Przykład 1 Zbiorem wszystkich całkowitoliczbowych kombinacji liniowych liczb 3 i 4 jest zbiór $3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z}$

Jednym z elementów jest $1 = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1$

Przykład 2 Kiedy równanie $3x + 4y = 123$ ma rozwiązanie?

Odp. Gdy $NWD(3,4) = 1$

Przykład 3 Wyznaczyć $NWD(155, 67)$ stosując algorytm Euklidesa

Odp 1

Przykład 4 Znaleźć odwrotność 2 (mod 5) stosując rozszerzony algorytm Euklidesa

$$\text{(2)}\ \begin{cases} 2\cdot 1+5\cdot 0=2 \\ 2\cdot 0+5\cdot 1=5 \end{cases}$$

Ponieważ $2<5$, to zamieniamy równania miejscami

$$\begin{cases} (1)\ 2\cdot 0+5\cdot 1=5 \\ (2)\ 2\cdot 1+5\cdot 0=2 \end{cases}$$

Dzielimy 5 przez 2, to mamy $\overset{a}{5}=\overset{b}{2}\cdot\underline{\overset{q}{2}}+\overset{r}{1}$ tzn $q=2$

Od równania (1) odejmujemy $(2)\cdot q$ $\quad (1)-(2)\cdot q$

$$\begin{cases} (2\cdot 0+5\cdot 1)-2(2\cdot 1+5\cdot 0)=5-2\cdot 2 \\ 2\cdot 1+5\cdot 0=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(0-2\cdot 1)+5(1-2\cdot 0)=1 \\ 2\cdot 1+5\cdot 0=2 \end{cases}$$

Ponieważ $1<2$ to zamieniamy równania miejscami

$$\begin{cases} (3)\ 2\cdot 1+5\cdot 0=2 \\ (4)\ 2(-2)+5(1)=1 \end{cases}$$

Dzielimy 2 przez 1 tzn $\overset{a}{2}=\overset{b}{1}\cdot\underline{\overset{q}{2}}$ czyli $q=2$

Odejmujemy $(3)-(4)\cdot q$

$$\begin{cases} 2\cdot 1+5\cdot 0-2(2(-2)+5\cdot(1))=2-1\cdot 2 \\ 2(-2)+5(1)=1 \end{cases}$$

Przykład 4 cd

$$\begin{cases} 2(1-2(-2)) + 5(0-2\cdot 1) = 0 \\ 2(-2) + 5\cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 5 + 5(-2) = 0 \\ 2\boxed{(-2)} + 5\cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ tu mamy 0, więc kończymy algorytm

$1 \rightarrow$ to jest NWD(5,2)

Ponieważ NWD(5,2) = 1, to odwrotność istnieje i jest równa

$$(-2)_5 = (-2+5)_5 = 3$$

odp. Odwrotność liczby 2 (mod 5), to 3

k	0	1	
r_k	5	2	
q_k		2	
x_k			
y_k			

Przykład 5 Rozwiązać równanie $11x - 8y = 43$ w liczbach całkowitych

R Ponieważ $NWD(11,8) = 1$ i $1 | 43$ to równanie ma rozwiązanie.

Z uwagi na fakt, że $|11| > |-8|$ wyznaczamy y

$$y = \frac{-43 + 11x}{8} = -5 + x + \frac{-3 + 3x}{8} \qquad (4)$$

Ponieważ y ma być liczbą całkowitą, to musi istnieć n, że

$$-3 + 3x = 8n$$

Ponieważ $|3| < |8|$ więc wyznaczamy x

$$x = \frac{3 + 8n}{3} = 1 + 3n + \frac{-n}{3} \qquad (2)$$

Ale x ma być liczbą całkowitą, więc musi istnieć k, że

$$-n = 3k \quad \text{. Stąd} \quad n = -3k \qquad (1)$$

Stąd $\begin{cases} x = 1 + 3(-3k) + k = \underline{1 - 8k} & (3) \text{ (Wstawiamy (1) do (2))} \\ y = -5 + (1 - 8k) + \frac{-3 + 3(1-8k)}{8} = -4 - 8k - 3k = \underline{-4 - 11k} & \text{(wstawiamy (3) do (4))} \end{cases}$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Odpowiedź