## ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

#### dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska Wydział Informatyki i Telekomunikacji Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu.

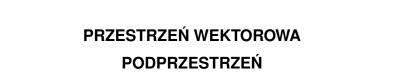
Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody

wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w

Karcie Przedmiotu

## **WYKŁAD 6**

Przestrzeń wektorowa, podprzestrzeń Liniowa niezależność wektorów Baza przestrzeni wektorowej



Niech V będzie zbiorem,  $\mathbb{K}$  ciałem, + działaniem w zbiorze V oraz niech · będzie mnożeniem elementów zbioru V przez elementy ciała  $\mathbb{K}$ .  $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$  nazywamy **przestrzenia** 

**wektorową** (*liniową*) nad ciałem 
$$\mathbb{K}$$
, jeśli spełnione są warunki  $\forall_{v \ w \in V} \ v + w = w + v$ 

$$\forall_{V,U,w\in V} (v+u)+w=v+(u+w)$$

$$\forall v, u, w \in V \quad (V + u) + w = V + (u + w)$$

$$\bullet \ \forall_{v \in V} \exists_{w \in V} \ v + w = \mathbb{O}$$

$$\forall_{v \in V} \exists_{w \in V} \ v + w = \mathbb{O}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{K}} \forall_{v,w \in V} \ a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$$

$$\forall_{a,b \in \mathbb{K}} \forall_{v \in V} \ (a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

$$\forall_{a \in \mathbb{K}} \forall_{v,w \in V} \ a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$$

$$\forall_{a \in \mathbb{K}} \forall_{v,w \in V} \ a$$

$$\forall_{v \in V} \ 1 \cdot v = v$$

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, a elementy ciała  $\mathbb{K}$  nazywamy **skalarami**. Element  $\mathbb{O}$  nazywamy **wektorem zerowym**. Element -v nazywamy **wektorem przeciwnym** do elementu  $v \in V$ 

Dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  i dowolnego ciała  $\mathbb{K}$  zbiór  $\mathbb{K}^n$  wszystkich n-wymiarowych ciągów  $[a_1, a_2, ..., a_n]$  tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem  $\mathbb{K}$  względem działania + oraz  $\cdot$  określonych wzorami

- $\bullet \ [a_1, a_2, ..., a_n] + [b_1, b_2, ..., a_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n]$
- $a \cdot [a_1, a_2, ..., a_n] = [a \cdot a_1, a \cdot a_2, ..., a \cdot a_n]$

Niepusty zbiór  $W\subseteq V$  nazywamy **podrzestrzenią wektorową** (**liniową**), jeżeli spełnione są warunki

- $\bigcirc$  jeżeli  $v_1, v_2 \in W$ , to  $v_1 + v_1 \in W$ ,
- 2 jeżeli  $v \in W$  oraz  $a \in \mathbb{K}$ , to  $av \in W$ .

Warunki powyższe równoważne są warunkowi

jeżeli  $v_1, v_2 \in W$  oraz  $a, b \in \mathbb{K}$ , to  $av_1 + bv_2 \in W$ .



Mówimy, że wektor v jest **kombinacją liniową wektorów**  $v_1,...,v_n \in V$ , jeśli istnieją elementy  $a_1,...,a_n \in \mathbb{K}$  takie, że

$$V = a_1 V_1 + ... + a_n V_n$$

Elementy  $a_1,...,a_n$  nazywamy **współczynnikami kombinacji liniowej**.

Mówimy, że wektory  $v_1,...,v_n \in V$  są *liniowo niezależne*, jeśli dla wszelkich skalarów  $a_1,...,a_n \in \mathbb{K}$  zachodzi

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = 0, ..., a_n = 0$$

Układ wektorów nazywamy *układem liniowo zależnym*, jeśli nie jest on liniowo niezależny.

Liniowo niezależny układ  $\mathscr{B}$  wektorów przestrzeni liniowej V nazywamy maksymalnym układem liniowo niezależnym, jeśli każdy układ wektorów przestrzeni V zawierający  $\mathscr{B}$  i różny od  $\mathscr{B}$  jest liniowo zależny.

### Bazą przestrzeni wektorowej V nazywamy każdy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów tej przestrzeni.

([1,0,0,...,0,0],[0,1,0,...,0,0],...,[0,0,0,...,0,1]).

# Bazą kanoniczną (standardową, zero-jedynkową)

przestrzeni wektorowej  $\mathbb{K}^n$  nazywamy układ

## **Fakt 6.1.** Niech ${\mathscr B}$ będzie układem wektorów przestrzeni V.

- Następujące warunki są równoważne
- - układ \$\mathscr{B}\$ jest liniowo niezależny i generuje przestrzeń \$V\$, (tzn. każdy wektor z \$V\$ mozna przedstawić w postaci kombinacji liniowej elementów z \$\mathscr{B}\$)
  - $oldsymbol{3}$  każdy wektor przestrzeni V przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów układu z  $\mathcal{B}$ .