Algebra liniowa 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw zadań nr 7

Odwzorowania liniowe
Reprezentacja macierzowa odwzorowań liniowych

7.1. Przekształcenie liniowe $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dane jest przez poniższe przyporządkowanie. Obliczyć $\varphi([x_1, ..., x_m])$

a) $n = m = 2, \quad [1, 5] \mapsto [3, 5], [3, 4] \mapsto [5, 6],$

b) $n = m = 3, \quad [3, 1, 1] \mapsto [4, 3, 3], [4, 1, 4] \mapsto [5, 9, 1], [5, 1, 3] \mapsto [6, 7, 3],$

c) $n = 2, m = 3, \quad [3, 1] \mapsto [5, 7, 5], [4, 3] \mapsto [0, 1, 5],$

7.2. Zbadać czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ spełniające dane warunki

a) $n = 3, m = 2, \quad [2, 4, 3] \mapsto [1, 3], [1, 5, 4] \mapsto [0, 3], [9, 3, 1] \mapsto [7, 6],$

b) $n = 3, m = 2, \quad [4, 5, 1] \mapsto [2, 1], [5, 3, 1] \mapsto [1, 3], [1, 11, 1] \mapsto [5, -4],$

c) $n = m = 3, \quad [1, 0, 3] \mapsto [4, 5, 6], [4, 3, 1] \mapsto [3, 8, -7], \ [1, 0, 0] \mapsto [0, 0, 1]$

d) $n = m = 3, \quad [5, 4, 3] \mapsto [1, 0, 7], [3, 3, 3] \mapsto [2, 1, 5], [1, 2, 3] \mapsto [4, 2, 4].$

7.3. Przekształcenia liniowe $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ określone są wzorem $\varphi([x_1, ..., x_n])$ Wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{BC}}(\varphi)$, jeśli dane są bazy $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$.

a) $n = m = 2, \ \varphi([x_1, x_2]) = [4x_1 - x_2, 7x_1 - 3x_2], \mathcal{B} = ([1, 1], [1, 2]), \mathcal{C} = ([2, 1], [3, 1]),$

b) $n = 3, m = 2, \ \varphi([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3], \mathcal{B} = ([3, 1, 1], [5, 1, 6], [4, -1, 2]),$ $\mathcal{C} = ([-1, 1], [1, 0]).$

7.4. Przekształcenia liniowe $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dane jest przez macierz $M_{\mathcal{BC}}(\varphi)$. Obliczyć $\varphi([x_1, ..., x_n])$ jesli dane są bazy $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$

a) $n = m = 2, \quad \mathcal{B} = ([8, 2], [7, 1]), \mathcal{C} = ([6, 7], [4, 5]), M_{\mathcal{BC}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$

b) $n = 3, m = 2, \quad \mathcal{B} = ([1, 1, 0], [1, 3, 1], [6, 5, 2]), \mathcal{C} = ([1, 0], [0, 5]), M_{\mathcal{BC}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

7.5. a) Dana jest baza $\mathcal{B} = ([1, 1], [3, 4])$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, wzór określający endomorfizm $\varphi([x_1, x_2]) = [x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2]$ tej przestrzeni oraz macierz $M_{\mathcal{BC}}(\varphi) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Znalezć bazę $\mathcal{C}$.

b) Dana jest baza $\mathcal{C} = ([-2, 0], [7, 1])$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, wzór określający endomorfizm $\varphi([x_1, x_2]) = [x_1, 3x_1 - 2x_2]$ tej przestrzeni oraz macierz $M_{,\mathcal{BC}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Znalezć bazę $\mathcal{B}$.

7.6. a) Przekształcenia liniowe $\varphi\colon M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone sa wzorami $\varphi([x_1, x_2]) = [2x_1 + x_2, -5x_1 - 4x_2, 4x_1 + 3x_2], \psi([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2 + x_3, 4x_1 + 4x_2 + 5x_3].$ Obliczyć $(\psi \circ \varphi)(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}).$

b) Przekształcenia liniowe $\varphi\colon M(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ określone są wzorami $\varphi(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}) = [x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4, x_1 + x_3 + 8x_4, x_2 + 2x_3 + 8x_4], \psi([x_1, x_2, x_3]) = 4x_1 - x_2 - 3x_3 + (5x_1 + 2x_2 - 7x_3)i$. Obliczyć $(\psi \circ \varphi)(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix})$.

Odpowiedzi:

7.1. a) $[5x_1 + x_2, 6x_1 + 4x_2]$, b) $[x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3]$,
c) $[3x_1 - 4x_2, 4x_1 - 5x_2, 2x_1 - x_2]$.
7.2. a) tak, b) nie, c) tak, d) nie.
7.3. a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.
7.4. a) $[x_1 + x_2, x_1 + 2x_2]$, b) $[5x_1 - x_2 - 4x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3]$.
7.5. a) $\mathcal{C} = ([4,1],[7,2])$, b) $\mathcal{B} = ([1,0],[4,1])$.
7.6. a) $[x_1, 8x_1 + 3x_2]$, b) $3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + (7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4)i$.