ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 6

Przestrzeń wektorowa, podprzestrzeń
Liniowa niezależność wektorów
Baza przestrzeni wektorowej

PRZESTRZEŃ WEKTOROWA

PODPRZESTRZEŃ

Niech V będzie zbiorem, $\mathbb{K}$ ciałem, $+$ działaniem w zbiorze V oraz niech $\cdot$ będzie mnożeniem elementów zbioru V przez elementy ciała $\mathbb{K}$. $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ nazywamy ***przestrzenią wektorową (liniową)*** nad ciałem $\mathbb{K}$, jeśli spełnione są warunki

- $\forall_{v,w\in V} \;\; v+w=w+v$
- $\forall_{v,u,w\in V} \;\; (v+u)+w=v+(u+w)$
- $\forall_{v\in V}\exists_{w\in V} \;\; v+w=\mathbb{O}$
- $\forall_{a\in\mathbb{K}}\forall_{v,w\in V} \;\; a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$
- $\forall_{a,b\in\mathbb{K}}\forall_{v\in V} \;\; (a+b)\cdot v=a\cdot v+b\cdot v$
- $\forall_{a\in\mathbb{K}}\forall_{v,w\in V} \;\; a\cdot(b\cdot v)=(ab)\cdot v$
- $\forall_{v\in V} \;\; 1\cdot v=v$

Elementy zbioru V nazywamy ***wektorami***, a elementy ciała $\mathbb{K}$ nazywamy ***skalarami***. Element $\mathbb{O}$ nazywamy ***wektorem zerowym***. Element $-v$ nazywamy ***wektorem przeciwnym*** do elementu $v \in V$.

Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego ciała $\mathbb{K}$ zbiór $\mathbb{K}^n$ wszystkich n-wymiarowych ciągów $[a_1, a_2, ..., a_n]$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ względem działania $+$ oraz $\cdot$ określonych wzorami

- $[a_1, a_2, ..., a_n] + [b_1, b_2, ..., a_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n]$
- $a \cdot [a_1, a_2, ..., a_n] = [a \cdot a_1, a \cdot a_2, ..., a \cdot a_n]$

Niepusty zbiór $W \subseteq V$ nazywamy ***podrzestrzenią wektorową (liniową)***, jeżeli spełnione są warunki

1. jeżeli $v_1, v_2 \in W$, to $v_1 + v_1 \in W$,
2. jeżeli $v \in W$ oraz $a \in \mathbb{K}$, to $av \in W$.

Warunki powyższe równoważne są warunkowi

$$\text{jeżeli } v_1, v_2 \in W \text{ oraz } a, b \in \mathbb{K}, \text{ to } av_1 + bv_2 \in W.$$

BAZA PRZESTRZENI WEKTOROWEJ

Mówimy, że wektor v jest ***kombinacją liniową wektorów*** $v_1, ..., v_n \in V$, jeśli istnieją elementy $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ takie, że

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Elementy $a_1, ..., a_n$ nazywamy ***współczynnikami kombinacji liniowej***.

Mówimy, że wektory $v_1, ..., v_n \in V$ są ***liniowo niezależne***, jeśli dla wszelkich skalarów $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ zachodzi

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = 0, ..., a_n = 0$$

Układ wektorów nazywamy ***układem liniowo zależnym***, jeśli nie jest on liniowo niezależny.

Liniowo niezależny układ $\mathscr{B}$ wektorów przestrzeni liniowej V nazywamy ***maksymalnym układem liniowo niezależnym***, jeśli każdy układ wektorów przestrzeni V zawierający $\mathscr{B}$ i różny od $\mathscr{B}$ jest liniowo zależny.

Bazą przestrzeni wektorowej V nazywamy każdy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów tej przestrzeni.

Bazą kanoniczną (standardową, zero-jedynkową) przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^n$ nazywamy układ

$$([1,0,0,...,0,0],[0,1,0,...,0,0],...,[0,0,0,...,0,1]).$$

Fakt 6.1. Niech $\mathscr{B}$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne

1. układ $\mathscr{B}$ jest bazą przestrzeni V
2. układ $\mathscr{B}$ jest liniowo niezależny i generuje przestrzeń V, (tzn. każdy wektor z V mozna przedstawić w postaci kombinacji liniowej elementów z $\mathscr{B}$)
3. każdy wektor przestrzeni V przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów układu z $\mathscr{B}$.