W3 - Niezawodność elementu nienaprawialnego

Henryk Maciejewski

Marek Woda

Niezawodność elementu nienaprawialnego

1. Model niezawodności elementu nienaprawialnego

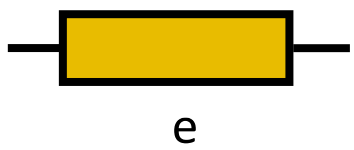
2. Miary niezawodności – charakterystyki liczbowe i funkcyjne

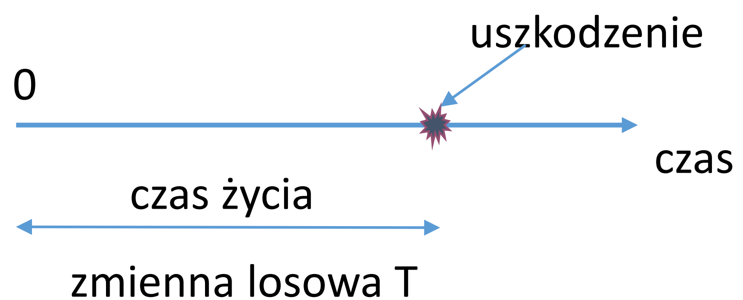
3. Rozkłady zmiennych losowych stosowane w opisie niezawodności elementów

Model niezawodnościowy elementu nienaprawialnego

Element zaczyna pracę w chwili 0 i po pewnym czasie zwanym **czasem życia** (*life time*) ulega uszkodzeniu. Nie rozważamy co się dzieje z elementem po uszkodzeniu.

Czas życia potraktujemy jako dodatnią, ciągłą **zmienną losową T** – określamy w ten sposób **model niezawodnościowy elementu nienaprawialnego**.





W dalszej części postawimy pytania:

1. Jakie miary charakteryzujące losowy charakter czasu życia wygodnie użyć, inne niż dystrybuanta F(t), czy gęstość f(t)?

   (rozważymy tu miary funkcyjne i miary liczbowe)

2. Jakich rozkładów zmiennych losowych użyć do modelowania czasu życia?

3. Jak wyznaczyć charakterystyki niezawodnościowe (funkcyjne, liczbowe) na podstawie wyników eksperymentu?

Funkcyjne i liczbowe charakterystyki niezawodności elementu

Założenie: modelem czasu życia elementu jest
dodatnia zmienna losowa T (F(0)=0)
o dystrybuancie F(t) i gęstości f(t)

Określimy charakterystyki niezawodności:

1. Funkcja niezawodności (*Reliability function*)
2. Funkcja intensywności uszkodzeń
3. Średni czas życia (*mean life time, mean time to failure, MTTF*)

Funkcja niezawodności (*Reliability function*)

Funkcja niezawodności **R(t)** podaje prawdopodobieństwo zdarzenia, że element „przeżyje” chwilę t:

$$R(t) = P(T \geq t)$$

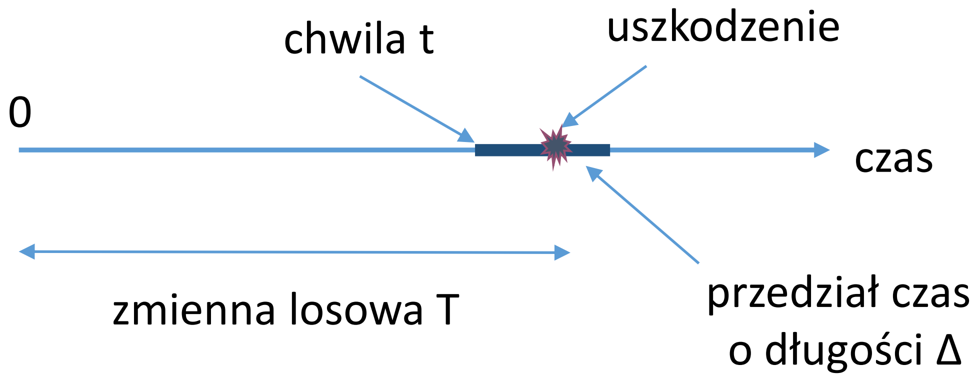
Własność – wynika z prawdopodobieństwa zdarzenia dopełniającego:

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t)$$

Funkcja intensywności uszkodzeń (*hazard function, failure rate, mortality rate,…*)

Funkcja intensywności uszkodzeń **λ(t)** jest zdefiniowana jako granica (o ile istnieje) prawdopodobieństwa warunkowego, że uszkodzenie nastąpi w przedziale [t, t+Δ], pod warunkiem, że nie nastąpiło do chwili t:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} P(t \leq T \leq t + \Delta \mid T > t)$$



Własności λ(t)

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

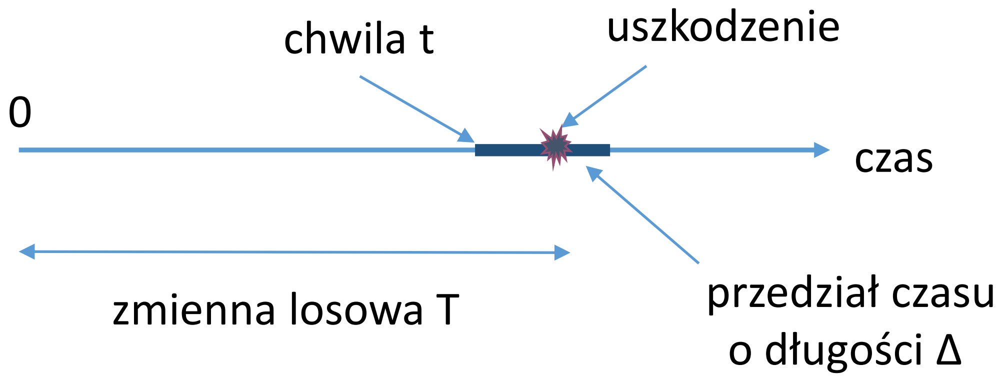
$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

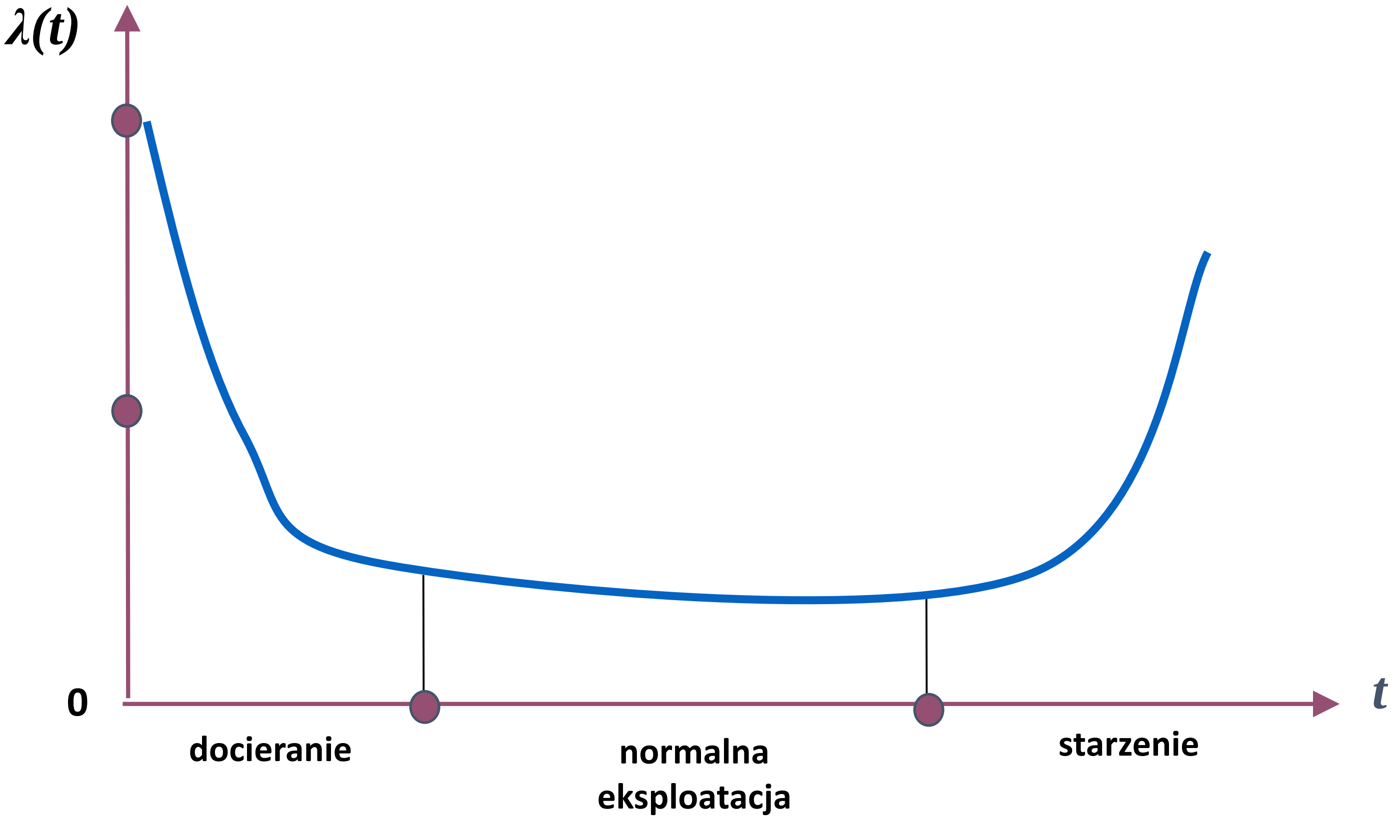
Jeśli λ(t) = λ, wtedy:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

To jest funkcja niezawodności dla <u>rozkładu wykładniczego</u> → <u>rozkład bez pamięci</u>
(λ(t) = λ - nie zależy od t).



W praktyce funkcja intensywności uszkodzeń dla wielu obiektów technicznych ma przebieg pokazany na rysunku



„Krzywa wannowa" (Bathtub curve)

Szczególna rola rozkładu wykładniczego

Rozkład wykładniczy opisany jest przy pomocy dystrybuanty (dla λ >0):

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

(dla t>0, F(t)=0 dla t$\leq$0)

Wyznaczamy λ(t) dla rozkładu wykładniczego:

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{\left(e^{-\lambda t}\right)'}{e^{-\lambda t}} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

Funkcja intensywności uszkodzeń dla rozkładu wykładniczego jest funkcją stałą.

Szczególna rola rozkładu wykładniczego

Rozważamy problem: element o czasie życia opisanym rozkładem wykładniczym przepracował czas t. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie działał jeszcze przez czas τ?

$$P(T \geq t + \tau \mid T > t) = \frac{P(T \geq t + \tau)}{P(T > t)} = \frac{R(t + \tau)}{R(t)}$$

Dla rozkładu wykładniczego:

$$P(T \geq t + \tau \mid T > t) = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau} = R(\tau)$$

Prawdopodobieństwo to zależy jedynie od długości przedziału τ a nie jego położenia na osi czasu.

Własność braku pamięci rozkładu wykładniczego.

Średni czas życia (*mean life time, mean time to failure, MTTF*)

Nie zawsze jest potrzebne wyrażanie niezawodności przy pomocy funkcji. Czasem wystarczy bardziej zagregowany opis w postaci liczby.

Średni czas życia określamy jako wartość średnią (oczekiwaną) zmiennej losowej T:

$$T_{FF} = E(T) = \int_0^\infty t f(t) dt$$

Własność:

$$T_{FF} = \int_0^\infty R(t) dt$$

Przykład

Dla rozkładu wykładniczego ($F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$) :

$$T_{FF} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Rozkłady zmiennych losowych stosowane w opisie niezawodności elementu

Rozkład wykładniczy

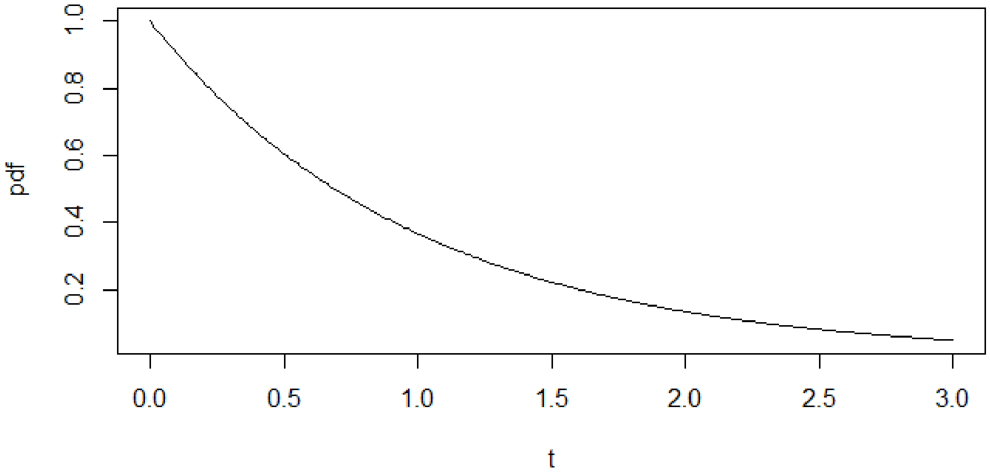
dystrybuanta: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
gęstość rozkładu: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
(dla t≥0)

$\lambda > 0$ - parametr rozkładu

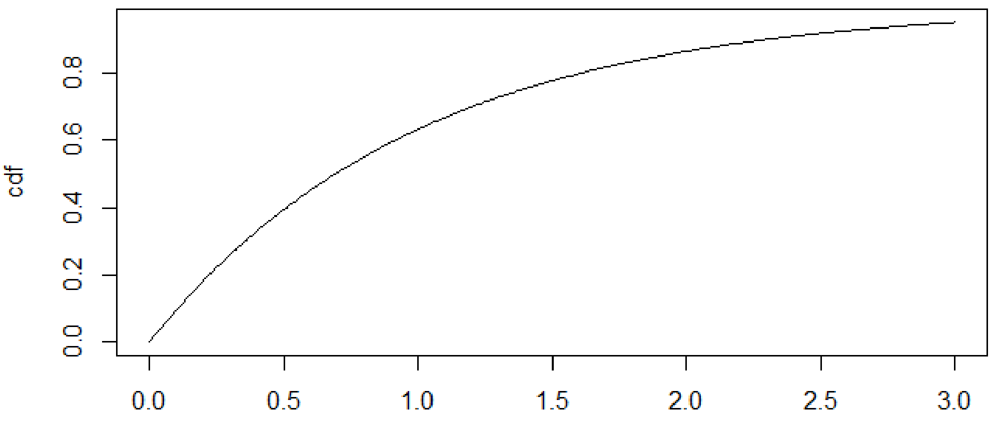
średni czas życia: $T_{FF} = \frac{1}{\lambda}$
wariancja: $\mathrm{Var(T)} = \frac{1}{\lambda^2}$

własność braku pamięci

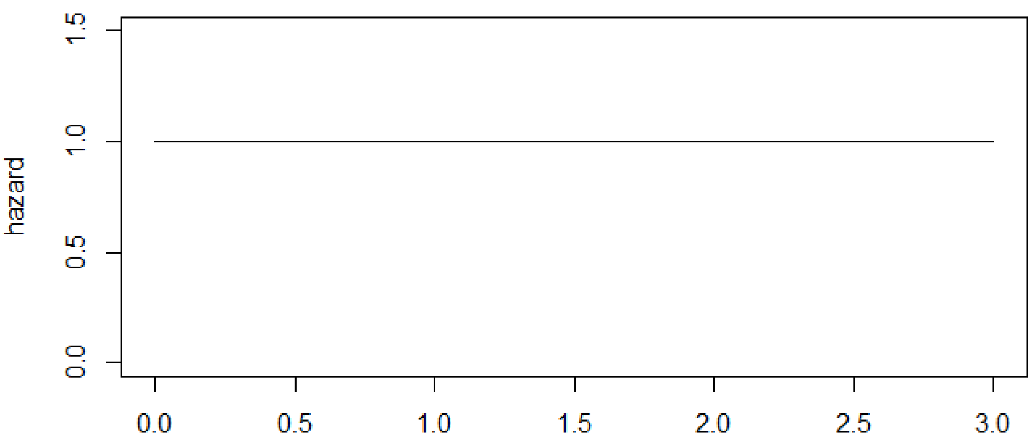
Rozkład wykładniczy dla λ=1



gęstość

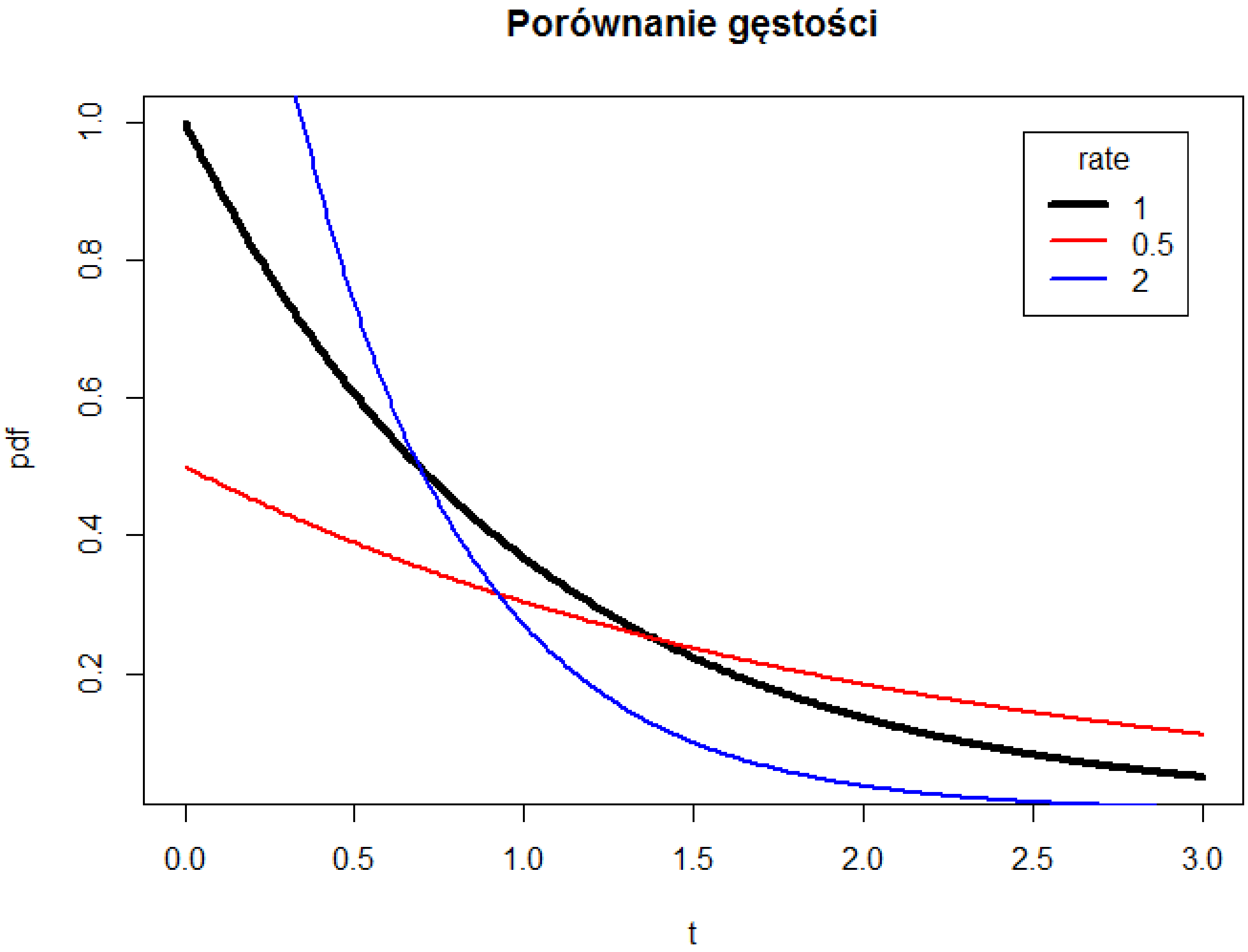


dystrybuanta



funkcja intensywności uszkodzeń

Rozkład wykładniczy dla różnych λ = 0.5, 1, 2



Rozkład Weibulla

dystrybuanta: $F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}$

gęstość rozkładu: $f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}e^{-(\lambda t)^{\beta}}$

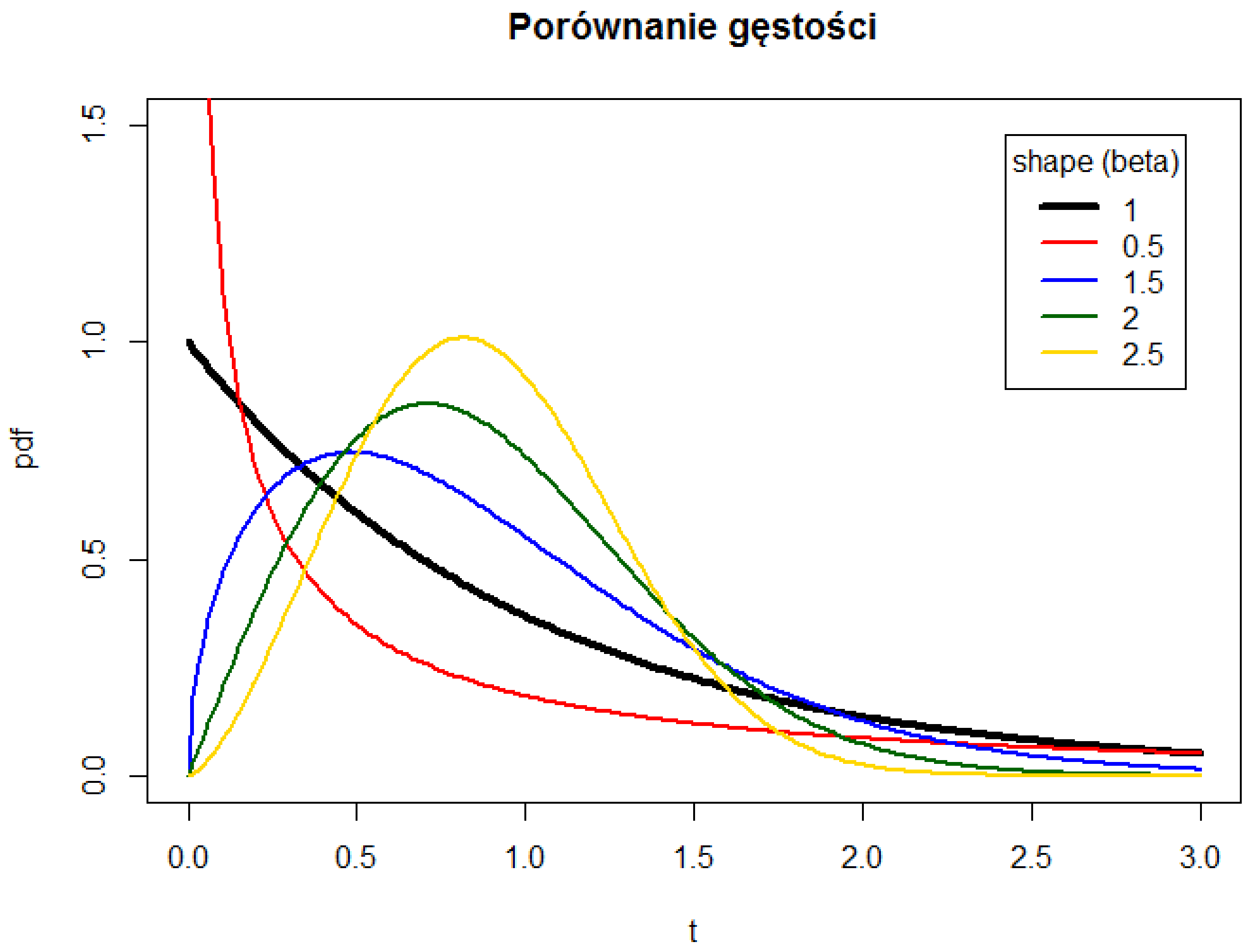
(dla t>0, F(0)=0)

λ>0 – $\frac{1}{\lambda}$ to parametr skali

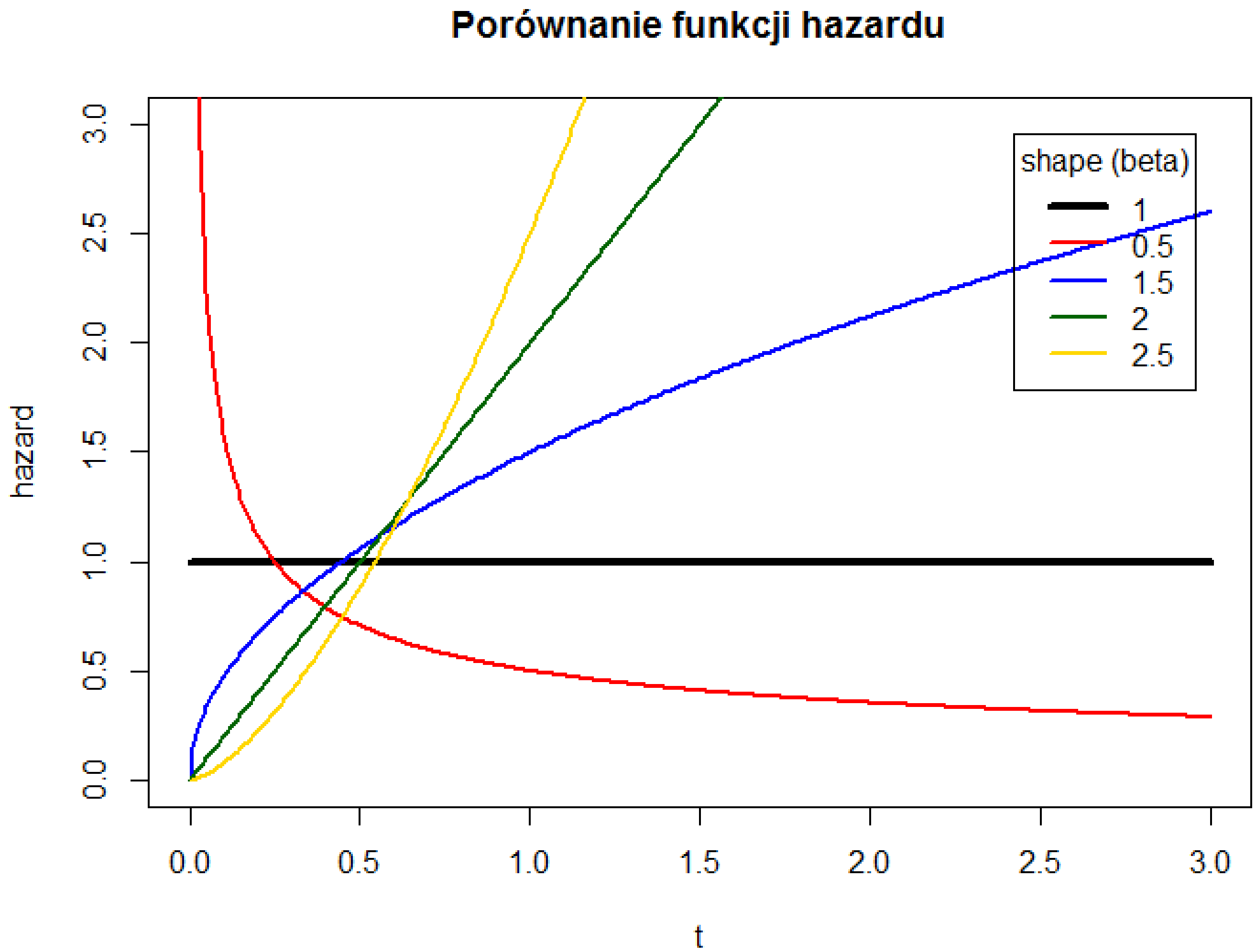
β>0 – parametr kształtu (β=1 → rozkład wykładniczy)

średni czas życia: $T_{FF} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}{\lambda}$

Rozkład Weibulla dla $\lambda = 1$ i różnych wartości β

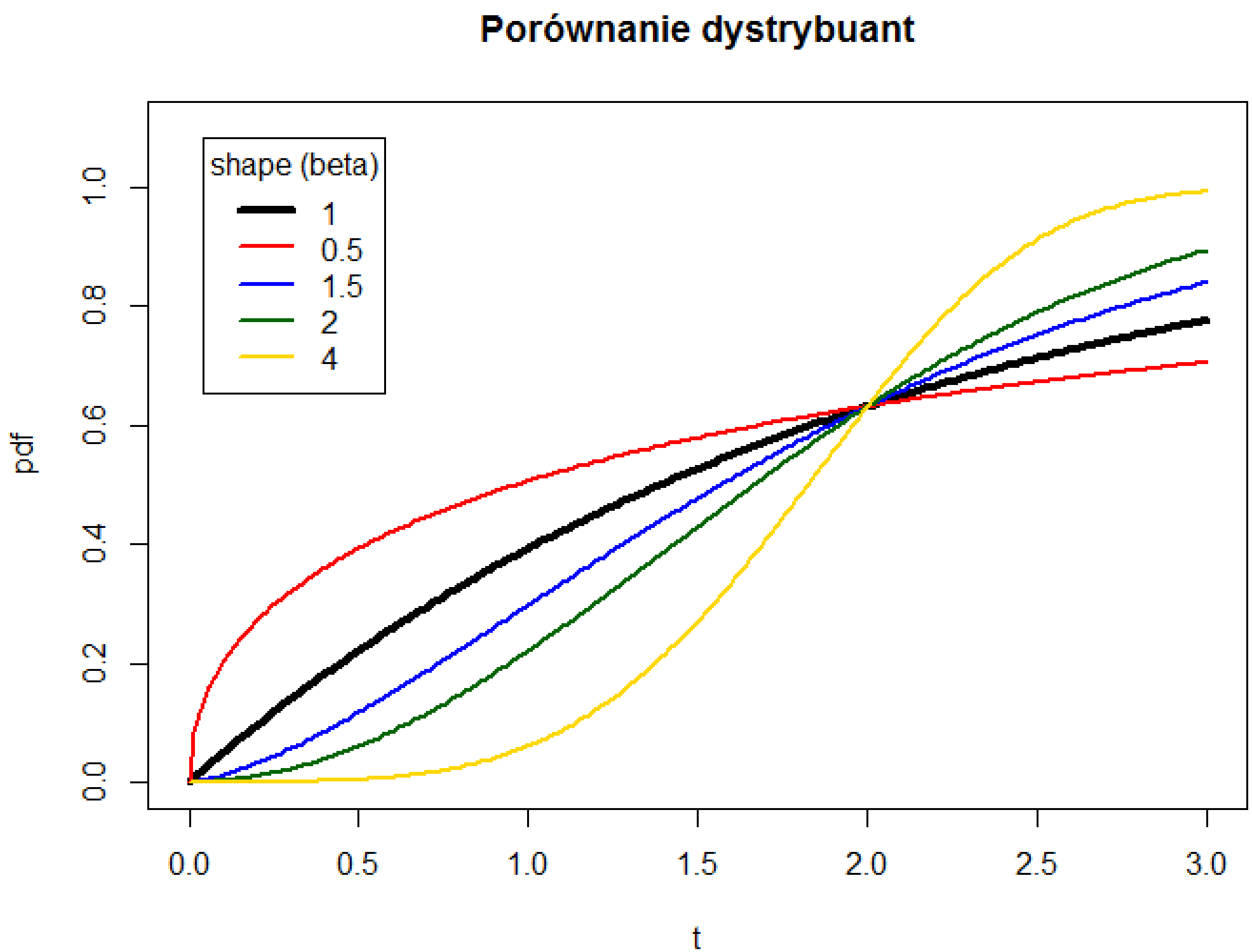


Rozkład Weibulla dla λ = 1 i różnych wartości β



β<1 → hazard maleje β>1 → rośnie (dla β=2 – rośnie liniowo)

Rozkład Weibulla dla *scale* = $\frac{1}{\lambda}$ = 2 i różnych wartości β



$\frac{1}{\lambda}$ to czas, po którym uszkodzi się $1 - \frac{1}{e} \approx 63.2\%$ elementów

Rozkład gamma

gęstość rozkładu: $f(t) = \frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} e^{-\lambda t}$

(dla t>0, F(0)=0)

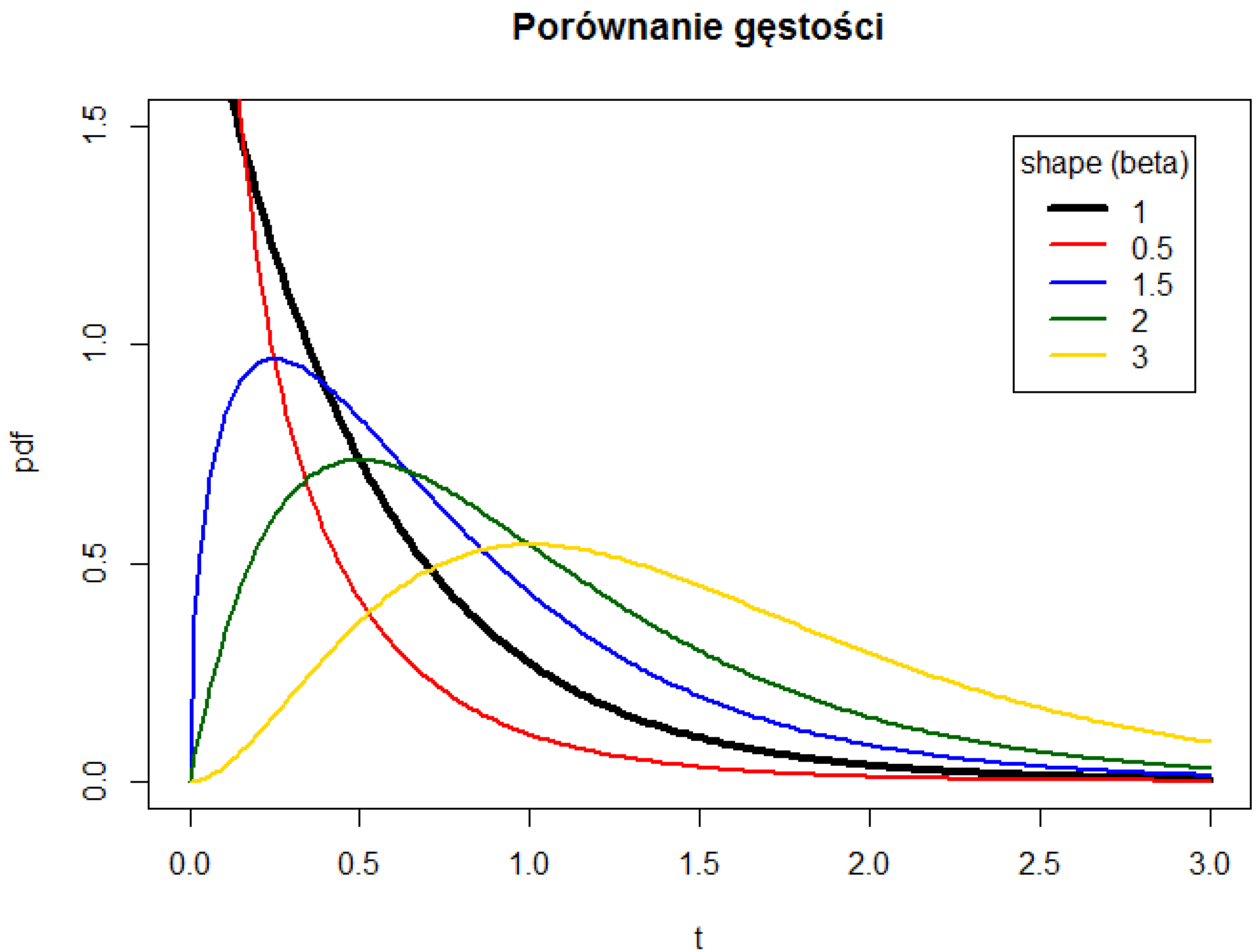
λ>0 – $\frac{1}{\lambda}$ to parametr skali

β>0 – parametr kształtu (β=1 → rozkład wykładniczy)

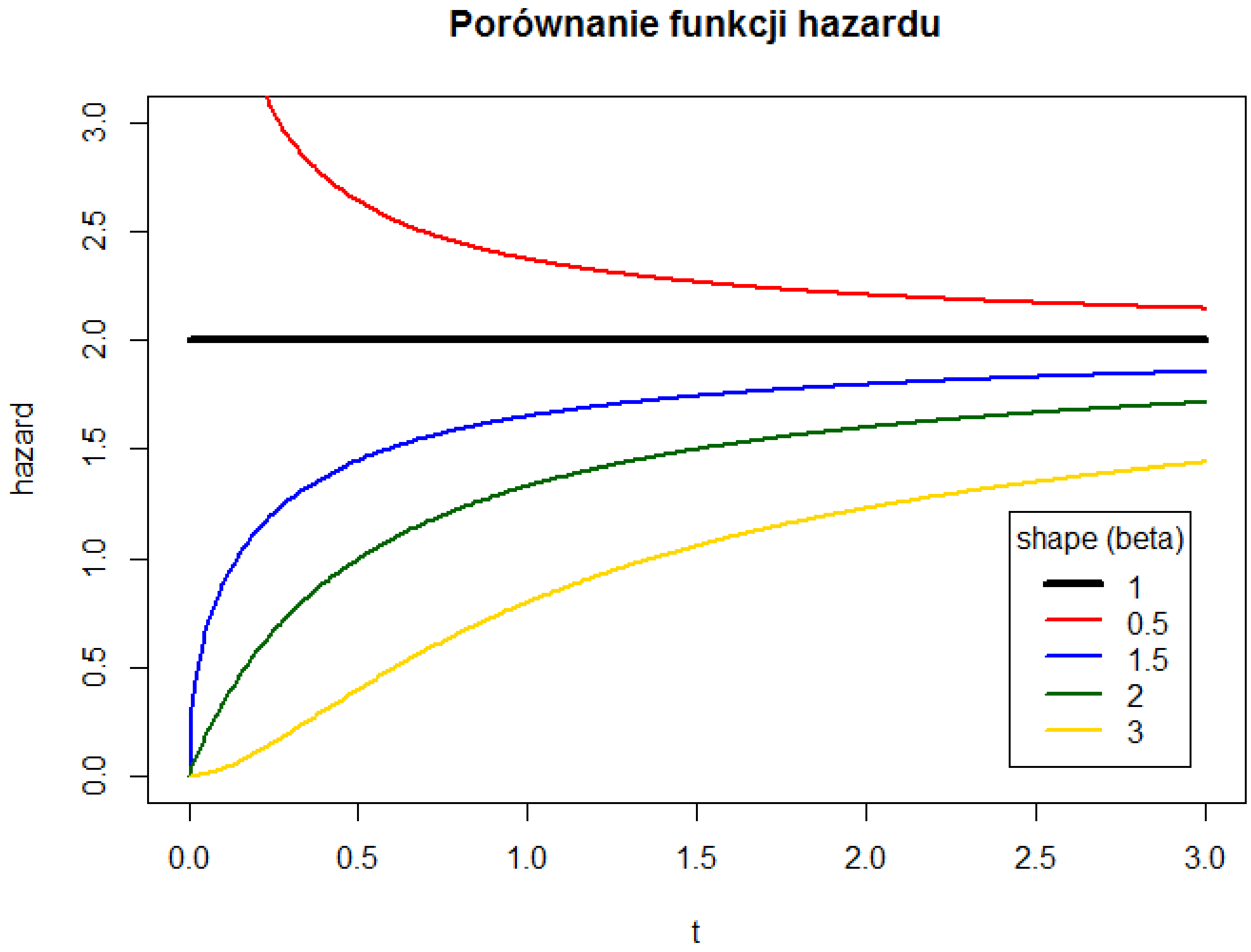
średni czas życia: $T_{FF} = \frac{\beta}{\lambda}$

Rozkład Erlanga dla β=n=2,3,… (suma n zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym)

Rozkład gamma dla *scale* = $\frac{1}{\lambda}$ = 0.5 i różnych wartości β



Rozkład gamma dla *scale* = $\frac{1}{\lambda}$ = 0.5 i różnych wartości β



Funkcja intensywności uszkodzeń dąży monotonicznie do λ

Rozkład normalny

gęstość rozkładu: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

dla $t \in R$

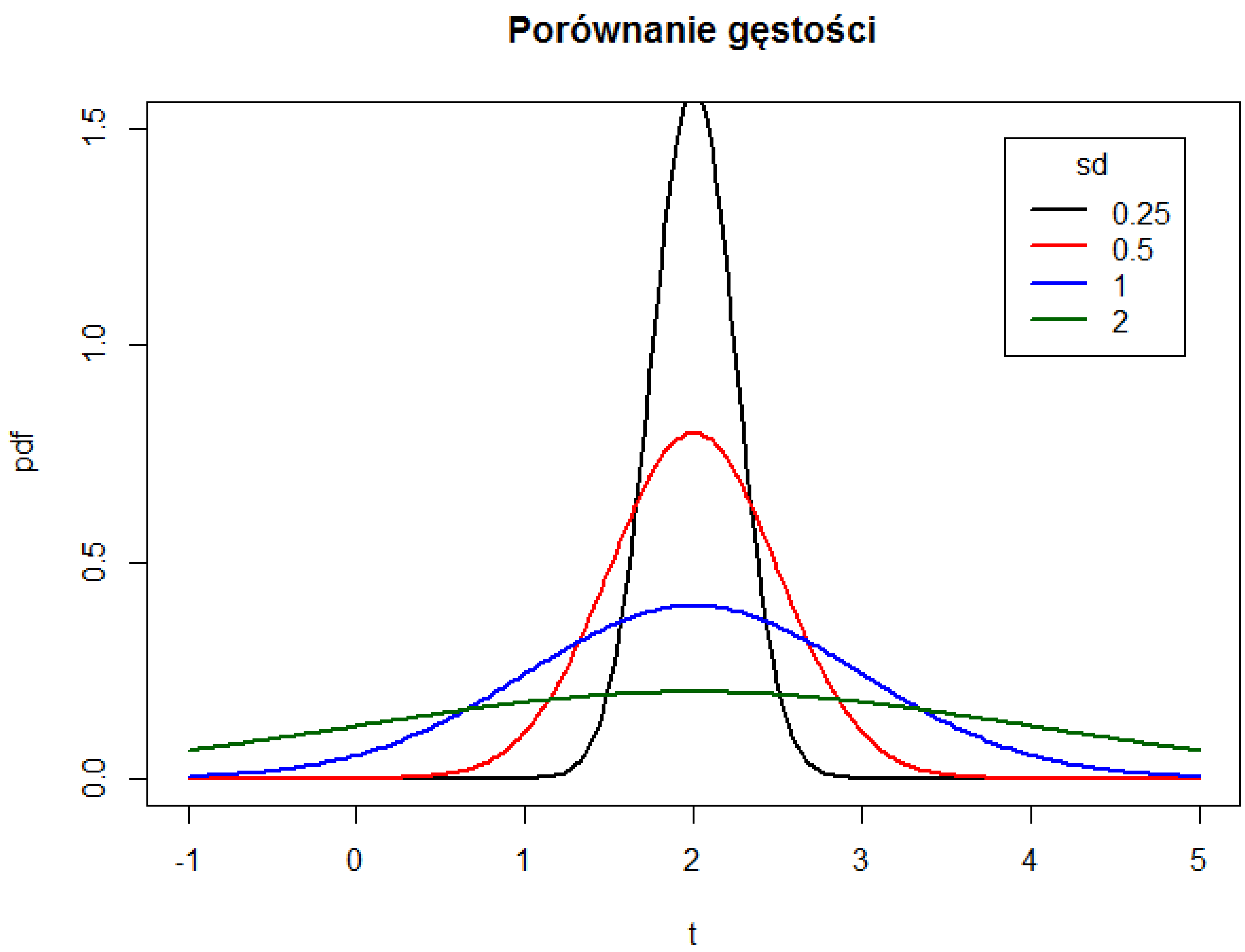
$\mu \in R$ – średnia

$\sigma > 0$ – odchylenie standardowe

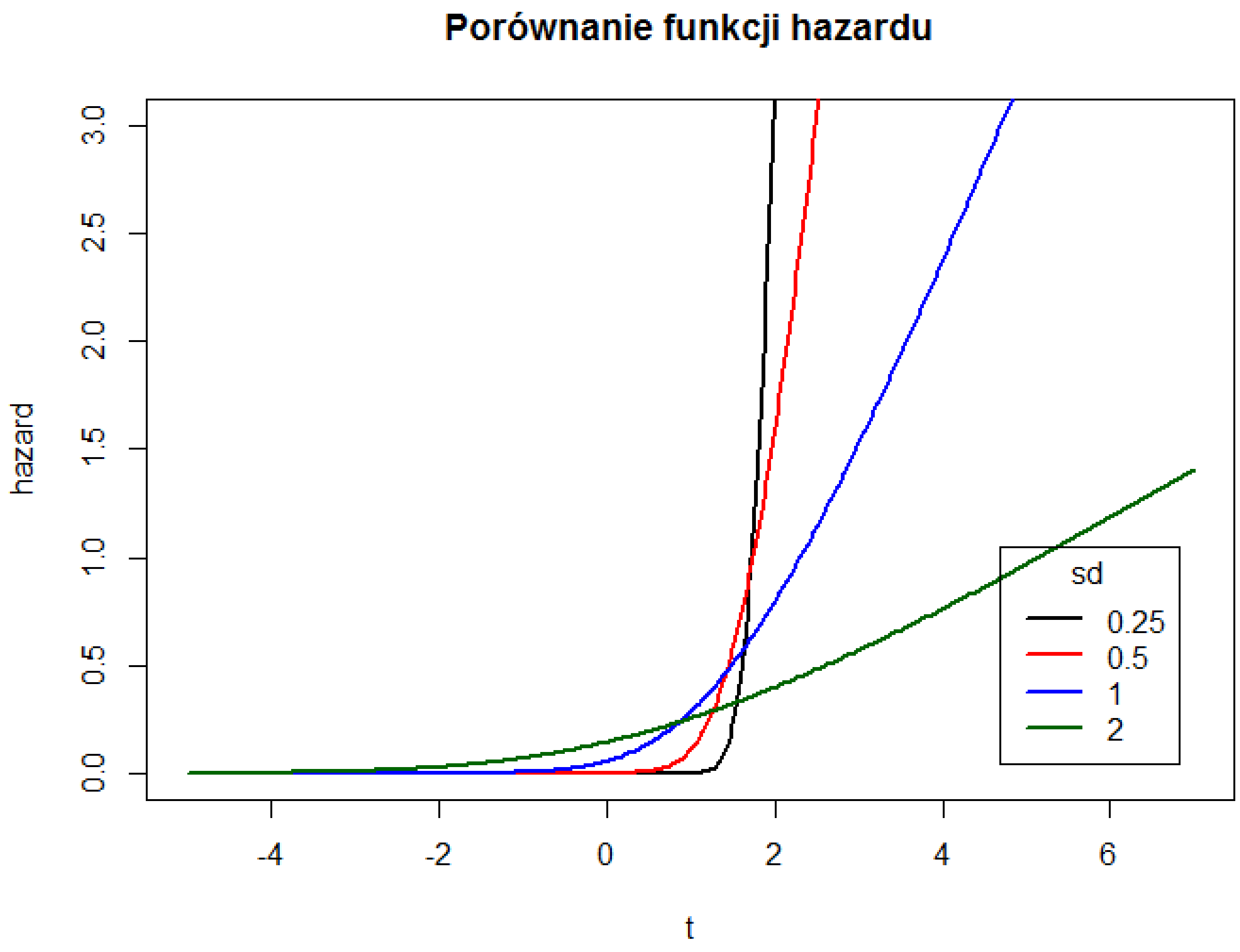
średni czas życia: $T_{FF} = \mu$

$\mathrm{Var(T)} = \sigma^2$

Rozkład normalny dla μ = 2 i różnych wartości σ (sd)



Rozkład normalny dla $\mu = 2$ i różnych wartości σ (sd)



Narzędzia do rysowania funkcji rozkładów w systemie R

R Project for Statistical Computing
www.r-project.org

Funkcje dla rozkładu Weibulla:

`dweibull` – gęstość

`pweibull` – dystrybuanta

`rweibull` – wartość losowa z rozkładu

`qweibull` – kwantyl z rozkładu

Inne rozkłady: [dprq]exp, norm, lnorm, gamma, unif, …

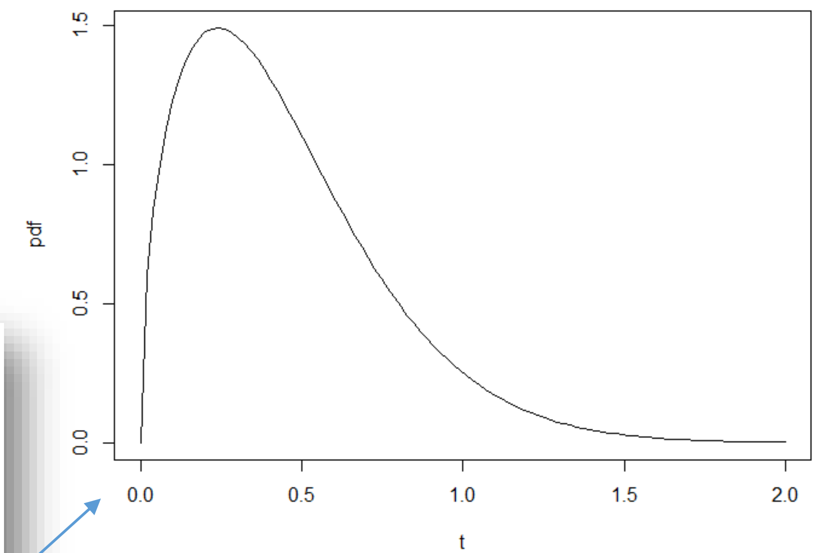
Narzędzia do rysowania funkcji rozkładów w systemie R

Przykład – rysujemy funkcje rozkładu Weibulla

```
dweibull(x, shape, scale)
```

Parametr kształtu = p

Parametr skali = $1/\lambda$



Przykład programu w języku R:

```
x <- seq(0, 2, length=100)
shape <- 1.5        # shape = 1 -- wykładniczy
scale <- 0.5        # scale = 1/lambda

pdf <- dweibull(x, shape=shape, scale=scale)
cdf <- pweibull(x, shape=shape, scale=scale)
hazard <- pdf/(1-cdf)

plot(x, pdf, type="l", xlab="t", ylab="pdf")
plot(x, cdf, type="l", xlab="t", ylab="cdf")
plot(x, hazard, type="l", xlab="t", ylab="hazard")
```