in \mathcal{C}(U)$, on parle de problème de Dirichlet associé à (1) si on cherche les fonctions $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$ telles que :

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{sur } U \\ u = g & \text{sur } \partial U \end{cases}$$

La démarche qui suit est inspirée de [3] et [4].

3.1 Propriétés des fonctions harmoniques

Dans cette partie, si une fonction est définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ on l'assimilera à la fonction associée définie sur la partie de \mathbb{C} correspondant à U sans plus de détails.

Théorème : "Holomorphie" des fonctions harmoniques

Soit $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique sur un ouvert étoilé U de \mathbb{R}^2 . Alors, il existe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U , unique à ajout d'une constante près, telle que $u = \Re(f)$.

Démonstration : On procède par analyse-synthèse :

- Analyse : Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U telle que $u = \Re(f)$. En posant $f = h + ik$, en vertu des équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$f' = \partial_1 h + i\partial_1 k = \partial_1 h - i\partial_2 h = \partial_1 u - i\partial_2 u.$$

Ainsi, sous réserve d'existence, f est unique à ajout d'une constante près.

- Synthèse : Considérons $g = \partial_1 u - i\partial_2 u$. On sait alors que g admet des dérivées partielles continues par rapport à x et y . Ainsi, en vertu du lemme de Schwarz et puisque u est harmonique,

$$\partial_1 g = \partial_1^2 u - i\partial_{2,1} u = -\partial_2^2 u - i\partial_{1,2} u = -i\partial_2(\partial_1 u - \partial_2 u) = -i\partial_2 g.$$

Par conséquent, g vérifie les équations de Cauchy-Riemann donc est holomorphe sur U . Comme U est étoilé, g admet une primitive f et, si $z_0 \in U$ est fixé, on peut supposer que f vaut $u(z_0)$ en z_0 . On a donc :

$$\partial_1 \Re(f) - i\partial_2 \Re(f) = f' = g = \partial_1 u - i\partial_2 u.$$

Si bien que $\partial_1(\Re(f) - u) = \partial_2(\Re(f) - u) = 0$. Par conséquent, $\Re(f) - u$ est constante sur U (U est connexe) et comme $\Re(f(z_0)) - u(z_0) = 0$, $u = \Re(f)$ avec f holomorphe. \square

Remarque : L'énoncé reste vrai si on suppose seulement U ouvert et simplement connexe. L'énoncé précédent va permettre de déduire de l'analyse complexe des propriétés sur les fonctions harmoniques.

Corollaire : Propriété de la moyenne

Soit u une fonction harmonique sur un ouvert U de \mathbb{C} . Si $w \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ vérifient $\overline{B(w, r)} \subset U$ alors

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration : C'est une conséquence du théorème précédent et de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes sur un ouvert étoilé. \square

Théorème : Principe du maximum pour les fonctions harmoniques

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe borné. Soit u harmonique sur U et continue sur \overline{U} . On a :

- S'il existe $z_0 \in U$ tel que $\max_{z \in \overline{U}} u(z) = u(z_0)$ alors u est constante.
- On a : $\max_{z \in \overline{U}} u(z) = \max_{z \in \partial U} u(z)$.

Démonstration : • Commençons par remarquer que dans la mesure où \overline{U} et ∂U sont compacts (fermés bornés de \mathbb{R}^2) et u est continue sur \overline{U} , les maxima de l'énoncé sont bien définis. Supposons alors qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $M := \max_{z \in \overline{U}} u(z) = u(z_0)$, l'ensemble

$$\Gamma = \{x \in U \mid u(x) = M\}$$

est alors non vide. De plus, Γ est un fermé relatif de U (c'est l'image réciproque du fermé $\{M\}$ par la restriction à U de u qui est continue). Soit alors $z \in \Gamma$, puisque U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que

$\overline{B(z_0, r)} \subset U$ et, comme h est harmonique sur U , la propriété de la moyenne donne

$$\forall s \in [0, r[, u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta$$

$$\text{donc } \forall s \in [0, r[, \int_0^{2\pi} \underbrace{(u(z) - u(z + re^{i\theta}))}_{\text{fonction, continue positive de } z} d\theta = 0$$

$$\text{donc } \forall s \in [0, r[, \forall \theta \in [0, 2\pi], u(z + re^{i\theta}) = u(z) = M$$

$$\text{donc } B(0, r) \subset \Gamma.$$

Il en résulte que Γ est aussi un ouvert de U . Comme U est connexe on en déduit alors que $\Gamma = U$ et donc que u est constante sur U . Or, u est continue sur \overline{U} de sorte que u est constante sur \overline{U} .

• C'est une conséquence immédiate du point précédent. \square

On conclut cette partie par un lemme qui sera utile par la suite.

Lemme : Soient U et V des ouverts de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction harmonique et $g : V \rightarrow U$ une fonction holomorphe (bijective). Alors, $f \circ g$ est harmonique.

Démonstration : Soit $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B := B(g(z_0), r) \subset V$. Ainsi, comme B est étoilée et puisque f est harmonique, f est la partie réelle d'une fonction holomorphe h sur B . Par conséquent, $f \circ g$ est la partie réelle de $h \circ g$ (qui est holomorphe) sur $g^{-1}(B)$ (qui est un voisinage ouvert de z_0) ainsi, $f \circ g$ est harmonique sur $g^{-1}(B)$. Comme cette démarche est valable pour tout $z_0 \in U$, $f \circ g$ est harmonique sur U . \square

Remarque : Le résultat reste vrai si on compose par une fonction anti-holomorphe plutôt que par une fonction holomorphe.

3.2 Unicité de la solution à un problème de Dirichlet

On applique maintenant les résultats de la partie précédente à notre problème :

Théorème : Unicité de la solution de l'équation de Poisson sur un connexe borné

Soit U un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^2 , si $g \in \mathcal{C}(\partial U)$ et $f \in \mathcal{C}(U)$ alors le problème de Dirichlet

$$(2) : \begin{cases} \Delta u = -f & \text{sur } U \\ u = g & \text{sur } \partial U \end{cases}$$

admet au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$.

Démonstration : Supposons que $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$ soient deux fonctions vérifiant (2). Par conséquent, $h = u - v$ est harmonique sur U et nulle sur ∂U de sorte que, en vertu du principe du maximum,

$$\max_{z \in \overline{U}} h(z) = \max_{z \in \partial U} h(z) = 0$$

$$\text{donc } \forall z \in \overline{U}, h(z) \leq 0.$$

Si on pose $k = v - u$, de la même manière, on obtient :

$$\forall z \in \overline{U}, k(z) \leq 0.$$

Ainsi, $h(z) = 0$ pour tout $z \in \overline{U}$ si bien que $u = v$. □

4 Existence d'une solution dans des cas particuliers

4.1 Équation de Poisson sur \mathbb{R}^2

Lemme : L'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |z|$$

est une solution de l'équation de Laplace sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{2y^2 - 2x^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Et de même,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Si bien que Φ est harmonique sur \mathbb{R}^2 . □

Désormais on suppose que f est \mathcal{C}^2 à support compact sur \mathbb{R}^2 . Considérons alors u définie par :

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, u(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(z - t) f(t) dt.$$

Théorème : La fonction u est bien définie, est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et,

$$\Delta u = -f.$$

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{R}^2$, comme f est \mathcal{C}^2 à support compact, pour vérifier que $u(z)$ est bien définie, il suffit de vérifier que

$$\int_{B(z, 1)} |\Phi(z - t)| dt < +\infty.$$

Or, en passant en coordonnées polaires on a :

$$\begin{aligned} \int_{B(z, 1)} |\Phi(z - t)| dt &= \int_{B(0, 1)} |\Phi(t)| dt \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{B(0, 1)} \ln(x^2 + y^2) dx dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \ln(r^2) r d\theta dr \quad \text{d'après le théorème de Fubini (fonctions négatives)} \\ &= -\int_0^1 \ln(r) r dr \\ &= -\left[\frac{r^2}{2} \ln(r) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \quad \text{en effectuant une intégration par parties} \\ &= \frac{1}{4} < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, u est bien définie. Remarquons alors qu'un changement de variable donne :

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, u(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(z-t)f(t)dt = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t)f(z-t)dt.$$

Comme Φ est intégrable sur tout ouvert borné de \mathbb{R}^2 et puisque f est C^2 à support compact, on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale sur tout compact de \mathbb{R}^2 à deux reprises (une fois pour chacune des coordonnées de u) pour obtenir :

- u admet des dérivées partielles par rapport à x et y et celles-ci sont continues.
- On connaît les dérivées partielles de u par rapport à x et y :

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t) \frac{\partial f}{\partial x}(z-t)dt$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial u}{\partial y}(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t) \frac{\partial f}{\partial y}(z-t)dt.$$

On en déduit que u est C^1 sur \mathbb{R}^2 . En réitérant cette démarche on obtient :

- u admet des dérivées partielles secondes continues donc est C^2 sur \mathbb{R}^2 .
- On connaît les dérivées partielles secondes de u :

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \forall (i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z-t)dt.$$

En particulier, on peut calculer le laplacien de u :

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \Delta u(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t) \Delta f(z-t)dt.$$

Par la suite, $z \in \mathbb{R}^2$ est fixé. On souhaite isoler la singularité de φ en 0 ($\epsilon > 0$ est voué à tendre vers 0) :

$$\Delta u(z) = \underbrace{\int_{B(0,\epsilon)} \Phi(t) \Delta f(z-t)dt}_{=: I_\epsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(t) \Delta f(z-t)dt}_{=: J_\epsilon}$$

Or, comme f est C^2 à support compact, il existe $C > 0$ tel que $|\Delta f| \leq C$ ainsi, en reprenant les calculs en jeu au début de la démonstration, on a :

$$\begin{aligned} |I_\epsilon| &\leq C \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(t)| dt \\ &= -\frac{C}{4\pi} \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \ln(r^2) r d\theta dr \\ &= -C \int_0^\epsilon \ln(r) r dr \\ &= -C \left[\frac{r^2}{2} \ln(r) \right]_0^\epsilon + C \int_0^\epsilon \frac{r^2}{2r} dr \\ &= o(1) \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus, une intégration par parties sur chacune des coordonnées donne :

$$\begin{aligned}
J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon)} \Phi(t) \Delta f(z-t) dt \\
&= - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \Phi(t) \frac{\partial f}{\partial x}(z-t) ds - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \Phi(t) \frac{\partial f}{\partial y}(z-t) ds \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t) \frac{\partial f}{\partial x}(z-t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t) \frac{\partial f}{\partial y}(z-t) \right) dt}_{=: K_\epsilon}.
\end{aligned}$$

On montre alors facilement que les deux premières intégrales tendent vers 0 lorsque ϵ tend vers 0 et, deux nouvelles intégrations par parties montrent que $(\Phi \text{ est harmonique sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$:

$$\begin{aligned}
K_\epsilon &= - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t) f(z-t) ds - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t) f(z-t) ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon)} \Delta \Phi(t) f(z-t) dt \\
&= - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t) f(z-t) ds - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t) f(z-t) ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, quand ϵ tend vers 0 (où $z = (x, y)$),

$$\begin{aligned}
J_\epsilon &= o(1) - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t) f(z-t) ds - \int_{\partial(\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t) f(z-t) ds \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\epsilon \cos(\theta), \epsilon \sin(\theta)) f(x - \epsilon \cos(\theta), y - \epsilon \sin(\theta)) \epsilon \cos(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\epsilon \cos(\theta), \epsilon \sin(\theta)) f(x - \epsilon \cos(\theta), y - \epsilon \sin(\theta)) \epsilon \sin(\theta) d\theta + o(1) \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi} \frac{2\epsilon \cos(\theta)}{(\epsilon \cos(\theta))^2 + (\epsilon \sin(\theta))^2} f(x - \epsilon \cos(\theta), y - \epsilon \sin(\theta)) \epsilon \cos(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi} \frac{2\epsilon \sin(\theta)}{(\epsilon \cos(\theta))^2 + (\epsilon \sin(\theta))^2} f(x - \epsilon \cos(\theta), y - \epsilon \sin(\theta)) \epsilon \sin(\theta) d\theta + o(1) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - \epsilon \cos(\theta), y - \epsilon \sin(\theta)) d\theta + o(1) \\
&= -f(z) + o(1) \quad \text{par convergence dominée.}
\end{aligned}$$

Ainsi, comme annoncé, on a : $\Delta u(z) = -f(z)$ □

Le théorème 1.2 montre donc l'existence d'une solution à l'équation de Poisson dans le cas du plan \mathbb{R}^2 tout entier lorsque le second membre est supposé C^2 .

4.2 Un problème de Dirichlet sur \mathbb{H}

Théorème : Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Alors, la fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned}
\forall z = (x, y) \in \mathbb{H}, u(z) &= \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \varphi(t) dt \\
\forall x \in \mathbb{R}, u(x, 0) &= \varphi(x)
\end{aligned}$$

est une solution du problème de Dirichlet

$$(3) : \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{H} \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\mathbb{H} \end{cases}$$

Démonstration : On donne ici une démonstration dans le cas où φ est de plus supposée C^1 . Le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique sur tout compact de \mathbb{H} , on montre donc facilement que u est C^2 sur \mathbb{H} et un calcul montre que u est de laplacien nul sur \mathbb{H} . Montrons que u est continue sur $\overline{\mathbb{H}}$:

On traite le cas de la continuité en $(0, 0)$, la continuité en d'autres points de $\partial\mathbb{H}$ s'en déduisant.

Soit $(x_n, y_n) \in (\overline{\mathbb{H}}^2)^\mathbb{N}$ une suite qui tend vers $0_{\mathbb{R}^2}$. Soit $\epsilon > 0$, comme x_n tend vers 0 et puisque φ est continue, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, |\varphi(x_n) - \varphi(0)| \leq \epsilon; \quad |x_n| \leq \frac{1}{4}, \epsilon; \quad |y_n| \leq \frac{1}{4}, \epsilon; \quad \sqrt{y_n} \leq \epsilon$$

$$|\varphi(\pm 2|x_n|) - \varphi(0)| \leq \epsilon \quad |\varphi(\pm\sqrt{y_n}) - \varphi(0)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, pour $n \geq N_1$, si $y_n = 0$ alors, $|u(x_n, y_n) - \varphi(0)| \leq \epsilon$.

Sinon, si $y_n > 0$, pour $\eta > 0$ on a :

$$\begin{aligned} u(x_n, y_n) &= \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{|t| \leq \eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt + \frac{2}{2\pi} \int_{|t| > \eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Or, si $\eta > |x_n|$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{2\pi} \int_{|t| > \eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt \right| &\leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \int_{|t| > \eta} \frac{|y_n|}{(x_n - t)^2 + y_n^2} dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \int_{\eta}^{\infty} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} dt + \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \int_{\eta}^{\infty} \frac{\frac{1}{y_n}}{\left(\frac{t-x_n}{y_n}\right)^2 + 1} dt + \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{\frac{1}{y_n}}{\left(\frac{t-x_n}{y_n}\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left\{ \left[\arctan \left(\frac{t-x_n}{y_n} \right) \right]_{\eta}^{\infty} + \left[\arctan \left(\frac{t-x_n}{y_n} \right) \right]_{-\infty}^{-\eta} \right\} \\ &= \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left(\pi + \arctan \left(\frac{-\eta - x_n}{y_n} \right) - \arctan \left(\frac{\eta - x_n}{y_n} \right) \right) \\ &\leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left| \arctan \left(\frac{y_n}{\eta + x_n} \right) + \arctan \left(\frac{y_n}{\eta - x_n} \right) \right| \quad \text{car } \eta > |x_n| \\ &\leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left| \frac{y_n}{\eta + x_n} - \frac{y_n}{x_n - \eta} \right| \quad \text{inégalité des accroissements finis} \\ &= \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left| \frac{2y_n\eta}{\eta^2 - x_n^2} \right|. \end{aligned}$$

De plus, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\pi} \int_{|t| \leq \eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{t-x_n}{y_n} \right) \varphi(t) \right]_{-\eta}^{\eta} - \frac{2}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \arctan \left(\frac{t-x_n}{y_n} \right) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\eta = \max\{2|x_n|, \sqrt{y_n}\} > |x_n|$, on a ($\eta < 1$) :

— Si $2|x_n| > \sqrt{y_n}$ alors, $\eta = 2|x_n|$ et,

$$\left| \frac{2}{2\pi} \int_{|t|>\eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left| \frac{2y_n \cdot 2|x_n|}{3x_n^2} \right| \leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \frac{y_n}{|x_n|} \leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty 4|x_n| \leq \gamma_1 \epsilon.$$

où γ_1 est une constante.

— Si $2|x_n| \leq \sqrt{y_n}$ alors $\eta = \sqrt{y_n}$ et,

$$\left| \frac{2}{2\pi} \int_{|t|>\eta} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{2}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \left| \frac{2y_n \sqrt{y_n}}{\eta^2} \right| \leq \gamma_2 \sqrt{y_n} \leq \gamma_2 \epsilon.$$

où γ_2 est une constante.

Si $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, on a :

$$\begin{aligned} |u(x_n, y_n) - \varphi(0)| &\leq \gamma \epsilon + \left| \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{t - x_n}{y_n} \right) \varphi(t) \right]_{-\eta}^{\eta} - \varphi(0) \right| + \frac{2}{2\pi} \left| \int_{-\eta}^{\eta} \arctan \left(\frac{t - x_n}{y_n} \right) \varphi'(t) dt \right| \\ &\leq \gamma \epsilon + \left| \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\eta - x_n}{y_n} \right) \varphi(\eta) - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{-\eta - x_n}{y_n} \right) \varphi(-\eta) - \varphi(0) \right| + \eta \|\varphi'\|_{\infty, [-1, 1]} \\ &\leq \gamma \epsilon + \left| \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\eta - x_n}{y_n} \right) (\varphi(\eta) - \varphi(0)) \right| + \left| \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{-\eta - x_n}{y_n} \right) (\varphi(-\eta) - \varphi(0)) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\eta - x_n}{y_n} \right) \varphi(0) - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{-\eta - x_n}{y_n} \right) \varphi(0) - \varphi(0) \right| + \epsilon \|\varphi'\|_{\infty, [-1, 1]} \\ &\leq \gamma \epsilon + \epsilon + \epsilon + \left| \pi - \arctan \left(\frac{\eta - x_n}{y_n} \right) - \arctan \left(\frac{\eta + x_n}{y_n} \right) \right| \frac{|\varphi(0)|}{\pi} + \epsilon \|\varphi'\|_{\infty, [-1, 1]} \\ &\leq \gamma \epsilon + \epsilon + \epsilon + \left| \arctan \left(\frac{y_n}{\eta - x_n} \right) + \arctan \left(\frac{y_n}{\eta + x_n} \right) \right| \frac{|\varphi(0)|}{\pi} + \epsilon \|\varphi'\|_{\infty, [-1, 1]} \\ &\leq \gamma \epsilon + \epsilon + \epsilon + \left| \frac{2y_n \eta}{\eta^2 - x_n^2} \right| \frac{|\varphi(0)|}{\pi} + \epsilon \|\varphi'\|_{\infty, [-1, 1]} \quad \text{inégalité des accroissements finis} \\ &\leq \gamma \epsilon + \epsilon + \epsilon + \lambda \epsilon + \epsilon \|\varphi'\|_{\infty, [-1, 1]} \quad \text{reproduire la disjonction de cas selon la valeur de } \eta. \end{aligned}$$

Où λ est une constante. Ceci montre que u est bien continue en $0_{\mathbb{R}^2}$! □

4.3 Problème de Dirichlet sur une couronne

Désormais, on propose une résolution du problème de Dirichlet sur une couronne. On se place en coordonnées polaires et on cherche $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, où D est la couronne ouverte comprise entre les cercles de rayon 1 et $r_1 < 1$, vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0 & \text{pour } r_1 < r < 1 \\ u(r, \theta) = 0 & \text{pour } r = r_1 \\ u(r, \theta) = g(\theta) & \text{pour } r = 1 \text{ et } g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*) \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$$

Recherche heuristique de la solution :

Dans un premier temps on procède de manière heuristique. Nous cherchons une solution de la forme $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. La formule du laplacien en coordonnées polaires donnant :

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ &= R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} \Theta''R.\end{aligned}$$

Afin de poursuivre cette heuristique on suppose que Θ et R ne s'annulent pas (si Θ s'annulait en θ_0 , u s'annulerait sur $\{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) \mid r_1 < r < 1\}$ et par continuité $g(\theta_0) = u(e^{i\theta_0}) = 0$ ce qui est faux ; si R s'annulait en r_0 alors u serait nulle sur $C_0 = \partial B(0, r_0)$, mais alors par unicité de la solution au problème de Dirichlet sur l'anneau fermé compris entre C_1 et C_0 , u serait nulle sur cet anneau (ce qui est physiquement impossible, car le potentiel engendré par la foudre ne pourrait pas s'annuler sans avoir rencontré les fils)). Mais alors en divisant par $R\Theta$, en multipliant par r et en utilisant (1) il vient :

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R}.$$

Ayant séparé les variables, il existe une constante positive (car Θ doit être périodique) λ^2 (avec $\lambda \geq 0$) telle que :

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \quad \text{et} \quad R'' + \frac{R'}{r} - \lambda^2 \frac{R}{r^2} = 0.$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, on a :

$$\Theta(\theta) = \beta\theta + \alpha = \alpha \quad (\text{car } \Theta \text{ périodique}) \quad \text{et} \quad R(r) = a\ln(r) + b.$$

Et dans le cas où $\lambda > 0$, il existe $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \Theta(\theta) = c\cos(\lambda\theta) + d\sin(\lambda\theta) \\ R(r) = er^\lambda + fr^{-\lambda} \end{cases}$$

En effet, cherchons R de la forme $R(r) = r^\gamma$. Alors :

$$\gamma(\gamma - 1)r^{\gamma-2} + \gamma r^{\gamma-2} - \lambda^2 r^{\gamma-2} = 0.$$

Donc, en divisant par $r^{\gamma-2} > 0$ et puisque $\lambda > 0$, on obtient :

$$\gamma \in \{-\lambda, \lambda\}.$$

L'équation différentielle vérifiée par R étant homogène du deuxième ordre, les solutions sont bien de la forme indiquée précédemment. De manière heuristique on a des candidats solutions :

$$u_\lambda(r, \theta) = (a_\lambda r^\lambda + b_\lambda r^{-\lambda})\cos(\lambda\theta) + (c_\lambda r^\lambda + d_\lambda r^{-\lambda})\sin(\lambda\theta).$$

Toujours de manière heuristique, la géométrie du problème nous amène à supposer $\Theta - 2\pi$ périodique (i.e. $\lambda \in \mathbb{N}$), ce qui, par superposition, conduit à des solutions de la forme :

$$u(r, \theta) = \alpha + \beta \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n})\cos(n\theta) + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin(n\theta).$$

Dorénavant, on suppose que u est de cette forme. On utilise maintenant les conditions de bord et, par

unicité des coefficients du développement en série de Fourier on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha + \beta \log(r_1) = a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = c_n r_1^n + d_n r_1^{-n} = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g := \langle g \rangle \\ a_n + b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(ns) ds \\ c_n + d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \sin(ns) ds \end{cases}$$

Les deux premières lignes permettent d'obtenir α et β :

$$\alpha = \langle g \rangle \text{ et } \beta = -\frac{\langle g \rangle}{\log(r_1)}.$$

À partir des ligne 1 et 3, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n r_1^{2n} + b_n = 0 \\ a_n + b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(ns) ds \end{cases}$$

En soustrayant les lignes, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{1-r_1^{2n}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(ns) ds \\ b_n = \frac{-r_1^{2n}}{1-r_1^{2n}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(ns) ds \end{cases}$$

Et de même, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} c_n = \frac{1}{1-r_1^{2n}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \sin(ns) ds \\ d_n = \frac{-r_1^{2n}}{1-r_1^{2n}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \sin(ns) ds \end{cases}$$

Finalement, notre démarche heuristique suggère d'étudier la fonction u définie par :

$$\forall (r, \theta) \in D \quad u(r, \theta) = \langle g \rangle \left(1 - \frac{\log(r)}{\log(r_1)} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{1 - r_1^{2n}} \right) \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds.$$

Synthèse : u est solution

Nous allons maintenant vérifier que u est bien solution du problème de Dirichlet

— **Etape 1** : u est bien définie sur D .

Pour ce faire il suffit de démontrer une convergence normale de

$$\sum_{n \geq 1} g_n \text{ où } g_n : (r, \theta) \mapsto \left(\frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{1 - r_1^{2n}} \right) \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds.$$

Soient $r_1 < a < b < 1$. D'une part, comme g est continue sur $[0, 2\pi]$:

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \left| \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds \right| \leq 2\pi \|g\|_{\infty}.$$

D'autre part, pour tout $a \leq r \leq b$,

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{r^n}{1-r_1^{2n}} \leq \frac{b^n}{1-r_1^{2n}} & (\text{majoration indépendante de } r) \\ 0 \leq \frac{r^{-n}}{r_1^{-2n}-1} \leq \frac{a^{-n}}{r_1^{-2n}-1} & (\text{majoration indépendante de } r) \end{cases}$$

Donc :

$$\|g_n\|_{\infty, [a,b] \times [0,2\pi]} \leq 2\pi \|g\|_{\infty} \left(\frac{b^n}{1-r_1^{2n}} + \frac{a^{-n}}{r_1^{-2n}-1} \right).$$

Or :

$$\begin{cases} \frac{a^{-n}}{r_1^{-2n}-1} \sim \left(\frac{r_1^2}{a}\right)^n & \text{et } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r_1^2}{a}\right)^n \text{ converge car } a > r_1 > r_1^2 \\ \frac{b^n}{1-r_1^{2n}} \sim b^n & \text{et } \sum_{n \geq 1} b^n \text{ converge car } b < 1 \end{cases}$$

Donc par somme et multiplication par un scalaire, $\sum_{n \geq 1} 2\pi \|g\|_\infty \left(\frac{b^n}{1-r_1^{2n}} + \frac{a^{-n}}{r_1^{-2n}-1}\right)$ converge. Et par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_{\infty, [a, b] * [0, 2\pi]}$ converge. Ainsi, u est bien définie et continue sur D .

— **Etape 2 :** u est définie sur \bar{D} et vérifie les conditions de bord.

En $r = r_1$, on a :

$$\begin{cases} \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n(r_1, \theta) = 0 \\ \langle g \rangle \left(1 - \frac{\log(r_1)}{\log(r_1)}\right) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, u est bien définie sur $\partial B(0, r_1)$ et,

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \quad u(r_1, \theta) = 0.$$

La fonction g étant C^1 et 2π -périodique, son développement en série de Fourier converge et coïncide avec elle :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], g(\theta) = \langle g \rangle + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds.$$

Il en résulte que u est bien définie sur $\partial B(0, 1)$ et que $u = g$ sur $\partial B(0, 1)$.

Ainsi u vérifie les conditions de bord.

— **Etape 3 :** Montrons que $u \in C^2(D)$

La fonction $(r, \theta) \mapsto \langle g \rangle \left(1 - \frac{\log(r)}{\log(r_1)}\right)$ étant C^2 sur D , il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned} f : [r_1, 1] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, \theta) \end{aligned}$$

est C^2 sur D . Pour ce faire il suffit de démontrer que

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \partial_r g_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \partial_\theta g_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{r^2} g_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \partial_r \partial_\theta g_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \partial_\theta \partial_r g_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{\theta^2} g_n \end{cases}$$

sont bien les dérivées partielles de f et sont continues sur D .

Comme les démonstrations sont analogues nous allons uniquement traiter le cas $\sum_{n=1}^{\infty} \partial_r \partial_\theta g_n$.

Tout d'abord rappelons que :

$$\begin{aligned} \forall (r, \theta) \in D, \quad g_n(r, \theta) &= \left(\frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{1 - r_1^{2n}}\right) \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds \\ &= \left(\frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{1 - r_1^{2n}}\right) \left(\cos(n\theta) \int_0^{2\pi} g(s) \cos(ns) ds + \sin(n\theta) \int_0^{2\pi} g(s) \sin(ns) ds\right). \end{aligned}$$

On remarque alors que les g_n sont de classe C^2 sur D , et que

$$\forall (r, \theta) \in D, \partial_r \partial_\theta g_n(r, \theta) = n^2 \left(\frac{r^n}{1 - r_1^{2n}} - \frac{r^{-n-1}}{r_1^{-2n} - 1} \right) \int_0^{2\pi} g(s) \sin(n(\theta - s)) ds.$$

En reproduisant une preuve en tout point similaire à la preuve de la convergence normale, sur tout compact de D de $\sum_{n \geq 1} g_n$ (le coefficient n^2 ne changeant pas la nature de la série), on montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \partial_r \partial_\theta g_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout compact. Et, comme les $\partial_r \partial_\theta g_n$ sont continues sur D , $\sum_{n=1}^{\infty} \partial_r \partial_\theta g_n$ est continue et coïncide avec $\partial_r \partial_\theta u$ par convergence uniforme. Il en résulte que $u \in C^2(D)$.

— **Etape 4 :** u est continue sur \overline{D}

Il suffit de montrer que u est continue sur le bord. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ fixé.

• Montrons que : $\lim_{(\epsilon, h) \rightarrow (0^+, 0)} u(1 - \epsilon, \theta + h) = u(1, \theta) = g(\theta)$. On se donne $\alpha > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'application :

$$v_n : [0, 1 - r_1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{(1 - x)^n - r_1^{2n}(1 - x)^{-n}}{1 - r_1^{2n}}$$

On a : $\forall x \in [0, 1 - r_1[$, $v'_n(x) \geq 0$. Donc v_n est croissante et comme $v_n(0) = 1$, elle est croissante et positive. Soit $\epsilon_0 \in]0, 1 - r_1[$. Comme les séries, $\sum_{n \geq 1} g_n(1 - \epsilon_0, \theta + h)$ et $\sum_{n \geq 1} \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds$ convergent absolument (car $g \in C^1([0, 2\pi])$ si bien que son développement en série de Fourier converge absolument),

$$\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta - s)) ds \right| \leq \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} |g_n(1 - \epsilon_0, \theta + h)| \leq \alpha.$$

Or, pour $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ on a :

$$|g_n(1 - \epsilon, \theta + h)| = v_n(\epsilon) \left| \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta + h - s)) ds \right|$$

$$\leq v_n(\epsilon_0) \left| \int_0^{2\pi} g(s) \cos(n(\theta + h - s)) ds \right|$$

$$= |g_n(1 - \epsilon_0, \theta + h)|.$$

Donc :

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0], \sum_{n=N+1}^{\infty} |g_n(1 - \epsilon, \theta + h)| \leq \alpha.$$

De plus, pour $h \in \mathbb{R}$, on a grâce au travail précédent et à l'inégalité triangulaire :

$$|u(1 - \epsilon, \theta + h) - u(1, \theta)| \leq 2\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} |g(s)(v_n(\epsilon) \cos(n(\theta + h - s)) - \cos(n(\theta - s)))| ds$$

$$+ \left| \langle g \rangle \frac{\log(1 - \epsilon)}{\log(r_1)} \right|.$$

Or, comme v_n vaut 1 en 0 et est continue en 0 et puisque \cos est continue sur \mathbb{R} ,

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \forall s \in [0, 2\pi], \lim_{(\epsilon, h) \rightarrow (0, 0)} (v_n(\epsilon) \cos(n(\theta + h - s)) - \cos(n(\theta - s))) = 0.$$

De plus pour tout $\epsilon > 0$ dans un voisinage de 0^+ , on a :

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[, \forall s \in [0, 2\pi], \forall h \in \mathbb{R}, |v_n(\epsilon) \cos(n(\theta+h-s)) - \cos(n(\theta-s))| \leq \max_{1 \leq n \leq N} v_n(\epsilon_0) + 1.$$

Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\lim_{(\epsilon, h) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} |g(s)(v_n(\epsilon) \cos(n(\theta+h-s)) - \cos(n(\theta-s)))| ds + |< g > \frac{\log(1-\epsilon)}{\log(r_1)}| = 0.$$

Donc :

$$\exists (\epsilon_1, h_1) \in]0, \epsilon_0[* \mathbb{R}_+^* \quad \forall (\epsilon, h_1) \leq (\epsilon_1, h_1) \quad |u((1-\epsilon, \theta+h) - g(\theta))| \leq 3\alpha.$$

Si bien que u est continue sur le cercle unité.

- On montrer de même que : $\lim_{(\epsilon, h) \rightarrow (0^+, 0)} u(r_1 + \epsilon, \theta + h) = u(r_1, \theta) = 0.$

Ceci montre que u est continue sur \overline{D} .

— **Conclusion :** u est solution du problème de Dirichlet sur la couronne.

Remarque : Pour obtenir une solution sur n'importe quelle couronne, il suffit d'appliquer une similitude.

5 Démonstration originale du théorème 1

Nous rendons maintenant compte des arguments que nous avons compris dans la preuve du théorème 1 tirée de l'article étudié [1].

Théorème 1 : Étant donné $R > 1$, $n \geq 4$, et $r \leq 1/n$, si ϕ est une fonction harmonique vérifiant $|\phi(z)| \leq 1$ sur l'ouvert Ω constitué du disque $B(0, R)$ privé de n disques de rayon r centrés en les racines n -ème de l'unité, cercles en lesquels ϕ prend la valeur $\phi_0 \in [-1, 1]$. Alors,

$$|\nabla \phi(0)| \leq \frac{4|\log(r)|}{n \log(R)}.$$

Éléments de preuve : On étudie le cas où $\phi_0 = 0$. On va montrer que :

$$(1) : \quad \forall \zeta \in \Omega, |\zeta| \leq 1 \Rightarrow |\phi(\zeta)| \leq \frac{|\log(r)|}{n \log(R)}.$$

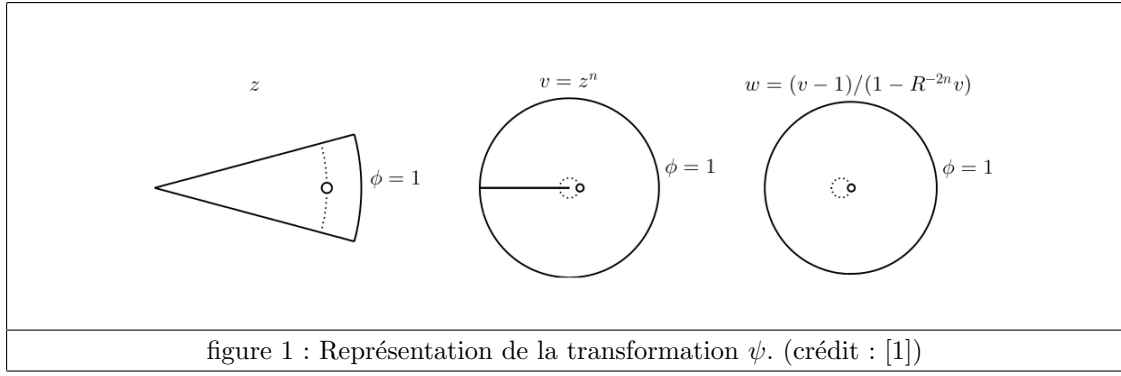
Comme $\phi(\zeta)$ peut s'exprimer comme une moyenne pondérée des valeurs prises par ϕ sur Ω au moyen d'un outil appelé *mesure harmonique*, la pondération ne dépendant que de ζ et Ω et non de ϕ , $\phi(\zeta)$ est maximale lorsque $\phi(z) = 1$ sur $\partial B(0, R)$ (nous avons décidé de ne pas étudier en détail la construction et les propriétés des mesures harmoniques). On considère maintenant

$$O = \left\{ s e^{i\theta} \mid s \in]0, R[\text{ et } \theta \in \left[-\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \right] \right\} \cap \Omega$$

ainsi que

$$\begin{array}{ccc} \psi & : & O \rightarrow \mathbb{C} \\ & & z \mapsto \frac{z^n - 1}{1 - R^{-2n} z^n} \end{array}$$

Il s'agit d'un biholomorphisme de O dans $U = \psi(O)$.



On remarque alors que pour $z \in C$ (où C désigne le bord du disque contenu dans O sur lequel ψ peut aussi être définie)

$$|\psi(z)| \geq \frac{rn}{2}.$$

On pose alors $\varphi = \phi \circ \psi$ qui est encore harmonique puisque ψ est holomorphe et qui vaut 1 sur $\partial B(0, R^n)$. Dans la démonstration donnée dans [1], l'auteur affirme alors que $|\varphi(\zeta)|$ est maximale lorsque $\psi(C)$ est le cercle de rayon $\frac{rn}{2}$ centré en 0. En admettant cet argument, comme $z \rightarrow \frac{\log(2|z|/rn)}{\log(2R^n/rn)}$ est la solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } B(0, R^n) \setminus \overline{B(0, \frac{rn}{2})} \\ u = 1 & \text{sur } \partial B(0, R^n) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0, \frac{rn}{2}) \end{cases}$$

On a :

$$|\varphi(\zeta)| \leq \frac{\log(2|\zeta|/rn)}{\log(2R^n/rn)}.$$

En utilisant l'expression de ψ^{-1} on établit alors (1) et on peut alors en déduire la majoration

$$|\nabla \phi(0)| \leq \frac{4|\log(r)|}{(1-r)\pi n \log(R)}.$$

Nous n'avons pas étudié de démonstration de cette majoration. Néanmoins, la partie 6 propose une démarche permettant d'obtenir des majorations similaires. \square

6 Une deuxième démonstration

La démonstration précédente du théorème 1 étant incomplète, on se propose d'étudier une autre démonstration adaptée de [5].

Lemme : Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $K \geq 0, M \geq 0, \epsilon \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R}, |\varphi(z)| &\leq K \\ \forall z \in B(0, \epsilon), |\varphi(z) - \varphi(0)| &\leq M|z|. \end{aligned}$$

Alors, la fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall x = (y, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, u(x) &= \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{s}{(y-z)^2 + s^2} \varphi(z) dz \\ \forall y \in \mathbb{R}, u(y, 0) &= \varphi(y) \end{aligned}$$

est, d'après la partie 4.2, une solution du problème de Dirichlet

$$(3) : \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{H} \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\mathbb{H} \end{cases}$$

Et u vérifie, pour un certain $C(\epsilon) > 0$:

$$\forall s \in]0, C(\epsilon)[, |\nabla u(0, s)| \leq \frac{8}{\pi} \left[\frac{K}{\epsilon} + M \log \left(\frac{1}{s} \right) \right].$$

Démonstration : Comme

$$\forall x = (y, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, u(x) = \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{s}{(y-z)^2 + s^2} \varphi(z) dz$$

Le théorème de dérivation sous l'intégrale, appliqué sur tout compact de \mathbb{R}^{+*} , donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) = \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 \cdot ((y-z)^2 + s^2) - s \cdot (2s)}{((y-z)^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\partial u}{\partial s}(0, s) &= \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz \\ &= I(s) + J(s) + L(s). \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{2}{2\pi} \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz \\ J(s) &= \frac{2}{2\pi} \int_{]-\epsilon, \epsilon[} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} [\varphi(z) - \varphi(0)] dz \\ L(s) &= \frac{2}{2\pi} \int_{]-\epsilon, \epsilon[} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(0) dz. \end{aligned}$$

Or, pour $s \in]0, \epsilon[$, on a :

$$\begin{aligned} |I(s)| &\leq \frac{2}{2\pi} K \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \left| \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} \right| dz \\ &\leq \frac{2}{2\pi} K \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} dz \\ &\leq \frac{4}{2\pi} K \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} dz \\ &\leq \frac{4}{2\pi} K \left[-\frac{z}{z^2 + s^2} \right]_{\epsilon}^{\infty} = \frac{4}{2\pi} K \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + s^2} \leq \frac{4K}{2\pi\epsilon}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|L(s)| &= \left| \frac{2}{2\pi} \varphi(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{z^2 - s^2}{(z^2 + s^2)^2} dz \right| \\
&= \left| \frac{2}{2\pi} \varphi(0) \left[-\frac{z}{z^2 + s^2} \right]_{-\epsilon}^{\epsilon} \right| \\
&= \left| -\frac{4}{2\pi} \varphi(0) \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + s^2} \right| \leq \frac{4K}{2\pi\epsilon}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
|J(s)| &\leq \frac{2}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{|z^2 - s^2|}{(z^2 + s^2)^2} M|z| dz \\
&\leq \frac{2}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{|z^2| + |s^2|}{(z^2 + s^2)^2} M|z| dz \\
&\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{|z|}{z^2 + s^2} dz \\
&\leq \frac{4M}{2\pi} \int_0^{\epsilon} \frac{z}{z^2 + s^2} dz \\
&\leq \frac{2M}{2\pi} [\ln(z^2 + s^2)]_0^{\epsilon} \\
&\leq \frac{2M}{2\pi} \left[\ln(\epsilon^2 + s^2) + 2 \ln\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\
&\leq \frac{2M}{2\pi} \left[\ln(2\epsilon^2) + 2 \ln\left(\frac{1}{s}\right) \right].
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall s \in]0, \epsilon[, \left| \frac{\partial u}{\partial s}(0, s) \right| \leq \frac{8K}{2\pi\epsilon} + \frac{2M}{2\pi} \left[\ln(2\epsilon^2) + 2 \ln\left(\frac{1}{s}\right) \right].$$

On va maintenant majorer la dérivée partielle de u par rapport à sa première variable.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\partial u}{\partial y}(y, s) = \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{-2s(y - z)}{((y - z)^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall s \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\partial u}{\partial y}(0, s) &= \frac{8s}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz \\
&= \frac{8s}{2\pi} \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz + \frac{8s}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} (\varphi(z) - \varphi(0)) dz \\
&\quad + \frac{8s}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(0) dz \\
&= \frac{8s}{2\pi} \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz + \frac{8s}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} (\varphi(z) - \varphi(0)) dz.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\forall s \in]0, \epsilon[, \left| \frac{\partial u}{\partial y}(0, s) \right| &\leq \left| \frac{8s}{2\pi} \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} \varphi(z) dz \right| + \left| \frac{8s}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} (\varphi(z) - \varphi(0)) dz \right| \\
&\leq \frac{8Ks}{2\pi} \int_{]-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty[} \left| \frac{z}{(z^2 + s^2)^2} \right| dz + \frac{8Ms}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left| \frac{z^2}{(z^2 + s^2)^2} \right| dz \\
&\leq \frac{16Ks}{2\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} z^{-3} dz + \frac{8Ms}{2\pi} \int_{-\frac{\epsilon}{s}}^{\frac{\epsilon}{s}} \frac{s^2 z^2}{(s^2 z^2 + s^2)^2} s du \\
&\leq \frac{16Ks}{4\pi\epsilon^2} + \frac{8M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} du \\
&\leq \frac{16K\epsilon}{4\pi\epsilon^2} + \frac{8M}{2\pi} \frac{\pi}{2} \\
&\leq \frac{16K}{4\pi\epsilon} + \frac{8M}{4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall s \in]0, \epsilon[, |\nabla u(0, s)| \leq \frac{8K}{2\pi\epsilon} + \frac{2M}{2\pi} \left[\ln(2\epsilon^2) + 2\ln\left(\frac{1}{s}\right) \right] + \frac{16K}{4\pi\epsilon} + \frac{8M}{4} \leq \frac{8K}{\pi\epsilon} + \frac{1}{\pi} M \left[\ln(2\epsilon^2) + 2\ln\left(\frac{1}{s}\right) + 2\pi \right].$$

Or, $\ln(2\epsilon^2) + \ln(\frac{1}{s}) + 2\pi \rightarrow_{s \rightarrow 0} -\infty$ ainsi, il existe $C(\epsilon)$ tel que :

$$\forall s \in]0, C(\epsilon)[, |\nabla u(0, s)| \leq \frac{8K}{\pi\epsilon} + \frac{1}{\pi} M \ln\left(\frac{1}{s}\right) \leq \frac{8}{\pi} \left(\frac{K}{\epsilon} + M \ln\left(\frac{1}{s}\right) \right).$$

□

On peut alors étendre le lemme précédent aux boules :

Lemme 2 : Soit $\varphi : \partial B \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue où B est une boule (ouverte) de rayon $a > 0$ et de centre $c \in \mathbb{R}^2$ de \mathbb{R}^2 . Soit $p \in \partial B$ tel qu'il existe $K \geq 0, M \geq 0, \epsilon \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \partial B, |\varphi(z)| &\leq K \\
\forall z \in B(p, \epsilon) \cap \partial B, |\varphi(z) - \varphi(p)| &\leq M|z - p|.
\end{aligned}$$

Soit u une solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } B \\ u = \varphi & \text{sur } \partial B \end{cases}$$

Alors, il existe $C(\epsilon, a) > 0$ tel que pour $x \in [c, p]$ vérifiant $0 < d(x, \partial B) < C(\epsilon, a)$ on ait :

$$\forall s \in]0, C(\epsilon)[, |\nabla u(x)| \leq \frac{8}{\pi} \left[\frac{K}{\epsilon} + M \log \left(\frac{2a}{d(x, \partial B)} \right) \right].$$

Un résultat technique sur les fonctions sous-harmoniques (cf : [5]) permet alors d'étendre ce lemme à des espaces plus généraux (dont les $\Omega_{n,r}$). C'est lors de cette extension qu'apparaît le facteur $\frac{1}{n}$ du théorème 1. Néanmoins, ce résultat dépasse le cadre de cette étude.

Références

- [1] S. J. Chapman, D. P. Hewett, and L. N. Trefethen, “Mathematics of the faraday cage,” *SIAM review*, vol. 57, no. 3, pp. 398–417, 2015.
- [2] G. Allaire, *Analyse numerique et optimisation : une introduction a la modelisation mathematique et a la simulation numerique*. 2005.
- [3] L. C. Evans, *Partial differential equations*. 2010.
- [4] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*. 1995.
- [5] G. N. Hile and A. Stanoyevitch, *Gradient bounds for harmonic functions lipschitz on the boundary*. 1991.