Matematyka Dyskretna – Lista 6 – 04-24.04.2023r.

1. Jeżeli na 3 półkach znajduje się 11 książek, to na którejś z nich muszą znajdować się nie więcej niż 3 książki, a na którejś muszą leżeć co najmniej 4 książki.
2. Udowodnić, że każdy wielościan zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.
3. Pokazać, że dwa dowolne prostopadłościany można ułożyć jeden na drugim tak, aby nic nie wystawało.
4. Pokazać, że:
   (a) wśród 20 punktów rzuconych w trójkąt równoboczny o boku 1 znajdziemy przynajmniej 3 we wzajemnej odległości nie większej niż $1/3$,
   (b) wśród 100 punktów rzuconych w sześciokąt foremny o boku 1 znajdziemy przynajmniej 2 we wzajemnej odległości nie większej niż $1/4$,
   (c) wśród 25 punktów rzuconych w kwadrat o boku 2 znajdziemy przynajmniej 7 we wzajemnej odległości nie większej niż $\sqrt{2}$,
   (d) wśród 25 punktów rzuconych w kwadrat o boku 1 znajdziemy przynajmniej 3 we wzajemnej odległości mniejszej niż $3/7$.
   (e) wśród 100 punktów rzuconych w sześcian (foremny) o boku 1 znajdziemy przynajmniej 4 we wzajemnej odległości mniejszej niż $3/5$.
5. (a) A jest 9-elementowym podzbiorem zbioru $\mathbb{Z} \cap [1, 30]$. Wykazać, że w zbiorze A istnieją dwa różne podzbiory 4-elementowe o tej samej sumie elementów.
   (b) B jest 10-elementowym podzbiorem zbioru $\mathbb{Z} \cap [0, 100]$. Pokazać, że w B istnieją dwa rozłączne podzbiory o tej samej sumie elementów.

6.* Ze zbioru $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ wybieramy $n + 1$ różnych liczb. Pokazać, że
   (a) istnieje para liczb, których suma wynosi $2n + 1$,
   (b) istnieje para liczb względnie pierwszych,
   (c) istnieje para liczb, w których jedna z liczb dzieli drugą.

7. Rzucamy dwiema kostkami. Przy ilu rzutach można mieć pewność, że powtórzy się suma:
   (a) liczb oczek.
   (b) odwrotności liczb oczek.
8. Studenci zdają jeden egzamin. Możliwe oceny 2, 3, 4. Ile musi być co najmniej studentów, abyśmy mieli pewność, że co najmniej 10 studentów będzie miało takie same oceny? A ilu musiałoby zdawać, gdyby były 3 egzaminy?
9. Spośród 100 studentów 50 uczy się francuskiego, 40 łaciny, a 20 obu tych języków. Ilu z nich nie uczy się ani francuskiego, ani łaciny?
10. W pewnej klasie 20 uczniów zdaje maturę z matematyki, 16 z geografii i 14 z fizyki. Ilu jest uczniów w tej klasie, jeżeli każdy z nich zdaje maturę przynajmniej z jednego z przedmiotów, nikt nie zdaje matury z wszystkich z trzech przedmiotów, 10 uczniów zdaje matematykę i fizykę, 6 matematykę i geografię, a 4 fizykę i geografię.
11. W pewnym klubie jest 10 osób grających w szachy, 15 grających w brydża i 12 w pokera. Spośród nich 5 gra w szachy i brydża, 3 w szachy i pokera, a 2 we wszystkie gry. Ile osób jest w tym klubie?
12. W 30 osobowej klasie 20 uczniów uczy się łaciny, 14 greki, a 10 hebrajskiego. Jeśli żaden z uczniów nie uczy się wszystkich trzech języków, a ośmioro nie uczy się żadnego, to ilu uczy się greki i hebrajskiego?
13. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 70 i względnie pierwszych z: a) 70 b) 90?
14. Ile liczb naturalnych w przedziale [1,300] dzieli się przez którąś z liczb 4, 10, 15?
15. Ile liczb naturalnych z przedziału od 1 do 250 **nie** jest względnie pierwszych z 7! ?