Variables aléatoires et lois usuelles

I) Variables aléatoires

A) Discrètes

- Variable aléatoire discrète X : application $X : \begin{cases} \Omega \to E \subseteq \mathbb{N} \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$.

  Afin de modéliser l'expérience aléatoire, on cherche à déterminer la probabilité de chaque valeur possible de X.

Exemple :
Considérons une famille de 3 enfants tirée au hasard (expérience aléatoire). On s'intéresse au nombre de garçons. On posera donc X : « nombre de garçons ».
L'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire est :

Ω = {♀♀♀ ; ♀♀♂ ; ♀♂♀ ; ♀♂♂ ; ♂♀♀ ; ♂♀♂ ; ♂♂♀ ; ♂♂♂}

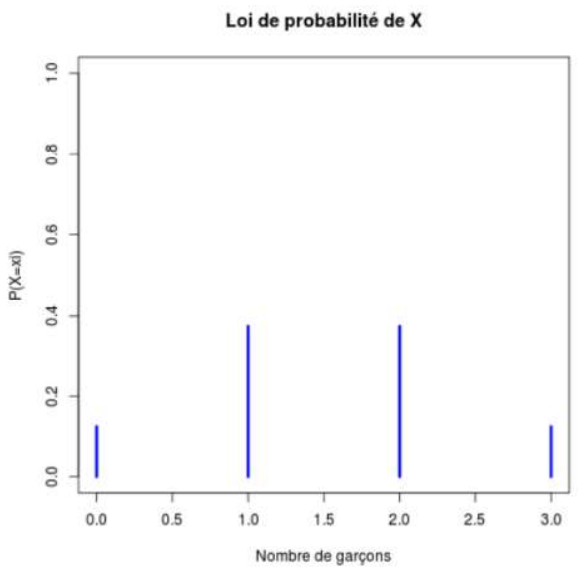
Associons à chaque éléments ω de Ω le nombre de garçons :

ω	♀♀♀	♀♀♂	♀♂♀	♀♂♂	♂♀♀	♂♀♂	♂♂♀	♂♂♂
X	0	1	1	2	1	2	2	3

Ici, l'ensemble $E = \{0,1,2,3\}$.

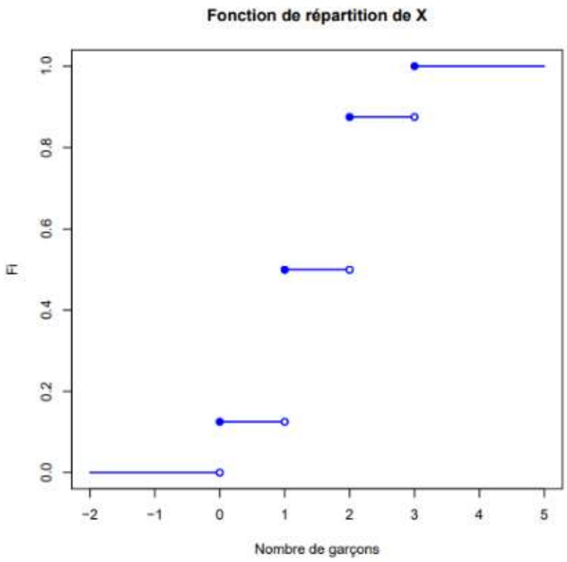
- Loi de probabilité : association de l'ensemble E et $\forall x \in X(\omega); \mathbb{P}(X = x) \geq 0$.

x_i	$P(X = x_i)$
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$



- <u>Fonction répartition</u> : application F : $\begin{cases} E \to [0,1] \\ x \to \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y \leq x} \mathbb{P}(X = y) \end{cases}$.

x	$F(x) = P(X \leq x)$
0	1/8
1	4/8
2	7/8
3	1



- <u>Espérance</u> : quantité notée $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.
  $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda$
- <u>Variance</u> : quantité notée $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
  $\mathbb{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{V}(X)$
- <u>Ecart-type</u> : quantité notée $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

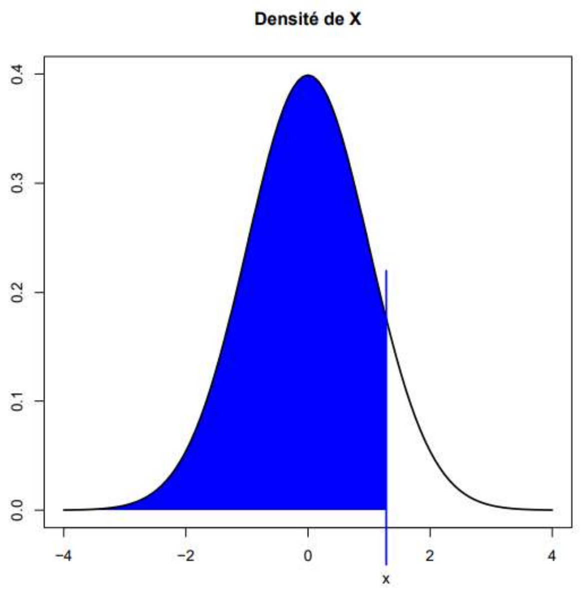
A) Continues

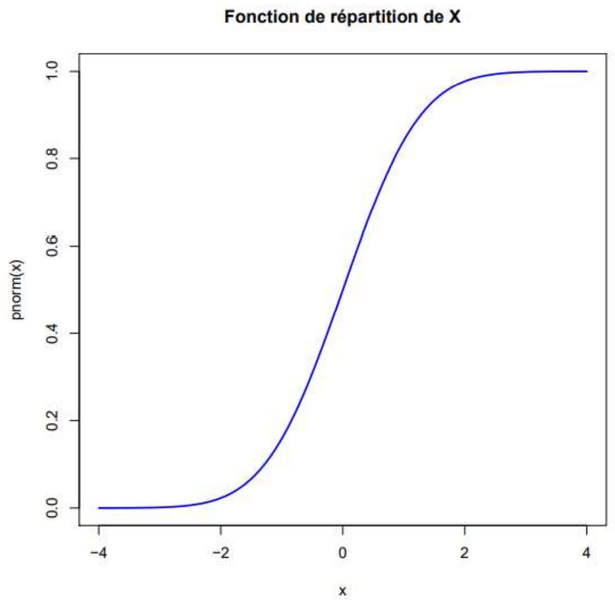
- Variable aléatoire continue X : application $X : \begin{cases} \Omega \to E \subseteq \mathbb{R} \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$.

  Comme pour les variables aléatoires discrètes, on résume une variable aléatoire continue par sa loi de probabilité, appelée densité de probabilité.

- Densité de probabilité de X : fonction $f > 0$ tq $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

- Fonction de répartition (f.d.r) : application $F : \begin{cases} E \to [0,1] \\ x \to \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.





- Espérance : quantité notée $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$.
- Variance : quantité notée $\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(x)dx = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- Ecart-type : quantité notée $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

❖ LOI DES GRANDS NOMBRES :

Si on répète *N* fois une expérience dans laquelle la probabilité d'apparition d'un événement *A* est *p*, la fréquence de cet événement tend vers *p* quand $N \to \infty$.

II) Lois usuelles

A) Discrètes

1) Loi uniforme

Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{U}(1/n)$ si on a :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et } \forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Ainsi on obtient :

- $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{n}+1}{2}$
- $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2) Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}er(p)$ si on a :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = k$$

Ainsi, on obtient :

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$

3) Loi binomiale

Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si on a :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ainsi on obtient :

- $\mathbb{E}(X) = np$
- $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

4) Loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$; si $n \to \infty$ et $p \to 0$, alors $X \to \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$. On a donc :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Ainsi on obtient :

- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$

B) Continues

1) Loi uniforme

Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi on a :

- $\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2}$
- $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2) Loi normale

Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi on a :

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

- Variable centrée réduite : Soit $X \sim N(\mu,\sigma)$, alors $X^* = Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

3) Loi du χ^2

Soit $(Y_n)_n$, avec $\forall n, Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$. On définit la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$.
On dit que $Y \sim \chi^2(n)$.

Ainsi on obtient :

- $\mathbb{E}(X) = n$
- $\mathbb{V}(X) = 2n$

4) Loi de Student

Soient $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \sim \chi^2(n)$ tq $X \perp Y$. On définit la variable aléatoire $T = \frac{Y}{\sqrt{X/n}}$.

On dit que $T \sim \mathcal{S}tu(n)$.
Ainsi on obtient :

- $\mathbb{E}(T) = 0$ si $n > 1$; FI sinon
- $\mathbb{V}(T) = \frac{n}{n-2}$ si $n > 2$; ∞ si $1 < k \leq 2$; FI sinon

B) Théorème de convergence

Soit $X \sim B(n,p)$. Si $n \geq 30$ et $np \leq 10$, alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = np$.

Soit $X \sim B(n,p)$. Si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$, alors $X \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Si $\lambda \geq 10$, alors $X \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$

- THEOREME CENTRAL LIMITE (TCL) :
  Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoire indépendantes et de même loi, avec $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \frac{S_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
  Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$, où Φ est la f.d.r de $\mathcal{N}(0,1)$.

Le TCL d'applique quelque soit la loi de probabilité suivie la variable aléatoire X.