ELEMENTY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rachunek prawdopodobieństwa **(probabilistyka) – dział matematyki zajmujący się badaniem praw rządzących procesami, których wyniku nie jesteśmy w stanie dokładnie przewidzieć, (zdarzeniami losowymi).**

Na przykład - wynik rzutu kostką?

Prawdopodobieństwo **to miara możliwości (szansa), że coś się zdarzy. Przyjmuje ono wartości z przedziału [0,1].**

Doświadczenie losowe **– proces, którego wyniku nie jesteśmy w stanie dokładnie przewidzieć.**

Zdarzenie elementarne **– każdy wynik doświadczenia losowego (eksperymentu).**

Przestrzeń **(zbiór)** *zdarzeń elementarnych* Ω, **to zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.**

Przykład 1.

Doświadczenie losowe – rzut kostką.
Zdarzenie elementarne – wyrzucona liczba oczek.

Przez e_i oznaczmy zdarzenie elementarne polegające na wyrzuceniu *i* oczek.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych

$$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}.$$ +

Dowolny zbiór $A\subset\Omega$ nazywamy *zdarzeniem losowym*.

Cd Przykład 1.

Zbiory: $\{e_3, e_5\}$, $\{e_2\}$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\{\ \}$ są zdarzeniami losowymi. +

Prawdopodobieństwo zdarzenia, to szansa jego zajścia.

***Prawdopodobieństwo*, to funkcja**

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1],$$

taka, że $\sum_{e_i \in \Omega} P(e_i) = 1.$

Przyporządkowuje każdemu zdarzeniu pewna liczbę z przedziału [0, 1].

Cd Przykład 1.

$$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

(i) $P(e_i)=1/6$, $i=1,2, \ldots ,6.$

(ii) $P(e_1)=1$, $P(e_i)=0$, $i=2, 3 \ldots ,6.$

(iii) $P(e_1)= P(e_2)= 1/2$, $P(e_i)=0$, $i=3,4,5 ,6.$ +

***Prawdopodobieństwo zdarzenia* losowego A $\subset\Omega$,**

$$P(A)=\sum_{e_i \in A} P(e_i).$$

Jeżeli przestrzeń zdarzeń ma skończoną liczbę elementów (jednakowe prawdopodobieństwo każdego zdarzenia), to

$$P(A) = \frac{liczba\ elementów\ zdarzenia\ A}{liczba\ wszystkichelementów}.$$

Cd Przykład 1.

Jeśli $\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ **oraz** $P(e_i)=1/6$, $i=1,2, \ldots ,6.$

A=$\{e_3, e_5\}$, $P(A)=2/6$

A=$\{e_2\}$, $P(A)=1/6$

A=$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $P(A)=1$ *zdarzenie pewne*

A=$\{\ \}$, $P(A)=0$ *zdarzenie niemożliwe*. +

Zdarzenia losowe są zbiorami, można więc na nich wykonywać operacje topologiczne (dodawanie, mnożenie, odejmowanie, dopełnienie).

Podstawowe własności prawdopodobieństwa

Ω - przestrzeń zdarzeń,

P – prawdopodobieństwo,

A,B – zdarzenia losowe.

1. **A'=Ω \ A** ***zdarzenie przeciwne*** **przy czym P(A')=1-P(A).**
2. **P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B).**
3. **Jeżeli zdarzenia są niezależne (zajście jednego nie ma wpływu na zajście drugiego), to**

$$P(A \cap B)=P(A)*P(B)$$

Przykład. 2.

W pierwszym pudełku jest 30% losów pustych, a w drugim 60%. Wybieramy po jednym losie z każdego pudełka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a) **oba losy są wygrywające,**
b) **przynajmniej jeden los jest wygrywający,**
c) **oba losy są przegrywające.**

Zdarzenia losowe:

A_1 – wygrywa los z pierwszego pudełka,
A_2 – wygrywa los z drugiego pudełka.

Zdarzenia są niezależne (wynik pierwszego losowania nie ma wpływu na drugie.

$$P(A_1)=0.7, \quad P(A_2)=0.4$$

Ad a.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) * P(A_2) = 0.7 * 0.4 = 0.28.$$

Ad b.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82.$$

Ad c.

$$P(A_1^{'} \cap A_2^{'}) = P(A_1^{'}) * P(A_2^{'}) = 0.3 * 0.6 = 0.18.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Zdarzenie A i B są *niezależne*, gdy zajście jednego nie ma wpływu na zajście drugiego (wówczas $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Na przykład A={e_1, e_3, e_5}, B={e_2,e_6} - zdarzenia niezależne.

P(B|A) - *prawdopodobieństwo warunkowe* (tj. zajścia B pod warunkiem, że zaszło A).

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

Dla zdarzeń zależnych

$$P(A\cap B)=P(B)*P(A|B)=P(A)*P(B|A).$$

Przykład 4.

W magazynie są ubrania z trzech zakładów krawieckich: A_1,A_2,A_3. Wiadomo, że z zakładu A_1 pochodzi 10% ubrań, z A_2 50%, a z A_3 40%. Zakład A_1 produkuje 40% ubrań I gatunku, A_2 i A_3 po 50% I gatunku. W sposób losowy wzięto ubranie z magazynu. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A_1|I)$, że pochodzi ono z zakładu A_1, jeśli stwierdzono, że jest ono I gatunku.

Wzór na prawdopodobieństwo warunkowe $P(A_1\mid I)=\dfrac{P(A_1\cap I)}{P(I)}$

$P(A_1\cap I)=10\%\cdot 40\%=4/100.$

$$P(I)=10\%\cdot 40\%+50\%\cdot 50\%+40\%\cdot 50\%=$$
$$4/100+25/100+20/100=49/100.$$

$$P(A_1\mid I)=\frac{P(A_1\cap I)}{P(I)}=\frac{4/100}{49/100}=4/49.$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ą zdarzeniami parami rozłącznymi oraz

$$A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_n = \Omega,$$

to dla każdego zdarzenia losowego $B \subset \Omega$ zachodzi:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\ldots+P(A_n)P(B|A_n).$$

Stąd, po przekształceniach otrzymujemy *wzór Bayesa*:

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\ldots+P(A_n)P(B|A_n)}.$$

<u>Przykład</u>. 3.

Dealer samochodowy stwierdził, że 40% jego klientów stanowią kobiety, a 60% mężczyźni. Wśród kobiet, 35% nabywa samochody, a wśród mężczyzn 20%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wchodząca do salonu osoba nabędzie samochód?

Oznaczmy przez:

A_1 - zdarzenie, że osobą wchodzącą będzie kobieta, a przez

A_2 – że mężczyzna.

$$P(A_1)=0.4, \qquad P(A_2)=0.6.$$

Niech B będzie zdarzeniem polegającym na zakupie przez wchodzącego klienta samochodu (bez względu na płeć).

Znamy prawdopodobieństwa warunkowe, tj prawdopodobieństwo zakupu samochodu pod warunkiem, że klientem jest kobieta, $P(B|A_1)=0.35$oraz podobnie $P(B|A_2)=0.2$.

Z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B)=P(A_1)*P(B|A_1)+P(A_2)*P(B|A_2)=0.4*0.35+0.6*0.2=0.26.$$

Prawdopodobieństwo zakupu samochodu przez wchodzącego klienta wynosi 0.26%. +