ZAOKRĄGLENIA I PRZYBLIŻENIA

I. CYFRY ZNACZĄCE:

W celu uproszczenia liczby określa się w nich **cyfry znaczące** zwane też pewnymi. W zapisie dziesiętnym liczby, cyframi znaczącymi są jej **wszystkie cyfry z pominięciem początkowych zer**.

***Przykłady**:* 102,700 ma 6 cyfr znaczących,

0,0123 ma 3 cyfry znaczące,

1000,5 ma 5 cyfr znaczących.

Natomiast w przedstawianiu uproszczonych liczb całkowitych z zerami na końcu (np. 3800, 9000), nie można z ich postaci jednoznacznie podać dokładności uproszczenia, gdyż kolejne zera mogą sugerować są znaczące, bądź nie.

***Przykład**:* Przyjmując liczbę 1000 za przybliżoną, a nie znając ,,historii" jej uproszczenia, to nie można w niej określić liczbę cyfr znaczących (1, 2 lub 3?).

Chcąc wyeliminować powyższą niejednoznaczność stosuje się tzw. zapis naukowy (scientific notation), stosując w nim mnożnik z liczbą 10 i wykładnikiem całkowitym (dodatnim lub ujemnym).

Natomiast dla wartości fizycznych prawidłowy zapis uproszczonej wartości fizycznych, mających jednostki miary zapis naukowy nie jest zalecany, gdyż stosuje się powszechnie odpowiednio dobraną wielokrotność lub podwielokrotność jednostki miary, nazywany zapisem inżynierskim, gdzie wykładnik przyjmuje wartości ±3, ±6, ±9 itd.

Mnożnik	Przedrostek	Oznaczenie	Przykład
10^{12}	tera	T	21,6 TΩ
10^{9}	giga	G	120 GΩ
10^{6}	mega	M	1,25 MW
10^{3}	kilo	k	400 kV
10^{-3}	mili	m	854 mA
10^{-6}	mikro	μ	3,650 μH
10^{-9}	nano	n	10,4 nF
10^{-12}	piko	p	0,74 pA

Przykłady: Liczba 14000, mająca 4 cyfry znaczące, ma zapis $1{,}400 \cdot 10^{4}$.

Liczba 1000, w zapisie z 2 cyframi znaczącymi, ma postać $1{,}0 \cdot 10^{3}$.

Wartość 1500 W, z 3 cyframi znaczącymi, ma postać 1,50 kW.

Wartość 750 A, w zapisie z 2 cyframi znaczącymi, ma postać 0,75 kA.

II. ZASADY UPRASZCZANIA LICZB

Zmniejszając liczbę cyfr znaczących w liczbie lub wartości uzyskuje się jej przybliżenie.

O liczbie pominiętych cyfr znaczących decyduje pożądaną dokładność przybliżenia, która wynika z przyjętych kryteriów. Np. w zeznaniach podatkowych kwoty „zaokrągla się" do 1 zł; w napiwkach uwzględnia się kwotę rachunku. Przy opracowaniu wyników pomiarów występują ścisłe reguły upraszczaniu liczb i wartości.

- ✓ Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest mniejsza niż 5, to liczba zaokrąglona pozostaje bez zmian.

Przykłady: Liczbę 1263,5 uprościć do liczby z trzema cyframi znaczącymi.
Zapisie potęgowy $1{,}2635 \cdot 10^3$, będzie więc $1{,}26\ 10^3$.

Liczbę jw. uprościć do liczby z jedną cyfrą znaczącą.
Jest $1{,}2635 \cdot 10^3$, będzie więc $1 \cdot 10^3$.

Liczbę 0,750025 uprościć do liczby z 4 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 0,7500

Liczbę 1,8205 uprościć do liczby z 2 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 1,8

- ✓ Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest większa niż 5, to ostatnią cyfrę liczby uproszczonej zwiększamy o 1.

Przykłady: Liczbę 0,7635 zapisać 1 cyfrą znaczącą.
Wynik zaokrąglenia: 0,8

Liczbę 126,8 przedstawić 2 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 130; prawidłowy jej zapis: $1{,}3 \cdot 10^2$

Wartość 996,52Ω przedstawić 2 cyframi znaczącymi.
Wartość zaokrąglona: 1,0 kΩ

Wartość 1626,8 V przedstawić 3 cyframi znaczącymi.
Wartość zaokrąglona: 1,63 kV

- ✓ Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr równa jest 5, a między kolejnymi cyframi znajdują się cyfry niezerowe, to ostatnią cyfrę liczby zaokrąglonej zwiększamy o 1.

Przykłady: Wartość 12653,8 μH przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 12,7 mH

Wartość 0,78658 kA przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 787 A

Wartość 5,5200 nF przedstawić z 1 cyfrą znaczącą.
Wynik zaokrąglenia: 6 nF.

✓ Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr równa jest 5, a wszystkie kolejne cyfry są zerami, to ostatnia cyfra liczby przybliżonej:

- pozostaje bez zmian, gdy jest parzysta,
- zostaje zwiększona o 1, gdy jest nieparzysta. (zwyczajowo mówi się o zaokrąglaniu „do parzystej")

Przykłady: Wartość 126500 V przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 126 kV

Wartość 0,785500 W przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 786 mW

III. ZASADY ZAOKRĄGLANIA WYNIKÓW POMIARÓW

Opracowanie końcowego wyniku pomiaru należy rozpocząć od uproszczenia niepewności pomiaru, zaś potem – to samo zrobić z wartością surową wielkości mierzonej. W uproszczeniu niepewności należy kierować się poniższymi regułami.

✓ Niepewność przedstawia się liczbą z 2 cyframi znaczącymi. Jeżeli rozdzielczość pomiaru na to nie pozwala, to należy niepewność przedstawić liczbą z 1 cyfrą znaczącą.

Rozdzielczość pomiaru jest wyrażana w jednostkach wielkości mierzonej i określa najmniejszą zmianę wartości mierzonej, na którą reaguje przyrząd. W pomiarach jest ważną wielkością, gdyż wynika z niej tzw. **błąd rozdzielczości,** wpływający na dokładność pomiarów.

Dla przyrządu wskazówkowego rozdzielczość pomiaru zależy od jego klasy dokładności i jest związana z dokładnością odczytu. Dla klas przyrządów laboratoryjnych (0,2 i 0,5) rozdzielczość pomiaru odpowiada wartości 0,1 lub 0,2 działki elementarnej. Dla klas technicznych, czyli 1 i większych, rozdzielczość pomiaru odpowiada zwykle wartości 1/2 działki elementarnej.

Dla przyrządu cyfrowego rozdzielczość pomiaru określona jest wartością odpowiadającą zmianie o jednostkę wskazania ostatniego wskaźnika pola odczytowego.

Przykład: Przyrząd wskazówkowy o zakresie U_z =10V, α_{max}=100 dz i dokładności odczytu $\Delta_o\alpha$= 0,2 dz, ma rozdzielczość pomiaru:

$$\Delta_r U = \frac{U_z}{\alpha_{max}} \cdot \Delta_o \alpha = \frac{10\,V}{100\,dz} \cdot 0,2\,dz = 0,02\,V$$

***Przykład**:* Odczyt z omomierza cyfrowego miał wartość: R=0,983Ω i wykonany został z rozdzielczością 1mΩ.

***Przykłady**:* Uprościć surowe niepewności pomiarów do dwóch cyfr znaczących:

ΔI = 0,1203 A=0,12 A

ΔU = 126,8 mV = 130 mV = 0,13 V

ΔU = 67,5Ω = 68 Ω

ΔC = 138 mF = 0,14 F

Uwaga: Wartości względne niepewności z reguły przedstawiamy też 2 cyframi znaczącymi.

***Przykłady**:* δI = 1,365% = 1,4%

δU = 0,34500% = 0,34%

δR = 0,0135% = 0,014%

Końcowy zapis wartości mierzonej podlega poniższym regułom:

- ✓ Ostatnia cyfra znacząca wartości zmierzonej powinna występować na pozycji dziesiętnej ostatniej cyfry znaczącej niepewności.

***Przykłady**:* Zapisać wyniki pomiarów dla wartości „surowych" (są podkreślone):

- R = 1263,85Ω = 1,26385kΩ, U(R) = 63,3Ω = 0,0633kΩ = 0,063kΩ,

ostatecznie: **R = (1,264 ± 0,063) kΩ**

- U = 76,3581 V ; U(U) = 0,07305 V = 0,073 V,

ostatecznie: **U = (76,358 ± 0,073) V**

- l = 5326,5 m =5,3265 km ; U(l) = 72,63 m = 0,073 m, .

ostatecznie: **l = (5,326 ± 0,073) km**.

- U= 18243 V =18,243 kV. U(U) = 374,2 V = 0,3742 kV = 0,37 kV,

ostatecznie: **U = (18,24 ± 0,37) kV**.

Jak stwierdzono wcześniej, w pomiarach o małej rozdzielczości, co często ma miejsce w pomiarach mało dokładnych, występuje konieczność przedstawienia niepewności z 1 cyfrą znaczącą. Wtedy w poprawnym zapisie wyniku pomiaru należy uwzględnić następująca regułę:

- ✓ Niepewność przedstawiona 1 cyfrą znaczącą powinna mieć wartość większą niż przed zaokrągleniem (mówimy o zaokrągleniu ,,w górę").

Wyjątek: Niepewność należy zaokrąglić „w dół", jeżeli jej wartość nie zmniejszy się więcej niż o 10%.

***Przykład**:* Dokonano odczytu napięcia: U=126V. Obliczona dla tego pomiaru niepewność wynosiła: ΔU=1,65V. Ze względu na rozdzielczość odczytu - wynoszącą 1V, niepewność należy zaokrąglić do liczby z 1 cyfrą znaczącą, czyli U=(126 $\pm$ 2)V

Uwaga: *Warunek zapisu niepewności z 1 cyfrą znaczącą nie może być ominięty przez <u>dopisanie do wartości mierzonej (odczytanej) zer</u>, czyli przez zwiększenie w niej cyfr znaczących. W powyższy przykładzie zapis wyniku w postaci:* U = (126,0 $\pm$ 1,6)V, *jest nieprawidłowy, gdyż sugeruje, że rozdzielczość pomiaru jest o jeden rząd wartości większa od rzeczywistej, co w konsekwencji prowadzi do błędnej oceny dokładności przyrządu i wyniku.*

***Przykłady**:* Zapisać wyniki pomiarów dla wartości „surowych" (są podkreślone):

- R = <u>1,22 kΩ</u> ; U(R) = <u>65,2Ω</u> = 0,0652kΩ = 0,07kΩ,

ostatecznie: R = **(1,22 $\pm$ 0,07)kΩ**.

- t = <u>125,7 ms</u> ; U(t) = <u>0,141 ms</u> = 0,2 ms (warunek „10%"),

ostatecznie: t = **(125,7 $\pm$ 0,2) ms**

Uwaga: *W powyższym przykładzie błąd przybliżenia niepewności „w dół" wynosi:*

δ_p=[(0,1ms – 0,141ms) / 0,141ms]·100% =29% , i znacznie przekracza dopuszczalną wartość – pozwalającą na uproszczenia niepewności do 0,1ms.

IV. DOKŁADNOŚĆ WYKONYWANIA OBLICZEŃ

Przeprowadzone na wynikach surowych obliczenia rachunkowe powinny być na tyle dokładne, aby nie wpływały na końcowy wynik pomiaru. Stąd w każdej fazie obliczeń występuje problem właściwego przybliżania liczb, a więc ich przedstawiania z odpowiednia ilością cyfr znaczących. Ścisłe reguły postępowania zawierają podręczniki matematyki dla inżynierów. Dla celów prawidłowego opracowania wyniku końcowego pomiaru należy kierować się następującymi wskazówkami:

- W obliczeniach wyników pośrednich nie można stosować reguł upraszczania zapisu końcowego wyniku pomiaru. Obliczenia należy wykonywać ze stosownie większą dokładność niż przedstawia sobą wynik końcowy.
- Obliczenia niepewności powinny być prowadzone z dokładnością co najmniej do 3 lub 4 cyfr znaczących. Pozwala to na zaokrąglenie końcowej wartości niepewność liczbą z 2 cyframi znaczącymi.
- Podobnie obliczenia wartości mierzonej powinny być wykonywane z liczbą cyfr znaczących większą o 2 - względem wartości odczytanych z przyrządów.
- Stosując w obliczeniach kalkulator zwykle uzyskuje się wyniki z bardzo dużą liczbą cyfr znaczących. Ich przepisywanie do sprawozdania, bez wstępnego zaokrąglenia, nie ma uzasadnienia.

***Przykład**: Jaką dokładność ma liczba π przedstawiona trzema cyframi znaczącymi?*

Względny błąd przybliżenia wynosi: $\delta_p = \frac{3{,}14 - \pi}{\pi} \cdot 100\% = -0{,}051\%$.

Wniosek: Wykonując obliczenia z liczbą π, przedstawioną trzema cyframi znaczącymi, należy rozważyć wpływ na wynik końcowy błędu przyjętego przybliżenia. Np. wyznaczając pole powierzchni okręgu na podstawie pomiaru jego średnicy i stosując równanie pomiaru $S=\pi d^2$, to na niepewność pomiaru wpływa podwojona wartość błędu przybliżenia liczby π.

V. WNIOSKI KOŃCOWE

Postępowanie przy formowaniu wyniku końcowego pomiaru składa się z następujących kroków:

1. **Dobierając odpowiednią miarę wartości mierzonej sprowadzamy jej wartość liczbową do „czytelnej” liczby.**
2. **Wartość bezwzględnej niepewności pomiaru upraszczamy do 2 cyfr znaczących (ew. do 1).**
3. **Stosownie do uproszczonej niepewności, upraszczamy wartość mierzoną i zestawiamy je razem.**

Opracowała: Ewa Frączek