Real analysis
——技术性的，思想上的

Guiloual

2021 年 12 月 26 日

前言

辛丑年冬月十九日，心血来潮（实则图书馆没有位置，在寝室无心学习（逃）），便想将近日所学整理成为笔记，供学后反思与参考。

嗯，最近在学习 stein 教授所编写的 Real analysis，听闻 stein 于前些天逝世，不由得有些唏嘘，世事无常，才开始拜读这本分析圣经竟遇如此噩耗，不管 stein 生前有什么评价，仅以此笔记纪念 stein。

Guiloual

2021 年 12 月 26 日

目录

第一章 Measure theory

1.1 前置知识

补充一点朴素集合论的知识。

在此之前我们首先说明，整个实函数的内容都是建立在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 上的，点的概念也就是一个列向量，运算同向量空间一样，点的模也就是向量的模，我们取的度量函数为二范数，两个点的距离也就是欧式内积。

我们定义两个集合间的距离为：

$$d(E,F)=\inf|x-y|,\forall x\in E,y\in F$$

集合 E 的补集为：

$$E^c=\{x\in\mathbb{R}^n|x\notin E\}$$

集合 E 在 F 中的补集，也称 F 和 E 的差集定义为：

$$F-E=\{x\in F|x\notin E\}$$

补充一点点集拓扑的知识。（俗称报菜名（逃））

1.1.1 开集，闭集和紧集

定义 1.1.1 (开球). 我们说一个半径为 r 开球,一般来说指的是,对于 $x\in\mathbb{R}^n$,所有满足 $|y-x|<r$,的点所形成的集合,我们记为 $B_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^n||y-x|<$

$n\}$。

有了开球的概念现在对可以来定义开集了。

定义 1.1.2 (开集). 设 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集，若对于任意的 $x \in \mathcal{O}$，都存在一个 $r \in \mathbb{R}$，使得 $B_r(x) \subset \mathcal{O}$，我们则称 $\mathcal{O}$ 为开集。

定义 1.1.3 (闭集). $E \subset \mathbb{R}^n$，若 $\mathbb{R}^n - E$ 为开集，则 E 称为闭集。

定义 1.1.4 (紧集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果它被包含在一个以原点为圆心半径有限的开球中，我们称其为有界集，如果它还是一个闭集，我们就把他称为一个闭集。

对于紧集，我们有一个十分出名有十分有用的定理，即 Heine-Borel 定理，俗称有限开覆盖定理。

定理 1.1.5 (Heine-Borel). 设 $\mathcal{O}$ 为开集，若 $\mathcal{O} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$，那么这里一定存在着一个有限的子覆盖 $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \cdots, \mathcal{O}_{\alpha_n}$，使得 $\mathcal{O} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{\alpha_i}$。

我们还有内点的概念，

定义 1.1.6 (内点). 设 $x \in E$，若存在 $\epsilon > 0$，使得开球 $B_\epsilon(x) \subset E$，则称 x 为 E 的一个内点。E 的所有内点构成的集合称为 E 的内界，记为 $intE$。

定义 1.1.7 (外点). 设 $x \in \mathbb{R}^n$，若存在 $\epsilon > 0$，使得开球 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing$，则称 x 为 E 的外点。

定义 1.1.8 (边界点). 设 $x \in \mathbb{R}^n$，若对于 $\forall \epsilon > 0$，都有 $B_\epsilon(x) \cap E \neq \varnothing, B_\epsilon(x) \cap E^c \neq \varnothing$，则称 x 为 E 的边界点，记为 ∂E。

给出极限点的定义，也叫聚点，注意和我们上课所讲的聚点定义有些许差别，但是不会影响后面的结论。

定义 1.1.9 (极限点). 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集，若有 $x \in \mathbb{R}^n$，对于 $\forall \epsilon > 0$，都有 $B_\epsilon(x) \bigcap E \neq \varnothing$，我们则称 x 为 E 的一个聚点。

我们有闭包的概念，

定义 1.1.10 (闭包)**.** 集合 E 和 E 的所有极限点的并称为 E 的闭包。

定义 1.1.11 (孤立点)**.** 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集，如有 $x \in E$，存在一个 $\epsilon > 0$，使得 $B_\epsilon(x) \bigcap E = x$，我们则称 x 为 E 的孤立点。

做几点注记：

1. 集合中的点都是极限点。更进一步的，若集合的所有极限点都在集合中，则此集合为闭集。

1.1.2 矩体和立方体

在 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 中，我们有长度，面积和体积的度量概念，在 $\mathbb{R}^n$ 中我们也有体积的概念，这时为定义在集合上的更一般的概念，也就是所谓的测度，所谓测度，在我看来就是集合在度量空间中显现出来的度量性质，通俗的来讲就是体积。

好了，回归正题，对于一般集合的体积问题我们现在无法讨论，但是想想我们中学学习几何课程的时候，我们是从最简单的正方体和长方体的概念来学习几何的，即使是现在，在开始一个一般概念时我们也从简单且特殊的对象出发得到一个一般的概念。作为长方体在高维的推广，我们定义一个矩体。

定义 1.1.12 ((闭) 矩体)**.** 设 $R \subset \mathbb{R}^n$，若 R 可表示为 n 个区间的笛卡尔积，我们则称 R 为矩体，即

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$$R = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | a_i \le x_i \le b_i, x_i \in \mathbb{R}\}$$

我们定义矩体的体积为：

$$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n, a_n)$$

特别地，当：

$$(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) = \cdots = (b_n - a_n) = l$$

时，我们称其为立方体，记为 Q，且有 $|Q| = l^n$。