Algebra liniowa 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw zadań nr 2

Kongruencje
Grupa Podgrupa
Grupa C_n Grupa S_n

2.1. Zbudować tabelki działań + oraz − w zbiorze $\mathbb{Z}_n$, gdzie $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

2.2. Czy dodawanie liczb jest działaniem w zbiorze liczb niewymiernych? Odpowiedź uzasadnić.

2.3. Czy w zbiorze wielomianów stopnia n o współczynnikach rzeczywistych dodawanie jest działaniem? Odpowiedz uzasadnić.

2.4. Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^2$ w $\mathbb{Z}_{11}$.

2.5. Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{13}$.

2.6. Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto \frac{x+2}{2x-1}$ w $\mathbb{Z}_7$.

2.7. Pokazać, że każdy element $\mathbb{Z}_5$ jest sześcianiem elementu $\mathbb{Z}_5$. Czy tak samo jest dla $\mathbb{Z}_{11}$ i $\mathbb{Z}_{13}$?

2.8. Sprawdzić czy istnieją (i wyznaczyć jeśli istnieją) pierwiastki kwadratowe z -1 w zbiorze $\mathbb{Z}_n$ dla $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.

2.9. Sprawdzić, czy każdy różny od 0 element $\mathbb{Z}_n$ dla $n = 5, 7, 11$ podniesiony do pewnej potęgi daje 1.

2.10. Wykonać działanie $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4^{-1})(5 \cdot 12 - 7) - 1$ w $\mathbb{Z}_n$ dla $n = 17, 23$.

2.11. Zapisać w postaci grafu następujące permutacje

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 5 & 7 & 13 & 2 & 9 & 4 & 11 & 8 & 1 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & a & e & d & f \end{pmatrix}$.

2.12. Zapisać w postaci cykli następujące permutacje zapisane w postaci dwuwierszowej

a) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & d & a & e & c & f & h & g \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 10 & 9 & 4 & 11 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

W każdym przypadku wyznaczyć rząd i parzystość permutacji.

2.13. Zapisać dany cykl ze zbioru S_6 w postaci tabelarycznej, tzn. dwuwierszowej

$a)(425), b)(354216), c)(45), d)(453)(21), e)(21)(34)(56)$.

2.14. Niech dane będą dwie permutacje $g = (13)(254)(6)$ oraz $h = (1364)(25)$. Wyznaczyć a) gh, b) hg, c) gh^{-1}, d) ghg, e) $h^{-1}gh$, f) $(gh)^{-1}$. W każdym przypadku wyznaczyć rząd i parzystość permutacji.

2.15. W grupie S_5 rozwiązać równania:

a) $(153)x = (13)(254)$,

b) $(2534)x(1254) = (13542)$,

c)$(15243)^{-1}x(14532) = (12453)$.

2.16. W grupie S_6 rozwiązać równanie $(13654)x(163542)^{-1} = (12643)$.

2.17. Niech $M = \{1, 2, 3\}$. Funckję $f\colon M \to M$ określoną wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6$. Czy $f \in S_3$?

2.18.* Niech $G = \{(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ będzie podzbiorem S_4 (przedstawiającycm zbiór izometrii płaszczyzny odwzorowujący prostokąt). Czy G jest grupą? Odpowiedź uzasadnić.

2.19. Dla grupy $S_3 = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ gdzie $g_1 = e = (1)(2)(3), g_2 = (12)(3), g_3 = (13)(2), g_4 = (1)(23), g_5 = (123), g_6 = (132)$ utworzyć tabliczkę mnożenia.

2.20.* Niech Φ będzie prostokątem $ABCD$. Wyznaczyć $D(\Phi)$ oraz $D^+(\Phi)$ i nazwać każdą z powstałych permutacji.

Odpowiedzi:

2.1. $\mathbb{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

; $\mathbb{Z}_3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

;

analogicznie dla $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_7$.

2.2. Nie, np. $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, a 0 nie jest liczbą niewymierną.

2.3. Nie, bo np. $f(x) = x^2 + 2, g(x) = -x^2$, to $f(x) + g(x) = 2$, czyli $st(f + g) < 2$.

2.4.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

2.5.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^{-1}	-	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

2.6.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{x+2}{2x-1}$	5	3	6	1	-	0	2

2.7.

x	0	1	2	3	4
x^3	0	1	3	2	4

2.8. Wskazówka: $\sqrt{-1} = x \leftrightarrow -1 = x^3$, dla $\mathbb{Z}_2, 1 = x^2$ czyli $x = 1$, tak; dla $\mathbb{Z}_3, 2 = x^2$ nie; dla $\mathbb{Z}_5, 4 = x^2$ czyli $x = 2$, tak; dla $\mathbb{Z}_7 6 = x^2$ nie; dla $\mathbb{Z}_{11} 10 = x^2$ nie; dla $\mathbb{Z}_{13} 12 = x^2$ $x = 5$, tak.

2.9. np. dla $\mathbb{Z}_5$ mamy $1^2 = 1, 2^4 = 1, 3^4 = 1, 4^2 = 1$. Pozostałe analogicznie.

2.10. w $\mathbb{Z}_{17}, 5$; w $\mathbb{Z}_{23}, 22$.

2.12. a) (a b d e c)(g h)(f), (pojedyncze cykle można pominąć w zapisie);
b) (1 2)(4 5)(3); c) (1 3 2 5 10 7 4)(6 9 8 11). Rząd i parzstość to zadanie z *.

2.13. a) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 1\ 5\ 3\ 2\ 4\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 6\ 1\ 5\ 2\ 4\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 2\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5 \end{pmatrix}$

2.14. Uwaga: permutacje skłądamy z lewej strony na prawą wg książki: Klin, Poschel, Rosenbaum "Algebra stosowana dla matematyków i informatyków", WNT 1992.
a) $gh = (1645)(2)(3)$, b) $hg = (1)(36254)$, c) $gh^{-1} = (1)(2)(3456)$, d) $ghg = (16253)(4)$, e) $h^{-1}gh = (152)(36)(4)$, f) $(gh)^{-1} = (2)(3)(1546)$.

2.15. $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. a) x = (1)(2534), b) x = (13542), c) (15)(24)(3).

2.16. x= (1523)(4)(5).

2.17.

x	1	2	3
f(x)	2	1	3