

Teoria dos Grafos

Grafos: Tipos, matrizes e graus de um grafo.

Leon Ferreira Bellini

RA 22218002-8

e

Guilherme Ormond Sampaio

RA 22218007-7

1 Introdução

Um grafo representa de forma simples e eficaz as interdependências entre os elementos de um conjunto. A utilidade da aplicação de grafos tem se mostrado presente em variadas micro e macroestruturas, como a podendo representar cidades, linhas ferroviárias, fluxo de dados ou até mesmo circuitos eletrônicos. A forma de como é representado pode ser dita como didática e facilmente compreendida. Foi elaborado um algoritmo para que fossem aplicados os diversos conceitos aprendidos em aula, este algoritmo sendo desenvolvido em **Python**, linguagem a qual permite que o programa funcione em variadas plataformas como *GNU/Linux* e *Windows*.

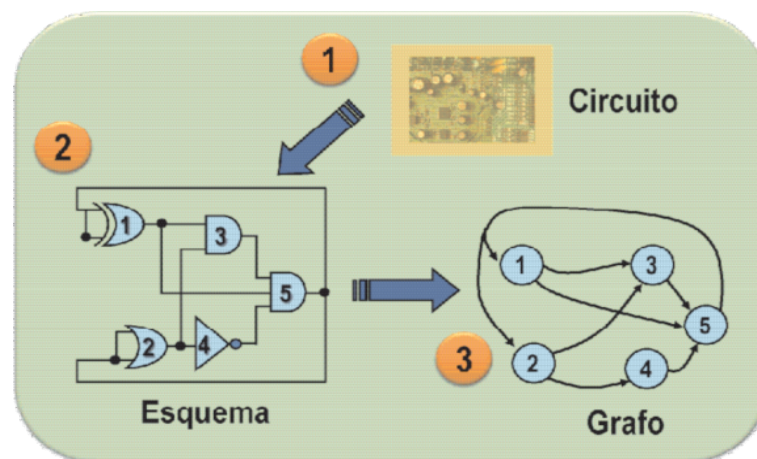


Figura 1: Circuito eletrônico representado na forma de grafo. – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

2 O conceito de grafos

2.1 Vértices, arestas e função de incidência φ

Para que haja um grafo é necessário obter o conjunto de **vértices**, dado por $\mathbf{N} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, estes também chamados de nós, os quais representam os componentes, itens ou elementos que receberão, ou não, ligações entre si, tais ligações chamadas de **arestas**, as quais também formam um conjunto, dado por $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Existe, também, uma **função de incidência** φ (phi), a qual associa um par de vértices para cada aresta, como por exemplo, $\varphi(e) = \{a, b\}$, ou seja, e incide em a e b .

Pode se dizer, então, que um grafo pode ser representado como:

$$G = (N, M, \varphi)$$

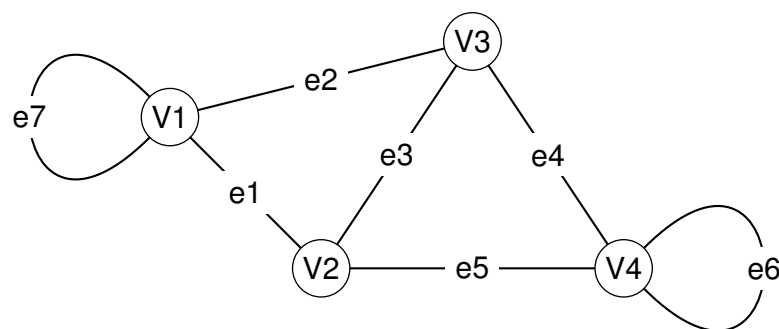
2.1.1 Casos Específicos

- **Grafo Finito:** V e E são finitos.
- **Grafo Trivial:** Possui apenas um vértice.
- **Grafo Nulo:** Não possui arestas.

2.1.2 Laços

Um laço é uma aresta que possui sua origem e destino em um mesmo vértice, ou seja, incide em um único vértice.

Exemplo:



As arestas **e6** e **e7** são laços.

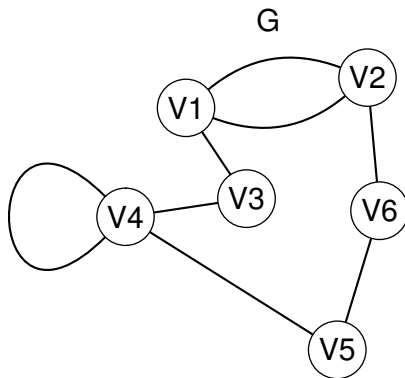
2.2 Representação matricial de um grafo

Para fins de representação não-gráfica dos grafos utiliza-se da matriz de adjacência ou da matriz de incidência.

2.2.1 Matriz de adjacência |A|

A matriz de adjacência consiste em uma matriz com n -linhas e n -colunas, sendo n cada vértice do grafo. Os elementos da matriz representam as arestas do grafo, portanto, trata-se da relação de conexões entre seus vértices.

Exemplo:



A (G):

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
V1	0	2	1	0	0	0
V2	2	0	0	0	0	1
V3	1	0	0	1	0	0
V4	0	0	1	1	1	0
V5	0	0	0	1	0	1
V6	0	1	0	0	1	0

Sendo o elemento a_{ij} o número de arestas entre a linha V_i e a coluna V_j .

Note que por os elementos das linha e colunas se repetirem ocorre um espelhamento diagonal das arestas, ou seja, para a análise do grafo basta observar uma de suas metades.

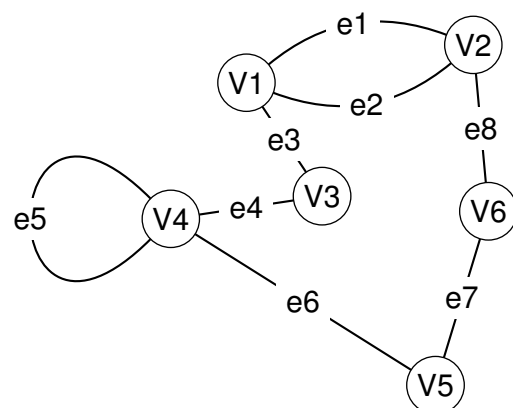
O algoritmo de análise de grafos trabalha a partir dessa matriz, e para a sua análise foi considerado apenas uma de suas metades.

2.2.2 Matriz de incidência |M|

A matriz de adjacência $M(G)$ é uma matriz com $|V|$ linhas e $|E|$ colunas, tal que seus elementos (a_{ij}) representam quantas vezes a aresta e_j incide no vértice V_i .

Exemplo:

G



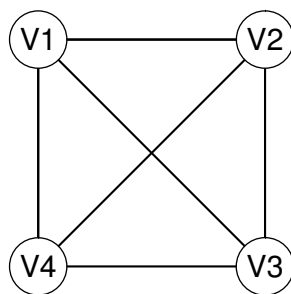
M (G):

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
V1	1	1	1	0	0	0	0	0
V2	1	1	0	0	0	0	0	1
V3	0	0	1	1	0	0	0	0
V4	0	0	0	1	2	1	0	0
V5	0	0	0	0	0	1	1	0
V6	0	0	0	0	0	0	1	1

Note que, por uma aresta estar conectada sempre em dois pontos, a soma dos elementos de cada coluna é 2.

2.3 Grafo simples

Um grafo é simples se não possui laços ou arestas múltiplas, logo, tendo-se como exemplo um grafo **G** possuindo $\mathbf{V} = \{v1, v2, v3, v4\}$ e $\mathbf{E} = \{e1, e2, e3, e4, e5\}$, sua matriz de adjacência **A** pode ser dada por:



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obs: Note que a diagonal principal da matriz indica se existem ou não, laços. Um número maior que 1 indicaria que existem mais de uma aresta ligando os dois vértices. Podem existir vértices de grau 0 em grafos simples.

2.3.1 Grafo bipartido

É um tipo de grafo simples o qual, uma vez que seus vértices são divididos em subconjuntos **X** e **Y**, possui cada aresta com uma de suas pontas no conjunto **X** e outra em **Y**.

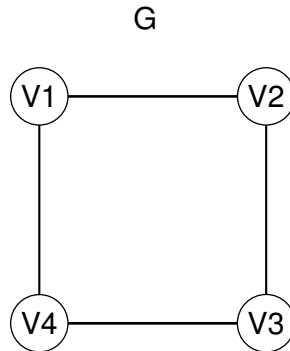


Figura 2: $X = \{V1, V2\}$ $Y = \{V3, V4\}$

Um grafo é dado por **Bipartido completo** quando cada vértice em X é adjacente a todo vértice em Y. É escrito através da letra **K_{mn}** , sendo $|x| = m$ e $|y| = n$.

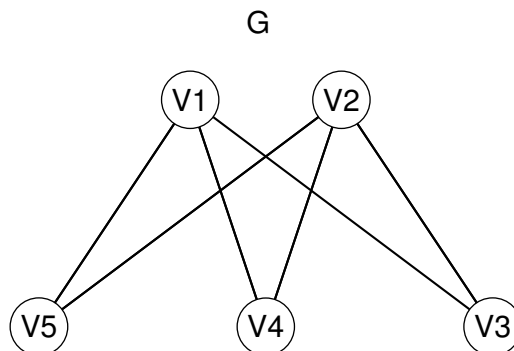


Figura 3: $X = \{V1, V2\}$ $Y = \{V3, V4, V5\}$

2.4 Graus de um grafo

2.5 Sequência gráfica

3 Conclusão