

Teoria dos Grafos

Grafos: Tipos, matrizes e graus de um grafo.

Leon Ferreira Bellini

RA 22218002-8

e

Guilherme Ormond Sampaio

RA 22218007-7

1 Introdução

Um grafo representa de forma simples e eficaz as interdependências entre os elementos de um conjunto. A utilidade da aplicação de grafos tem se mostrado presente em variadas micro e macroestruturas, como a podendo representar cidades, linhas ferroviárias, fluxo de dados ou até mesmo circuitos eletrônicos. A forma de como é representado pode ser dita como didática e facilmente compreendida. Foi elaborado um algoritmo para que fossem aplicados os diversos conceitos aprendidos em aula, este algoritmo sendo desenvolvido em **Python**, linguagem a qual permite que o programa funcione em variadas plataformas como *GNU/Linux* e *Windows*.

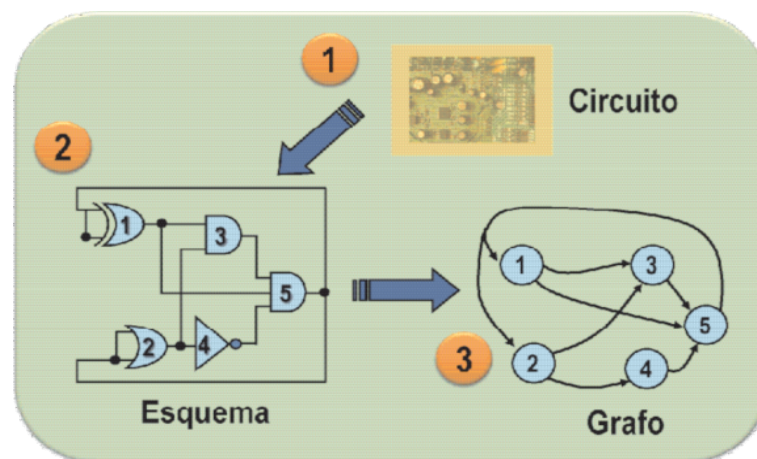


Figura 1: Circuito eletrônico representado na forma de grafo. – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

2 O conceito de grafos

2.1 Vértices, arestas e função de incidência φ

Para que haja um grafo é necessário obter o conjunto de **vértices**, dado por $\mathbf{N} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, estes também chamados de nós, os quais representam os componentes, itens ou elementos que receberão, ou não, ligações entre si, tais ligações chamadas de **arestas**, as quais também formam um conjunto, dado por $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Existe, também, uma **função de incidência** φ (phi), a qual associa um par de vértices para cada aresta, como por exemplo, $\varphi(e) = \{a, b\}$, ou seja, e incide em a e b .

Pode se dizer, então, que um grafo pode ser representado como:

$$G = (N, M, \varphi)$$

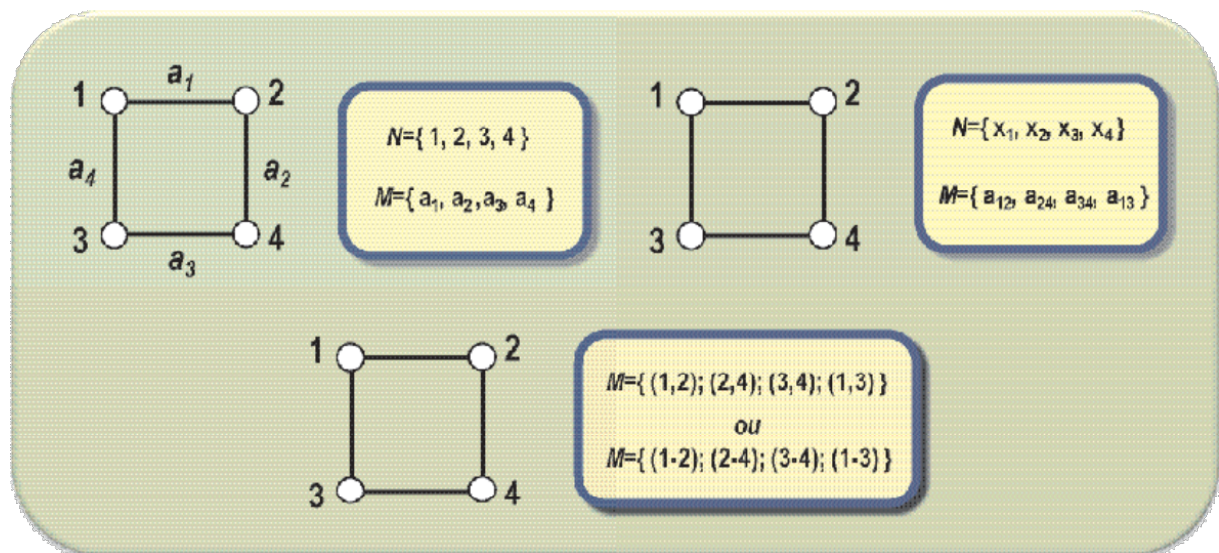


Figura 2: Exemplo de como alguns grafos podem ser representados – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

2.1.1 Casos Específicos

- **Grafo Finito:** \mathbf{V} e \mathbf{E} são finitos.
- **Grafo Trivial:** Possui apenas um vértice.
- **Grafo Nulo:** Não possui arestas.

2.1.2 Laços

Um laço é uma aresta que possui sua origem e destino em um mesmo vértice, ou seja, incide em um único vértice.

Exemplo:

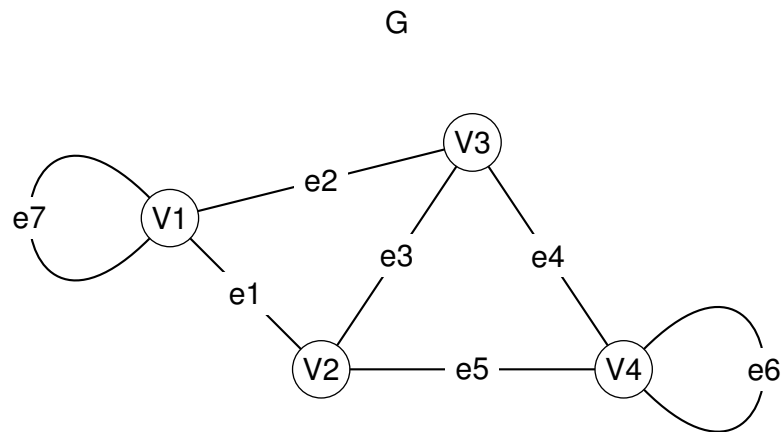


Figura 3: Exemplo de grafo com laços

As arestas **e6** e **e7** são laços.

2.2 Representação matricial de um grafo

Para fins de representação não-gráfica dos grafos utiliza-se da matriz de adjacência ou da matriz de incidência.

2.2.1 Matriz de adjacência $|A|$

A matriz de adjacência consiste em uma matriz com **n**-linhas e **n**-colunas, sendo **n** cada vértice do grafo. Os elementos da matriz representam as arestas do grafo, portanto, trata-se da relação de conexões entre seus vértices.

Exemplo:

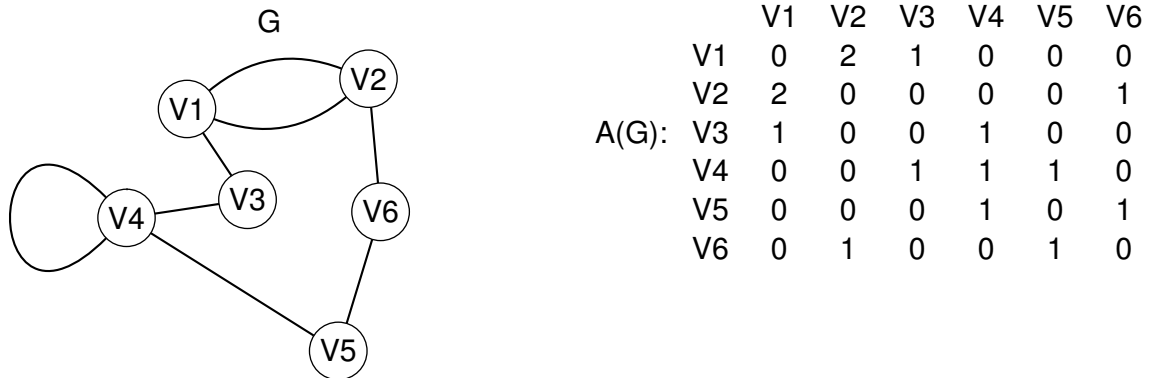


Figura 4: Exemplo de matriz de adjacência

Sendo o elemento a_{ij} o número de arestas entre a linha V_i e a coluna V_j .

Note que por os elementos das linha e colunas se repetirem ocorre um espelhamento diagonal das arestas, ou seja, para a análise do grafo basta observar uma de suas metades.

obs: O algoritmo de análise de grafos trabalha a partir dessa matriz.

2.2.2 Matriz de incidência $|M|$

A matriz de adjacência $M(G)$ é uma matriz com $|V|$ linhas e $|E|$ colunas, tal que seus elementos (a_{ij}) representam quantas vezes a aresta e_j incide no vértice V_i .

Exemplo:

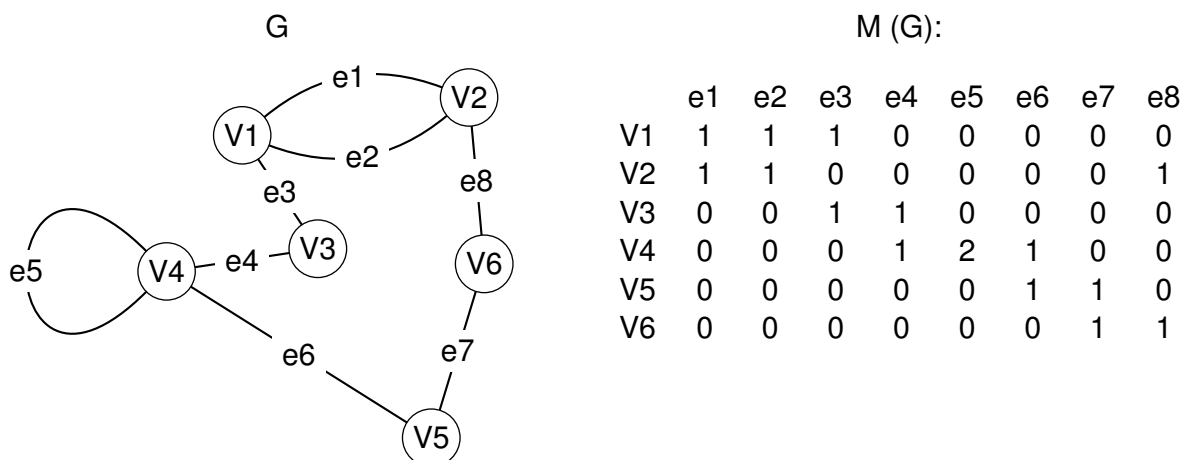


Figura 5: Exemplo de matriz de incidência

Note que, por uma aresta estar conectada sempre em dois pontos, a soma dos elementos de cada coluna é 2.

2.3 Grafo simples

Um grafo é simples se não possui laços ou arestas múltiplas, logo, tendo-se como exemplo um grafo **G** possuindo $V = \{v1, v2, v3, v4\}$ e $E = \{e1, e2, e3, e4, e5\}$, sua matriz de adjacência **A** pode ser dada por:



Figura 6: Exemplo de grafo **G** e matriz de adjacência **A(G)** simples

obs: Note que a diagonal principal da matriz indica se existem ou não, laços. Um número maior que 1 indicaria que existem mais de uma aresta ligando os dois vértices. Podem existir vértices de grau 0 em grafos simples.

2.3.1 Grafo bipartido

É um tipo de grafo simples o qual, uma vez que seus vértices são divididos em subconjuntos **X** e **Y**, possui cada aresta com uma de suas pontas no conjunto **X** e outra em **Y**.

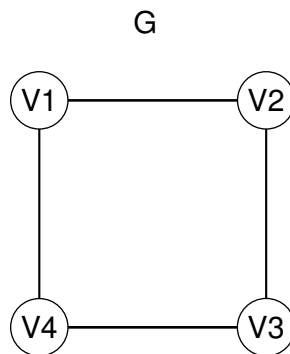


Figura 7: $X = \{V1, V2\}$ $Y = \{V3, V4\}$

Um grafo é dado por **Bipartido completo** quando cada vértice em **X** é adjacente a todo vértice em **Y**. É escrito através da letra **K_{mn}**, sendo $|x| = m$ e $|y| = n$.

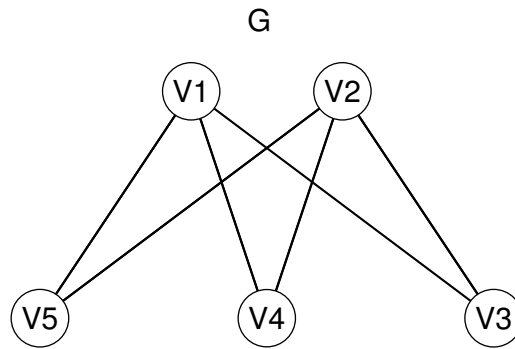


Figura 8: $X = \{V1, V2\}$ $Y = \{V3, V4, V5\}$

2.4 Graus de um vértice

Cada vértice V de um grafo $G = (V, E)$ possui um número n de arestas incidentes. Esse número n é denotado como o grau do vértice.

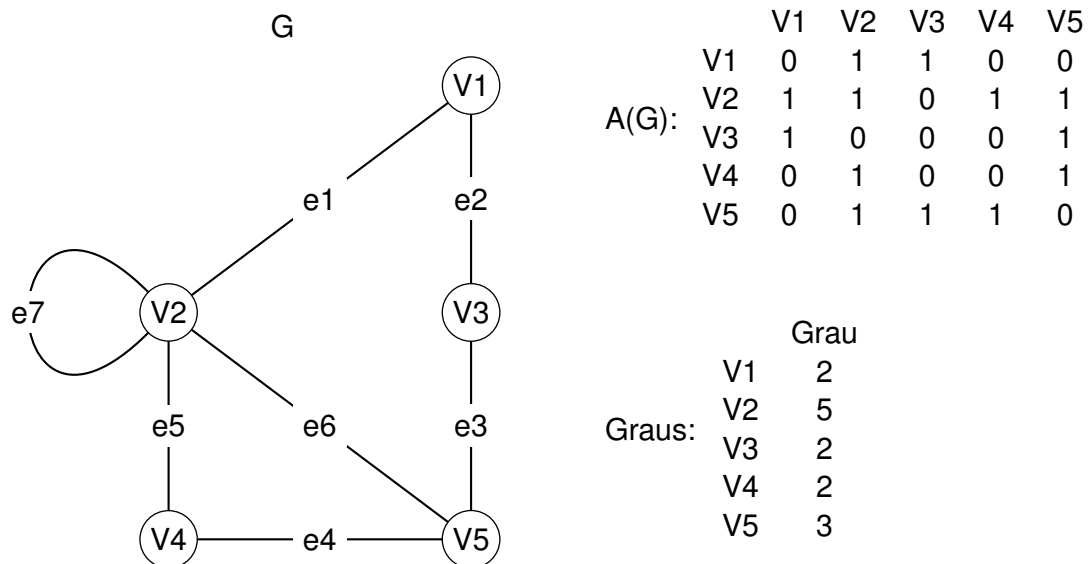


Figura 9: Grafo G , matriz de adjacência $A(G)$ e tabela de graus dos vértices do grafo G

Note que os laços incidem duas vezes no vértice, portanto ele equivale a 2 graus, como o caso da aresta $e7$.

Para calcular o grau em uma matriz adjacência basta somar todos os elementos da linha ou coluna ignorando o elemento da diagonal principal + 2 * o elemento da diagonal principal, que indica os laços.

2.5 Sequência gráfica

A sequência de graus de um grafo $G = (V, E)$ é a sequência não-crescente do grau de todos os vértices V desse grafo.

Para o caso da figura 9 a sequência seria:

5, 3, 2, 2, 2

3 Conclusão

A partir da elaboração do algoritmo é possível observar a dependência entre os conceitos de grafos e a obrigatoriedade de um conhecimento prévio para este caso de algoritmo genérico, uma vez que suas respostas são também genéricas e possuem significados distintos dependendo da aplicação.

É possível observar ainda a utilidade da representação matricial, visto que um grafo dotado de excessiva complexidade se torna penoso para ser analisado graficamente. A matriz permite a automatização desse processo, que é repetitivo e padronizado.

Apesar da praticidade proporcionada pelo algoritmo, uma representação matricial não deve ser dita como a representação precisa de um grafo. Um grafo possui uma única posição relativa, no qual não é considerada em uma matriz, ou seja, a representação matricial pode ser escrita a partir de uma representação gráfica, mas não o oposto.