

# Teoria dos Grafos

Grafos: Tipos, matrizes e graus de um grafo.

Leon Ferreira Bellini

RA 22218002-8

e

Guilherme Ormond Sampaio

RA 22218007-7

## 1 Introdução

Um grafo representa de forma simples e eficaz as interdependências entre os elementos de um conjunto. A utilidade da aplicação de grafos tem se mostrado presente em variadas micro e macroestruturas, como a podendo representar cidades, linhas ferroviárias, fluxo de dados ou até mesmo circuitos eletrônicos. A forma de como é representado pode ser dita como didática e facilmente compreendida. Foi elaborado um algoritmo para que fossem aplicados os diversos conceitos aprendidos em aula, este algoritmo sendo desenvolvido em **Python**, linguagem a qual permite que o programa funcione em variadas plataformas como *GNU/Linux* e *Windows*.

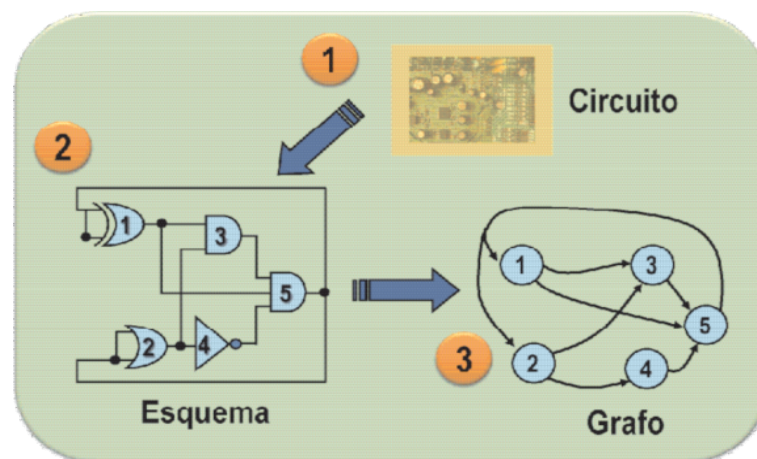


Figura 1: Circuito eletrônico representado na forma de grafo. – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

## 2 O conceito de grafos

### 2.1 Vértices, arestas e função de incidência $\varphi$

Para que haja um grafo é necessário obter o conjunto de **vértices**, dado por  $\mathbf{N} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , estes também chamados de nós, os quais representam os componentes, itens ou elementos que receberão, ou não, ligações entre si, tais ligações chamadas de **arestas**, as quais também formam um conjunto, dado por  $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

Existe, também, uma **função de incidência**  $\varphi$  (phi), a qual associa um par de vértices para cada aresta, como por exemplo,  $\varphi(e) = \{a, b\}$ , ou seja,  $e$  incide em  $a$  e  $b$ .

Pode se dizer, então, que um grafo pode ser representado como:

$$G = (N, M, \varphi)$$

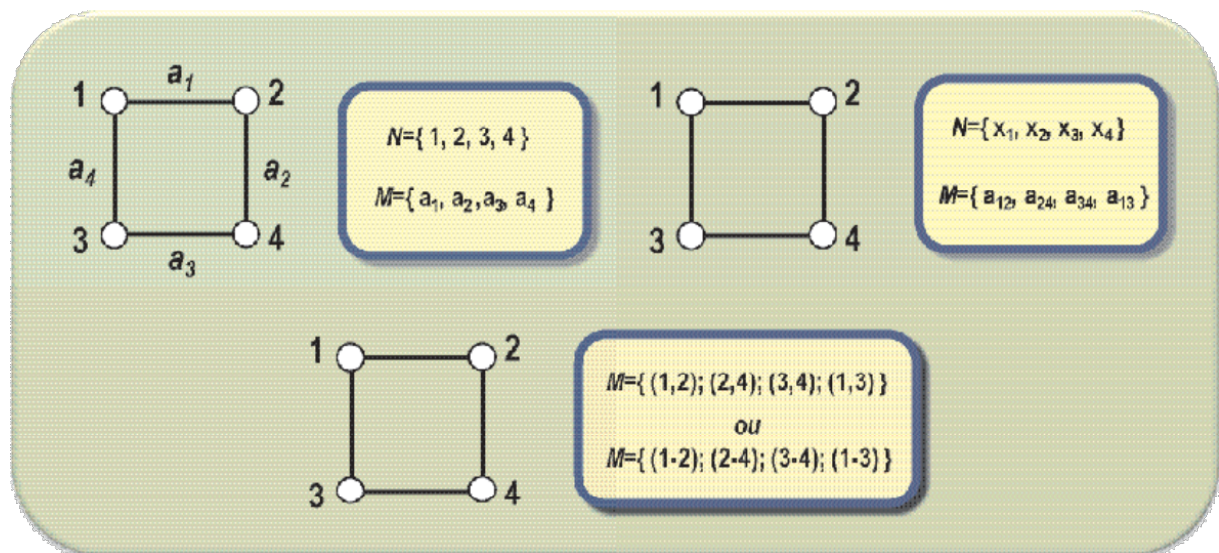


Figura 2: Exemplo de como alguns grafos podem ser representados – Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações (2014)

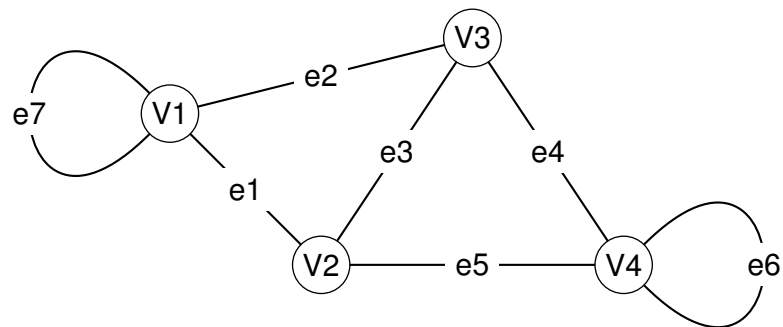
#### 2.1.1 Casos Específicos

- **Grafo Finito:**  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}$  são finitos.
- **Grafo Trivial:** Possui apenas um vértice.
- **Grafo Nulo:** Não possui arestas.

#### 2.1.2 Laços

Um laço é uma aresta que possui sua origem e destino em um mesmo vértice, ou seja, incide em um único vértice.

Exemplo:



As arestas **e6** e **e7** são laços.

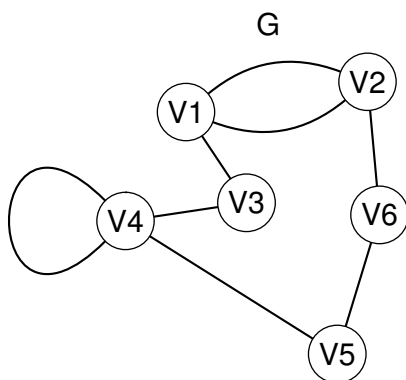
## 2.2 Representação matricial de um grafo

Para fins de representação não-gráfica dos grafos utiliza-se da matriz de adjacência ou da matriz de incidência.

### 2.2.1 Matriz de adjacência |A|

A matriz de adjacência consiste em uma matriz com **n**-linhas e **n**-colunas, sendo **n** cada vértice do grafo. Os elementos da matriz representam as arestas do grafo, portanto, trata-se da relação de conexões entre seus vértices.

Exemplo:



A (G):

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
V1	0	2	1	0	0	0
V2	2	0	0	0	0	1
V3	1	0	0	1	0	0
V4	0	0	1	1	1	0
V5	0	0	0	1	0	1
V6	0	1	0	0	1	0

Sendo o elemento **a<sub>ij</sub>** o número de arestas entre a linha **V<sub>i</sub>** e a coluna **V<sub>j</sub>**.

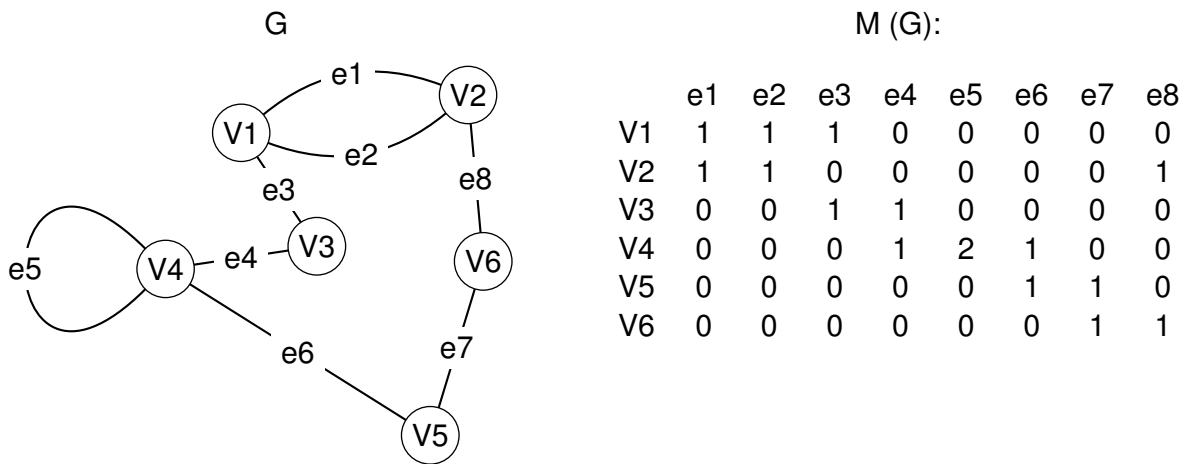
Note que por os elementos das linha e colunas se repetirem ocorre um espelhamento diagonal das arestas, ou seja, para a análise do grafo basta observar uma de suas metades.

O algoritmo de análise de grafos trabalha a partir dessa matriz, e para a sua análise foi considerado apenas uma de suas metades.

### 2.2.2 Matriz de incidência $|M|$

A matriz de adjacência  $M(G)$  é uma matriz com  $|V|$  linhas e  $|E|$  colunas, tal que seus elementos  $(a_{ij})$  representam quantas vezes a aresta  $e_j$  incide no vértice  $V_i$ .

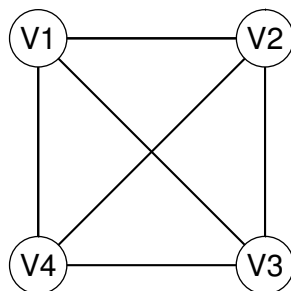
Exemplo:



Note que, por uma aresta estar conectada sempre em dois pontos, a soma dos elementos de cada coluna é 2.

## 2.3 Grafo simples

Um grafo é simples se não possui laços ou arestas múltiplas, logo, tendo-se como exemplo um grafo  $G$  possuindo  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , sua matriz de adjacência  $A$  pode ser dada por:



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**obs:** Note que a diagonal principal da matriz indica se existem ou não, laços. Um número maior que 1 indicaria que existem mais de uma aresta ligando os dois vértices. Podem existir vértices de grau 0 em grafos simples.

### 2.3.1 Grafo bipartido

É um tipo de grafo simples o qual, uma vez que seus vértices são divididos em subconjuntos **X** e **Y**, possui cada aresta com uma de suas pontas no conjunto **X** e outra em **Y**.

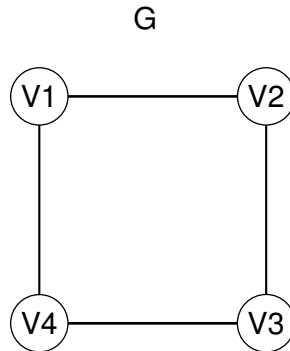


Figura 3:  $X = \{V1, V2\}$   $Y = \{V3, V4\}$

Um grafo é dado por **Bipartido completo** quando cada vértice em X é adjacente a todo vértice em Y. É escrito através da letra  **$K_{mn}$** , sendo  $|x| = m$  e  $|y| = n$ .

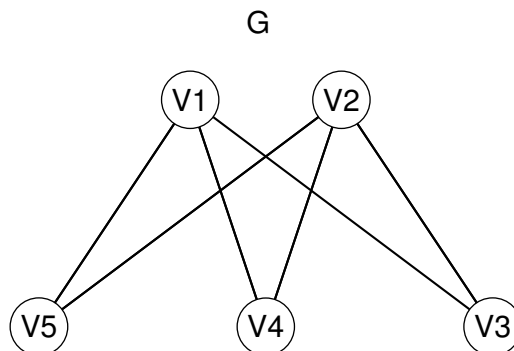
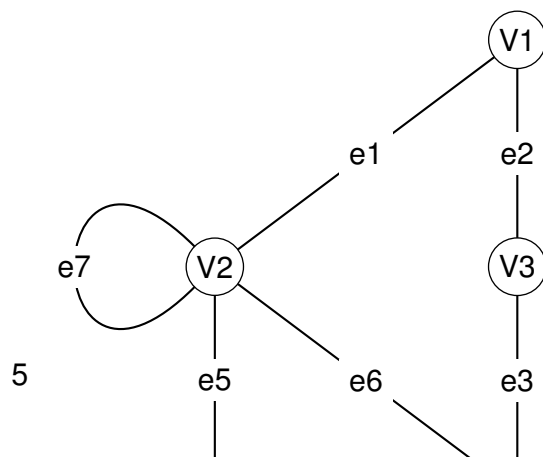


Figura 4:  $X = \{V1, V2\}$   $Y = \{V3, V4, V5\}$

### 2.4 Graus de um vértice

Cada vértice **V** de um grafo  **$G = (V, E)$**  possui um número **n** de arestas incidentes. Esse número **n** é denotado como o grau do vértice.

G:



		V1	V2	V3	V4	V5			Grau
A(G):	V1	0	1	1	0	0	Graus:	V1	2
	V2	1	1	0	1	1		V2	5
	V3	1	0	0	0	1		V3	2
	V4	0	1	0	0	1		V4	2
	V5	0	1	1	1	0		V5	3

Note que os laços incidem duas vezes no vértice, portanto ele equivale a 2 graus, como o caso da aresta **e7**.

Para calcular o grau em uma matriz adjacência basta somar todos os elementos da linha ou coluna ignorando o elemento da diagonal principal + 2 \* o elemento da diagonal principal, que indica os laços.

## 2.5 Sequência gráfica

A sequência de graus de um grafo  $G = (V, E)$  é a sequência não-crescente do grau de todos os vértices **V** desse grafo.

Para o caso da figura anterior a sequência seria:

5, 3, 2, 2, 2

## 3 Conclusão