Matematyka Dyskretna Lista 5 28.03-3.04.2023r.

1. Ciąg Fibonacciego dany jest wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n > 1. \end{cases}$

   Udowodnić, że:

   (a) $F_{n-2} + F_{n+2} = 3F_n$; (b) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$;

   (c)* $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$; (d)* $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ dla $n \geqslant 1$.

2. Stosując metodę podstawiania, rozwiązać rekurencje:

   a) $a_n = 4a_{n-1} + 3$ dla $n > 0$ przy $a_0 = 3$; b) $b_n = 3 - \frac{1}{2}b_{n-1}$ dla $n > 0$ przy $b_0 = 3$.

3. Rozwiązać rekurencje:

   (a) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 5a_{n-1} \text{ dla } n > 0; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} b_0 = 1, \ b_1 = 2 \\ b_n = 3b_{n-2} \text{ dla } n > 1; \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} c_0 = 1, \ c_1 = 2 \\ c_n = -2c_{n-1} + 3c_{n-2} \text{ dla } n > 1; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} d_0 = d_2 = 1 \\ d_n = 5d_{n-1} - 6d_{n-2} \text{ dla } n > 1; \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} e_0 = 1, \ e_1 = 8 \\ e_n = 4e_{n-1} - 4e_{n-2} \text{ dla } n > 1; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} f_0 = 3, \ f_2 = -1 \\ f_n = \frac{1}{9}(6f_{n-1} - f_{n-2}) \text{ dla } n > 1; \end{cases}$

   (g)* $\begin{cases} g_0 = 1, \ g_1 = -1 \\ g_n = g_{n-1} - g_{n-2} \text{ dla } n > 1; \end{cases}$ (h)* $\begin{cases} h_0 = 1, \ h_3 = 0 \\ h_n = 2h_{n-1} - 2h_{n-2} \text{ dla } n > 1. \end{cases}$

4. Podać wzór rekurencyjny na liczbę sposobów wypłacania n złotych przy użyciu:

   (a) monet jedno- oraz/lub dwuzłotowych; (b) monet jedno-, dwu- oraz/lub pięciozłotowych.