

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 8, 21.11.2022)

Funkcje dwóch i trzech zmiennych. Granica i ciągłość, pochodne cząstkowe.

Zad. 1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji i naszkicować ją na płaszczyźnie:

- a)** $f(x, y) = \sqrt{2x - y + 1}$, **b)** $f(x, y) = xy$, **c)** $f(x, y) = \ln(xy)$,
d) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{y^2 - 4}$, **e)** $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$, **f)** $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$.

Zad. 2. Wyznaczyć i narysować poziomice funkcji:

- a)** $f(x, y) = 2x - y + 1$, dla wartości: $-2, 0, 1, 2$,
b) $f(x, y) = xy$, dla wartości: $-1, 0, 3, 5$,
c) $f(x, y) = |x - 1| - y + 3$, dla wartości: $1, 2, 3$.

Zad. 3. Obliczyć granice funkcji (jeżeli istnieją):

- a)** $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \frac{x}{x+y}$, **b)** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$, **c)** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$,
d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy}$, **e)** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$. **f)** $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

Zad. 4. Zbadać ciągłość funkcji:

- a)** $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ **b)** $(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Zad. 5. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

- a)** $f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - y^3$, **b)** $f(x, y) = \frac{x}{y}$, **c)** $f(x, y) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{y}}$, **d)** $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,
e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, **f)** $f(x, y) = x^y$, **g)** $f(x, y) = e^{x(x+y)}$, **h)** $f(x, y) = \sin(x \cos y)$,
i) $f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$, **j)** $f(x, y) = \arctg(x - y)^2$.

Zad. 6. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

- a)** $f(x, y, z) = x \cos(y^2 - z^3)$, **b)** $f(x, y, z) = \ln(x + y - 5z)^2$, **c)** $f(x, y, z) = x^{y^z}$,

Zad. 7. Sprawdzić, że funkcja

$$f(x, y) = x \ln \frac{x}{y} \text{ spełnia } \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y = f(x, y).$$

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Kryszicki L., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.