

# Fascicule de TD

## avec solutions

---

Université Claude Bernard Lyon1



FIGURE 1 – La gravure sur bois dite « de Flammarion »

Astrophysique pour la licence

Université Lyon 1

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Vie des étoiles</b>	<b>3</b>
1.1	La lumière des étoiles	3
1.1.1	Notion de photométrie	3
	Exercice 1 : Dilution du flux avec la distance	3
1.1.2	Photosphère et température effective	3
	Exercice 2 : Luminosité du Soleil	3
	Exercice 3 : Rayon des étoiles	3
1.1.3	Système de magnitudes	3
	Exercice 4 : Indices de couleur	3
1.2	Évolution stellaire	4
1.2.1	Formation des étoiles	4
	Exercice 5 :	4
1.2.2	Séquence principale	4
	Exercice 6 :	4
1.2.3	Évolution post-SP	4
	Exercice 7 : Étoile de $M > 5M_{\odot}$	4
1.3	Classification spectrale	5
1.3.1	Mesures des distances	5
	Parallaxe trigonométrique	5
	Exercice 8 :	5
	Exercice 9 : Astrométrie spatiale	5
	Exercice 10 :	5
	Exercice 11 : Méthode du point convergent	6
1.3.2	Classification stellaire	6
	Exercice 12 : Types spectraux	6
	Exercice 13 : Diagramme HR	6
1.3.3	Mesure des rayons	6
	Exercice 14 : Interférométrie	6
1.3.4	Mesure de masse	7
	Étoiles doubles	7
	Exercice 15 :	7
	Exercice 16 :	7
1.4	Les systèmes planétaires	8
1.4.1	Les lois de Kepler	8
	Exercice 17 : Invariant de Runge-Lenz	8
	Exercice 18 : Orbite de Pluton	9
	Exercice 19 : Dérivation des lois de Kepler	9
	Exercice 20 :	9
<b>2</b>	<b>Vie des galaxies</b>	<b>11</b>
2.1	Milieu interstellaire	11
2.1.1	Mise en évidence expérimentale	11
	Exercice 21 :	11
2.1.2	Extinction du MIS	11
	Exercice 22 : Interprétation physique	11
	Extinction sélective et exemple, exemple de rougissement	12
	Exercice 23 :	12
	Exercice 24 :	13
	Exercice 25 : Excès de couleur	13

2.2	Galaxies	14
2.2.1	Classification morphologique des galaxies	14
	Exercice 26 : Propriétés « physiques » de la classification	14
	Exercice 27 : de Vaucouleurs et autres classifications	15
2.2.2	Constituants des galaxies	15
	Exercice 28 : Les étoiles	15
	Exercice 29 : La matière noire	15
2.2.3	Exemple de galaxie : la Voie Lactée	15
	Exercice 30 : Morphologie de notre galaxie	15
	Exercice 31 : Le centre galactique	16
2.2.4	Le groupe local	17
	Exercice 32 :	17
2.2.5	Distribution des galaxies dans l'univers	17
	Exercice 33 : Fonction de luminosité	17
	Effets d'environnement, collisions et fusions	17
	Exercice 34 : Calcul de la fréquence des collisions dans un amas	17
2.2.6	Équilibre gravitationnel	19
	Exercice 35 : Théorème du Viriel scalaire	19
	Exercice 36 : Application du théorème du Viriel	19
	Exercice 37 : Temps cinématique	19
<b>3</b>	<b>Cosmologie</b>	<b>21</b>
3.1	Espace et temps absolus	21
	Exercice 38 : La faiblesse de la force de gravitation	21
3.2	La rupture relativiste	21
3.2.1	Relativité générale	21
	Einstein dans l'ascenseur	21
	Exercice 39 : L'équivalence gravité/accélération	21
3.2.2	Les tests	22
	Exercice 40 : Le décalage gravitationnel vers le rouge	22
3.3	Le big bang	22
3.3.1	Expansion de l'univers...	22
	Exercice 41 : ...limitée par $c$ ?	22
	Exercice 42 : ...la même partout ?	23
	Exercice 43 : Le facteur d'expansion de l'espace	23
3.3.2	Film des débuts	24
	Exercice 44 : Nucléosynthèse primordiale ou non ?	24
3.4	Questions diverses	24
3.4.1	Âge de l'univers	24
	Exercice 45 : Temps de Hubble et densité critique	24
	Exercice 46 : Age de l'univers et temps de Hubble	24
3.4.2	Facteur d'échelle	25
	Exercice 47 : Redshift cosmologique, facteur d'échelle et époque	25
3.4.3	Distance de l'horizon	25
	Exercice 48 : Temps de vol, distance, et expansion...	25
<b>4</b>	<b>Retour sur Terre - Nos repères dans le ciel</b>	<b>26</b>
4.1	Se positionner dans le ciel	26
	Exercice 49 : Repérage	26
4.2	Mouvement diurne	26
	Exercice 50 :	26
	Exercice 51 : Mouvement diurne des étoiles	27
	Exercice 52 : Coordonnées horaires d'un astre	28
	Exercice 53 : Coordonnées équatoriales	28
4.3	Mouvement du Soleil	30
4.3.1	Année sidérale, année tropique	30
	Exercice 54 : Mouvement du Soleil, jour solaire	30

# Chapitre 1

## Vie des étoiles

### 1.1 La lumière des étoiles

#### 1.1.1 Notion de photométrie

##### Exercice 1 : Dilution du flux avec la distance

Réécrire la relation entre la luminosité d'une étoile et le flux observé (équation 2.4) dans le cas où la luminosité  $L(t)$  dépend du temps (par exemple parce que l'étoile est variable) et donc le flux observé  $F(D, t)$  dépend du temps et de la distance.

**Corrigé :** Lorsque la luminosité  $L(t)$  de l'étoile dépend du temps, les variations de luminosité mettent un temps  $D/c$  pour parvenir à un observateur situé à une distance  $D$  ( $c$  étant la vitesse de la lumière). Dans ce cas la relation (2.4) devient :  $F(D, t) = L(t - D/c)/(4\pi D^2)$ .

#### 1.1.2 Photosphère et température effective

##### Exercice 2 : Luminosité du Soleil

Calculer la luminosité du Soleil à partir de sa température effective du Soleil  $T_{\odot} \approx 5770$  K et de son rayon  $R_{\odot} \approx 6.96 \times 10^8$  m.

**Corrigé :** En appliquant l'équation :

$$T_e = \left( \frac{L}{4\pi\sigma R_p^2} \right)^{1/4}$$

avec la constante de Stefan  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ , on trouve la luminosité  $L_{\odot} \approx 3.83 \times 10^{26} \text{ W}$ .

##### Exercice 3 : Rayon des étoiles

Déterminer le rayon (en unité solaire), la longueur d'onde de Wien et la couleur « visible » des étoiles suivantes :

- Naine blanche :  $L = 10^{-2} L_{\odot}$ ,  $T_e = 20000$  K
- Géante rouge :  $L = 10^2 L_{\odot}$ ,  $T_e = 4200$  K
- Supergéante :  $L = 10^5 L_{\odot}$ ,  $T_e = 6000$  K

Rappel de la loi de Wien :  $\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m.K}$ .

**Corrigé :**

Type stellaire	$L [L_{\odot}]$	$T_e [\text{K}]$	$R [R_{\odot}]$	$\lambda_{\max}$	Couleur
Naine blanche	$10^{-2}$	20000			
Géante rouge	$10^2$	4200			
Supergéante	$10^5$	6000			

#### 1.1.3 Système de magnitudes

##### Exercice 4 : Indices de couleur

Les deux composantes de l'étoile  $\alpha$  du Centaure située à 1,32 pc de distance ont des magnitudes visuelles (magnitude apparente dans la bande V) de 0,30 et 1,70. On demande :

1. Le rapport des flux des deux étoiles dans la bande  $V$ .
2. La magnitude visuelle globale du système.
3. La correction qu'il faut apporter aux magnitudes apparentes de ce système pour obtenir les magnitudes absolues.

**Corrigé :** On rappelle que la magnitude apparente  $m$  est liée au flux  $F$  par  $m = -2,5 \log_{10}(F/F_0)$ .

1. Le rapport des flux des deux composantes de  $\alpha$  du Centaure dépend de la différence de magnitudes et vaut :

$$F_2/F_1 = 10^{(m_1-m_2)/2,5} = 0,28$$

2. Pour obtenir la magnitude apparente visuelle globale du système  $m_{tot}$ , il faut calculer le flux total (les puissances émises par les deux composantes s'ajoutent) :

$$m_{tot} = -2,5 \log(F_1/F_0 + F_2/F_0) = -2,5 \log(10^{-m_1/2,5} + 10^{-m_2/2,5}) = 0,04$$

3. La correction qu'il faut apporter aux magnitudes apparentes  $m$  de ce système pour obtenir les magnitudes absolues  $M$  vaut :

$$\mu = m - M = 5 \log(D/10\text{pc}) = -4,4$$

## 1.2 Évolution stellaire

### 1.2.1 Formation des étoiles

**Exercice 5 :**

Quelle est la source de l'énergie rayonnée par :

1. une proto-étoile ?
2. une étoile ?
3. une naine brune ?

**Corrigé :** L'énergie rayonnée provient de :

1. l'énergie gravitationnelle pour une proto-étoile ;
2. l'énergie produite par les réactions nucléaires pour une étoile (fusion de H sur la séquence principale, fusion de He ou de C et O ensuite, selon la masse de l'étoile) ;
3. l'énergie gravitationnelle pour une naine brune, qui continue à se contracter, ne passant jamais de la proto-étoile à l'étoile.

### 1.2.2 Séquence principale

**Exercice 6 :**

Quel est le phénomène marquant :

1. le début de la séquence principale ?
2. sa fin ?

**Corrigé :** La séquence principale débute quand les réactions de fusion de l'hydrogène s'allument dans le coeur de la proto-étoile, et se termine lorsque la fusion de l'hydrogène cesse au centre (elle peut continuer dans une couche autour d'un noyau d'hélium ou cesser dans toute l'étoile selon sa masse).

### 1.2.3 Évolution post-SP

**Exercice 7 : Étoile de  $M > 5M_\odot$**

Que se passe-t-il si un combustible s'épuise au centre d'une étoile ?

**Corrigé :** Quand un combustible s'épuise au centre d'une étoile, les réactions de fusion de cet élément cessent dans le coeur, mais peuvent continuer autour, dans une couche où le combustible est toujours présent. Au centre, il n'y a plus de production d'énergie pour soutenir le coeur, la gravité l'emporte et le coeur se contracte. Cette contraction provoque une augmentation de température qui, si elle est suffisante (cela dépend de la masse de l'étoile), permet d'allumer de nouvelles réactions nucléaires ayant pour combustible le produit des réactions précédentes.

## 1.3 Classification spectrale

### 1.3.1 Mesures des distances

#### Parallaxe trigonométrique

##### Exercice 8 :

Relier l'incertitude sur la distance  $\Delta d$  à celle sur la parallaxe  $\Delta p$ .

**Corrigé :** Il existe deux méthodes pour trouver le résultat demandé :

- En différenciant l'équation  $d = a/p$ , on obtient  $dd = -(a/p^2)dp$ , d'où l'incertitude en prenant la valeur absolue :

$$\Delta d = \frac{a}{p^2} \Delta p = \frac{d}{p} \Delta p$$

On a finalement

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta p}{p}$$

- On peut également prendre le logarithme de l'équation  $d = a/p$ , ce qui donne  $\ln d = \ln a - \ln p$ , puis on différencie :  $d \ln d = -d \ln p$ , soit  $dd/d = -dp/p$ . En prenant la valeur absolue, on retrouve le résultat précédent.

##### Exercice 9 : Astrométrie spatiale

Considérons les deux missions d'astrométrie spatiale : Hipparcos (1989), avec une incertitude absolue sur la mesure de la parallaxe typique de  $\Delta p = 2$  mas, et GAIA (2013), avec  $\Delta p = 7 \mu\text{as}$ . Quelles sont les précisions obtenues à une distance de 100 pc ? de 1000 pc ? À quelle distance aura-t-on une erreur de 100% ?

**Corrigé :** Les étoiles situées à  $d = 100$  pc ont une parallaxe  $p = 1/100 = 0,01'' = 10$  mas. La précision obtenue sera de

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-2}} = 2 \times 10^{-1} = 20\% \quad \text{avec Hipparcos}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{7 \times 10^{-6}}{10^{-2}} = 7 \times 10^{-4} = 0,07\% \quad \text{avec GAIA}$$

Pour des étoiles à  $d = 1000$  pc,  $p = 1$  mas, et les précisions deviennent 10 fois moins bonnes : 200% avec Hipparcos et 0,7% avec GAIA.

On aura une erreur de 100% quand  $\Delta d = d$ , soit  $\delta p = p$ . La distance correspondante s'obtient donc par

$$d = \frac{1}{p} = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} = 500 \text{ pc} \quad \text{Hipparcos}$$

$$d = \frac{1}{p} = \frac{1}{7 \times 10^{-6}} = 143 \text{ kpc} \quad \text{GAIA}$$

##### Exercice 10 :

Le tableau suivant donne la magnitude apparente  $m_V$  et la parallaxe  $p$  de trois étoiles. Calculer leur distance  $d$  avec son incertitude, l'erreur relative sur la distance  $\Delta d/d$  et leur magnitude absolue  $M_V$ .

	$\alpha$ CMa (Sirius)	$\alpha$ Tau (Aldebaran)	$\alpha$ Ori (Bételgeuse)
$m_V$	-1.47	0.85	0.58
$p$ (mas)	$379.2 \pm 1.6$	$50.1 \pm 1.0$	$7.6 \pm 1.6$
$d$ (pc)			
$\Delta d/d$			
$M_V$			

**Corrigé :**

	$\alpha$ CMa (Sirius)	$\alpha$ Tau (Aldebaran)	$\alpha$ Ori (Bételgeuse)
$m_V$	-1.47	0.85	0.58
$p$ (mas)	$379.2 \pm 1.6$	$50.1 \pm 1.0$	$7.6 \pm 1.6$
$d$ (pc)	<b><math>2.64 \pm 0.01</math></b>	<b><math>20.0 \pm 0.4</math></b>	<b><math>130 \pm 30</math></b>
$\Delta d/d$	<b>0.4%</b>	<b>2%</b>	<b>23%</b>
$M_V$	<b>1.42</b>	<b>-0.65</b>	<b>-4.99</b>



Étant donné la forme de la relation donnant la distance  $d$  à partir de la parallaxe  $p$ , leurs incertitudes relatives sont égales, ce qui permet d'avoir immédiatement  $\Delta d/d$ . Ces résultats illustrent bien la diminution de la précision lorsque la distance augmente.

La magnitude absolue s'obtient par la relation  $M_V = m_V - 5 \log d + 5$ .

### Exercice 11 : Méthode du point convergent

On veut déterminer la distance de l'amas des Pléiades par la méthode du point convergent.

- L'étude des trajectoires des étoiles de l'amas sur plusieurs années a permis de situer le point convergent à  $\theta = 67,9 \pm 0,6^\circ$  de la direction de l'amas.
- L'observation du spectre de l'étoile Alcyone, faisant partie de cet amas, a permis de mesurer sa vitesse radiale  $v_r = 10,1 \pm 0,3 \text{ km.s}^{-1}$ .
- Le mouvement propre apparent de cette même étoile vaut  $\mu = 47,3 \pm 0,8 \text{ mas.an}^{-1}$ .

Déterminer la distance de l'amas. Attention aux unités !

**Corrigé :** Dans la formule donnant la distance de l'amas, il faut bien faire attention à exprimer l'angle  $\mu$  en radians et à utiliser les mêmes unités de distance et de temps pour les autres grandeurs.

- $\mu = 47,3 \pm 0,8 \text{ mas.an}^{-1} = (2,29 \pm 0,04) \times 10^{-7} \text{ rad.an}^{-1}$
- $v_r = 10,1 \pm 0,3 \text{ km.s}^{-1} = (1,02 \pm 0,03) \times 10^{-5} \text{ pc.an}^{-1}$
- $\theta = 67,9 \pm 0,6^\circ = 1,19 \pm 0,01 \text{ rad}$
- On a donc  $\tan\theta = 2,50 \pm 0,07$ .
- Finalement :  $d = 111 \pm 8 \text{ pc}$

## 1.3.2 Classification stellaire

### Exercice 12 : Types spectraux

Donner approximativement le type spectral des étoiles dont le flux est maximal aux longueurs d'onde suivantes : 300 nm, 500 nm, et  $1,2 \mu\text{m}$ . Peut-on déterminer la classe de luminosité ?

Rappel de la loi de Wien :  $\lambda_{\text{max}} T = 2898 \mu\text{m.K}$ .

**Corrigé :** La loi de Wien permet de déterminer la température effective de chaque étoile, et ainsi d'en déduire une valeur approximative du type spectral. Ici seulement la première lettre est accessible, la détermination du chiffre suivant nécessiterait un tableau plus précis donnant les correspondances entre les sous-types et la température effective.

$\lambda_{\text{max}}$	$T_{\text{eff}}(K)$	Type spectral
300 nm	9660	A
500 nm	5796	G
$1,2 \mu\text{m}$	2415	M

On ne peut pas déterminer la classe de luminosité grâce à la longueur d'onde du maximum du flux. Pour ceci, il faudrait connaître soit la luminosité de l'étoile, soit sa gravité de surface, soit son rayon.

### Exercice 13 : Diagramme HR

Classer par ordre de température effective croissante, puis de rayon croissant, et enfin de luminosité croissante les étoiles de types spectraux suivants : M5III, O2V, K7I, A0VII.

**Corrigé :** La séquence OBAFGKM décrit les types spectraux dans le sens des  $T_{\text{eff}}$  décroissantes, on aura donc dans le sens des  $T_{\text{eff}}$  croissantes : M5III, K7I, A0VII, et O2V.

La classe de luminosité définit des groupes d'étoiles de rayon différent, on aura donc dans l'ordre croissant : A0VII, O2V, M5III, et K7I.

Enfin, l'examen du diagramme HR montre qu'une étoile chaude de la séquence principale peut être plus lumineuse qu'une sous-géante froide, et on aura dans le sens des luminosités croissantes : A0VII, M5III, O2V, et K7I.

Ceci montre que le terme « classe de luminosité » peut être source d'erreur.

## 1.3.3 Mesure des rayons

### Exercice 14 : Interférométrie

Le tableau suivant donne le diamètre apparent  $\theta_*$  des étoiles de l'exercice 10, mesuré par interférométrie. Calculer leur rayon  $R$  (on rappelle les distances déterminées dans un exercice précédent) et, à l'aide de ce résultat, attribuer à chaque étoile sa classe de luminosité parmi les suivantes : I, III, V.

	$\alpha$ CMa Sirius	$\alpha$ Tau Aldebaran	$\alpha$ Ori Bételgeuse
$\theta_*$ (mas)	5.89	24	67
$d$ (pc)	2.64	20	130
$R(R_\odot)$			
Classe de luminosité			

**Corrigé :** Pour Sirius :

- Son diamètre apparent vaut  $\theta_* = 5,89 \text{ mas} = 2,86 \times 10^{-8} \text{ rad}$ .
- Son rayon vaut donc  $R = \theta_* d / 2 = 3,8 \times 10^{-8} \text{ pc} = 1,2 \times 10^9 \text{ m} = 1,7 R_\odot$ .

Le tableau suivant donne les résultats pour les 3 étoiles :

	$\alpha$ CMa Sirius	$\alpha$ Tau Aldebaran	$\alpha$ Ori Bételgeuse
$\theta_*$ (mas)	5.89	24	67
$d$ (pc)	2.64	20	130
$R(R_\odot)$	1.7	52	936
Classe de luminosité	V	III	I
Type spectral	A1V	K5III	M2I

Dans cet exemple, il est possible d'attribuer à chaque étoile sa classe de luminosité en utilisant le lien qui existe avec le rayon stellaire. Le type spectral complet est donné pour information.

### 1.3.4 Mesure de masse

#### Étoiles doubles

##### Exercice 15 :

- On observe une étoile double visuelle dont le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne de visée.
- La parallaxe de ce système est de 100 mas.
  - La plus grande séparation angulaire entre les deux composantes est de  $5''$ , et la plus petite de  $1''$ .
  - La période de révolution est de 30 ans.
  - L'étoile primaire se trouve au foyer de l'orbite observée, car il n'y a pas d'effet de projection.
  - Le compagnon est toujours observé à une distance du centre de gravité 5 fois plus grande que celle de l'étoile primaire.
- Déterminer la masse de chaque composante.

**Corrigé :** Les paramètres observés permettent de remonter aux données suivantes pour le système :

- La distance est  $d = 10 \text{ pc}$ .
- La dimension angulaire du grand axe de l'orbite relative est de  $5'' + 1'' = 6''$ . Le demi-grand axe apparent est donc  $\theta = 3''$ , soit  $\theta = 1,45 \times 10^{-5} \text{ rad}$ .
- Le demi-grand axe de l'orbite relative vaut donc  $a = \theta d = 1,45 \times 10^{-4} \text{ pc} = 4,49 \times 10^{12} \text{ m} = 30 \text{ UA}$ .
- La 3<sup>me</sup> loi de Kepler donne la somme des masses :  $M_1 + M_2 = 5,97 \times 10^{31} \text{ kg} = 30 M_\odot$ .
- Les distances des étoiles  $E_1$  et  $E_2$  au centre de gravité  $G$  vérifient  $M_1 \times GE_1 = M_2 \times GE_2$ . Le rapport des masses vaut donc  $M_1/M_2 = GE_2/GE_1 = 5$ .
- Finalement :  $M_1 = 25 M_\odot$  et  $M_2 = 5 M_\odot$ .

##### Exercice 16 :

Le tableau suivant rappelle les caractéristiques du système binaire à éclipse d'Algol ( $\beta$  Per) :

$p$ (mas)	$35.1 \pm 0.9$	
$d$ (pc)	$28.6 \pm 0.7$	
$T$ (jours)	2.8674	
	A	B
Type spectral	B8V	K2IV
$R$ ( $R_\odot$ )	2.74	3.60

On a mesuré de plus les paramètres orbitaux suivants (on supposera l'orbite circulaire, ainsi le demi-grand axe de l'ellipse projetée est égal au rayon de l'orbite) :

$\theta$ (mas)	2.283
$\theta_2$ (mas)	1.872



Quelle est la séparation des deux étoiles en km ? en UA ? en  $R_\odot$  ? Comparez-la à leurs rayons.

Quelle est la masse de chacune des étoiles ?

**Corrigé :**

- Le demi-grand axe apparent de l'orbite relative est  $\theta = 2.283 \text{ mas} = 1,11 \times 10^{-8} \text{ rad}$ .
- Le demi-grand axe de l'orbite relative vaut donc  $a = \theta d = 3,17 \times 10^{-7} \text{ pc} = 9,77 \times 10^9 \text{ m} = 0,065 \text{ UA} = 14 R_\odot$ .
- La 3ème loi de Kepler donne la somme des masses :  $M_1 + M_2 = 4\pi^2 a^3 / GT^2 = 8,98 \times 10^{30} \text{ kg} = 4,52 M_\odot$ .
- Le rapport des demi-grands axes apparents de l'orbite relative  $\theta$  et de l'orbite absolue de l'étoile secondaire  $\theta_2$  donne le rapport des masses :  $\theta_2/\theta = a_2/a = M_1/(M_1 + M_2) = 0,82$
- On obtient donc les masses  $M_1 = 3,71$  et  $M_2 = 0,81$ .

Le tableau suivant récapitule les données physiques du système :

$d$ (pc)	$28.6 \pm 0.7$	
$T$ (jours)	2.8674	
$a$ ( $R_\odot$ )	14	
	A	B
Type spectral	B8V	K2IV
$R$ ( $R_\odot$ )	2.74	3.60
$M$ ( $M_\odot$ )	3.71	0.81

On remarque que l'étoile la plus grosse (B) est la moins massive et la moins chaude, on peut en déduire que le minimum principal a lieu lorsque cette dernière occulte l'étoile A, plus chaude et plus lumineuse.

On constate également que la séparation des étoiles vaut un peu moins de 4 fois le rayon de la plus grosse, il s'agit donc d'une binaire serrée.

## 1.4 Les systèmes planétaires

### 1.4.1 Les lois de Kepler

#### Exercice 17 : Invariant de Runge-Lenz

On considère une particule  $P$  de masse  $m$ , animée d'un mouvement non relativiste par rapport à un repère d'origine  $O$ . Ce mouvement est dû à un champ de forces  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} U(r)$  dérivant d'un potentiel central  $U(r)$ , où  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ .

À l'instant  $t$  on note respectivement  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{a}(t)$  et  $\mathbf{p}(t)$  la vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement de la particule  $P$ .

1. Montrer que la force  $\mathbf{F}$  est radiale.
2. Montrer que le vecteur moment cinétique  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$  est conservé au cours du mouvement. En déduire que la trajectoire de  $P$  est située dans un plan  $\Pi$  que l'on caractérisera.
3. Montrer que l'énergie mécanique  $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$  est une constante du mouvement.
4. Calculer  $L$  à l'aide des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan  $\Pi$  et en déduire la loi des aires.

Dans toute la suite du problème, le potentiel est de la forme :

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad k > 0$$

On définit le *vecteur de Runge-Lenz* :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{k} \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

5. Montrer que le vecteur  $\mathbf{A}$  est constant dans le temps, et qu'il appartient au plan  $\Pi$ .
6. Montrer que :

$$A^2 = 1 + 2 \frac{L^2 E}{mk^2}$$

(On pourra utiliser les coordonnées polaires : en particulier  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$ ). En déduire, lorsque  $L$  est fixé, une borne inférieure pour l'énergie  $E$ . Montrer que pour un mouvement circulaire,  $E$  est égal à la borne inférieure.

7. Calculer le produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$  en fonction de  $L$ ,  $m$ ,  $k$  et  $r$ . Établir alors l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

*Indication : on définira l'angle  $\theta$  à partir de l'axe polaire dirigé selon le vecteur  $\mathbf{A}$ .*

Vérifier que :  $e = \|\mathbf{A}\|$  et exprimer  $p$  en fonction de  $L$ ,  $m$  et  $k$ .

8. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de  $E$ .

Dans la suite du problème on se restreint au cas des *états liés* :  $E < 0$ . La trajectoire est alors une ellipse.

9. Déterminer son demi-grand axe  $a$  et son demi-petit axe  $b$  en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $L$  et  $E$ .

10. Quelle est la valeur maximale  $L_0$  de  $L$ , l'énergie  $E$  étant fixée ?

11. Quelle est la trajectoire pour  $L = 0$ , et pour  $L = L_0$  ?

12. Calculer la période du mouvement en fonction de  $m$ ,  $k$  et  $a$ .

### Exercice 18 : Orbite de Pluton

L'orbite de Pluton est très excentrique ( $e = 0,248$ ). Son demi grand axe vaut 39,43 unités astronomiques (L'unité astronomique est définie comme le demi grand axe de l'orbite de la Terre). Montrer que Pluton peut être plus proche du Soleil que Neptune dont le demi grand axe de l'orbite vaut 30,06 UA et l'excentricité 0,009.

**Corrigé :** On calcule simplement les distances planète-Soleil pour les deux planètes à leur périhélie et à leur aphélie. Si Neptune est repérée par le vecteur  $SN$  et Pluton par le vecteur  $SP$ , on a :

– Au périhélie :

$$SN = a_n(1 - e_n) = 30.06 \times (1 - 0.009) = 29.79 \text{ UA}$$

$$SP = a_p(1 - e_p) = 39.43 \times (1 - 0.248) = 29.65 \text{ UA}$$

– À l'aphélie :

$$SN = a_n(1 + e_n) = 30.06 \times (1 + 0.009) = 30.33 \text{ UA}$$

$$SP = a_p(1 + e_p) = 39.43 \times (1 + 0.248) = 49.21 \text{ UA}$$

On voit que, du fait de la très grande excentricité de son orbite, Pluton, à son périhélie, est plus proche que Neptune du Soleil.

### Exercice 19 : Dérivation des lois de Kepler

Montrer que la vitesse angulaire d'un objet décrivant une orbite elliptique autour du Soleil augmente lorsqu'il s'en rapproche. Montrer que le rapport des vitesses au périhélie (point le plus proche du Soleil) et à l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil) ne dépend que de l'excentricité de l'orbite. Calculer ce rapport pour la Terre dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,0167, puis pour la comète de Halley dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,97.

**Corrigé :**

1. On a vu que  $r^2\dot{\theta}$  est une constante. On a donc  $\dot{\theta} = C/r^2$  et la vitesse angulaire augmente lorsque  $r$  diminue.

2. L'expression de la vitesse est :  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{i} + r\dot{\theta}\mathbf{j}$

Le périhélie et l'aphélie correspondent à des extremum sur la trajectoire, c'est à dire que  $dr/d\theta = 0$  et donc, puisque  $\dot{r} = \dot{\theta} dr/d\theta$ ,  $\dot{r} = 0$ . La vitesse s'écrit donc bien  $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{j}$

3. Puisque  $r^2\dot{\theta} = C$  et que  $v = r\dot{\theta}$ , on a  $v = C/r$ . En reprenant les résultats vus précédemment sur les ellipses, on trouve  $r = a(1 - e)$  au périhélie, et  $r = a(1 + e)$  à l'aphélie. Le rapport des vitesses  $v_p$  au périhélie et  $v_a$  à l'aphélie est donc :

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

Soit pour la Terre :

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + 0.0167}{1 - 0.0167} = 1.034$$

Et pour la comète de Halley :

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + 0.97}{1 - 0.97} = 65.67$$

### Exercice 20 :

Sachant que la Lune décrit son orbite autour de la Terre en 27,32 jours et que le demi grand-axe de son orbite vaut 384400 km, calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. On supposera que la masse de la Lune est négligeable par rapport à celle de la Terre (la Terre est environ 80 fois plus massive que la Lune).

**Corrigé :** La troisième loi de Kepler, telle que nous venons de la démontrer s'applique bien sûr aussi pour le système Terre-Lune et on a :

$$\frac{a_L^3}{T_L^2} = \frac{G(M_T + M_L)}{4\pi^2}$$

Où  $a_L$  est le demi grand axe de l'orbite de la Lune,  $T_L$  sa période orbitale et  $M_L$  sa masse. Puisque la masse de la Lune peut être négligée par rapport à celle de la Terre, cette relation s'écrit :

$$\frac{a_L^3}{T_L^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

De même, pour le satellite, l'hypothèse  $M_S \ll M_T$  est encore plus justifiée, et on a :

$$\frac{a_S^3}{T_S^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{a_L^3}{T_L^2}$$

La période d'un satellite géostationnaire est, par définition, de 23h56 (car un satellite géostationnaire reste toujours au dessus du même point de la Terre dont la période de rotation est de 23h56). On a donc

$$T_S = 23 \times 60 + 56 = 1435 \text{ min}$$
$$T_L = 27.3 \times 24 \times 60 = 39312 \text{ min}$$

et

$$\frac{a_S^3}{1435^2} = \frac{384400^3}{39312^2}$$

d'où l'on tire finalement  $a_S = 42300 \text{ km}$ . Cette valeur correspond à la distance entre le centre de la Terre et le satellite. L'altitude du satellite est donc :  $a_S = 42300 - 6378 = 35922 \text{ km}$

# Chapitre 2

## Vie des galaxies

### 2.1 Milieu interstellaire

#### 2.1.1 Mise en évidence expérimentale

##### Exercice 21 :

Dans une observation de comptage d'étoiles, toutes de même type, on constate que :

- pour  $m \leq 7$ ,  $\log N(m) = 0.6m + 3$
- pour  $m \geq 9$ ,  $\log N(m) = 0.6m + 2.4$

1. Déterminer l'extinction en magnitude  $A$  due au nuage traversé quand on passe de  $m = 7$  à  $m = 9$ .
2. On sait que la magnitude absolue des étoiles de ce type est  $M = 5$ . Déterminer :
  - La distance  $r_1$  du front proche du nuage.
  - L'épaisseur  $r_2 - r_1$  du nuage.

##### Corrigé : **Eric : correction à reformuler**

1. L'extinction est nulle jusqu'à la distance  $r_1$  du front du nuage, donc, avec l'équation :

$$\log N(m) = 0.6(m - A) + Cte$$

pour  $m = 7$  :

$$\log N(m) = 0.6(7 - 0) + 3 = 7.2$$

À la distance  $r_2$  du bord éloigné du nuage, pour laquelle  $m = 9$ , et l'extinction vaut  $A$  :

$$\text{pour } m = 9, \log N(m) = 0.6(9 - A) + 2.4 = 7.8 - 0.6A$$

d'où  $0.6A = 0.6$  et  $A = 1$  mag.

2. En écrivant l'équation du module de distance avec  $M = 5$  :
  - pour  $m = 7 = 5 \log r_1 - 5 + M$  d'où  $r_1 = 25.1$  pc = distance du front proche du nuage
  - pour  $m = 9 = 5 \log r_2 - 5 + M + 1$  d'où  $r_2 = 39.8$  pcÉpaisseur du nuage =  $r_2 - r_1 = 39.8 - 25.1 = 14.7$  pc

#### 2.1.2 Extinction du MIS

##### Exercice 22 : Interprétation physique

Une étoile est située à 2000 pc de l'observateur sur une ligne de visée représentative des conditions moyennes du MIS, pour lesquelles l'extinction moyenne est de  $A_V = 0.3$  mag/kpc. En admettant que cette extinction n'est due qu'à des grains dont les caractéristiques suivent :

- rayon  $a = 0.1\mu$
- $Q_{ext} = 1$
- masse volumique :  $1 \text{ g/cm}^3$
- répartition des grains uniforme sur la ligne de visée.

calculer :

1. La densité de colonne des grains le long de la ligne de visée.

2. Le nombre de grain par unité de volume sur cette ligne de visée.

3. La masse volumique des grains dans le MIS.

En admettant que la densité moyenne d'atomes d'Hydrogène est de l'ordre de 8 atomes par  $\text{cm}^3$ , et en négligeant la présence des atomes d'autres éléments, calculer :

1. la masse volumique du gaz dans le MIS.

2. le rapport (masse volumique des grains)/(masse volumique du gaz)

3. Qu'en concluez vous sur le rôle des grains dans la matière du MIS ?

**Corrigé :**

$$\text{Distance de l'étoile : } L = 2000[\text{pc}] \cdot (310^{18}[\text{cm/pc}]) = 610^{21}[\text{cm}]$$

$$\text{Section d'un grain : } s_g = \pi a^2 = \pi (10^{-5})^2 = \pi 10^{-10} [\text{cm}^2]$$

$$\text{Extinction en V sur la ligne de visée : } A_V = 0.3 \text{ mag/kpc} \times 2 \text{ kpc} = 0.6 \text{ mag}$$

$$\text{d'où la profondeur optique : } \tau = \frac{0.6}{1.086} = 0.55 = n_g s_g L$$

La densité de colonne est le nombre de grains dans un cylindre de longueur  $L$  et de section unité. Si la densité de grains  $n_g$  est constante, la densité de colonne est donc égale à  $n_g L$

$$n_g L = \frac{\tau}{s_g} = \frac{0.55}{\pi 10^{-10}} = 1.7510^9 [\text{grain/cm}^2]$$

On déduit de l'expression précédente la densité de grains  $n_g$  :

$$n_g = \frac{1.7510^9}{610^{21}} = 2.910^{-13} [\text{grain/cm}^3]$$

Masse volumique des grains dans le MIS :

$$1[\text{g/cm}^3] \times \frac{4a^3}{3} [\text{cm}^3/\text{grain}] 310^{-13} [\text{grain/cm}^3] = 3.8710^{-28} [\text{g/cm}^3]$$

Masse volumique du gaz dans le MIS :

$$8 [\text{atomes/cm}^3] 1.6735210^{-24} [\text{g/atome}] = 1.3410^{-23} [\text{g/cm}^3]$$

$$\frac{\text{Masse volumique des grains}}{\text{Masse volumique du gaz}} = \frac{1.3410^{-23} [\text{g/cm}^3]}{3.8710^{-28} [\text{g/cm}^3]} = 3.5 \cdot 10^4$$

Conclusion : les grains ne représentent qu'une fraction très faible de la masse de matière dans le MIS.

### Extinction sélective et exemple, exemple de rougissement

#### Exercice 23 :

En admettant que l'on observe un objet à la température  $T$ , dont le spectre est donné par la loi de Planck :

$$C \lambda^{-5} \left[ \exp \left( \frac{hc}{\lambda kT} \right) - 1 \right]^{-1}$$

En présence d'une extinction  $A(\lambda) = a/\lambda$ , montrez que :

1. pour  $\lambda \ll hc/kT$ , dans la partie bleue du spectre, le spectre observé est celui d'un corps noir à une température  $T'$ , que l'on déterminera.

2. pour  $\lambda \gg hc/kT$ , dans la partie rouge du spectre, le spectre observé est identique à celui de la source.

**Corrigé :** Si  $W$ , donné par la formule de Planck, représente le flux de l'étoile en l'absence d'extinction.

$$W = C \lambda^{-5} \left[ \exp \left( \frac{hc}{\lambda kT} \right) - 1 \right]^{-1}$$

Si  $W'$  représente le flux de l'étoile en présence d'une extinction en magnitude de la forme  $A(\lambda) = a/\lambda$ , on a :

$$A(\lambda) = \frac{a}{\lambda} = 2.5 \log \frac{W}{W'}$$

en posant :  $a' = \frac{a}{(2.5 \times 0.43429)}$  (Rappel :  $0.43429 = \log_{10}(e)$ )

$$W' = W \exp \left( \frac{-a'}{\lambda} \right)$$

1. Pour la partie du spectre aux courtes longueurs d'onde, on a  $hc/\lambda kT \gg 1$  d'où :

$$W = C\lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)$$

$$W' = C\lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \exp\left(-\frac{a'}{\lambda}\right)$$

$$W' = C\lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k} \left(\frac{1}{T} + \frac{ka'}{hc}\right)\right)$$

En posant

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} + \frac{ka'}{hc}$$

on retrouve pour  $W'$  la forme de la formule de Plank, mais cette fois pour un corps à une température  $T'$  qui sera inférieure à  $T$ .

2. Pour la partie du spectre aux grandes longueurs d'onde, le terme  $\exp \frac{a'}{\lambda}$  tend progressivement vers 1, donc  $W'$  devient égal à  $W$ . Les spectres rouges et non rouges sont identiques.

#### Exercice 24 :

Une étoile  $G5V$  a une magnitude absolue  $M_V = 5$ , et un indice de couleur intrinsèque  $(B - V)_0 = 0.7$ . On observe une étoile de ce type spectral, située à une distance de 5 kpc

1. Calculer les magnitudes apparentes  $m_{V_0}$  et  $m_{B_0}$  qu'aurait cette étoile s'il n'y avait aucune extinction.
2. L'étoile est située dans une région où l'extinction du MIS peut être caractérisée par :
  - une extinction  $A_V$  de 0.3 mag/kpc,
  - une loi d'extinction de la forme :  $A(\lambda) = A_V(\lambda_0/\lambda)$
 Calculer les extinctions  $A_V$  et  $A_B$  qu'elle subit du fait de cette loi d'extinction
3. Calculer l'excès de couleur  $E_{B-V}$  de cette étoile par rapport à une étoile très proche de même type spectral.
4. Calculer l'indice  $(B - V)$  observé en présence d'extinction.
5. À l'aide du diagramme HR, déterminer le type spectral apparent de l'étoile.
6. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction sélective sur la « couleur » d'une étoile.

On rappelle les longueurs d'onde  $\lambda(V) = 0.55 \mu$  et  $\lambda(B) = 0.44 \mu$

#### Corrigé :

1. Magnitudes apparentes sans extinction

$$m_{V_0} = 5 + 5 \log(5000) - 5 = 18.5$$

$$m_{B_0} = m_{V_0} + (B - V)_0 = 19.2$$

2. Calcul des extinctions

$$A_V = 5 (kpc) \times 0.3 = 1.5$$

$$A_B = 1.5 \times \frac{0.55}{0.44} = 1.88$$

3. Calcul de l'excès de couleur

$$E_{B-V} = A_B - A_V = 1.88 - 1.5 = 0.38$$

4. Calcul de l'indice de couleur.

$$(B - V) = (m_{B_0} + A_B) - (m_{V_0} + A_V) = (B - V)_0 + (A_B - A_V) = 0.7 + 0.38 = 1.08$$

5. Le type spectral apparent sera celui d'une étoile environ K5. Comme l'extinction ne change pas la profondeur des raies de l'étoile, sa classe de luminosité apparente restera celle d'une naine V. L'étoile apparaîtra donc comme une K5V.
6. L'étoile paraît plus rouge que s'il n'y avait pas d'extinction.

#### Exercice 25 : Excès de couleur

On a déterminé par spectroscopie le type spectral  $B2V$  pour une étoile lointaine. L'indice de couleur intrinsèque de ce type d'étoiles est  $(B - V)_0 = -0.25$ . Par photométrie on a déterminé un indice de couleur observé  $(B - V) = 2.25$ .

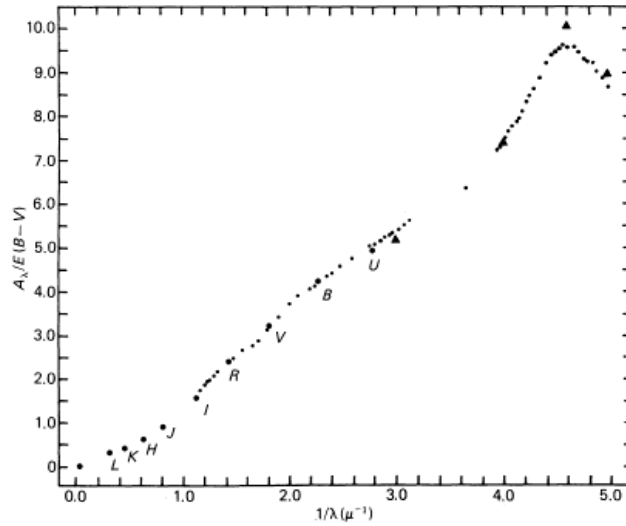


FIGURE 2.1 – Variation de  $A_\lambda/E_{B-V}$  en fonction de  $1/\lambda$

1. Déterminer l'extinction  $A_V$  de cette étoile à partir de la loi de variation de  $A_\lambda/E_{B-V}$  en fonction de  $1/\lambda$  (Fig. 2.1.2).
2. Quelle sera l'extinction de cette étoile dans la bande photométrique infrarouge  $K$  ?
3. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction dans l'infrarouge, comparé à celui dans le visible ?

**Corrigé :**

1. Calcul de l'extinction

$$E_{B-V} = (A_B - A_V) = (B - V) - (B - V)_0 = 2,25 - (-0,25) = 2,5$$

Le graphique donne  $A_V = 3E_{B-V}$ , d'où :

$$A_V = 3 \times 2,5 = 7,5$$

2. Le graphique donne  $A_K = 0,5 \times E_{B-V}$ , d'où :

$$A_K = 0,5 \times 2,5 = 1,25$$

3. L'extinction est beaucoup plus faible dans l'IR que dans le visible.

## 2.2 Galaxies

### 2.2.1 Classification morphologique des galaxies

#### Exercice 26 : Propriétés « physiques » de la classification

En vous servant du tableau sur les propriétés quantitatives de la séquence de Hubble, répondez aux questions suivantes :

1. Que peut-on dire sur la fraction de gaz dans les galaxies selon le type morphologique ?
2. Que peut-on dire de la densité surfacique de masse, en supposant que toute la masse des galaxies est concentrée dans un disque mince ?

**Corrigé :**

1. La fraction de masse de gaz est donnée par le rapport de la masse de gaz à la masse totale. Ce rapport augmente des S0 aux irrégulières.
2. La densité surfacique de masse est  $S = M/\pi R^2$ . Elle diminue des S0 aux irrégulières.

Dans le tableau ci-dessous, les valeurs de  $M_{\text{gaz}}/M_{\text{totale}}$  et de  $S$  sont obtenues statistiquement sur un échantillon de plusieurs milliers de galaxies. Ce ne sont donc pas les valeurs obtenues par le calcul direct sur les médianes, mais le comportement reste le même.



Propriétés	E,SO	S0a,Sa	Sab,Sb	Sbc,Sc	Scd,Sd	Sm,Im
$M_{\text{totale}} (10^{10} M_{\odot})$		22.6	32.4	19.0	7.9	1.6
$M_{\text{gaz}} (H \text{ neutre en } 10^9 M_{\odot})$	1.24	5.62	15.14	15.85	9.33	2.40
$M_{\text{gaz}}/M_{\text{totale}}$		0.03	0.05	0.08	0.11	0.15
Diamètre (kpc)	21.1	19.8	25.1	22.4	17.7	8.5
$S (M_{\odot}/pc^2)$		188.9	154.7	124.2	91.4	74.5

### Exercice 27 : de Vaucouleurs et autres classifications

Donnez la classification simplifiée (E, S0, SA, SAB, SB) des galaxies données dans la partie cours correspondante dans spirale.

Est-il toujours facile de classer les galaxies réelles ?

**Corrigé :**

1	NGC6070	SA	SA(s)cd
2	NGC 7424	SAB	SAB(rs)cd
3	MESSIER 31	SA	SA(s)b
4	MESSIER 33	SA	SA(s)cd
5	MESSIER 87	E0 ou E1	E+0-1 pec <sup>1</sup>
6	NGC 2683	SA	SA(rs)b
7	NGC 1300	SB	(R')SN(r'l)b
8	NGC 1097	SB	(R' 1 :)SB(r'l)b
9	NGC 4321	SAB	SAB(s)bc
10	MESSIER 83	SAB	SAB(s)c

Galaxies lointaines sans noms (11). La classification demandée est SB. Ces objets sont considérés comme des galaxies barrées mais n'ont pas été précisément classifiées à cause du manque de résolution des images (*HST Deep Field North*).

## 2.2.2 Constituants des galaxies

### Exercice 28 : Les étoiles

Si l'on considère une sphère de rayon 10 kpc peuplée par  $10^{11}$  étoiles dont le rayon est égal à celui du soleil, calculez la fraction de volume occupé par les étoiles.

**Corrigé :** La fraction est de  $10^{11} \times \left( \frac{0.7 \times 10^6}{10 \times 3.08 \times 10^{16}} \right)^3 \approx 10^{-24}$

### Exercice 29 : La matière noire

Donnez l'expression de l'accélération  $a$  centripète en fonction de  $R$  et  $V$ , la vitesse circulaire d'une étoile à une distance  $R$  du centre de la galaxie. Écrire la loi de Newton pour cette étoile : l'accélération  $a$  en fonction de la masse  $M$  incluse dans le rayon  $R$ . En déduire la loi de décroissance de  $V$  en fonction du rayon  $R$  de l'étoile, en supposant que la masse  $M$  reste constante (c'est-à-dire que toute la masse de la galaxie est comprise dans la sphère de rayon  $R$ ).

Dans les galaxies spirales, on observe au-delà d'un certain rayon  $R_0$  que la vitesse de rotation du gaz et des étoiles atteint une valeur limite  $V_0 > 0$ . À quelle distribution de densité cela correspond-il ? Commentez.

**Corrigé :** L'accélération centrifuge est donnée simplement par  $a = V^2/R$ . La loi de Newton nous dit alors que l'accélération de l'étoile est proportionnelle à la masse  $M$  avec  $a = GM/R^2$ , où  $G$  est la constante universelle de la gravitation. On en déduit alors facilement que  $V^2/R = GM/R^2$  donc  $V^2 \propto M/R$ .

Si  $M$  reste constant avec  $R$  qui croît, alors  $V^2$  doit décroître comme  $1/R$ .

## 2.2.3 Exemple de galaxie : la Voie Lactée

### Exercice 30 : Morphologie de notre galaxie

En examinant en détail l'image de notre galaxie prise par COBE/DIRBE (Fig. 2.2.3) on distingue que le bulbe de la Voie Lactée n'est pas symétrique. Donner une explication plausible de cette asymétrie, en se rappelant notre position très particulière par rapport au centre de notre galaxie, et en se rappelant des différentes composantes qui composent notre Galaxie.

**Corrigé :** Le bulbe de la galaxie vue en infrarouge est effectivement asymétrique : le coté gauche a une épaisseur légèrement plus grande que le coté droit. Ça n'est pas un effet de populations stellaires, ou d'extinction due à la poussière, mais bien

1. « Peculiar » à cause du jet provenant du noyau actif

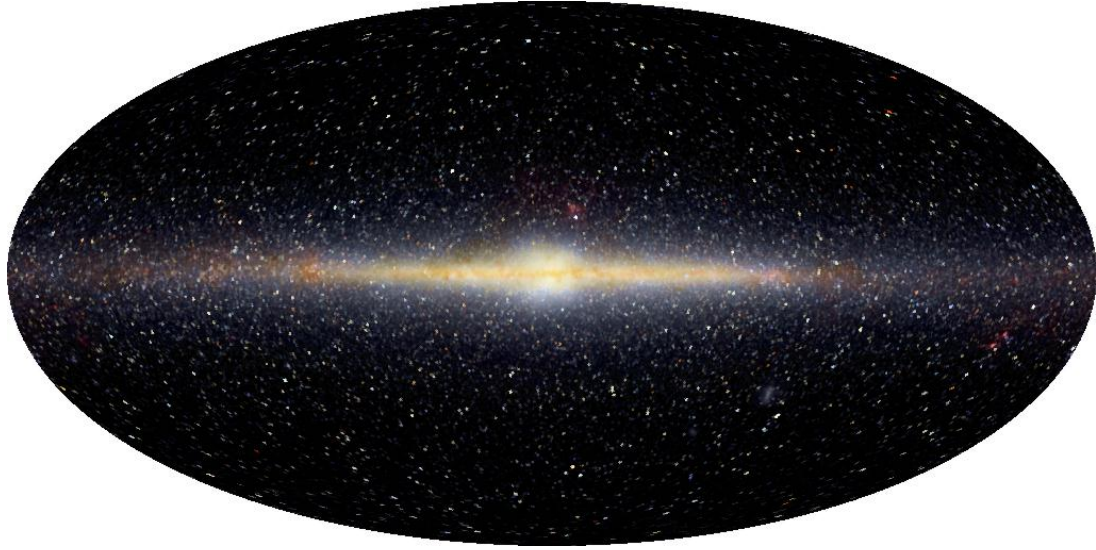


FIGURE 2.2 – Notre galaxie vue par COBE/DIRBE.

une épaisseur réellement plus grande d'un côté que de l'autre. Ce que l'on voit est en fait un effet de projection : c'est en fait la barre de la Galaxie que nous observons. Cette barre étant inclinée à 35 degrés environ par rapport à nous, le côté gauche étant proche de nous, le côté droit loin de nous (de l'autre côté du centre galactique). Une des extrémités de la barre est donc plus proche de nous, et par projection elle apparaît plus haute...

### Exercice 31 : Le centre galactique

L'image ci-dessous (Fig. 2.2.3) montre l'orbite de l'étoile ayant la plus grande vitesse autour du centre galactique. À partir des données (période en années de 15.2 ans, et demi grand-axe de 0.119 arcsecondes) de cette orbite, retrouver l'estimation de la masse incluse dans ce rayon au centre de notre Galaxie en utilisant la troisième loi de Kepler. On rappelle que nous sommes à environ 8.5 kpc du centre galactique et que  $G$ , la constante gravitationnelle, vaut  $6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ . La masse visible étant estimée à environ 106 masses solaires, en déduire une estimation de la masse noire centrale (le fameux trou noir) de notre Galaxie.

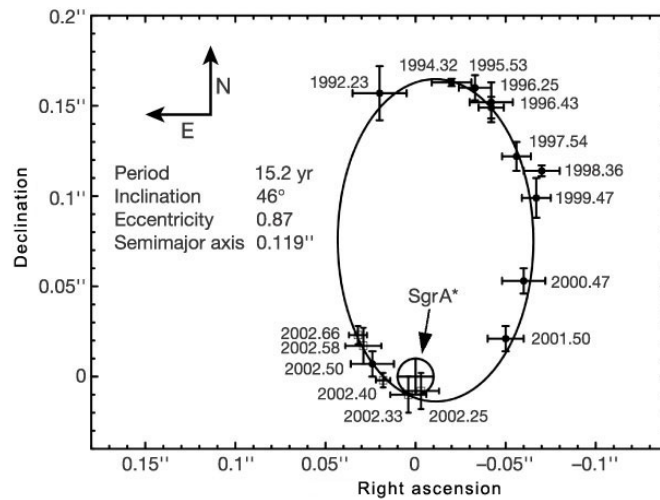


FIGURE 2.3 – Orbite de l'étoile S2 autour du centre galactique SgrA\* (Schödel et al. 2002).

**Corrigé :** On rappelle que  $G$ , la constante gravitationnelle, vaut  $6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$

Nous allons d'abord transformer la taille du demi grand-axe d'arcseconde en mètres, et ensuite, la période en secondes :  
 –  $1''$  équivaut à  $1/3600$  degrés, donc à 8.5 kpc, cela revient à environ 0,041 pc. Le demi grand axe est donné comme étant égal à  $0,119''$ , donc cela équivaut à :

$$a = 0.119 \times 0.041 = 0.0048 \text{ pc} = 0.0048 \times 3.08 \times 10^{16} = 1.5 \times 10^{14} \text{ m}$$

– la période  $T$  est donnée de 15,2 ans donc :  $T = 479347200 \text{ s}$

Enfin la troisième loi de Kepler dit que le rapport  $T^2/a^3$  est une constante  $k$  qui ne dépend que de la masse du système. Cette constante  $k$  est simplement donnée par :  $4\pi^2/(GM)$  donc on peut écrire que :

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 G}$$

En application numérique cela donne (en kg, vérifiez bien que l'équation est homogène dans ses unités) :

$$M = \frac{4 \times \pi^2 \times (1,5 \times 10^{14})^3}{(479347200)^2 \times 6,6742 \times 10^{-11}} = 8,7 \times 10^{36} \text{ kg}$$

et ceci exprimé en masses solaires :  $M \approx 4,4 \times 10^6 M_\odot$

## 2.2.4 Le groupe local

### Exercice 32 :

Compter le nombre de galaxies ayant un diamètre plus petit que 6 kpc, et celles ayant un diamètre plus grand. Quelles sont les galaxies qui dominent en nombre ? Et en luminosité totale ? (Fig. 2.2.4)

**Corrigé :** Il y a 26 petites galaxies – dites « naines » – sur les 30 galaxies dont on nous donne la taille, et seulement 2 galaxies avec un diamètre de plus de 30 kpc : M31 et la Voie Lactée). Ce sont donc les galaxies naines qui dominent en nombre, mais elles ne dominent pas en luminosité totale.

## 2.2.5 Distribution des galaxies dans l'univers

### Exercice 33 : Fonction de luminosité

1. Exprimer la loi de Schechter en magnitudes absolues.
2. Quelle est la signification physique de la loi de Schechter ?

**Corrigé :**

1. En magnitude

$$\Phi(M) = 0.4 \ln(10) \Phi^* 10^{0.4(\alpha+1)(M^*-M)} \exp\left(-10^{0.4(M^*-M)}\right)$$

2. Cette fonction empirique montre bien la prédominance des galaxies de faible luminosité intrinsèque.

## Effets d'environnement, collisions et fusions

### Exercice 34 : Calcul de la fréquence des collisions dans un amas

**Eric : énoncé et correction à reformuler**

On considère un amas de galaxies qui a les caractéristiques suivantes :

- il est supposé sphérique, de diamètre  $D_{\text{amas}}$  en pc,
- il contient  $N_{\text{galaxies}}$  identiques et réparties uniformément dans l'amas,
- les galaxies sont supposées animées d'une vitesse uniforme  $v_{\text{galaxies}}$  en km/s.

1. Donner l'expression de la densité numérique de galaxies dans l'amas en  $\text{pc}^{-3}$ .
2. On suppose maintenant que les galaxies ont un diamètre typique  $D_{\text{galaxies}}$  (en pc). En modélisant les galaxies comme des sphères dures (boules de billard) de diamètre  $D_{\text{galaxies}}$ , donner l'expression de la section efficace  $S_{\text{efficace}}$  (en  $\text{pc}^2$ ) lors d'une collision/interaction entre deux galaxies.
3. Donner l'expression du nombre de collisions/interactions que subit une galaxie de l'amas pendant la durée  $dt$  (en années). En déduire, pour une galaxie, le temps caractéristique de collision et le libre parcours moyen.
4. En déduire le temps entre deux collisions/interactions dans l'amas.
5. Calcul de la fréquence des collisions dans un amas : Considérons un amas de  $N = 850$  galaxies dont le diamètre est  $D = 7$  Mpc et dont la dispersion des vitesses est  $V = 650$  km/s. Explicitiez le calcul numérique du temps moyen entre deux collisions pour l'amas considéré.

**Corrigé :**

Nom	RA	Dec (J2000)	Type Hubble	Mag. Bleue	Distance $\times 10^6$ ly	Diamètre $\times 10^3$ ly	Taille arcmin
WLM	0 02.0	-15 28	lrr	11.3	2.0	7	12
IC 10	0 20.3	59 19	lrr	11.7	4.0	6	5
NGC 147	0 33.1	48 31	E5	10.4	2.2	10	16
Andromeda III	0 35.3	36 31	E5		2.2	3	5
NGC 185	0 38.9	48 20	E3	10.1	2.2	6	9
NGC 205 (M110)	0 40.3	41 41	E5	8.6	2.2	10	16
Andromeda IV	0 42.5	40 34					
NGC 221 (M32)	0 42.7	40 52	E2	9.0	2.2	5	8
NGC 224 (M31)	0 42.7	41 16	Sb	4.4	2.2	200	312
Andromeda I	0 45.7	38 00	E3	14.4	2.2	2	3
SMC	0 52.7	-72 54	lrr	2.8	0.3	15	172
Sculptor	0 59.9	-33 42	E3	9.1	0.2	1	17
Pisces	1 03.7	22 03	lrr	15.5	3.0	0.5	1
IC 1613	1 04.9	02 07	lrr	10.0	2.5	12	17
Andromeda II	1 16.3	33 25	E2		2.2	2	3
NGC 598 (M33)	1 33.9	30 39	Sc	6.3	2.5	45	62
Fornax	2 39.6	-34 31	E3	8.5	0.5	3	21
UGCA 86	3 59.9	67 08					
LMC	5 23.6	-69 47	lrr	0.6	0.2	20	343
Carina	6 41.7	-50 58	E4		0.3	0.5	6
Leo A	9 59.4	30 45	lrr	12.7	5.0	7	5
Antlia	10	-30	E				
Leo I	10 08.5	12 18	E3	11.8	0.6	1	6
Sextans A	10 11.1	-04 43	lrr				
Sextans I	10 12.8	-01 41	E		0.3	3	34
Leo II	11 13.5	22 10	E0	12.3	0.6	0.5	3
GR8	12 59.2	14 09	lrr	14.6	4.0	0.2	
Ursa Minor	15 08.8	67 07	E5		0.3	1	11
Draco	17 20.2	57 55	E3		0.3	0.5	6
Milky Way	17 45.7	-29 00	Sbc		0.03	130	
SagDEG	18 55.0	-30 30	E		0.08		
SagDIG	19 30.0	-17 41	lrr	15.6	4.0	5	4
NGC 6822	19 44.9	-14 46	lrr	9.3	1.7	8	16
DDO 210	20 47.0	-12 51	lrr	15.3	3.0	4	5
IC 5152	22 02.9	-51 17	lrr	11.7	2.0	5	9
Tucana	22 41.9	-64 25					
Pegasus	23 28.6	14 46	lrr	12.4	5.0	8	6

FIGURE 2.4 – Liste des galaxies du Groupe Local, avec leurs noms, leurs positions sur le ciel, le type de Hubble, la distance, le diamètre en milliers d'années-lumière et en arcminutes sur le ciel.

1. Le volume de l'amas est

$$V_{\text{amas}} = \frac{\pi}{6} D_{\text{amas}}^3$$

et la densité numérique de galaxies est donc

$$n_{\text{galaxies}} = \frac{N_{\text{galaxies}}}{V_{\text{amas}}} = \frac{6N_{\text{galaxies}}}{\pi D_{\text{amas}}^3}$$

(en nombre de galaxies par  $\text{pc}^3$  si le diamètre de l'amas est en pc)

2. Deux galaxies entreront en collision/interaction lorsqu'elle passent à une distance  $< D_{\text{galaxies}}$  l'une de l'autre. La section efficace de collision est donc  $S_{\text{efficace}} = \pi D_{\text{galaxies}}^2$  en  $\text{pc}^2$  si le diamètre des galaxies est exprimé en pc.
3. Le volume « balayé » par une galaxie pendant le temps  $dt$  est le suivant :

$$V = \frac{3.15 \cdot 10^7 (\text{s par année})}{3.09 \cdot 10^{13} (\text{km par pc})} \times v_{\text{galaxies}} \times S_{\text{efficace}} \times dt$$

Le nombre de collisions pendant ce temps  $dt$  est donc  $N_{\text{collision}} = n_{\text{galaxie}} V$ . Le temps caractéristique de collision/interaction  $t_{\text{collision}}$  correspond à  $dt$  tel que  $N_{\text{collisions}} = 1$ . Le libre parcours moyen est  $l = v_{\text{galaxies}} \times t_{\text{collision}}$ .

$$\tau_{\text{collision}} = \frac{3.09 \times 10^{13}}{6 \times 3.15 \times 10^7} \frac{D_{\text{amas}}^3}{D_{\text{galaxies}}^2 \times v_{\text{galaxies}} \times N_{\text{galaxies}}}$$

4. Le temps caractéristique de collision/interaction dans l'amas est  $t_{\text{collision}}^{\text{amas}} = \tau_{\text{collision}} / N_{\text{galaxies}}$  (on considère ici l'amas entier et non plus une galaxie unique).

## 2.2.6 Équilibre gravitationnel

### Exercice 35 : Théorème du Viriel scalaire

#### Eric : énoncé à reformuler

Le théorème du Viriel peut aussi s'écrire  $2K/U = -1$ . Imaginez que vous vouliez construire un système stellaire, en donnant à  $N$  étoiles leurs positions et leurs vitesses, et où vous auriez  $2K/U > -1$ .

1. Comment feriez-vous ? (donner un exemple)
2. Comment le système évoluerait-il ?

#### Corrigé :

1. Il suffit de donner une position quelconque aux étoiles mais en leur donnant à toute une vitesse nulle. On aurait alors  $K = 0$ , et ainsi on aurait bien la condition remplie.
2. Si cette condition est remplie, c'est que l'énergie cinétique est trop faible par rapport à l'énergie potentielle (en valeur absolue). Il manque aux étoiles de la vitesse pour que le système reste à l'équilibre, et il va donc se réarranger, avec un rayon plus petit.

### Exercice 36 : Application du théorème du Viriel

On va maintenant utiliser le théorème du Viriel pour remplir le tableau ci-dessous, donnant les rayons, masses et vitesse caractéristiques de différents système stellaires. Veuillez compléter ce tableau.

Système	$R$ (pc)	$V$ (km/s)	$M$ ( $M_{\odot}$ )
Amas globulaire	10	10	
Galaxie	50 000	200	
Amas de galaxies	1 000 000	1000	

#### Corrigé :

Système	$R$ (pc)	$V$ (km/s)	$M$ ( $M_{\odot}$ )
Amas globulaire	10	10	$4,6 \times 10^5$
Galaxie	50 000	200	$9,3 \times 10^{11}$
Amas de galaxies	1 000 000	1000	$4,6 \times 10^{14}$

### Exercice 37 : Temps cinématique

On va maintenant calculer le temps cinématique  $t_c$  pour différents systèmes stellaires. Veuillez compléter le tableau ci-dessous.

Système	$R$ (pc)	$M$ ( $M_{\odot}$ )	$t_c$ (ans)
Amas ouvert	1	500	
Amas globulaire	10	$10^5$	
Galaxie	50 000	$10^{12}$	

Que remarquez-vous sur ces temps cinématiques pour les différents systèmes ?

**Corrigé :**

Système	$R$ (pc)	$M$ ( $M_{\odot}$ )	$t_c$ (ans)
Amas ouvert	1	500	$9,4 \times 10^5$
Amas globulaire	10	$10^5$	$2,1 \times 10^6$
Galaxie	50 000	$10^{12}$	$2,4 \times 10^8$

Les temps cinématiques pour un amas ouvert et un amas globulaire ne sont pas vraiment différents malgré leurs tailles respectives très différentes. De même entre une galaxie et un amas globulaire : il ne faut qu'environ 100 fois plus de temps à une étoile avec une vitesse typique pour traverser une grosse galaxie qu'un amas globulaire (bien sûr les vitesses caractéristiques ne sont pas les mêmes pour ces deux systèmes).

# Chapitre 3

## Cosmologie

### 3.1 Espace et temps absolus

#### Exercice 38 : La faiblesse de la force de gravitation

Marcel et Naomi ressentent l'un pour l'autre une certaine attirance ; quelle part en revient tout bêtement à la force de gravitation universelle, lorsque leurs centres de gravité respectifs sont distants de 1 mètre ? Quelle masse, au même point de la Terre, présente un poids égal à cette force ? Marcel pèse, à Lyon, 700 N, et Naomi 580 N. Le rayon de la Terre à Lyon sera supposé égal à 6365 km. La constante de la gravitation et la masse de la Terre sont données dans les annexes du cours...

**Corrigé :** Il s'agit, simplement, d'appliquer la formule de Newton deux fois pour trouver les masses respectives de Marcel et Naomi, puis une troisième fois pour calculer l'attraction qui s'exerce entre eux, en prenant garde aux unités.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

On retrouve d'abord les valeurs des constantes :  $G = 6,672 \times 10^{-11}$ ,  $M_{\oplus} = 5,976 \times 10^{24}$  kg, et  $R = 6365$  km qui est donné dans l'énoncé.

On écrit donc :

$$P_{\text{Marcel}} = G \frac{M_{\text{Marcel}} M_{\oplus}}{R^2}$$

soit encore :

$$M_{\text{Marcel}} = \frac{P_{\text{Marcel}} R^2}{G M_{\oplus}} = \frac{6370000^2 \times 700}{6,672 \times 10^{-11} \times 5,976 \times 10^{24}} = 71,23 \text{ kg}$$

Cette valeur s'obtiendrait aussi en utilisant la formule  $P = M_{\text{Marcel}} \times g$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur à Lyon. Mais l'énoncé ne précise pas la valeur de  $g$  à Lyon...

Pour Naomi, on peut utiliser le fait que  $M_{\text{Naomi}}/M_{\text{Marcel}} = P_{\text{Naomi}}/P_{\text{Marcel}}$ , puisque les deux personnes sont soumises au même champ de gravité. Et donc :

$$M_{\text{Naomi}} = M_{\text{Marcel}} \frac{P_{\text{Naomi}}}{P_{\text{Marcel}}} = 71,23 \times \frac{58}{70} = 59,02 \text{ kg}$$

D'où  $F_{\text{Naomi-Marcel}} = (6,67210^{-11} \times 71,23 \times 59,02)/1 = 2,810^{-7}$  N.

La masse qui présenterait un poids égal à cette valeur en cet endroit serait de :  $M = (6370000^2 \times 2,810^{-7}) / (6,67210^{-11} \times 5,97610^{24}) = 2,8510^{-8} \text{ kg} = 28,5 \text{ } \mu\text{g}$ .

Elle peut également se calculer, d'après une remarque déjà faite, par  $M = 71,23 \times 2,810^{-7} / 700$ . L'attraction gravitationnelle est une force *très faible*, c'est même la plus faible des quatre forces fondamentales de l'univers...

### 3.2 La rupture relativiste

#### 3.2.1 Relativité générale

##### Einstein dans l'ascenseur

#### Exercice 39 : L'équivalence gravité/accélération

On dit que, pour la Relativité Générale, gravitation et accélération sont équivalentes, mais que cette équivalence n'est que locale. C'est à dire qu'aucune expérience de physique ne permet de distinguer les effets de l'une de ceux de



l'autre, mais seulement tant qu'on se limite à un très petit domaine spatial. En gros, c'est à peu près vrai dans un dé à coudre, cela ne l'est plus vraiment dans un stade de foot...

En reprenant l'exemple simple de l'ascenseur d'Einstein, pouvez-vous montrer qu'en effet il est facile de distinguer pesanteur et accélération par la fusée si on abandonne la localité. Il suffit de modifier l'ascenseur...

**Corrigé :** À grande échelle, le champ de gravité qui environne un corps massif reste en général tout à fait discernable d'une accélération constante. Par exemple, dans l'image de l'ascenseur utilisée dans le cours, il ne faut pas que la cabine soit trop étendue. Sinon, le parallélisme ou le non-parallélisme des actions sur des masses très éloignées l'une de l'autre trahirait la « vraie » nature du champ. La cabine de gauche, supposée à grande distance de la planète, et accélérée vers le haut (flèche bleue), produit des actions parallèles (flèches rouges) sur les deux masses-test. La cabine de droite, immobile dans le champ de gravitation de la Terre, montre des actions convergentes vers le centre de la Terre (flèches vertes). Rusés comme ils le sont parfois, les physiciens de l'ascenseur finiraient par s'en apercevoir... (Fig. 3.1)

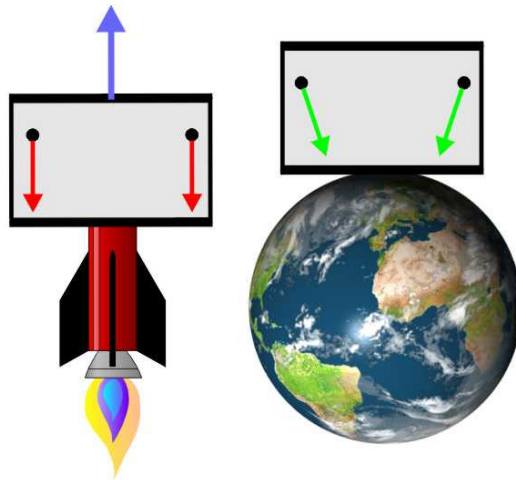


FIGURE 3.1 –

### 3.2.2 Les tests

#### Exercice 40 : Le décalage gravitationnel vers le rouge

Une lampe spectrale émettant la raie Hydrogène Alpha (de longueur d'onde en laboratoire 656,3 nm) est utilisée pour communiquer à partir d'une capsule en orbite serrée autour d'une étoile à neutrons. Le rayon de l'orbite est de 1000 km, la masse de l'étoile de  $1,5 M_{\odot}$ . À quelle longueur d'onde le vaisseau qui a lancé la capsule, et se tient prudemment à grande distance, doit-il rechercher les signaux ?

**Corrigé :** Le décalage gravitationnel subi à la distance  $r$  d'un corps de masse  $M$  s'écrit :

$$z = \frac{GM}{c^2 r} = \frac{6,672 \times 10^{-11} \times 1,5 \times 1,989 \times 10^{30}}{299792458^2 \times 10^6} = 2,215 \times 10^{-3}$$

Mais :

$$z = \frac{\delta \lambda}{\lambda_0}$$

donc :

$$\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda = (1 + z) \lambda_0$$

d'où le  $\lambda$  cherché :  $\lambda = 1,00221 \times 656,3 = 657,75$  nm.

## 3.3 Le big bang

### 3.3.1 Expansion de l'univers...

#### Exercice 41 : ...limitée par $c$ ?

Plus une galaxie est éloignée de notre Voie Lactée, plus les astronomes lui trouvent une vitesse d'éloignement élevée. C'est l'expansion de l'univers. Mais, quand la distance croît sans cesse, elle atteint un moment une valeur  $d_c$  telle que :

$$V = H_0 d_c > c$$

Invraisemblable, n'est-ce pas ?

**Corrigé :** Il est interdit par la Relativité Générale de mesurer une vitesse égale ou supérieure à  $c$  pour un objet de masse non nulle, comme une galaxie. Alors ?

Alors, cela ne pose aucun problème pour l'expansion de l'univers, où les objets (les galaxies...) sont immobiles dans un espace dont la géométrie s'étire. Les galaxies très lointaines voient effectivement leur vitesse apparente atteindre celle de la lumière, et disparaissent alors de l'univers observable. Ceci n'enlève rien au fait qu'elles continuent à s'éloigner de nous à des vitesses supérieures à  $c$ .

Signalons que nos moyens d'observation actuels sont loin de nous permettre d'observer les objets qui flirtent avec cette limite...

#### Exercice 42 : ...la même partout ?

La radiogalaxie 3C 171 (nommée ainsi parce qu'elle occupe la 171e position dans le troisième catalogue de radiources établi par l'observatoire de Cambridge...) est relativement lointaine ; entraînée par l'expansion de l'univers, elle présente une vitesse de fuite de 63000 km/s.

Montrer que malgré cela, l'astronome Snurp, qui a là-bas découvert l'expansion de l'univers, comme Hubble l'a fait pour nous, a lui aussi trouvé une loi qui s'écrit :

$$V_0 = X_0 d_0 \quad \text{avec} \quad X_0 = H_0$$

$V_0$  étant la vitesse mesurée à partir de 3C171 pour une galaxie lointaine située à la distance  $d_0$  de 3C171, et  $X_0$  étant bien entendu la constante de Snurp.

Ainsi, d'une planète de 3C171, comme de la Terre, on observe la même expansion universelle, avec la même géométrie, et le même taux...

**Corrigé :** Désignons par  $V_T$  et  $d_T$  les vitesses et distances mesurées à partir de la Terre,  $V_{3C}$  et  $d_{3C}$  celles mesurées à partir de 3C171. La vitesse de récession de 3C171 mesurée de la Terre est donc  $v_T(3C171) = 63000$  km/s.

Considérons une autre galaxie, G, observée à la fois de la Terre et de 3C171. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{3C}(G) &= \vec{V}_{3G}(T) + \vec{V}_T(G) \\ &= -\vec{V}_T(3C171) + \vec{V}_T(G) \\ &= -H_0 \vec{d}_T(3C171) + H_0 \vec{d}_T(G) \\ &= H_0 [\vec{d}_T(G) - \vec{d}_T(3C171)] \\ &= H_0 \vec{d}_{3C}(G) \end{aligned}$$

et donc, à partir de 3C171 comme de la Terre, toute les galaxie observée semble s'enfuir avec une vitesse proportionnelle à sa distance, et le facteur de proportionnalité (la constante de Snurp) est universel :  $X_0 = H_0$ ... (Fig. 3.2)

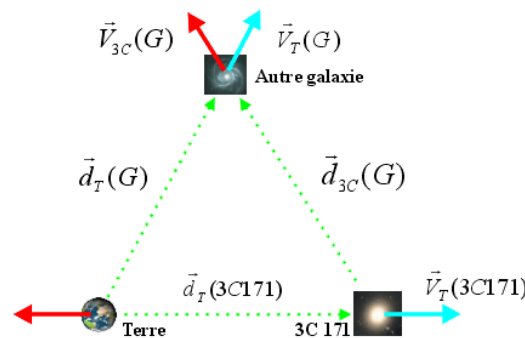


FIGURE 3.2 –

#### Exercice 43 : Le facteur d'expansion de l'espace

La constant de Hubble  $H_0$  est usuellement exprimée en kilomètres par seconde et par mégaparsec, mais cela ne parle guère au sens commun. En prenant  $H_0 = 65 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , quelle est la valeur de l'accroissement annuel d'un kilomètre ?

**Corrigé :** Un mégaparsec (Mpc) vaut  $10^6$  parsecs, soit  $3.2610^6$  années-lumière, soit  $3,0810^{19}$  km... Ceci nous montre que  $65 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  équivalent à  $2,1010^{18} \text{ km s}^{-1} \text{ km}^{-1}$ , ou encore  $6,6510^{-11} \text{ km an}^{-1} \text{ km}^{-1}$ . Ce qui signifie que chaque kilomètre de l'espace, loin de toute galaxie, s'étire chaque année de  $6,6510^{-11}$  km, soit environ 67 nm ! C'est infiniment dérisoire sur un kilomètre, mais sur les distances cosmiques l'effet est cumulatif, et cela donne des vitesses qui peuvent être très importantes, facilement de l'ordre de celle de la lumière...

### 3.3.2 Film des débuts

#### Exercice 44 : Nucléosynthèse primordiale ou non ?

Les éléments légers H,  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$  sont nés avec le Big Bang. Mais d'où proviennent tous les autres éléments « lourds », ceux qui entrent dans la composition des objets du quotidien ?

**Corrigé :** Les chapitres traitant des modèles stellaires et de l'évolution stellaire nous fournissent la réponse :

- Jusqu'au  $^{56}\text{Fe}$ , les noyaux sont produits par les étoiles. La source d'énergie de celles-ci est d'origine thermonucléaire, et elles sont des usines à fabriquer, par fusion, des noyaux lourds à partir de noyaux plus légers.
- Au-delà, seules les explosions de supernovae atteignent des températures suffisantes (plusieurs  $10^9$  K) pour pouvoir synthétiser les noyaux très lourds, jusqu'aux éléments transuraniens.
- Quelques noyaux particuliers ( $^6\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{B}$ ) sont sans doute formés lors des collisions des rayons cosmiques avec la matière interstellaire.

### 3.4 Questions diverses

#### 3.4.1 Âge de l'univers

##### Exercice 45 : Temps de Hubble et densité critique

La constante de Hubble a une valeur de l'ordre de  $H_0 = 65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

1. Calculez le temps de Hubble  $t_H = 1/H_0$ . Quelle conclusion pouvez-vous en tirer sur l'âge de l'univers ?
2. Calculer la densité critique  $\rho_C = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$ . En quelles unités s'exprime-t-elle ?

**Corrigé :**

1. Le temps de Hubble est défini par :  $1/t_H = H_0 = 65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Il reste simplement à convertir les Mpc (megaparsecs) en kilomètres, et il vient :  $1/t_H = 65 \text{ km s}^{-1} [3,26 \times 10^{19} \text{ km}]^{-1} = 20 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1}$ , d'où  $t_H = 5 \times 10^{17} \text{ s} \simeq 16 \times 10^9$  années. On peut donc penser que l'univers est âgé de moins de 16 milliards d'années.
2.  $\rho_C \simeq 9 \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3} \simeq 6 \text{ nucléons/m}^3$

##### Exercice 46 : Age de l'univers et temps de Hubble

En partant de la définition de  $H_0$  et de la relation trouvée dans la section précédente entre le facteur d'échelle  $R$  et l'âge  $t$  de l'univers dans le cas de la densité critique, trouver la relation entre  $H$  et  $t$ .

**Corrigé :** Par définition :

$$v = H_0 \cdot d \quad \text{donc} \quad H_0 = \frac{v}{d} = \frac{1}{d} \frac{dd}{dt} = \frac{1}{\epsilon R} \frac{d(\epsilon R)}{dt}$$

car toute distance, à un instant  $t$ , peut s'écrire en terme du facteur d'échelle  $R$  :  $d = \epsilon R(t)$ , où  $\epsilon$  est une constante. Par conséquent :

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \\ &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3} \times \frac{d(t/t_0)^{2/3}}{dt} \\ &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3} \times \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3} \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} \\ &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} \times \frac{2}{3t_0} \\ &= \frac{2}{3t} \end{aligned}$$

Dans le cas critique (univers marginalement ouvert), l'âge de l'univers est égal aux deux-tiers du temps de Hubble.

### 3.4.2 Facteur d'échelle

#### Exercice 47 : Redshift cosmologique, facteur d'échelle et époque

La radiogalaxie 4C41.17 montre une raie spectrale intense à 582,2 nm. Cette raie est identifiée comme la raie Lyman alpha de l'hydrogène. En laboratoire, sur la Terre, la longueur d'onde de cette raie est de 121,5 nm.

1. Quel est le redshift de la radiogalaxie 4C41.17 ?
2. Quel était le facteur d'échelle de l'univers à l'époque où les atomes d'hydrogène de 4C41.17 émettaient cette raie ?
3. À quelle époque  $t_{em}$  la radiogalaxie 4C41.17 de l'exercice précédent a-t-elle émis la lumière que nous recevons aujourd'hui à  $t_0$  ? On prendra  $t_0 = 13,5$  milliards d'années.

#### Corrigé :

1. On a

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{observé}}}{\lambda_{\text{émis}}} = \frac{582,2}{121,5} = 4,792$$

donc  $z = 3,792$ .

2. Par ailleurs,

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{observé}}}{\lambda_{\text{émis}}} = \frac{R_0}{R_{\text{émission}}}$$

soit  $R_{em}/R_0 = \lambda_{em}/\lambda_0 = 121,5/582,2 = 0,264$ . À l'époque où 4C41.17 émettait la lumière qui nous parvient aujourd'hui, l'univers était cinq fois moins « étiré » qu'aujourd'hui... Remarquez bien qu'on évite de dire qu'il était moins « étendu » : cette expression sous-entendrait des choses sur la « taille globale » de l'univers, ce que tout cosmologiste raisonnable évite soigneusement de faire.

3. À nouveau, il suffit de se souvenir de la relation liant le facteur d'échelle et le temps cosmologique :

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$$

pour trouver  $t_{em} = t_0 \times (R(t_{em})/R_0)^{3/2}$ , et donc  $t_{em} = 13,5 \times (0,264)^{3/2} = 1,8$  Gan. 4C41.17 émettait la lumière qui nous parvient aujourd'hui alors l'univers était âgé d'environ 1,8 milliards d'années. Environ, car l'équation de départ n'est qu'une approximation.

### 3.4.3 Distance de l'horizon

#### Exercice 48 : Temps de vol, distance, et expansion...

Il y a dix milliards d'années, ce photon que nous recevons aujourd'hui a quitté une lointaine galaxie.

1. Cette galaxie se trouvait-elle à dix milliards d'années-lumière de nous au moment de l'émission ?
2. Cette galaxie se trouve-t-elle aujourd'hui à dix milliards d'années-lumière de nous ?

#### Corrigé :

- Le photon a voyagé pendant dix milliards d'années en luttant contre l'expansion de l'espace qui contrariait son mouvement ; tout se passe comme s'il avait parcouru à la vitesse  $c$  une distance supérieure à celle qui séparait la galaxie de nous au moment de l'émission. Au moment de l'émission, la galaxie était donc à moins de dix milliards d'années-lumière de nous.
- Depuis que le photon a quitté la galaxie, celle-ci, entraînée par l'expansion, a continué à s'éloigner de nous. Le photon a bien parcouru (de son point de vue, en admettant qu'il en ait un) dix milliards d'années-lumière, puisque sa vitesse par rapport à l'espace est à tout instant égale à  $c$ , mais la galaxie a continué sa route pendant tout ce temps, et se trouve aujourd'hui à plus de dix milliards d'années-lumière de nous...

## Chapitre 4

# Retour sur Terre - Nos repères dans le ciel

### 4.1 Se positionner dans le ciel

#### Exercice 49 : Repérage

1. Quelles sont les coordonnées horizontales des quatre points cardinaux ?
2. Peut-on définir les coordonnées horizontales pour un observateur installé au pôle Nord géographique ou au pôle Sud ?
3. Pour quelles valeurs de la hauteur et de la distance zénithale un astre est-il visible, c'est-à-dire au dessus de l'horizon ?

#### Corrigé :

1. Les points cardinaux étant par définition sur l'horizon, leurs hauteurs sont nulles. Les directions Est-Ouest et Nord-Sud étant orthogonales, on a à partir de l'origine la direction Sud (Fig. 4.1) :

Points cardinaux	Azimut (degrés)	hauteur (degrés)
Nord	180	0
Est	270	0
Sud	0	0
Ouest	90	0

Remarque : L'azimut des marins est décalé de 180 degrés par rapport à celui des astronomes. L'origine des azimuts est le Nord.

2. Seule la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon peut être définie. L'azimut ne l'est pas, la ligne Nord-Sud ou le plan méridien étant indéterminé. La verticale du lieu est confondue avec l'axe de rotation de la Terre et tout plan passant par la verticale du pôle répond à la définition du plan méridien.
3. Un astre n'est visible que s'il est au-dessus de l'horizon. Sa hauteur doit être positive par définition. Sa distance zénithale ( $90^\circ - h$ ) par conséquent est plus petite que 90 degrés. Un astre sous l'horizon a sa distance zénithale plus grande que  $90^\circ$  (Fig. 4.1).

### 4.2 Mouvement diurne

#### Exercice 50 :

1. Dans quelle direction se trouve un astre au moment de sa culmination en un lieu de latitude  $+50^\circ$  ?
2. Même question pour un lieu situé à l'équateur.
3. La hauteur d'un astre varie-t-elle au cours du mouvement diurne au pôle Nord ?

#### Corrigé :

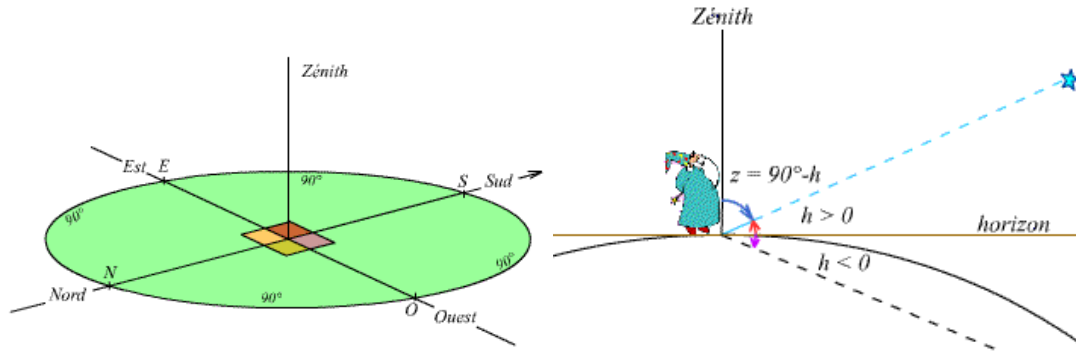


FIGURE 4.1 – G. : Points cardinaux. Dr. : Horizon et distance zénithale.

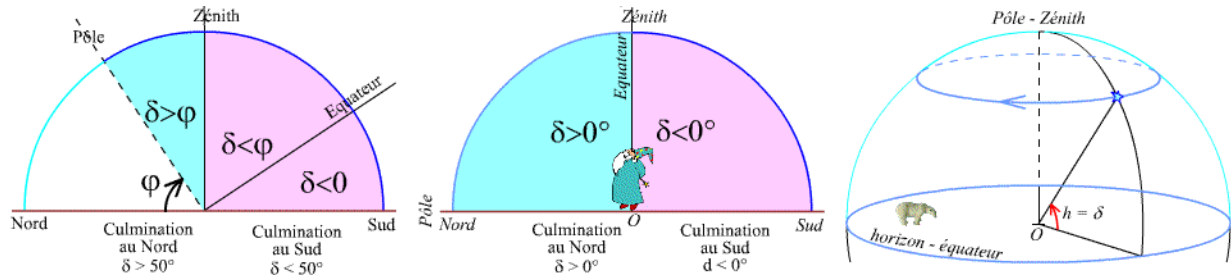


FIGURE 4.2 – Mouvement diurne à une latitude  $\phi \sim 50^\circ$  (à g.), à l'équateur ( $\phi = 0$ , au c.) et au pôle nord ( $\phi = 90^\circ$ , à dr.).

1. Lors du mouvement diurne, la culmination d'un astre se produit lorsque sa hauteur est maximale. Suivant sa position de l'objet sur la sphère céleste (donc sa déclinaison), l'astre passera entre le zénith et le pôle (Nord pour un habitant de l'hémisphère nord et Sud pour...) soit entre le zénith et l'horizon opposé au pôle visible. À la latitude de  $50^\circ$ , les étoiles dont la déclinaison est plus petite que la latitude, la culmination se fera du côté Sud de l'observateur. Pour les autres étoiles, la culmination sera du côté Nord (Fig. 1)
2. L'équateur passant par le zénith, toutes les étoiles de déclinaisons positives culminent au Nord et les étoiles de déclinaisons négatives au Sud. Les étoiles de déclinaisons nulles passent au zénith (Fig. 1).
3. La verticale étant confondue avec l'axe du pôle, et l'horizon avec l'équateur, la déclinaison est égale à la hauteur de l'astre qui reste constante lors de la rotation diurne. Seuls les objets de déclinaisons positives sont visibles. C'est pourquoi le Soleil dans son mouvement apparent durant l'année donne 6 mois consécutifs de jour et 6 mois consécutifs de nuit (Fig. 1).

### Exercice 51 : Mouvement diurne des étoiles

1. Comment varie l'azimut d'un astre au cours du mouvement diurne, en un lieu de latitude  $50^\circ$  ? Et aussi  $-50^\circ$  de latitude. Sur la Fig. 1, on a représenté la situation en un lieu de l'hémisphère Sud (latitude =  $-50^\circ$ ) ;  $P$  est alors en-dessous de l'horizon et  $P'$  est au-dessus.
2. Les astres se lèvent-ils du côté de l'Est et se couchent-ils du côté de l'Ouest aussi bien dans l'hémisphère Nord que dans l'hémisphère Sud ?
3. Dans quelle direction géographique un astre culmine-t-il en un lieu de latitude  $-50^\circ$  ?
4. Le mouvement diurne est-il observé dans le même sens pour un observateur de l'hémisphère Nord ou un observateur de l'hémisphère Sud ?

### Corrigé :

1. **Observateur de l'hémisphère Nord (latitude  $+50^\circ$ )** On n'envisagera que le cas des étoiles visibles par l'observateur, c'est-à-dire celles dont  $\delta > -(\pi/2 - \phi)$ . Deux critères sont à envisager :
  - l'étoile a une déclinaison plus grande que la latitude  $\delta > \phi$  ou  $\delta < \phi$
  - l'étoile est circumpolaire  $\delta > \pi/2 - \phi$
 Par la première condition, si  $\delta < \phi$ , l'azimut de l'étoile varie de 0 à  $360^\circ$ , sinon, son azimut oscille entre une valeur comprise  $\alpha$  entre 90 et  $180^\circ$  suivant sa position au passage au méridien et  $360^\circ - \alpha$ . L'étoile oscille donc entre  $\alpha$ ,  $180^\circ$  et  $360^\circ - \alpha$ .

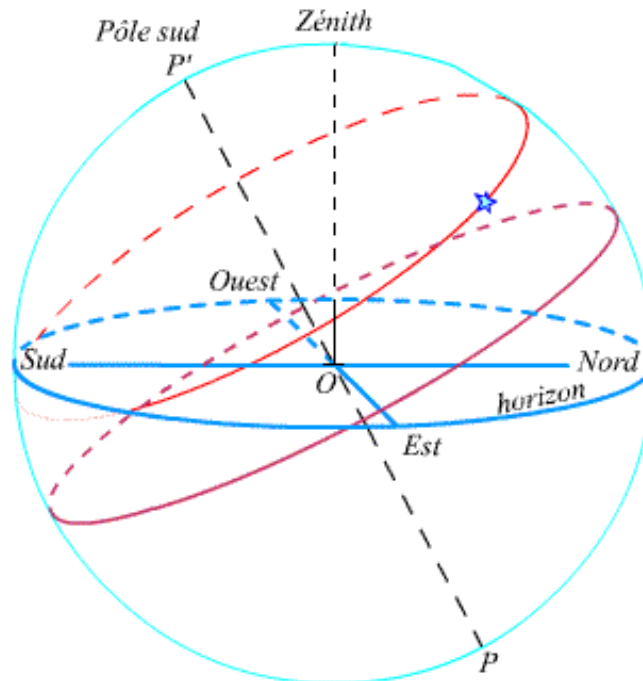


FIGURE 4.3 – Rotation d’une étoile vue de l’hémisphère sud (latitude =  $-50^\circ$ ).

Le deuxième critère (circumpolarité) indique si l’étoile a un lever ou un coucher, son azimut varie alors entre les positions des levers et couchers et celles définies par le premier critère.

L’observateur orienté vers le Nord voit tourner les étoiles dans le sens direct autour du pôle Nord.

**Observateur de l’hémisphère Sud (latitude  $-50^\circ$ )** Les mêmes critères s’appliquent pour les limitations des azimuts et des levers et couchers, à la différence que l’azimut va osciller autour de la valeur  $0^\circ$  et que regardant le pôle Sud, il verra tourner les étoiles dans le sens rétrograde (Fig. 1).

- Oui. Que l’on soit dans l’hémisphère Nord ou Sud, le sens de rotation de la Terre est le même. Les objets apparaissent à l’Est et se couchent à l’Ouest.
- Au Nord si sa déclinaison est plus grande que la latitude, autrement au Sud (Voir exercice 1 du même chapitre).
- Non (Voir exercice 4 du chapitre II).

### Exercice 52 : Coordonnées horaires d’un astre

- Quelle est la relation entre la déclinaison et la distance polaire ?
- Quelles sont les coordonnées horaires des quatre points cardinaux en un lieu de latitude  $\phi$  ?
- Que vaut la déclinaison du zénith en fonction de la latitude du lieu ?

#### Corrigé :

- Comme son nom l’indique, la distance polaire est l’angle entre la direction du pôle nord et la direction de l’objet, donc  $p = 90^\circ - \delta$
- Table 2 et Fig. 2

Points cardinaux	Angle horaire	Déclinaison
Sud	0h	$-(90 - \phi)$
Ouest	6h	0 degré
Nord	12h	$90 - \phi$
Est	18h	0 degré

- La déclinaison du zénith vaut la latitude (positive pour l’hémisphère Nord et négative pour l’hémisphère Sud), voir Fig. 2.

### Exercice 53 : Coordonnées équatoriales

- Une étoile traverse le méridien sud à une hauteur de  $85^\circ$ , et le méridien nord à  $45^\circ$ . Trouver la déclinaison de l’étoile et la latitude de l’observateur.



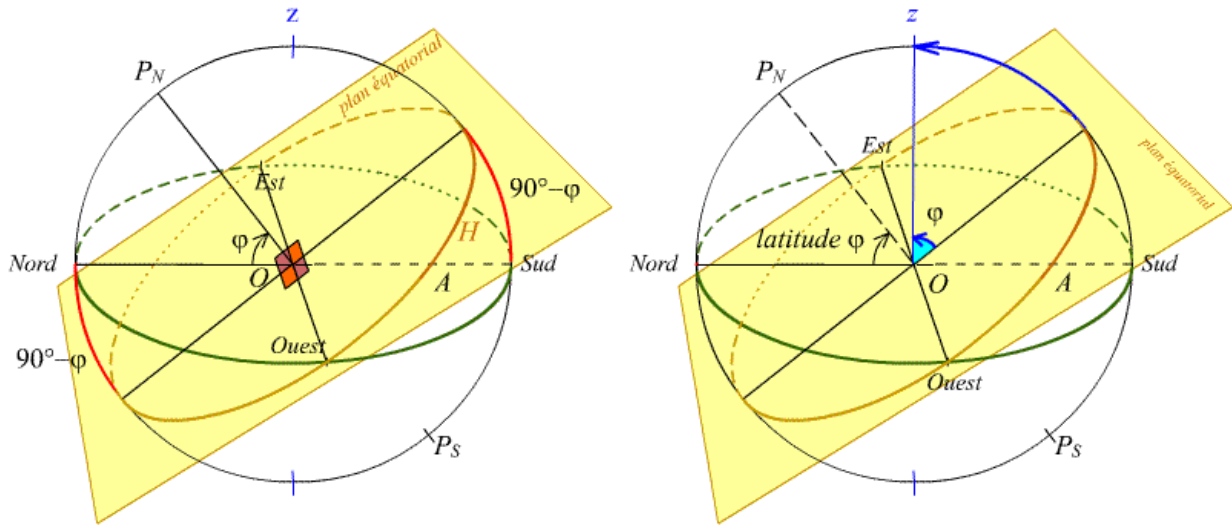


FIGURE 4.4 – Coordonnées horaires des points cardinaux (à g.) et du zénith (à dr.).

2. Où ces affirmations sont-elles vraies ?
  - (a) Castor ( $\alpha$ -Gem, déclinaison  $+31^{\circ}54'$ ) est circumpolaire.
  - (b) Bételgeuse ( $\alpha$ -Ori,  $7^{\circ}24'$ ) culmine au zénith.
  - (c)  $\alpha$ -Cen ( $-60^{\circ}46'$ ) s'élève à une hauteur de  $20^{\circ}$  au méridien.

**Corrigé :**

1. L'étoile tournant autour de la direction du pôle, les deux directions  $OA$  et  $OB$  des passages supérieur et inférieur, sont symétriques par rapport à l'axe  $OP$ . L'angle  $\alpha$  égale l'angle  $\beta$  et

$$\alpha + \beta + 180^{\circ} - 45^{\circ} - 85^{\circ} = 50^{\circ} \quad \text{donc} \quad \alpha = \beta = 25^{\circ}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont tous deux les compléments de la déclinaison de l'étoile :

$$\beta + \delta = 90^{\circ} \quad \text{donc} \quad \delta = 65^{\circ}$$

On calcule la latitude qui vaut la hauteur du pôle au dessus de l'horizon :  $\phi = \alpha + 45^{\circ} = 70^{\circ}$ .

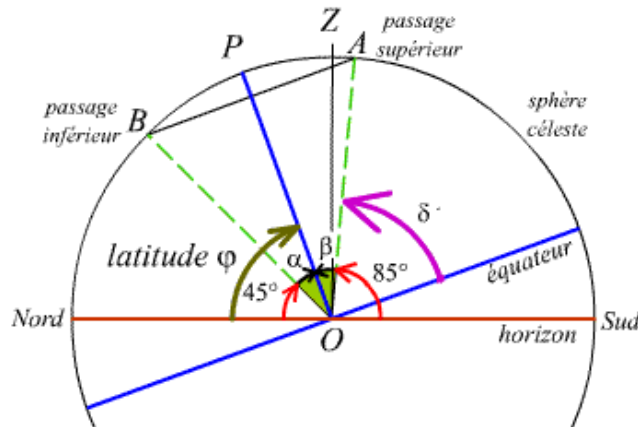


FIGURE 4.5 – Coordonnées horaires.

2. **Castor (Gem,  $\delta = +31^{\circ}56'$ ) circumpolaire** L'étoile sera juste circumpolaire, c'est-à-dire passera tangent à l'horizon Nord, si sa déclinaison est le complément de la latitude. Pour toute latitude plus grande, l'étoile sera plus élevée sur l'horizon et ne disparaîtra pas derrière celui-ci (Fig 2) :  $\phi \geq 90^{\circ} - \delta$
- Bételgeuse (Ori,  $\delta = +7^{\circ}24'$ ) culmine au zénith** Si l'étoile est au moment de sa culmination au zénith (nécessairement), sa déclinaison est égale à la latitude (Fig. 2) :  $\phi = 7^{\circ}24'$
- $\alpha$ -Cen ( $\delta = -60^{\circ}46'$ ) s'élève à une hauteur de  $+20^{\circ}$**  À son passage supérieur, l'étoile se trouve dans la configuration Fig. 2. La latitude est l'angle  $PON$  qui est égal à  $P'OS$ . En appliquant la relation de Chasles entre  $P'OS$  la hauteur de l'astre  $20^{\circ}$  et la déclinaison, on obtient :  $P'OS = 90^{\circ} + \delta - 20^{\circ}$  d'où  $\phi = 9^{\circ}14'$

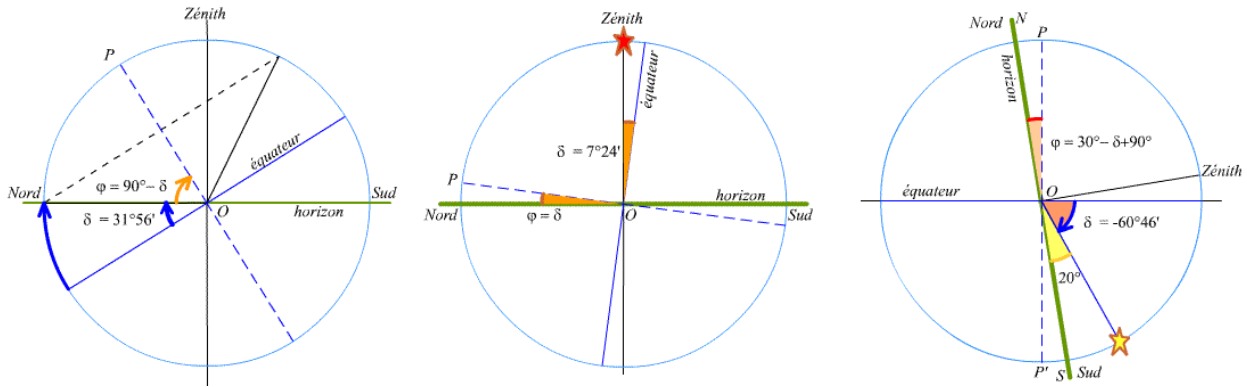


FIGURE 4.6 – Castor (à g.), Bételgeuse (au c.), et  $\alpha$ -Cen. (à dr.).

## 4.3 Mouvement du Soleil

### 4.3.1 Année sidérale, année tropique

#### Exercice 54 : Mouvement du Soleil, jour solaire

1. Que valent la hauteur maximale et la hauteur minimale du Soleil en chacun des lieux considérés :  $50^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  ?
2. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil n'ait ni lever ni coucher ?
3. Comment comprendre l'expression « soleil de minuit » ?
4. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil puisse passer à son zénith ?
5. Comment comprendre l'expression « tropique du Cancer » et « tropique du Capricorne » ? on pourra discuter cette question, en particulier, en consultant une carte céleste.

#### Corrigé :

1. Inclinaison de l'écliptique sur l'équateur :  $\epsilon = 23^\circ 27'$ . On détermine les relations qui relient la latitude  $\phi$ , les hauteurs minimum et maximum avec les deux positions du Soleil en déclinaison  $\pm\epsilon$ .
  - Position solstice hiver :  $SOm = SOE - \epsilon = (90^\circ - \phi) - \epsilon$
  - Position solstice été :  $SOm = SOE + \epsilon = (90^\circ - \phi) + \epsilon$
 ou le supplément si le Soleil sous les tropiques est passé de l'autre côté.

Latitude $\phi$	$50^\circ$	$75^\circ$	$10^\circ$	$-20^\circ$
Hauteur max.	$67^\circ 27'$	$38^\circ 27'$	$90^\circ$	$90^\circ$
Hauteur min.	$16^\circ 33'$	$-08^\circ 27'$	$56^\circ 33'$	$46^\circ 33'$

Attention aux positions entre les tropiques, le Soleil au solstice d'été pour les latitudes nord (solstice d'hiver pour les latitudes sud) est passé au Sud (au Nord) et de ce fait est plus bas que le jour où il passe au zénith au méridien (Fig. 1).

2. Ceci se produit dans l'hémisphère nord en été quand le Soleil a une déclinaison suffisamment positive. On appelle ce phénomène le « soleil de minuit ». Sur la figure ci-contre (cas de l'hémisphère Nord), lorsque au passage inférieur, l'angle  $NOD$  est positif, le Soleil ne se couche pas, son mouvement est circumpolaire.

$$\begin{aligned}
 NOD &= NOE' + E'OD > 0 \\
 90^\circ - \phi &< \delta_{\text{soleil}} \\
 \phi &> 90^\circ - \delta_{\text{soleil}}
 \end{aligned}$$

Au jour des solstices ( $\delta_{\text{soleil}} = \pm 23^\circ 27'$ ) il suffit d'être à une latitude  $\phi > 66^\circ 33'$  (en été pour l'hémisphère Nord) ou  $\phi < -66^\circ 33'$  (en hiver pour l'hémisphère Sud) ; les lieux de latitude  $\phi$  égale à  $\pm 66^\circ 33'$  définissent sur le globe terrestre les parallèles appelés « cercles polaires » (respectivement boréal et austral) (Fig. 2).

3. Vers les pôles, lors de son passage inférieur dans le plan méridien, le Soleil est au-dessus de l'horizon et son angle horaire ayant augmenté de  $180^\circ$  depuis sa culmination (par définition, il s'agit alors de « midi », 0h temps solaire) vaut 12h, cela correspond bien à « minuit ». À noter que le Soleil de minuit s'observe au Nord dans l'hémisphère boréal et au Sud dans l'hémisphère Sud.



4. Pour que le Soleil passe au zénith, il faut que la déclinaison du zénith (qui est aussi la latitude du lieu) soit égale à celle du Soleil ; comme cette dernière ne peut varier qu'entre  $+23^{\circ}27'$  et  $-23^{\circ}27'$ , les lieux en question sont ceux de latitude comprise entre  $-23^{\circ}27'$  et  $+23^{\circ}27'$ . Le Soleil passe au zénith de ces lieux deux fois dans le cours d'une année, au printemps et en été dans l'hémisphère Nord et en automne et en hiver dans l'hémisphère Sud. Les zones de la Terre qui correspondent à cette propriétés sont appelées les zones tropicales car situées entre le tropique nord du Cancer et le tropique sud du Capricorne.
5. Pour les lieux de latitude égale à  $+23^{\circ}27'$  et  $-23^{\circ}27'$ , le Soleil passe au zénith au moment des solstices. Ces lieux définissent sur le globe terrestre les parallèles appelés « tropiques » (du Cancer pour l'hémisphère Nord et du Capricorne pour l'hémisphère Sud). Si l'on se reporte à une carte du ciel, on voit qu'au moment des solstices le Soleil se trouve dans la direction de la constellation des Gémeaux (été) ou du Sagittaire (hiver). Il faudrait donc désigner les lieux en question par les noms : « tropique des Gémeaux » au lieu de tropique du Cancer et de même « tropique du Sagittaire » au lieu de tropique du Capricorne. L'appellation en usage a été définie il y a environ 3000 ans à une époque où le point gamma était dans la direction de la constellation du Bélier ; au solstice d'été le Soleil était bien dans la direction du Cancer et au solstice d'hiver dans la direction du Capricorne. Ce glissement est produit par la précession des équinoxes au rythme de  $360^{\circ}$  pour 26 000 ans, ce qui donne un effet de  $42^{\circ}$ , (soit environ un angle de 3h) sur 3 000 ans, comme on peut le lire sur la carte.