Matematyka Dyskretna Lista 2 7-13.03.2023r.

1. Korzystając z zasady indukcji matematycznej, wykazać, że:

   (a) 7 jest dzielnikiem $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ dla $n \geqslant 0$; (b) 10 jest dzielnikiem $2^{2^n} - 6$ dla $n \geqslant 2$;

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ dla $n \geqslant 1$; (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ dla $n \geqslant 1$.

2. Pokazać, że dowolną kwotę $n \geqslant 4$ złotych można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.

3. Pokazać, że $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ oraz $\left\lceil x - \frac{1}{2} \right\rceil$ są wyrażeniami przybliżającymi dowolną liczbę rzeczywistą x do jej najbliższej liczby całkowitej. Do czego przybliżają te wyrażenia liczby znajdujące się dokładnie w połowie między kolejnymi liczbami całkowitymi?

4. Wykazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ zachodzą równoważności:

   (a) $x < k \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < k$; (b) $k < x \Leftrightarrow k < \lceil x \rceil$; (c) $x \leqslant k \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant k$; (d) $k \leqslant x \Leftrightarrow k \leqslant \lfloor x \rfloor$.

5. Na ilu bitach można zapisać liczby 65356 i 65536?

6. Wykazać, że liczb całkowitych w przedziale ($a < b \in \mathbb{R}$):

   (a) $[a, b]$ jest $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$; (b) $(a, b]$ jest $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$;

   (c) $[a, b)$ jest $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil$; (d) (a, b) jest $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$.

7*. Ile rozwiązań x ma równanie $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$ ($n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ parametry)?

8. Wyrazić za pomocą $\{x\}$ warunek konieczny i dostateczny na to, aby $n\lfloor x \rfloor = \lfloor nx \rfloor$ ($n \in \mathbb{N}$).

9*. Udowodnić lub obalić nierówność $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

10. Wskazać prawdziwe relacje:

   (a) $\frac{1}{x} = \Theta(1)$; (b) $nx = \Omega(1)$ ($n \in \mathbb{N}_+$ ustalone); (c) $\frac{\sin x}{x} = O(1)$; (d) $\ln^2 n = \Omega(n)$;

   (e) $\sqrt{n} = O(\ln n)$; (f) $\sqrt{3^n + 4^n} = \Theta(2^n)$; (g) $n^{\sqrt{n}} = \Omega(2^n)$; (h) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = O(3^n)$.

11. Wyznaczyć najmniejsze $k \in \mathbb{R}$, dla którego zachodzi $f(n) = O(n^k)$:

   (a) $f(n) = (n^2+1)(2n^4+3n-8)$; (b) $f(n) = (n^3+3n-1)^4$; (c) $f(n) = \sqrt{n^3+4n}$;

   (d) $f(n) = \sqrt{n^5 - 3n} - n\sqrt[3]{n^5+2n}$; (e) $f(n) = \dfrac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$; (f) $f(n) = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{n^5+1}+n^2}}{\sqrt{\sqrt[4]{n^3+1}+\sqrt{n}}}$.

12. Uporządkować ciągi za pomocą relacji $a_n \preccurlyeq b_n \;\Leftrightarrow\; a_n = O(b_n)$:

   $\ln n,\ (\ln n)^n,\ n^{\ln n},\ \ln(n^n),\ 3^{\ln n},\ n,\ n^2,\ 2^{\sqrt{n}},\ 1{,}01^n,\ 0{,}99^n,\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n.$