UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TRAVAIL PRATIQUE 2

PRÉSENTÉ À

ÉTIENNE LALÉ

DANS LE CADRE DU COURS

MACROÉCONOMIE AVANCÉE

ECO8066, groupe 50

PAR

GUILLAUME VAUDESCAL (VAUG30119904)

DATE DE REMISE

19 AVRIL 2022

Question 1. Donner une définition rigoureuse de l'équilibre de marché de cette économie.

L'équilibre de marché de cette économie est définie par des séquences d'allocations des quantités $[C_t, N_t, H_{t+1}, H_t^c, Y_t]_{t=0}^{\infty}$ et des prix $[w_t, r_t]_{t=0}^{\infty}$ tel que :

(i) Problème d'optimisation de la firme : La firme choisit $[N_t, H_t^c]_{t=0}^{\infty}$ étant donné $[w_t, P_t]_{t=0}^{\infty}$ pour maximiser son profit sous la contrainte $Y_t = A_t N_t^{\alpha} (H_t^c)^{1-\alpha}$.

(ii) Problème d'optimisation du ménage : Le ménage choisit $[C_t, N_t, H_{t+1}, H_t^c]_{t=0}^{\infty}$ étant donné $[w_t, r_t]_{t=0}^{\infty}$ pour maximiser son utilité intertemporelle, qui correspond à l'équation (1) dans l'énoncé, sous contrainte $C_t + X_t \leq Y_t$.

(iii) Les marchés des biens, du capital et du travail sont tous à l'équilibre à chaque période t étant donné H_0 (stock initial). À chaque période t on a :

⇒ Sur le marché des biens $C_t + X_t = Y_t$;
⇒ Sur le marché des capitaux $H_t^r + H_t^c = H_t$;
⇒ Sur le marché du travail $N_t = N_t(\text{firmes})$.

Question 2. Formuler le problème du planificateur social de cette économie. Le problème du planificateur de cette économie est :

$$\max_{\left[C_t, N_t, H_{t+1}^c, H_{t+1}^r H_{t+1}\right]_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log(C_t) + \eta_t \log(H_t^r) - \zeta N_t\right] \tag{1}$$

sous contraintes :

$$C_t + \frac{H_{t+1} - (1-\delta) H_t}{V_t} \leq A_t N_t^{\alpha} (H_t^c)^{1-\alpha} \tag{2}$$

$$H_t^r + H_t^c \leq H_t \tag{3}$$

$$H_{t+1}^c \geq 0, H_{t+1}^r \geq 0, H_{t+1} \geq 0$$

$$0 \leq N_t \leq 1$$

$$H_0, A_0, V_0 \text{ sont donnés.}$$

(a). Définir les CPOs associés à une solution intérieur. Puis donner une interprétation de ces conditions.

On peut écrire le lagrangien du problème comme :

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log\left(C_t\right) + \eta_t \log\left(H_t^r\right) - \zeta N_t + \lambda_t \left(A_t N_t^{\alpha} \left(H_t^c\right)^{1-\alpha} + (1-\delta)\frac{H_t^r + H_t^c}{V_t} - \frac{H_{t+1}^r + H_{t+1}^c}{V_t} - C_t \right) \right]$$

Les CPOs associés à une solution intérieure sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_t = \frac{1}{C_t} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0 \Longleftrightarrow \alpha \lambda_t \frac{Y_t}{N_t} = \zeta \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_{t+1}^r} = 0 \Longleftrightarrow \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\eta_{t+1}}{H_{t+1}^r} + \lambda_{t+1} \frac{(1-\delta)}{V_{t+1}} \right] = \frac{\lambda_t}{V_t} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_{t+1}^c} = 0 \Longleftrightarrow \beta \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} \left[(1-\alpha)\frac{Y_{t+1}}{H_{t+1}^c} + \frac{(1-\delta)}{V_{t+1}} \right] = \frac{\lambda_t}{V_t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \Longleftrightarrow C_t + \frac{H_{t+1} - (1-\delta) H_t}{V_t} = A_t N_t^{\alpha} \left(H_t^c\right)^{1-\alpha} \tag{8}$$

Interprétation économique des CPOs :

- CPO (4) : Le ménage égalise sa productivité marginale à son utilité marginale de la consommation à l'équilibre (à chaque périodes) $\Rightarrow$ condition intra-temporelle.

- CPO (5) : On peut la réécrire de la manière suivante :

$$\alpha \frac{Y_t}{N_t} = \frac{\zeta}{\lambda_t}$$

Le bénéfice marginal du travail est égale au coût marginal des heures travaillées par rapport à l'utilité marginale de la consommation à l'équilibre (à chaque périodes) $\Rightarrow$ condition intra-temporelle.

- CPO (6) : Équation d'Euler inter-temporelle :

$$\frac{\lambda_t}{V_t} = \beta \mathrm{E}_t \left[\frac{\eta_{t+1}}{H^r_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{(1-\delta)}{V_{t+1}} \right]$$

Cette équation représente l'utilité marginale de la consommation en $t = 0$ par rapport au coût de la productivité dans le secteur de l'immobilier. Cette dernière doit être égale à la valeur escompté des bénéfices marginaux de l'utilité de la consommation en $t+1$ par rapport au secteur de l'immobilier que l'on multiplie par $(1-\delta)$ plus la valeur escompté espérée du choc sur les préférences pour le logement par rapport au secteur de l'immobilier résidentiel. Également à l'équilibre, il est choisi de consommer en $t = 0$ et $t+1$.

- CPO (7) : Équation d'Euler inter-temporelle :

$$\frac{\lambda_t}{V_t} = \beta \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} \left[(1-\alpha) \frac{Y_{t+1}}{H^e_{t+1}} + \frac{(1-\delta)}{V_{t+1}} \right]$$

Cette équation représente l'utilité marginale de la consommation en $t = 0$ par rapport au coût de la productivité dans le secteur de l'immobilier. Cette dernière doit être égale à la valeur escompté espérée de l'utilité marginale de la consommation en $t+1$, que l'on multiplie par la productivité marginale dans le secteur de l'immobilier commercial plus $(1-\delta)$ par rapport à la productivité en $t+1$ du secteur de l'immobilier. Également de façon similaire à la CPO (6), à l'équilibre il est choisi de consommer en $t = 0$ et $t+1$.

- CPO (8) : Cette équation repésente la contrainte de ressources du problème du planificateur. On observe que pour chaque période et à l'équilibre, il est utilisé la production pour la consommation et l'investissement. On note que l'investissement du ménage permet de renouveler le stock qui se déprécie par rapport à la productivité dans ce secteur et d'augmenter le stock immobilier.

(b). Ces conditions suffisent-elles à caractériser l'allocation des ressources de l'équilibre décentralisé de l'économie ? Pourquoi ?

Selon les deux théorèmes du bien-être que l'on a utilisé ici, ces conditions suffisent alors à caractériser l'allocation des ressources de l'équilibre décentralisé de l'économie. En effet, avec l'équilibre général concurrentiel qui respecte l'ensemble des conditions d'optimalité et un système de prix peut être associé à tout optimum de Pareto, alors ces conditions suffisent à caractériser l'allocation des ressources de l'équilibre décentralisé de l'économie.

Question 3. On pose $S_t = A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$

(a). Vérifier que les variables suivantes convergent vers des valeurs finies :

$$\frac{Y_t}{S_t}, \frac{C_t}{S_t}, \frac{X_t}{S_t}, \frac{H_{t+1}}{S_t V_t}, \frac{H_t^r}{S_t V_t}, \frac{H_t^c}{S_t V_t}, N_t \tag{9}$$

Que l'on réécrit :

$$y_t = \frac{Y_t}{S_t}, c_t = \frac{C_t}{S_t}, x_t = \frac{X_t}{S_t}, h_{t+1} = \frac{H_{t+1}}{S_t V_t}, h_t^r = \frac{H_t^r}{S_t V_t}, h_t^c = \frac{H_t^c}{S_t V_t}$$

- Pour $y_t = \frac{Y_t}{S_t}$ cela nous donne :

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{A_t N_t^{\alpha} \left(H_T^c\right)^{1-\alpha}}{S_t} = A_t N_t^{\alpha} \frac{\left(S_t V_t\right)^{1-\alpha}}{S_t} \left(h_T^c\right)^{1-\alpha}$$

$$= A_t N_t^{\alpha} S_t^{-\alpha} V_t^{1-\alpha} \left(h_T^c\right)^{1-\alpha} \tag{10}$$

$$= \frac{A_t N_t^{\alpha} V_t^{1-\alpha}}{\left(A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)^{\alpha}} \left(h_T^c\right)^{1-\alpha}$$

$$y_t = N_t^{\alpha} \left(h_t^c\right)^{1-\alpha}$$

- Pour $x_t = \frac{X_t}{S_t}$ cela nous donne :

$$Y_t = X_t + C_t$$

$$X_t = Y_t - C_t$$

$$\left(\frac{S_t}{S_t}\right) X_t = Y_t - C_t \tag{11}$$

$$x_t = \frac{Y_t - C_t}{S_t}$$

$$x_t = y_t - c_t$$

- Pour $h_{t+1} = \frac{H_{t+1}}{S_t V_t}$ cela nous donne :

$$H^r_{t+1} + H^c_{t+1} = H_{t+1}$$

$$\left(\frac{S_{t+1}V_{t+1}}{S_{t+1}V_{t+1}}\right)\left(H^r_{t+1} + H^c_{t+1}\right) = H_{t+1}\left(\frac{S_tV_t}{S_tV_t}\right) \tag{12}$$

$$\left(S_{t+1}V_{t+1}\right)\left(h^r_{t+1} + h^c_{t+1}\right) = h_{t+1}\left(S_tV_t\right)$$

$$\gamma_s\gamma_v\left(h^r_{t+1} + h^c_{t+1}\right) = h_{t+1}$$

- En utilisant la CPO (5), cela nous donne :

$$\zeta = \alpha\frac{1}{C_t}\frac{Y_t}{N_t}$$

$$\zeta = \alpha\frac{1}{C_t}\frac{Y_t}{N_t}\left(\frac{S_t}{S_t}\right) \tag{13}$$

$$\zeta = \alpha\frac{1}{c_t}\frac{y_t}{N_t}$$

- En utilisant la CPO (6), cela nous donne :

$$\frac{1}{C_tV_t} = \beta\mathbb{E}_t\left[\frac{\eta_{t+1}}{H^r_{t+1}} + \frac{(1-\delta)}{C_{t+1}V_{t+1}}\right]$$

$$1 = \beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{S_{t+1}V_{t+1}}{S_{t+1}V_{t+1}}\right)\left(C_tV_t\right)\frac{\eta_{t+1}}{H^r_{t+1}} + (1-\delta)\frac{C_tV_t}{C_{t+1}V_{t+1}}\right]$$

$$1 = \beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_tV_t}{S_{t+1}V_{t+1}}\right)\frac{\eta_{t+1}}{h^r_{t+1}} + \frac{(1-\delta)}{\gamma_c\gamma_v}\right] \tag{14}$$

$$1 = \beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_t}{S_{t+1}\gamma_v}\right)\left(\frac{S_t}{S_t}\right)\frac{\eta_{t+1}}{h^r_{t+1}} + \frac{(1-\delta)}{\gamma_c\gamma_v}\right]$$

$$1 = \beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{c_t}{\gamma_s\gamma_v}\right)\frac{\eta_{t+1}}{H^r_{t+1}} + \frac{(1-\delta)}{\gamma_s\gamma_v}\frac{c_t}{c_{t+1}}\right]$$

- En utilisant la CPO (7), cela nous donne :

$$\frac{1}{C_t V_t} = \beta \mathbb{E}_t \frac{1}{C_{t+1}} \left[(1-\alpha) \frac{Y_{t+1}}{H^c_{t+1}} + \frac{(1-\delta)}{V_{t+1}} \right]$$

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \frac{C_t V_t}{C_{t+1}} \left[(1-\alpha) \frac{Y_{t+1}}{H^c_{t+1}} \left(\frac{S_{t+1} V_{t+1}}{S_{t+1} V_{t+1}} \right) + \frac{(1-\delta)}{V_{t+1}} \right] \tag{15}$$

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \frac{C_t}{C_{t+1}} \left[(1-\alpha) \frac{y_{t+1}}{h^c_{t+1}} \left(\frac{V_t}{V_{t+1}} \right) + (1-\delta) \frac{V_t}{V_{t+1}} \right]$$

$$1 = \frac{\beta}{\gamma_s \gamma_v} \mathbb{E}_t \frac{c_t}{c_{t+1}} \left[(1-\alpha) \frac{y_{t+1}}{h^c_{t+1}} + (1-\delta) \right]$$

Comme N_t est borné d'après les hypothèses du modèle alors pour tout T grand choisit de façon arbitraire, N_t est fini.

Également pour T grand choisit de façon arbitraire aux équations (10) et (15), on obtient y_T en fonction de h^c_T sous forme d'une fonction linéaire et concave.

$$y_T = N_T^{\alpha} \left(h^c_T \right)^{1-\alpha}$$

$$1 = \beta \mathbb{E} \left[(1-\alpha) \frac{y_T}{h^c_T} + (1-\delta) \right]$$

Ces deux relations nous donne des valeurs finies pour ces deux variables et une solution unique (y_T, h^c_T). De plus, quand on analyse la limite de l'équation (13), c_T est également finie. En ce sens, puisque c_T et y_T sont finies, alors x_T est également fini selon l'équation (11).

Avec l'équation (14) cela nous donne :

$$1 = \beta \mathbb{E} \left[c_T \frac{\eta_T}{h^r_T} + (1-\delta) \right]$$

On obtient alors $\mathbb{E}(\eta_t) = \eta$ qui est constant. De plus quand on analyse la limite, on obtient h^r_T qui est également fini. En ce sens, on peut donc écrire que h_T est également fini selon l'équation (12).

(b). Calculer le taux de croissance moyen de l'output, de la consommation, de l'investissement immobilier, du sotck immobilier et des heures travaillées.

Par la consigne on pose $S_t = A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$. On obtient alors avec cette équation :

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = \frac{A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{S_{t-1}}$$

$$\gamma_s = \frac{A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{A_{t-1}^{\frac{1}{\alpha}} V_{t-1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \tag{16}$$

$$\gamma_s = \gamma_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_v^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Comme Y_t, C_t et X_t sont croissant sur long-terme au même taux que S_t qui est constant, cela nous donne donc que les taux de croissances moyens des variables qui convergent vers :

$$\gamma_s - 1 = \gamma_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_{v^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} - 1 \tag{17}$$

On observe à présent pour $S_t V_t$, cela nous donne :

$$S_t V_t = A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\frac{S_t V_t}{S_{t-1} V_{t-1}} = \frac{A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} V_t}{S_{t-1} V_{t-1}}$$

$$\gamma_s \gamma_v = \frac{A_t^{\frac{1}{\alpha}} V_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} V_t}{A_{t-1}^{\frac{1}{\alpha}} V_{t-1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} V_{t-1}} \tag{18}$$

$$\gamma_s \gamma_v = \gamma_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_v^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \gamma_v$$

$$\gamma_s \gamma_v = \gamma_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_v^{\frac{1}{\alpha}}$$

On obtient alors que H_{t+1}, H_{t+1}^r et H_{t+1}^c convergent vers :

$$\gamma_s \gamma_v - 1 = \gamma_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_v^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \tag{19}$$

Question 4. Proposer une valeur de calibration des paramètres $\alpha, \beta, \delta, \zeta, \gamma_\alpha$ et γ_v à partir des observations suivantes :

- la taux d'intérêt réel en valeur annualisée vaut 7%.

- le part de la masse salariale dans la valeur ajoutée est de 2/3.

- le taux de croissance annuel moyen du PIB est de 4%.

- le parc immobilier est constant dans le temps.

- la part de l'investissement immobilier dans le PIB est de 10%.

- le logement résidentiel représente 2/3 du parc immobilier.

- le travail salarié représente 1/3 du temps dont disposent les ménages.

$\Rightarrow$ Pour α :

On sait que les conditions d'équilibre de la firme sont : $\alpha \frac{Y_t}{N_t} = \omega_t$. Puis par l'énoncé on sait que la part de la masse salariale dans la valeur ajoutée est de 2/3.

Alors :

$$\alpha = \frac{2}{3} \tag{20}$$

$\Rightarrow$ Pour β :

Par l'énoncé on sait que le taux d'intérêt réel en valeur annualisée est de 7%.

Alors :

$$\frac{1}{\beta} = (1.07)^{\frac{1}{4}} \tag{21}$$

$$\beta \approx 0,98$$

$\Rightarrow$ Pour ζ :

Par l'énoncé on sait que la part de l'investissement immobilier dans le PIB est de 10%.

Alors :

$$\begin{aligned} C + X &= Y \\ \frac{C}{Y} + \frac{X}{Y} &= 1 \\ \frac{C}{Y} + \frac{1}{10} &= 1 \\ \frac{C}{Y} &= \frac{9}{10} \\ \frac{C}{Y} &= 0,9 \end{aligned} \tag{22}$$

Par l'énoncé on sait que le travail salarié est 1/3. Par conséquent selon l'équation (13) :

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha \frac{1}{N} \frac{1}{\frac{C}{Y}} \\ \zeta &= \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{1}{3}} \frac{1}{10} \\ \zeta &= \frac{20}{9} \\ \zeta &\approx 2,22 \end{aligned} \tag{23}$$

$\Rightarrow$ Pour γ_v et γ_a :

Par l'énoncé on sait que le taux de croissance de l'immobilier est constant dans le temps.

Alors :

$$\gamma_h - 1 = \gamma_a^{\frac{1}{a}} \gamma_v^{\frac{1}{a}} - 1 = 0$$

$$1 = \gamma_a^{\frac{1}{a}} \gamma_v^{\frac{1}{a}} \tag{24}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\gamma_a}$$

Le taux du PIB correspond à $\gamma_y - 1 = \gamma_s - 1$.

Alors :

$$\gamma_y - 1 = \gamma_s - 1 = \gamma_a^{\frac{1}{a}} \gamma_v^{\frac{1}{a}} - 1$$

$$(1,04)^{\frac{1}{4}} = \gamma_a^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{\gamma_a} \right)^{\frac{1-\alpha}{a}} \tag{25}$$

$$\gamma_a = (1,04)^{\frac{1}{4}}$$

$$\gamma_a \approx 1,0099$$

Alors :

$$\gamma_v = \frac{1}{(1,04)^{\frac{1}{4}}} \tag{26}$$

$$\gamma_v \approx 0,99$$

$\Rightarrow$ Pour δ :

On reprend à partir de l'équation (15) :

$$1 = \beta \left[(1-\alpha)\frac{y}{h^c} + (1-\delta) \right]$$

$$1 = 0,9832 \left[\frac{1}{3}\frac{10\delta}{\frac{1}{3}} + (1-\delta) \right]$$

$$1 = 9,832\delta + 0,9832 - 0,9832\delta \tag{27}$$

$$0,0168 = 8,8488\delta$$

$$\delta = \frac{0,0168}{8,8488}$$

$$\delta \approx 0,002$$

$\Rightarrow$ Pour η :

$$\frac{\eta}{h^r} = \lambda_t(1-\alpha)\frac{y}{h^c}$$

$$\eta = \frac{y}{c}(1-\alpha)\frac{h^r}{h^c}$$

$$\eta = \frac{1}{\frac{9}{10}}\frac{1}{3}\frac{2}{\frac{3}{3}} \tag{28}$$

$$\eta = \frac{20}{27}$$

$$\eta \approx 0,74$$

Question 5. On dispose d'une base de données contenant les séries temporelles suivantes : prix réel de l'investissement dans le secteur immobilier p_t, productivité du travail s_t et heures travaillées n_t. On souhaite utiliser ces données pour identifier les chocs structurels du modèle, à savoir η_t, ϵ_t^a et ϵ_t^v.

(a). Exprimer p_t, s_t et n_t en fonction des variables du modèle.

$\Rightarrow$ Pour p_t :

Cette variable correspond au prix réel de l'investissement dans le secteur immobilier. La firme cherche alors à optimiser l'équation suivante :

$$A_t N_t^{\alpha} \left(H_t^c\right)^{1-\alpha} - \omega_t N_t - \frac{1}{V_t}\left(H_{t+1} - (1-\delta)H_t\right) \tag{29}$$

Dans un deuxième temps on dérive par H_{t+1} :

$$(1-\alpha)\frac{A_t N_t^{\alpha} \left(H_t^c\right)^{1-\alpha}}{H_t^t} = \frac{1}{V_t} \tag{30}$$

Enfin, on met en log :

$$p_t = -\log\left(V_t\right) \tag{31}$$

$\Rightarrow$ Pour s_t :

C'est la productivité du travail :

$$s_t = \log\left(\frac{Y_t}{N_t}\right) \tag{32}$$

$\Rightarrow$ Pour n_t :

Cette variable correspond au log des heures travaillées :

$$n_t = \log\left(N_t\right) \tag{33}$$

(b). Les deux assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- A1 : "Seuls les chocs à la productivité du secteur immobilier affectent le prix réel de l'investissement immobilier."

→ Vrai. On peut noter que le processus stochastique qui définit la trajectoire de V_t ne dépend que de ses chocs.

- A2 : "Le choc de préférence pour le logement n'a pas d'effet de long terme sur la productivité du travail."

→ Vrai. Les chocs de préférences sont stationnaires. Ainsi, seul à long terme les chocs de productivité ont un effet sur la productivité du travail.

(c). Quel jeu de données z_t utiliser ?

On utilise le jeu de données z_t suivant :

$$z_t = [\Delta p_t, \Delta s_t, n_t] \tag{34}$$

⇒ Les heures de travail n_t sont constantes et ont donc un taux de croissance nul.

⇒ p_t et s_t suivent une marche aléatoire (non constant à travers le temps), seul les chocs à la productivité les affectent directement.

(d). Proposer un modèle VAR structurel avec des restrictions d'identification permettant d'identifier η_t, ϵ_t^a et ϵ_t^v à partir des données z_t.

Le modèle VAR structurel que nous proposons est le suivant :

$$A(L)z_t = A_0 + u_t \tag{35}$$

- $A(L)$ est un polynôme de retard $A(L) = I_n - A_1 L - \ldots - A_p L^p$. On émet l'hypothèse que ce polynôme est inversible.

- A_0 est une matrice $n \times 1$.

- u_t : Correspond aux erreurs de prévisions.

- Le vecteur des données est : $z_t = [\Delta p_t, \Delta s_t, n_t]$.

- $A_i, i = 1, 2, \ldots, p$ sont des matrices $n \times n$.

On estime ce modèle par MCO, ce qui nous donne les résidus u_t avec $\mathbb{E}\left[u_t u_t'\right] = \Sigma_u \Rightarrow$ symétrique définie positive de taille $n \times n$.

$$u_t = De_t \tag{36}$$

Ensuite on récupère les chocs structurels de u_t :

Avec $e_t = \begin{bmatrix} e_t^v \\ e_t^a \\ \eta_t \end{bmatrix}$ qui est le vecteur des chocs structurels.

Puis on impose certaines hypothèses :

$\Rightarrow$ (1) La variance des chocs = 1.

$\Rightarrow$ (2) Les chocs structurels sont non corrélés et orthogonaux.

Par l'équation (36), on fait l'hypothèse que la matrice D est inversible. Alors $DD' = \Sigma_u$ avec un nombre de restrictions de 3 .

On réalise également les restrictions suivantes à court terme :

$\Rightarrow$ Le prix de l'investissement répond à son propre choc. Puis, par l'intermédiaire de l'accumulation du capital en $t+1$, on suppose que la productivité du travail répond au choc de productivité e_t^a et au choc sur l'investissement e_t^v.

$\Rightarrow$ On suppose que les heures travaillées répondent à tous les chocs avec également les chocs technologiques qui n'affectent pas de manière contemporaine le capital et le travail car les coûts d'ajustements des facteurs de production à court terme sont élevés.

Par conséquent, avec l'équation (36), on obtient alors les restrictions suivantes :

$$\begin{bmatrix} u_t^p \\ u_t^s \\ u_t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_t^v \\ e_t^a \\ \eta_t \end{bmatrix} \tag{37}$$

On peut noter que ce système est récursif. On peut ainsi calculer la matrice D en appliquant la factorisation Cholesky (permet de déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que : $A = LL^T$).