Teoria dos Grafos

Grafos: Tipos, matrizes e graus de um grafo.

Leon Ferreira Bellini

RA 22218002–8

e

Guilherme Ormond Sampaio

RA 22218007–7

1 Introdução

Um grafo representa de forma simples e eficaz as interdependências entre os elementos de um conjunto. A utilidade da aplicação de grafos tem se mostrado presente em variadas micro e macroestruturas, como a podendo representar cidades, linhas ferroviárias, fluxo de dados ou até mesmo circuitos eletrônicos. A forma de como é representado pode ser dita como didática e facilmente compreendida. Foi elaborado um algoritmo para que fossem aplicados os diversos conceitos aprendidos em aula, este algoritmo sendo desenvolvido em **Python**, linguagem a qual permite que o programa funcione em variadas plataformas como *GNU/Linux* e *Windows*.

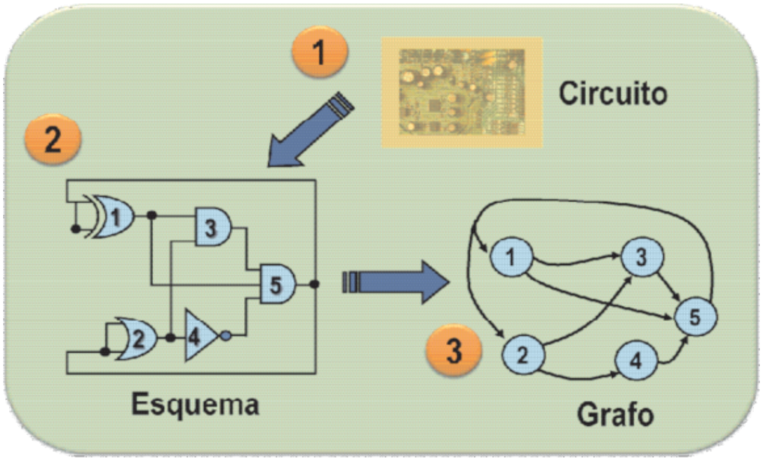


Figura 1: Circuito eletrônico representado na forma de grafo. – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

2 O conceito de grafos

2.1 Vértices, arestas e função de incidência φ

Para que haja um grafo é necessário obter o conjunto de **vértices**, dado por **N** $= \{v1, v2, \ldots, vn\}$, estes também chamados de nós, os quais representam os componentes, itens ou elementos que receberão, ou não, ligações entre si, tais ligações chamadas de **arestas**, as quais também formam um conjunto, dado por **E** $= \{e1, e2, \ldots, en\}$.

Existe, também, uma **função de incidência** φ (phi), a qual associa um par de vértices para cada aresta, como por exemplo, $\varphi(e) = \{a, b\}$, ou seja, *e* incide em *a* e *b*.

Pode se dizer, então, que um grafo pode ser representado como:

$$G = (N, M, \varphi)$$

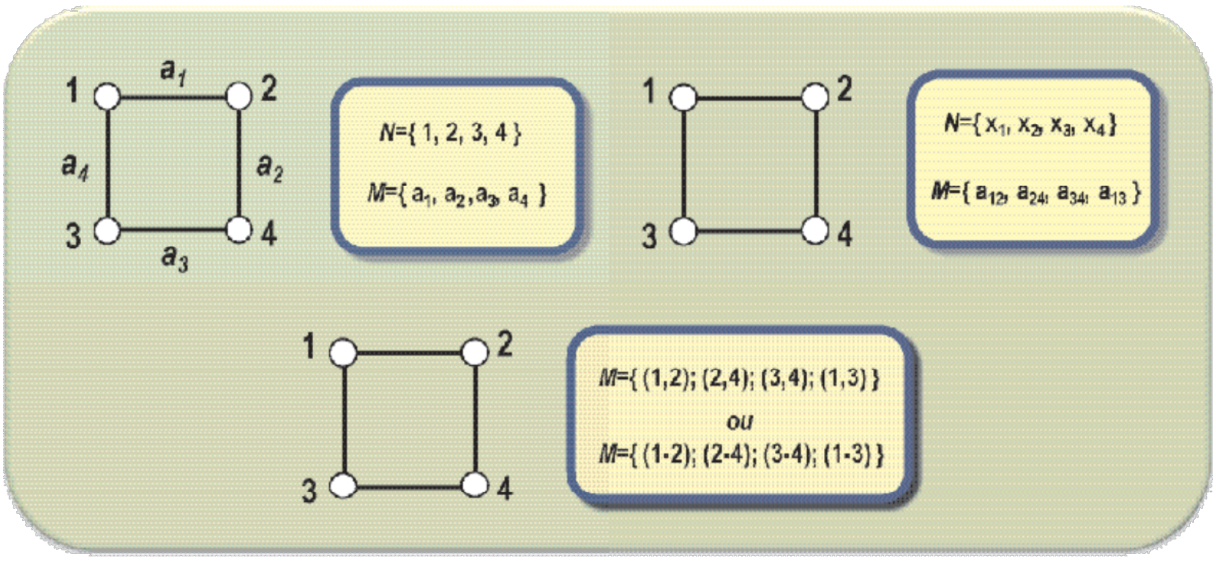


Figura 2: Exemplo de como alguns grafos podem ser representados – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

2.1.1 Casos Específicos

- **Grafo Finito**: **V** e **E** são finitos.
- **Grafo Trivial**: Possui apenas um vértice.
- **Grafo Nulo**: Não possui arestas.

2.1.2 Laços

Um laço é uma aresta que possui sua origem e destino em um mesmo vértice, ou seja, incide em um único vértice.

Exemplo:

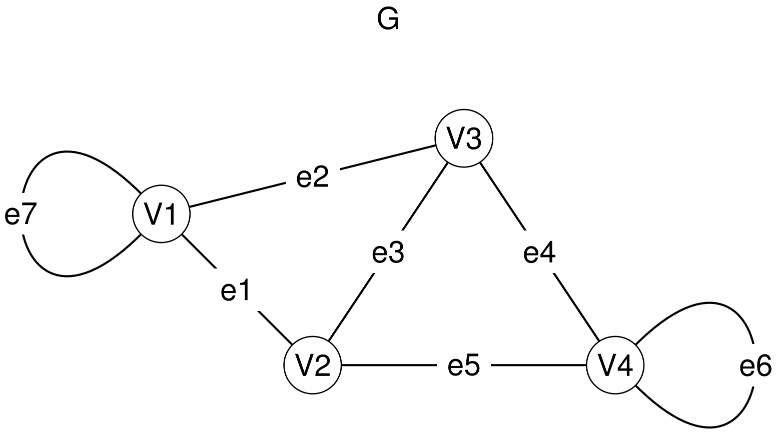


Figura 3: Exemplo de grafo com laços

As arestas **e6** e **e7** são laços.

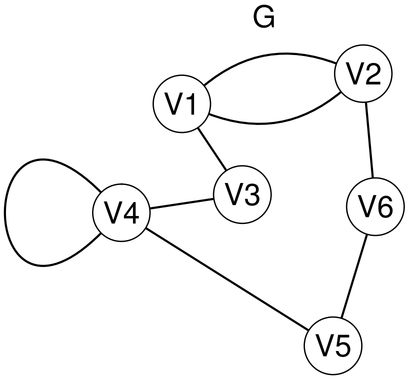
2.2 Representação matricial de um grafo

Para fins de representação não-gráfica dos grafos utiliza-se da matriz de adjacência ou da matriz de incidência.

2.2.1 Matriz de adjacência |A|

A matriz de adjacência consiste em uma matriz com **n**-linhas e **n**-colunas, sendo **n** cada vértice do grafo. Os elementos da matriz representam as arestas do grafo, portanto, trata-se da relação de conexões entre seus vértices.

Exemplo:



A (G):

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
V1	0	2	1	0	0	0
V2	2	0	0	0	0	1
V3	1	0	0	1	0	0
V4	0	0	1	1	1	0
V5	0	0	0	1	0	1
V6	0	1	0	0	1	0

Figura 4: Exemplo de matriz de adjacência

Sendo o elemento **aij** o número de arestas entre a linha **Vi** e a coluna **Vj**.

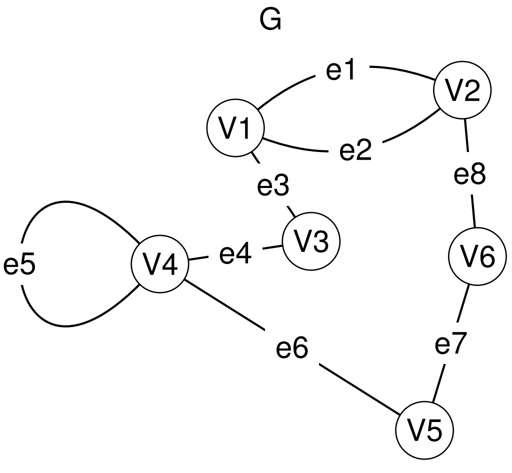
Note que por os elementos das linha e colunas se repetirem ocorre um espelhamento diagonal das arestas, ou seja, para a análise do grafo basta observar uma de suas metades.

obs: O algoritmo de análise de grafos trabalha a partir dessa matriz.

2.2.2 Matriz de incidência |M|

A matriz de adjacência **M (G)** é uma matriz com |**V**| linhas e |**E**| colunas, tal que seus elementos (**aij**) representam quantas vezes a aresta **ej** incide no vértice **Vi**.

Exemplo:



M (G):

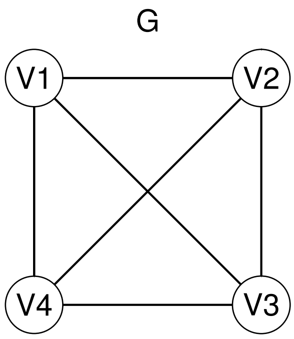
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
V1	1	1	1	0	0	0	0	0
V2	1	1	0	0	0	0	0	1
V3	0	0	1	1	0	0	0	0
V4	0	0	0	1	2	1	0	0
V5	0	0	0	0	0	1	1	0
V6	0	0	0	0	0	0	1	1

Figura 5: Exemplo de matriz de incidência

Note que, por uma aresta estar conectada sempre em dois pontos, a soma dos elementos de cada coluna é 2.

2.3 Grafo simples

Um grafo é simples se não possui laços ou arestas múltiplas, logo, tendo-se como exemplo um grafo **G** possuindo **V** $= \{v1, v2, v3, v4\}$ e **E** $= \{e1, e2, e3, e4, e5\}$, sua matriz de adjacência **A** pode ser dada por:



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 6: Exemplo de grafo **G** e matriz de adjacência **A (G)** simples

obs: Note que a diagonal principal da matriz indica se existem ou não, laços. Um número maior que 1 indicaria que existem mais de uma aresta ligando os dois vértices. Podem existir vértices de grau 0 em grafos simples.

2.3.1 Grafo bipartido

É um tipo de grafo simples o qual, uma vez que seus vértices são divididos em subconjuntos **X** e **Y**, possui cada aresta com uma de suas pontas no conjunto **X** e outra em **Y**.

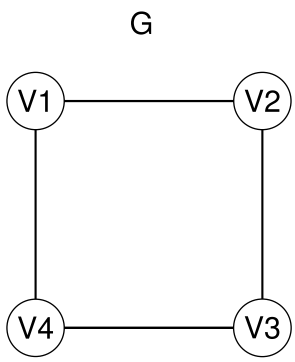


Figura 7: $X = \{V1, V2\}$ $Y = \{V3, V4\}$

Um grafo é dado por **Bipartido completo** quando cada vértice em X é adjacente a todo vértice em Y. É escrito através da letra **K**mn, sendo |x| = m e |y| = n.

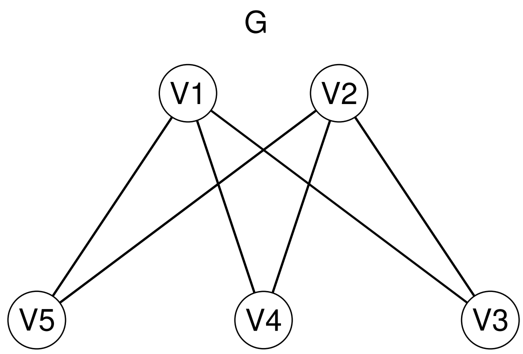
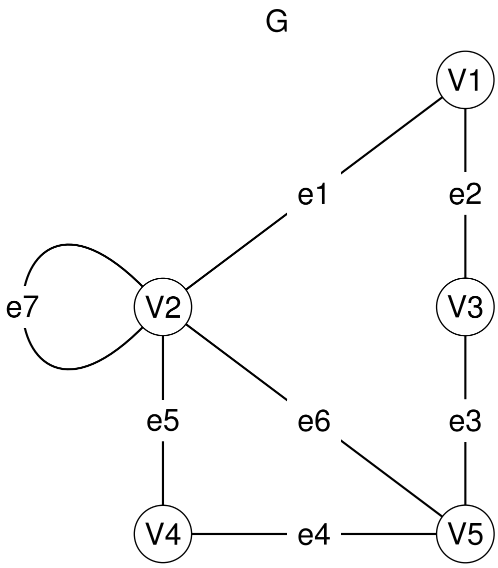


Figura 8: $X = \{V1, V2\}$ $Y = \{V3, V4, V5\}$

2.4 Graus de um vértice

Cada vértice **V** de um grafo **G = (V, E)** possui um número **n** de arestas incidentes. Esse número **n** é denotado como o grau do vértice.



A (G):

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	0	1	1	0	0
V2	1	1	0	1	1
V3	1	0	0	0	1
V4	0	1	0	0	1
V5	0	1	1	1	0

Graus:

	Grau
V1	2
V2	5
V3	2
V4	2
V5	3

Figura 9: Grafo **G**, matriz de adjacência **A (G)** e tabela de graus dos vértices do grafo **G**

Note que os laços incidem duas vezes no vértice, portanto ele equivale a 2 graus, como o caso da aresta **e7**.

Para calcular o grau em uma matriz adjacência basta somar todos os elementos da linha ou coluna ignorando o elemento da diagonal principal + 2 * o elemento da diagonal principal, que indica os laços.

2.5 Sequência gráfica

A sequência de graus de um grafo **G = (V, E)** é a sequência não-crescente do grau de todos os vértices **V** desse grafo.

Para o caso da figura 9 a sequência seria:

5, 3, 2, 2, 2

3 Resultados

O algoritmo ou *script* mostrou-se eficaz ao tratar e testar as mais diversas matrizes de adjacência inseridas. Este, porém, não realizando testes quanto à legitimidade dos dados, confiando totalmente no usuário. Foram realizados 10 testes com grafos contendo variadas quantidades de vértices.

Para elaboração do programa e teoria aplicada nesse relatório, foram utilizados como referência o material providenciado pelo professor, além do item de bibliografia básica “Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações”.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
O grafo é simples, pois não possui arestas múltiplas ou laços
A sequência de graus do grafo é:  [4, 4, 4, 3, 3]
O grafo possui 9 arestas
O grafo é simples e não completo
```

Figura 10: Matriz de adjacência genérica para teste de grafos simples e o respectivo *output*.

4 Conclusão

A partir da elaboração do algoritmo é possível observar a dependência entre os conceitos de grafos e a obrigatoriedade de um conhecimento prévio para este caso de algoritmo genérico, uma vez que suas respostas são também genéricas e possuem significados distintos dependendo da aplicação.

É possível observar ainda a utilidade da representação matricial, visto que um grafo dotado de excessiva complexidade se torna penoso para ser analisado graficamente. A matriz permite a automatização desse processo, que é repetitivo e padronizado.

Apesar da praticidade proporcionada pelo algoritmo, uma representação matricial não deve ser dita como a representação precisa de um grafo. Um grafo possui uma única posição relativa, no qual não é considerada em uma matriz, ou seja, a representação matricial pode ser escrita a partir de uma representação gráfica, mas não o oposto.

5 Referências bibliográficas

GOLDBARG, Marco e Elizabeth. **Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações.**1.ed.- São Paulo: Elsevier,2012.