
Flocon Documentation

Francesco De Comité

Dec 12, 2024

Contents

1	Présentation	1
2	Objectifs	3
3	La physique des flocons	5
3.1	Le flocon et ses alentours	5
3.2	La dynamique du flocon	6
4	La simulation d'un flocon	9
4.1	L'algorithme	9

CHAPTER 1

Présentation

Comment se développent les cristaux de neige ? Ils semblent tous différents, mais partagent un certain nombre de points communs, la symétrie hexagonale, par exemple. Ce projet a pour but d'implémenter une simulation vraisemblable de la génération des cristaux de neige, à partir d'une description simplifiée de la physique en oeuvre.

On se base sur un article de Janko Gravner et David Griffeath : *Modeling Snow Crystal Growth II* (2007)

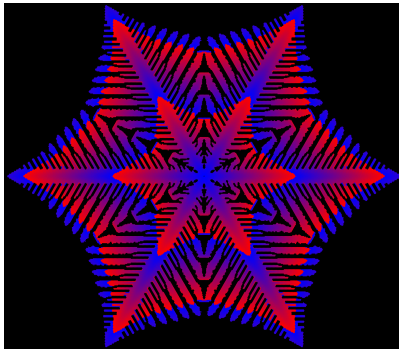


Fig. 1: Un exemple de flocon

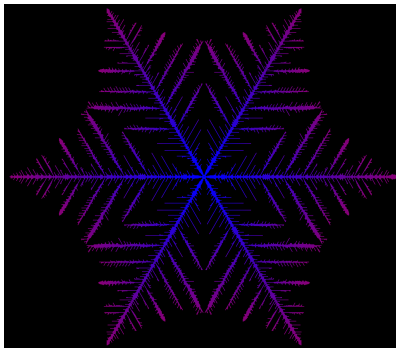


Fig. 2: Encore un flocon

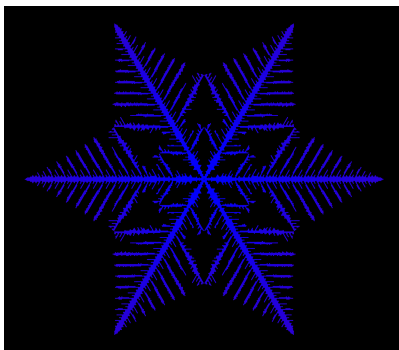


Fig. 3: On ne s'en lasse pas !

CHAPTER 2

Objectifs

Écrire un programme qui permettra d'afficher un flocon de neige obtenu par l'algorithme décrit plus bas. On affichera soit le résultat final, soit une animation montrant la croissance progressive du cristal en fonction du temps.

La génération d'un cristal dépend d'un certain nombre de constantes, chaque choix de constantes conduisant à des résultats différents. On peut chercher les constantes permettant de reproduire fidèlement des cristaux existants, ou bien *jouer* avec ces constantes pour obtenir des cristaux chimériques.

3.1 Le flocon et ses alentours

Un flocon se construit peu à peu. Au départ, on a un cristal de base gelé (une molécule plate de forme hexagonale) baignant dans un environnement froid et saturé de vapeur d'eau (communément appelé nuage). Chaque *pixel* de l'espace entourant le flocon contient une certaine quantité d'eau sous une des trois formes suivantes :

- Quasi-liquide : de l'eau en train de geler, au contact du cristal déjà formé.
- Gelée : de la glace qui fait donc partie du cristal en formation.
- De la vapeur d'eau en suspension

L'eau sous forme gelée (deuxième forme ci-dessus) ne se rencontre que dans le cristal ou bien à sa *frontière*.

L'eau sous la forme quasi-liquide ne se forme qu'au contact de l'eau gelée, donc uniquement à la frontière du cristal.

Le cristal lui-même ne contient que des cellules d'eau gelée, on n'y rencontre donc pas d'eau sous forme quasi-liquide ou sous forme de vapeur.

La vapeur est partout, sauf dans le cristal.

Formellement, l'état du système en un point x peut être décrit par quatre paramètres :

- L'appartenance ou non au cristal.
- La proportion d'eau quasi-liquide au point x , qu'on notera $b(x)$.
- La proportion de glace au point x , qu'on notera $c(x)$.
- La quantité d'eau sous forme de vapeur au point x , qu'on notera $d(x)$.

Si le point x appartient au cristal, $b(x) = 0$ et $d(x) = 0$. (mais en pratique, on ne s'occupe plus des points du cristal, car ils n'évolueront plus).

Seuls les points à la frontière du cristal auront des valeurs non nulles pour $b(x)$ et $c(x)$.

À la naissance du flocon, une seule cellule est gelée, et tout l'environnement contient une quantité de vapeur égale notée ρ .

Le plus petit cristal étant un hexagone, chaque unité d'espace sera entourée de six voisins au plus.

3.2 La dynamique du flocon

En chaque point x de l'entourage du flocon en création, il se passe un ou plusieurs des phénomènes suivants :

- diffusion
- gel
- attachement
- fonte
- bruit.

3.2.1 Diffusion

La vapeur présente en x se répand dans les six cellules voisines, et vice-versa. On recalcule donc la quantité de vapeur présente en x en faisant la moyenne de ce qui se trouve en ce point et chez ses six voisins. La nouvelle quantité $d'(x)$ se calcule comme suit :

Pour un point n'appartenant ni au cristal, ni à sa frontière :

$$d'(x) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \text{Voisins}(x)} d(y)$$

Pour un point x de la frontière, chaque $d(y)$ pour y appartenant au cristal sera remplacé par $d(x)$.

Il n'y a pas diffusion pour les points appartenant au cristal.

3.2.2 Gel

Sous l'influence du froid en provenance du cristal, en chaque point x de la frontière, une certaine proportion κ de la vapeur se transforme en glace, tandis que le reste, $(1 - \kappa)$ passe en phase quasi-liquide.

$$\begin{aligned} b'(x) &= b(x) + (1 - \kappa)d(x) \\ c'(x) &= c(x) + \kappa d(x) \\ d'(x) &= 0 \end{aligned}$$

3.2.3 Attachement

C'est le point clé de l'algorithme, où on décide si un point de la frontière devient un point du cristal. Plus x sera entouré de points appartenant déjà au cristal, plus il sera facile de l'y agglomérer. D'autre part, plus $b(x)$ sera élevé, plus x aura de chance de se coller au cristal.

On calcule donc le nombre de voisins de x appartenant au cristal. Selon le nombre de voisins, on fixera un seuil qui dira si x devient complètement solide.

- Un point x ayant un ou deux voisins appartenant au cristal et tel que $b(x) > \beta$ s'agglomère au cristal.
- Un point x ayant trois voisins appartenant au cristal s'y collera à l'une des deux conditions suivantes :
 - ou bien $b(x) \geq 1$

– ou bien $\sum_{y \in \text{Voisins}(x)} d(y) < \theta$ et $b(x) \geq \alpha$.

- Finalement, un point ayant au moins quatre voisins dans le cristal s'y attache sans condition.

Une fois qu'un point est attaché au cristal, il devient complètement solide et donc $c'(x) = c(x) + b(x)$, $b'(x) = d'(x) = 0$.

3.2.4 Fonte

L'action contraire du gel : un point de la frontière peut devenir plus liquide (moins gelé). Une proportion μ d'eau quasi-liquide et une proportion γ de glace repassent en phase vapeur.

$$\begin{aligned} b'(x) &= (1 - \mu)b(x) \\ c'(x) &= (1 - \gamma)c(x) \\ d'(x) &= d(x) + \mu b(x) + \gamma c(x) \end{aligned}$$

3.2.5 Bruit

Pour avoir un comportement moins déterministe, on peut ajouter une cinquième étape introduisant le hasard, en faisant fluctuer la concentration de vapeur en chaque point:

$$d'(x) = (1 \pm \sigma)d(x)$$

La simulation d'un flocon

4.1 L'algorithme

A partir des informations codant la forme actuelle du flocon (voir plus bas), on calcule la configuration suivante du flocon en appliquant les quatre actions dans l'ordre :

- Diffusion
- Gel
- Attachement
- Fonte

On peut ajouter l'étape *Bruit*, mais on peut s'en passer dans un premier temps.

On partira d'un flocon élémentaire (une seule cellule au centre du tableau), et on appliquera les transformations un grand nombre de fois. À intervalle régulier, on affichera (ou on sauvera dans un fichier) une représentation graphique de l'état courant du flocon. La bibliothèque PIL contient une classe *Image* et des méthodes permettant de tracer des cercles ou des polygones (hexagones) bien pratiques pour représenter un pavage hexagonal. Si on mémorise le moment où une cellule arrive dans le cristal, on peut lui attribuer un code couleur qui permettra de voir sur une seule image l'évolution du cristal dans le temps.

Si on compte les paramètres apparaissant dans les différentes étapes décrites ci-dessus, on arrive à un total de neuf :

- ρ : la densité initiale de vapeur dans chaque cellule au début de la simulation.
- κ
[la proportion de vapeur qui se transforme en glace pour une] cellule de la frontière.
- β, θ, α
[les trois coefficients qui interviennent lors] de la phase d'*attachement*.
- μ, γ : les coefficients de la phase de *fonte*.
- σ : La perturbation aléatoire.

En faisant varier ces coefficients, on peut explorer l'ensemble des flocons possibles. A vous de jouer !

Les calculs numériques mis en oeuvre dans ce projet ne sont pas forcément très stables, il se peut que pour un même jeu de coefficients, ou pour des coefficients très proches, des programmes différents donnent des résultats différents.

4.1.1 La plaque de support

Le cristal se développe en deux dimensions, on représentera l'ensemble des cellules élémentaires par un tableau carré à deux dimensions représentant l'ensemble des cellules.

On peut donc identifier les cellules par leur ligne et leur colonne.

Chaque cellule aura 6 voisins (pavage hexagonal), sauf sur les bords et dans les coins.

Au départ, seule la cellule centrale est gelée, toutes les autres ne contiennent que de la vapeur, avec la densité uniforme ρ .

4.1.2 Les cellules

Chaque cellule contient quatre informations :

- Son appartenance ou non au cristal.
- la quantité d'eau sous forme quasi-liquide présente dans cette cellule ($b(x)$)
- La quantité d'eau gelée ($c(x)$)
- La quantité de vapeur ($d(x)$)

Pour un point appartenant au cristal, on n'aura plus besoin des trois quantités $b(x), c(x), d(x)$ dans la suite du programme.

Un point appartenant à la frontière (c'est à dire dont un des voisins au moins appartient au cristal) a des valeurs significatives pour ces trois quantités.

Un point n'appartenant ni à la frontière ni au cristal ne contient que de l'eau en phase vapeur.

4.1.3 La structure de données

Pour avoir un cristal contenant un bon niveau de détail, il faut choisir un nombre de cellules important (plusieurs centaines de lignes et autant de colonnes). Les temps de calcul risquent d'être importants, il faut donc tenter de les réduire.

Le calcul de la diffusion concerne toutes les cellules, il faudra donc balayer tout le tableau, c'est l'étape la plus coûteuse en temps de calcul et il n'y a pas trop de possibilités de l'accélérer à priori. On peut cependant éviter de recalculer tout le temps les coordonnées des voisins de la cellule (i, j) en les précalculant une fois pour toutes et en les rangeant dans un dictionnaire indicé par (i, j) .

Par contre, les trois étapes suivantes ne concernent que les cellules de la frontière. On peut construire un ensemble contenant les coordonnées (i, j) des cellules de la frontière, qui sera mis à jour chaque fois qu'une cellule changera de zone (gel ou fonte).