Tests sur la proportion

Mohamed LEMDANI

MISO
Université de Lille

27 Septembre 2021

Test à un échantillon (observé/théorique)

Variable qualitative (binaire) étudiée sur une seule population (représentée par un échantillon de taille n) $\Longrightarrow$ comprendre/tester cette population pour cette variable.

- Prévalence d'une maladie, sur une région : comparer à une valeur minimale.
- Logiciel de randomisation : comparer la proportion des sujets d'un bras à 50%.

Méthodologie : comparer la valeur d'une proportion (observée) dans la population dont est issu l'échantillon à une valeur donnée (théorique).

Notations : π = valeur de la proportion dans la population, p = valeur (calculée) sur l'échantillon et π_0 = valeur théorique (connue) à laquelle on compare π.

Hypothèses : $H_0 : \{\pi = \pi_0\}$ contre $H_1 : \{\pi \neq \pi_0\}$ (cas bilatéral) ou $\{\pi <> \pi_0\}$ (unilatéral).

Données : n observations de $X \Longrightarrow x_1 = A, x_2 = B, \ldots, x_n = A \Longrightarrow p = n_A/n$.

Variable de décision : $u = \dfrac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous H_0.

Conditions d'utilisation :

- n "grand" ($n \geqslant 30$) **et**
- π_0 "ni trop petite" ($n\pi_0 \geqslant 5$) "ni trop grande" ($n(1-\pi_0) \geqslant 5$).

Choix de α et construction des zones d'acceptation/rejet à partir de la table de la $\mathcal{N}(0,1)$.

Exemple 1

Un logiciel simulant le jeu de "pile" ou "face" a été conçu afin de randomiser des groupes dans le cadre d'essais cliniques. Afin de le tester, on simule 10 000 lancers qui retournent un total de 5110 "piles". Peut-on dire que ce logiciel simule une pièce truquée au seuil de 5 % ?

Variable observée : $X =$ "Résultat du lancer", observée sur un échantillon de taille $n = 10\,000$.

$\pi = \mathbb{P}(X =$ "pile") ou proportion de "piles" sur la "population".

$\pi_0 = 1/2$ (pièce non truquée).

$H_0 : \{\pi = 1/2\}$ *versus* $H_1 : \{\pi \neq 1/2\}$.

Variable de décision : $u = \dfrac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sous H_0.

Conditions :

- $n = 10\,000 \geqslant 30$ $\surd$.
- $n\pi_0 = 10\,000 \times (1/2) = 5\,000 \geqslant 5$ et $n(1 - \pi_0) = 10\,000 \times (1/2) = 5\,000 \geqslant 5$ $\surd$.

Exemple 1 (suite)

Calculs : $p = 5\,110/10\,000 = 0.511$

$$\Longrightarrow u_c = \frac{0.511 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{10\,000}}} = \frac{0.011 \times \sqrt{10\,000}}{\sqrt{0.5^2}} = 1.1/0.5 = 2.2.$$

Zone de non-rejet ($\alpha = 5\%$) : $u_c \notin [-1.96, 1.96] \Longrightarrow$ rejet de H_0 au seuil de 5% (au risque de 5%, on peut conclure que le logiciel simule une pièce truquée).

$G(a) = 0.025 \Longrightarrow a = 1.96$

Calcul de la p-value : Rejet à 5% $\Longrightarrow$ rejet pour tout $\alpha > 5\%$.

Pour quel α minimal peut-on rejeter ? C'est la p-value (niveau de signification) p du test.

$p = 2 \times G(2.2) \approx 2 \times 0.014 = 0.028 = 2.8\%$.

Comparaison de deux proportions observées

Variable qualitative (binaire) X étudiée sur deux populations représentées, chacune, par un échantillon (tailles respectives n_1 et n_2) $\Longrightarrow$ comparer des proportions de X entre ces populations.

- comparer les taux d'efficacité de deux médicaments,
- comparer le taux de présence d'un caractère entre deux populations.

Paramètres étudiés : proportions d'une valeur A de X sur les populations (π_1 et π_2).

Objectif : Comparer ces deux paramètres

Hypothèses : $H_0 : \{\pi_1 = \pi_2\}$ contre $H_1 : \{\pi_1 \neq \pi_2\}$ (cas bilatéral), $\{\pi_1 <> \pi_2\}$ (unilatéral).

Variable de décision : $u = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous H_0.

p_1, p_2 : proportions respectives calculées sur les deux échantillons.

p : proportion commune (calculée sur le regroupement des deux échantillons).

Conditions d'utilisation :

- n_1 et n_2 "grands" ($\geqslant 30$) **et**
- p "ni trop petite" ($n_1 p, n_2 p \geqslant 5$) "ni trop grande" ($n_1(1-p), n_2(1-p) \geqslant 5$).

Exemple

Exemple 2 : On souhaite comparer l'effet d'un traitement à celui d'un placebo. Pour cela, on randomise 100 sujets en deux bras paritaires. À l'issue de l'étude, on constante une amélioration pour 30 patients traités contre 20 patients placebo. Peut-on dire que le traitement est plus efficace que le placebo au seuil de 5% ?

Variable observée : $X =$ "Amélioration" (oui/non), observée sur deux échantillons de tailles $n_1 = n_2 = 50$ (1= 'Traités' et 2 = 'Placebos').

Données : $p_1 = \frac{30}{50} = 0.6, p_2 = \frac{20}{50} = 0.4$ et $p = \frac{30+20}{50+50} = \frac{50}{100} = 0.5$ et $1 - p = 0.5$.

$H_0 : \{\pi_1 = \pi_2\}$ *versus* $H_1 : \{\pi_1 > \pi_2\}$.

Variable de décision : $u = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous H_0.

Conditions :

- $n_1 = n_2 = 50 \geqslant 30 \surd$.
- $n_1 p = n_2 p = n_1(1-p) = n_2(1-p) = 50 \times 0.5 = 25 \geqslant 5 \surd$.

Exemple 2 (suite)

$H_0 : \{\pi_1 = \pi_2\}$ *versus* $H_1 : \{\pi_1 > \pi_2\}$.

$p_1 = 0.6, p_2 = 0.4$ et $p = 1 - p = 0.5$.

$$u = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ sous } H_0.$$

Zone de rejet (unilatérale, $\alpha = 5\%$) : $u_c \in [1.6449, +\infty[$.

rejet $\Longrightarrow$ choix de $H_1 \Longrightarrow \pi_1 > \pi_2 \Longrightarrow p_1 > p_2 \Longrightarrow u > 0$ (zone de rejet du côté de $+\infty$).

$G(a) = 0.05 \Longrightarrow a = 1.6449$.

Calculs : $u_c = \dfrac{0.6 - 0.4}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{50} + \frac{0.5\times0.5}{50}}} = \dfrac{0.2}{\sqrt{0.5^2/25}} = \dfrac{0.2 \times 5}{0.5} = 2.$

Rejet de H_0 au seuil de 5% (on seuil de 5% on peut conclure à un traitement plus efficace que le placebo).

Niveau de signification (p-value) :

$p = G(2) \approx 0.023(2.3\%)$.