ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 5

Transformacja Laplace'a. Całka Laplace'a.
Transformacja odwrotna Laplace'a.

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania transformacji Laplace'a

- rozwiązywanie równań różniczkowych (tj. zamiana ich na równania algebraiczne);
- w analizie liniowych układów dynamicznych;
- w teorii obwodów elektrycznych.

TRANSFORMACJA LAPLACE'A
CAŁKA LAPLACE'A

Funkcję zespoloną $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t nazywamy ***oryginałem***, jeżeli spełnione są warunki
(i) $f(t)$ oraz $f'(t)$ są przedziałami ciągłe dla $0 \leqslant t < \infty$, tzn. mają w każdym skończonym przedziale co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, (czyli granice jednostronne w tym punkcie są skończone),
(ii) $f(t) = 0$ dla $-\infty < t < 0$, tzn. funkcja jest wygaszona dla wartości ujemnych,
(iii) $f(t)$ jest funkcją rzędu wykładniczego o wskaźniku λ_0, tzn. istnieją takie stałe $\lambda_0 \geqslant 0$ i $M > 0$, że dla każdego t spełniona jest nierówność
$$|f(t)| < Me^{\lambda_0 t}.$$

Przekształceniem albo ***transformacją Laplace'a*** nazywamy takie przekształcenie (operację), które każdemu oryginałowi - funkcji $f(t)$ przyporządkowuje funkcję zespoloną $F(s)$ zmiennej zespolonej s daną wzorem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

gdzie $s = \lambda + \omega i$.

Matematyka zawdzięcza **Laplace'owi (1749–1827)** oprócz rozwinięcia teorii równań różniczkowych **(przekształcenie Laplace'a, laplasjan)** i stworzenie rachunku prawdopodobieństwa, także **twierdzenie o rozwinięciu wyznacznika (1772)**. Później zajmował się badaniem równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu oraz równań różnicowymi cząstkowych. Przy obliczaniu całek oznaczonych zastosował zespolone granice całkowania, jak również zespolone podstawienia. Ważne znaczenie miały również prace Laplace'a w dziedzinie fizyki molekularnej, ciepła, akustyki, elektryczności i optyki, (m.in. podał metodę obliczania prędkości dźwięku w powietrzu).

Całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ może być zbieżna lub rozbieżna. Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem o wskaźniku λ_0, (zwanym ***wskaźnikiem wzrostu oryginału*** $f(t)$), to całka ta jest bezwzględnie zbieżna w półpłaszczyźnie $Re(s) = \lambda > \lambda_0$.

Funkcję e^{-st} nazywamy ***jądrem całki Laplace'a***. Funkcję $F(s)$ nazywamy ***obrazem laplasowskim funkcji*** $f(t)$ lub ***transformatą Laplace'a*** i oznaczamy symbolem $L(f)$. Mamy wtedy $F(s) = L(f) = L[f(t)]$.

Jeśli $L(f) = F(s), L(f_1) = F_1(s), L(f_2) = F_2(s)$ oraz a_1, a_2, c są dowolnymi stałymi, to

$$L(cf) = cL(f) = cF(s)$$

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 L(f_1) + a_2 L(f_2) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Jeśli $a > 0$, to

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

$$L[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a).$$

Transformaty Laplace'a ważniejszych funkcji

$L[1] = \frac{1}{s}$, $\quad L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, $\quad L[e^{at}t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$L[\sin(\beta t)] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$, $\quad L[e^{at}\sin(\beta t)] = \frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$

$L[\cos(\beta t)] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$, $\quad L[e^{at}\cos(\beta t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2}$

$L[\sinh(\beta t)] = \frac{\beta}{s^2-\beta^2}$, $\quad L[\cosh(\beta t)] = \frac{s}{s^2-\beta^2}$

TRANSFORMACJA ODWROTNA LAPLACE’A

Twierdzenie 5.1. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, a funkcja $F(s), s = \lambda + \omega i$ jest transformatą Laplace'a (tzn. obrazem) funkcji $f(t)$, to w każdym punkcie, w którym $f(t)$ jest ciągła zachodzi wzór

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż dowolnej prostej równoległej do osi urojonej o równaniu $Re(s) = \lambda > \lambda_0$ oraz gdzie λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu funkcji $f(t)$.

Uwaga: całkę występującą w Twierdzeniu 5.1. rozumiemy jako $\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F(s) e^{st} ds = \lim_{\omega_0 - \infty} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} F(s) e^{st} ds$

Przekształcenie występujące w Twierdzeniu 5.1. nazywamy ***przekształceniem odwrotnym względem przekształcenia Laplace'a*** i oznaczamy symbole $L^{-1}[F(s)]$. Mamy więc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F(s)e^{st}ds = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}(F).$$

Jeśli $L^{-1}[F(s)] = f(t), L^{-1}[F_1(s)] = f_1(t), L^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$ oraz a_1, a_2, c są dowolnymi stałymi, to

$$L^{-1}[cF(s)] = cL^{-1}[F(s)] = cf(t)$$

$$L^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] = f_1(t) + f_2(t)$$

$$L^{-1}[a_1F_1(s) + a_2F_2(s)] = a_1L^{-1}[F_1(s)] + a_2L^{-1}[F_2(s)] = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$$

SPLOT FUNKCJI

Splotem dwóch funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ całkowalnych w przedziale $[0, a]$ nazywamy funkcję zmiennej t określoną całką

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

i oznaczamy symbolem $f_1(t) * f_2(t)$, czyli

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Prawdziwe są wzory

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

$$[f_1(t) + f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t)$$

Twierdzenie 5.2 (Borela o mnożeniu transformat). Jeżeli $f_1(t)$ i $f_2(t)$ sa oryginałami oraz $L[f_1(t)] = F_1(s)$ i $L[f_2(t)] = F_2(s)$, to

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)],$$

dla $Re(s) = \lambda > \lambda_0$, gdzie λ_0 jest liczbą równą większemu ze wskaźników wzrostu oryginałów $f_1(t), f_2(t)$.

Jeżeli zachodzą założenia Twierdzenia Borela, to prawdziwy jest wzór

$$L^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) = L^{-1}[F_1(s)] * L^{-1}[F_2(s)],$$

Émile Borel (1871–1956) francuski matematyk i polityk. W swych pracach zajmował się głównie **teorią gier, rachunkiem prawdopodobieństwa, analizą matematyczną i fizyką matematyczną.** Wraz z Baire'm oraz Lebesgue'm był pionierem w zakresie teorii miary i jej zastosowaniu w teorii prawdopodobieństwa. Był członkiem francuskiej Akademii Nauk i wykładał na Uniwersytecie w Paryżu. W 1930 roku Uniwersytet Warszawski przyznał mu tytuł doktora honoris causa.

FUNKCJA HEAVISIDE’A

Funkcją Heaviside'a nazywamy funkcję $\mathbb{I}(t)$ daną wzorem

$$\mathbb{I}(t) = \begin{cases} 0 \text{ dla } t < 0 \\ 1 \text{ dla } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Jeżeli $f(t)$ jest oryginalem i $F(s)$ jest obrazem, to zachodzi wzór

$$L[\mathbb{I}(t-\tau) * f(\tau)] = e^{-s\tau} F(s) \text{ dla } \tau > 0.$$

Oliver Heaviside (1850-1925) angielski matematyk, fizyk i elektrotechnik. Geniusz i samouk. Jeden z **wielkich pionierów elektrotechniki**, przewidział istnienie jonosfery. Był telegrafistą. **Opracował równania telegrafistów będące podstawą współczesnej elektroniki i telekomunikacji.** Główne prace Heaviside'a dotyczyły elektromagnetyzmu, m.in. rozwinął teorię pola elektromagnetycznego J. C. Maxwella. Ponadto rozwinął i zastosował rachunek wektorowy (którego użył do uporządkowania równań Maxwella) i rachunek operatorowy (używany do analizy zespolonej obwodów elektrycznych). **Jego autorstwa są terminy używane w elektrotechnice i elektronice jak: impedancja, admitancja, konduktancja, reluktancja, elektret.**