Granica, ciągłość funkcji
(Analiza Matematyczna 1, wykład 5)

Granica funkcji w punkcie

Rozpatrujemy funkcję:

$$f : R \to R.$$

Niech $x = \{x_n\}$ **będzie pewnym ciągiem, a** $\{f(x_n)\}$ **ciągiem wartości funkcji.**

Do czego dąży $\{f(x_n)\}$ **gdy** x **zmierza do punktu** x_0 **lub** ∞**, co zapisujemy odpowiednio:**

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \quad \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Czasami oddzielnie rozpatruje się granicę prawostronną ($x_n > x_0$**) lub lewostronną (**$x_n < x_0$**) w punkcie** x_0**, a także granice w + lub -** ∞**, tj.**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \to \infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Przykład

Ciąg $a_n = \dfrac{1}{n}$ **jest prawostronnie zbieżny do 0 (** $\lim\limits_{a_n \to 0^+} a_n = 0$**), a ciąg** $b_n = -\dfrac{1}{n}$ **jest lewostronnie zbieżny do 0 (** $\lim\limits_{b_n \to 0^-} b_n = 0$**),**

__Przypomnienie__.

Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest *zbieżny* do granicy *a* iff, gdy dla dowolnej liczby ε prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do przedziału $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, formalnie

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in N\ \forall n \geq k, |a_n - a| < \varepsilon$$

Dla dowolnie małego otoczenia punktu *a*, prawie wszystkie elementy ciągu są mniej niż o ε odległe od granicy *a*.

Granicę funkcji w punkcie definiujemy podobnie. Będziemy korzystali z dwóch równoważnych definicji:

- ***Heinego* oraz**
- ***Causchy'ego*.**

<u>Definicja</u> Heinego.

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę równą g, iff, gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ takiego, że, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ istnieje granica ciągu $\{f(x_n)\}$ i jest ona równa g, tj.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall\{x_n\} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Zapisujemy to następująco: $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ **lub** $f(x) \to g$ **gdy** $x \to x_0$.

<u>Przykład.</u>

Obliczymy $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Funkcja $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ **jest określona na zbiorze** $X = R \setminus \{1\}$.

Bierzemy dowolny ciąg o wyrazach $x_n \in X$ **(oczywiście** $\forall n \in N,\ x_n \neq 1$**) taki, że** $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Odpowiedni ciąg wartości funkcji f

$$f(x_n) = \frac{x_n^3 - 1}{x_n - 1} = x_n^2 + x_n + 1.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, **więc**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Zgodnie więc z definicją Heinego

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Przykład

$$f(x)=\frac{|x|-2x}{x},\quad \text{dziedzina: } X=\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Pokażemy, że $f(x)$ nie ma granicy w punkcie 0.

Z def. Heinego wystarczy pokazać, że istnieję dwa różne ciągi $\{x_n^{'}\}$ i $\{x_n^{''}\}$

(o wyrazach $\neq 0$) zbieżne do 0 takie, że ciągi $\{f(x_n^{'})\},\{f(x_n^{''})\}$ są zbieżne do różnych granic.

Niech $x_n^{'}=\frac{1}{n}$ oraz $x_n^{''}=\frac{-1}{n}$. Są one oczywiście zbieżne do 0. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^{'})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-2\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=-1, \text{ a}$$

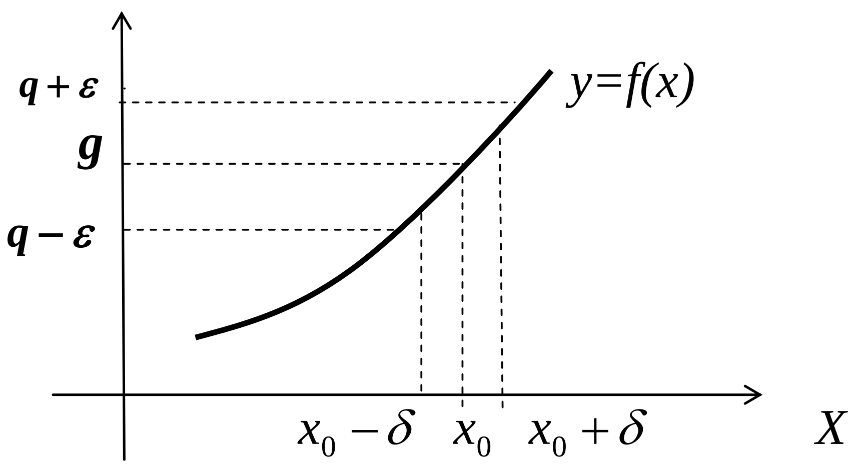
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^{''})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}=-3.$$

Jeśli chcemy pokazać, że w jakimś punkcie granica funkcji nie istnieje, to często wygodniej jest zastosować powyższą metodę.

<u>Definicja</u> Causchy'ego.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon.$$

Czytając od prawej strony. Chcemy, aby funkcja $f(x)$ różniła się od wartości g najwyżej o ε. Można wskazać otoczenie punktu x_0, takie, że dla każdego elementu tego otoczenia wartość funkcji należy do przedziału $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$.



Przykład

Pokażemy z df. granicy Causchye'go, że $\lim\limits_{x\to 1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$, tj.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ taka, że z nierówności:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że

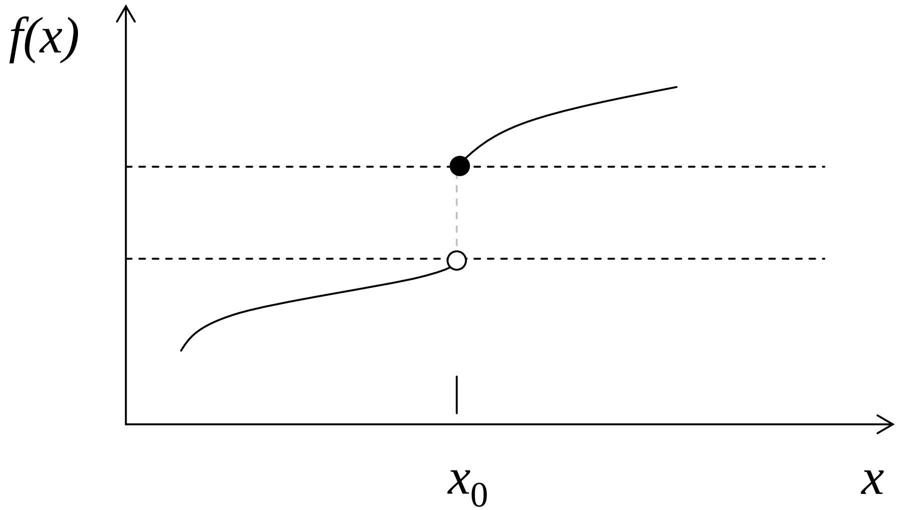
$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)}.$$

Stąd

$$\left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right| \le \frac{|x-1|}{2} < \varepsilon.$$

Jeżeli więc $|x-1| < \delta = 2\varepsilon$, to $\left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - g \right| < \varepsilon .$$



w x_0 granica nie istnieje.

W ostatnim przykładzie rozpoczynaliśmy od nierówności postaci $|x-a|<\delta$ **i dążyliśmy do uzyskania nierówności** $|f(x)-g|<\varepsilon$**.**

Jeśli chcemy pokazać, że w jakimś punkcie granica funkcji nie istnieje, to często wygodniej jest zastosować inną metodę.

<u>Przykład</u>

Sprawdzimy, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$**.**

Weźmy najpierw ciąg $x_n = {}^1\!/_n$**. Granicą tego ciągu jest 0, natomiast**

$$\lim_{x_n\to 0} f(x_n) = \lim_{x_n\to 0}\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Weźmy teraz ciąg $y_n = -{}^1\!/_n$**. Granicą tego ciągu jest 0, natomiast**

$$\lim_{y_n\to 0} f(y_n) = \lim_{x_n\to 0}\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty.$$

Otrzymaliśmy dwa różne wyniki dla dwóch różnych ciągów. Stąd – nie istnieje granica funkcji $f(x) = {}^1\!/_x$ **w punkcie** $x=0$**.**

Reguły dotyczące działań na granicach funkcji są takie same, jak w wypadku granic ciągów.

Twierdzenie (o granicach właściwych).

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

o ile istnieją wszystkie granice po prawych stronach i dodatkowo granica w mianowniku jest różna od zera.

Przykład.

Obliczyć $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x(x^2-1)+(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)^2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

<u>Twierdzenie</u> (o trzech funkcjach).

Jeżeli funkcje f, g, h są określone na przedziale (a,b) oraz

1. $x_0 \in (a,b)$,
2. $\forall x \in (a,b), \quad f(x) \le g(x) \le h(x)$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = k$, **to**

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = k.$$

Przykład.

Obliczyć:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x$, **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x}$, **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x+1}$.

$$-|x| \le x\sin x \le |x|$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \le \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1} \le \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x - 1}{x + 1} \le \frac{\lfloor x \rfloor}{x + 1} \le \frac{x}{x + 1}$$

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI W PUNKCIE

Dla wielu funkcji zachodzi równość

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Takie funkcje nazywamy <u>ciągłymi w punkcie</u> *a*.

Istnieją dwie równoważne definicje.

<u>Definicja Heinego</u>

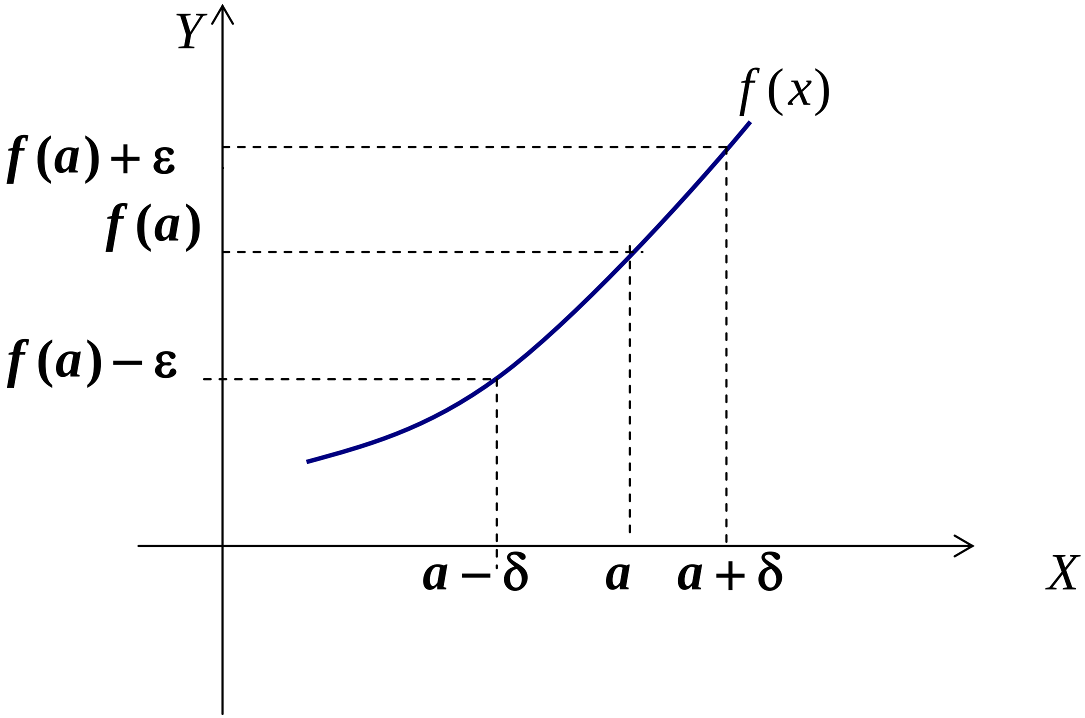
Funkcja f jest ciągła w punkcie a, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do $f(a)$

$$\forall x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a).$$

Definicja Cauchy'ego

Funkcja f jest ciągła w punkcie a, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$



Twierdzenie

(i) *Suma, różnica oraz iloczyn funkcji ciągłych* w pewnym punkcie jest funkcją ciągłą w tym punkcie.

(ii) Jeżeli funkcje $f(x)$ i $h(x)$ są ciągłe w punkcie a i $h(a) \neq 0$, to *iloraz* $f(x)/h(x)$ jest także funkcją ciągłą w tym punkcie.

(iii) *Funkcja stała* $f(x) = k$ oraz *funkcja tożsamościowa* $g(x) = x$ są ciągłe w każdym punkcie $x \in R$

Wniosek

Każdy wielomian $W_n(x)$ jest funkcją ciągłą w dowolnym punkcie $x \in R$.

Funkcja wymierna jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny, którą jest zbiór *R* z wyjątkiem pierwiastków wielomianu znajdującego się w mianowniku.

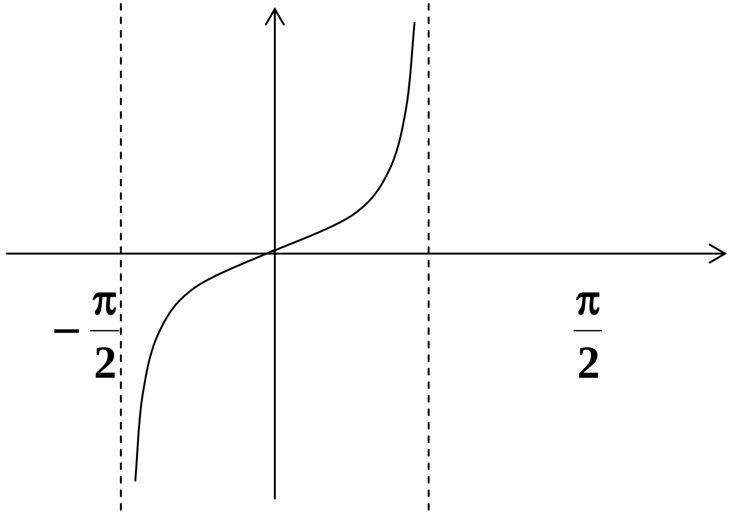
Przykład

Funkcje wymierne:

- $f(x)=\frac{x^3}{x+1},$ ***jest ciągła dla*** $x\in R\setminus\{-1\}$
- $f(x)=\frac{x}{x^3-1},$ ***jest ciągła dla*** $x\in R\setminus\{1\}$
- $f(x)=\frac{2x^3-x+7}{x^2-x-2},$ ***jest ciągła dla*** $x\in R\setminus\{-1,2\}$

Funkcje trygonometryczne:

- $\sin x$ ***i*** $\cos x$***, są ciągłe dla każdego*** $x\in R$
- $ctgx$ ***jest ciągły w zbiorze*** $R\setminus\{x_k : x_k = k\pi\}$
- tgx ***jest ciągły w zbiorze*** $R\setminus\{x_k : x_k = \pi/2 + k\pi\}$



<u>Definicja</u>

***Funkcja f(x) jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0*, jeżeli**

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

gdzie $x \to x_0^+$ oznacza, że *x* dąży do x_0 z prawej strony.

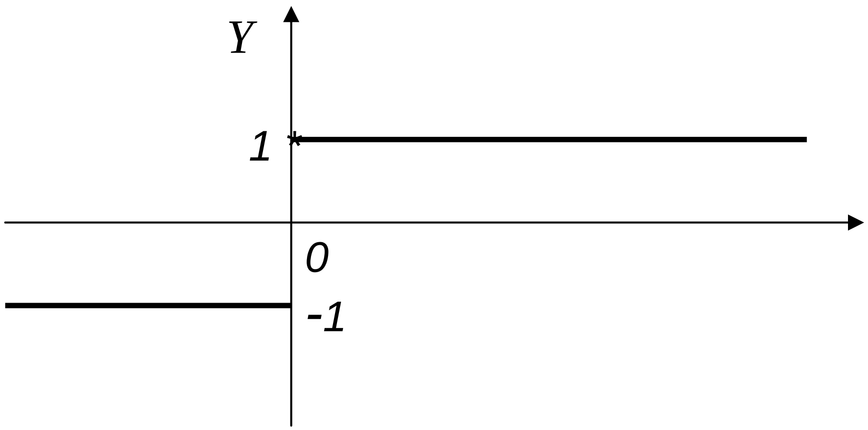
***Funkcja f(x) jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0*,jeżeli**

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

gdzie $x \to x_0^-$ oznacza, że *x* dąży do x_0 z lewej strony.

Przykład

Funkcja $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn} x & dla \quad x \neq 0 \\ 1 & dla \quad x = 0 \end{cases}$



jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_o = 0$, ***ponieważ***

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1 = f(0)$$

natomiast nie jest w tym punkcie lewostronnie ciągła, ponieważ

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(-1) = -1 \neq f(0)$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, to jest w tym punkcie lewo- i prawostronnie ciągła, a także na odwrót.

Definicja

***Funkcja f(x) jest ciągła w przedziale domkniętym [a;b],* jeżeli spełnia następujące warunki:**

- **jest ciągła w przedziale $(a;b)$**
- **prawostronnie ciągła w punkcie *a*,**
- **lewostronnie ciągła w punkcie *b*.**

Przykład

Funkcja $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn} x & dla \quad x \neq 0 \\ 1 & dla \quad x = 0 \end{cases}$

jest ciągła w przedziale $[0,+\infty)$.

Jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest ciągła w punkcie x_0, to x_0 nazywamy *punktem nieciągłości tej funkcji*.

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CIĄGŁYCH

<u>**Twierdzenie (**</u>***o ciągłości funkcji odwrotnej*****)**

Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i rosnącej (malejącej) jest ciągła i rosnąca (malejąca).

<u>**Przykład**</u>

- **Funkcja** $a^x \left(0 < a < 1\right)$ **jest ciągła i malejąca, a więc funkcja** $\log_a x$**, odwrotna do niej, jest także ciągła i malejąca.**
- **Funkcja** $\sin x$ **jest w dziedzinie** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **ciągła i rosnąca, a zatem funkcja** $arc\sin x$ **odwrotna do niej, jest także ciągła i rosnąca.**

<u>**Twierdzenie**</u> **(*o ciągłości funkcji złożonej*)**

Jeżeli funkcja $f\left(x\right)$ **jest ciągła w punkcie** x_0 **i funkcja** $h\left(u\right)$ **jest ciągła w punkcie** $u_0 = f\left(x_0\right)$**, *to funkcja złożona*** $h[f\left(x\right)]$ **jest ciągła w punkcie** x_0**.**

Przykład

Funkcja złożona $\sin(\cos x)$ jest ciągła w każdym punkcie.

Twierdzenie (*o wprowadzeniu granicy do argumentu funkcji ciągłej*)

Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ i funkcja $h(u)$ jest ciągła w punkcie $u_0 = g$, to

$$\lim_{x\to x_0} h[f(x)] = h\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = h(g)$$

Przykład

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{\sin x}{|x|}} = e^{\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{|x|}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = \cos\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

odpowiednio, z ciągłości funkcji e^x i $\cos x$.

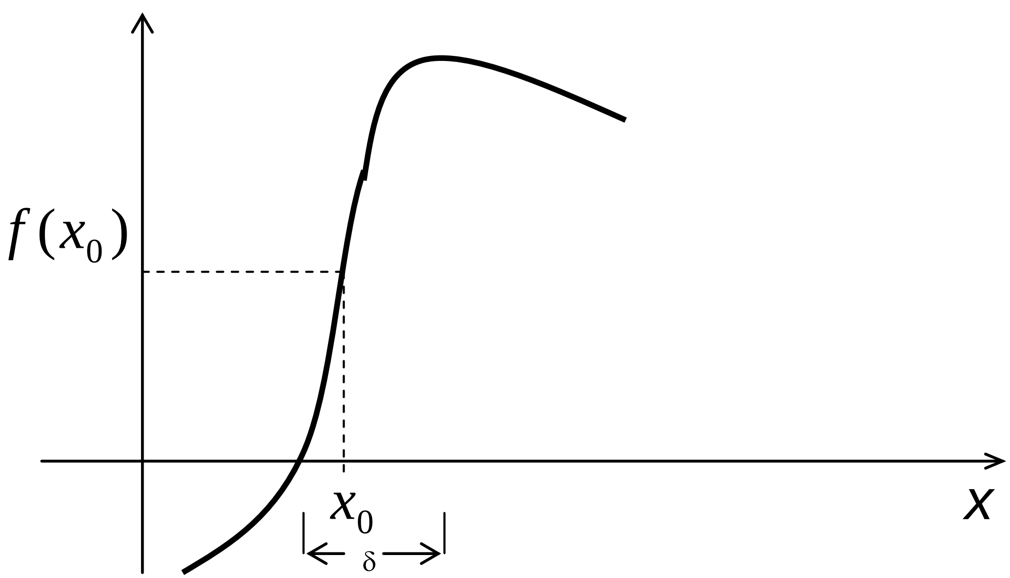
<u>Twierdzenie</u> (*o lokalnym zachowaniu znaku*)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 oraz

$$f(x_0) > 0 \text{ albo } f(x_0) < 0,$$

to istnieje takie otoczenie *Q* punktu x_0, (przedział otwarty zawierający x_0) że dla każdego $x \in Q$ spełniona jest nierówność

$$f(x) > 0 \text{ albo odpowiednio } f(x) < 0.$$



Przykład

Funkcja $f(x)=\sin x$ **jest ciągła w punkcie**

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \text{ i } \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Istnieje więc takie otoczenie Q**, w którym funkcja** $\sin x$ **zachowuje znak, tzn.** $\sin x > 0$**.**

Twierdzenie (***o wartościach pośrednich***)

Funkcja ciągła $f(x)$ **przyjmuje w przedziale** $(a;b)$ **każdą wartość pośrednią między** $f(a)$ **i** $f(b)$**.**

<u>Przykład</u>

Sprawdzić, czy funkcja $f(x)=\frac{2}{\pi}x-\sin x$

ma w przedziale $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ **miejsce zerowe.**

Funkcja $f(x)=\frac{2}{\pi}x-\sin x$ ***jest ciągła w przedziale*** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$***, przy czym***

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0, \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$

a zatem $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0<f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$***.***

Istnieje więc w przedziale $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ ***taki punkt c, że*** $f(c)=0$**.**

Oczywiście $c=\frac{\pi}{2}$***.***

<u>Twierdzenie</u> (Darboux)

Jeżeli funkcja $f(x)$ **jest ciągła w przedziale** $[a,b]$**, a ponadto**

$$f(a)\cdot f(b)<0,$$

to istnieje taki punkt $c\in(a,b)$**, że *f(c)=0.***

<u>Przykład</u>

Sprawdzić czy funkcja $f(x) = e^{2x^2+x} - \frac{2}{x}$ **ma miejsce zerowe w przedziale** $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$**.**

Funkcja

$$f(x) = e^{2x^2+x} - \frac{2}{x}$$

jest ciągła w przedziale $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$

Ponieważ

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e - 4 < 0, \qquad f(1) = e^3 - 2 > 0$$

więc

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$$

istnieje zatem w przedziale $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ **taki punkt *c*, że**

$$e^{2c^2+c} - \frac{2}{c} = 0$$

Równanie

$$e^{2x^2+x} - \frac{2}{x} = 0$$

ma więc w przedziale $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ **co najmniej jeden pierwiastek.**

ASYMPTOTY
(pionowa, pozioma, ukośna)

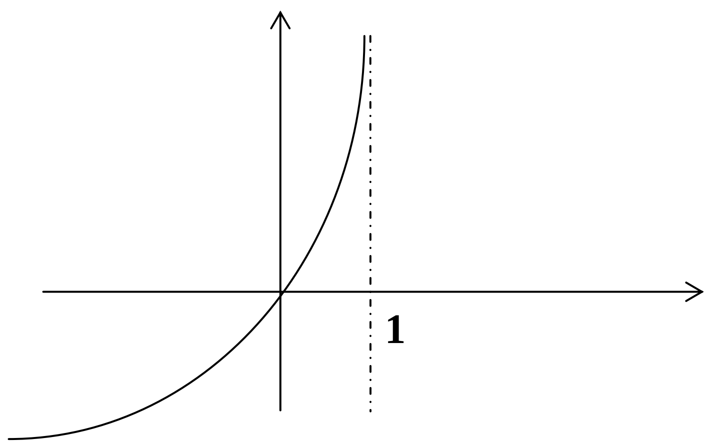
Prosta $x = c$ jest *asymptotą pionową lewostronną* funkcji $y = f(x)$ iff, gdy granica lewostronna funkcji $f(x)$ w punkcie c jest niewłaściwa, tj.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty.$$

<u>Przykład</u>.

Niech $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

Ponieważ $\lim_{x \to 1^-} \ln \frac{1}{1-x} = +\infty$, więc $x = 1$ jest *asymptotą pionową lewostronną*.



Prosta $x = c$ jest *asymptotą pionową prawostronną* funkcji $y = f(x)$ iff, gdy

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty.$$

Prosta $x=c$ jest ***asymptotą pionową obustronną*** **funkcji** $y=f(x)$ **iff, gdy**

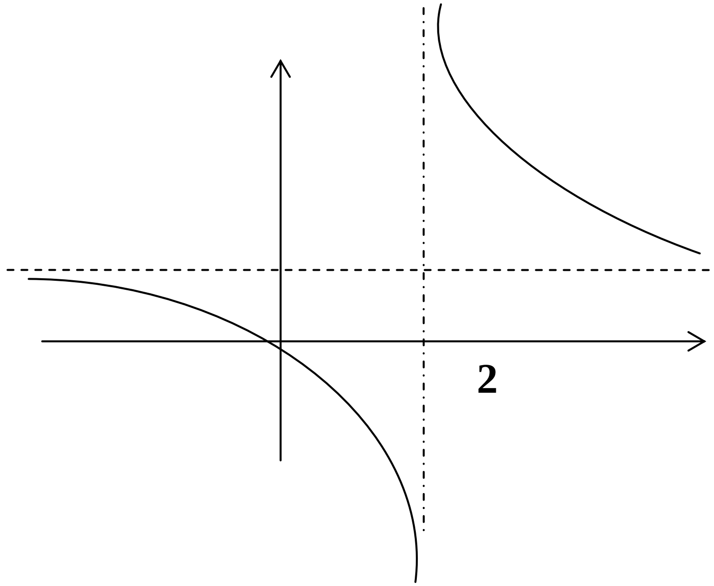
$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty \text{ oraz } \lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$$

Przykład.

$$f(x)=\frac{x}{x-2}.$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=-\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty,$$

więc prosta $x=2$ **jest obustronną asymptotą pionową.**



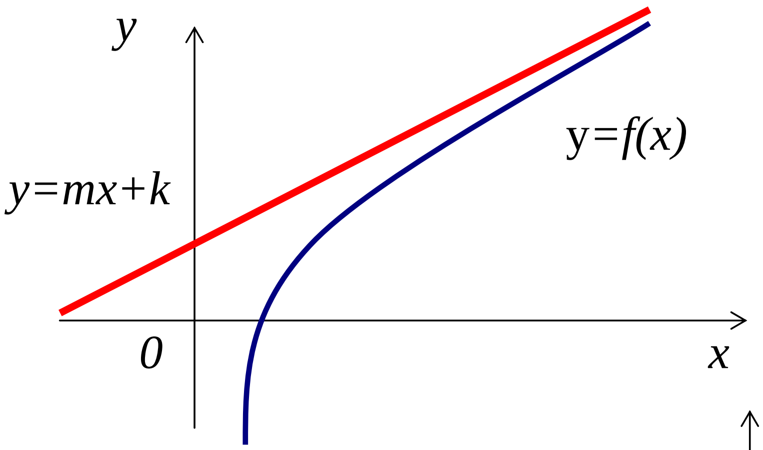
<u>Definicja</u>.

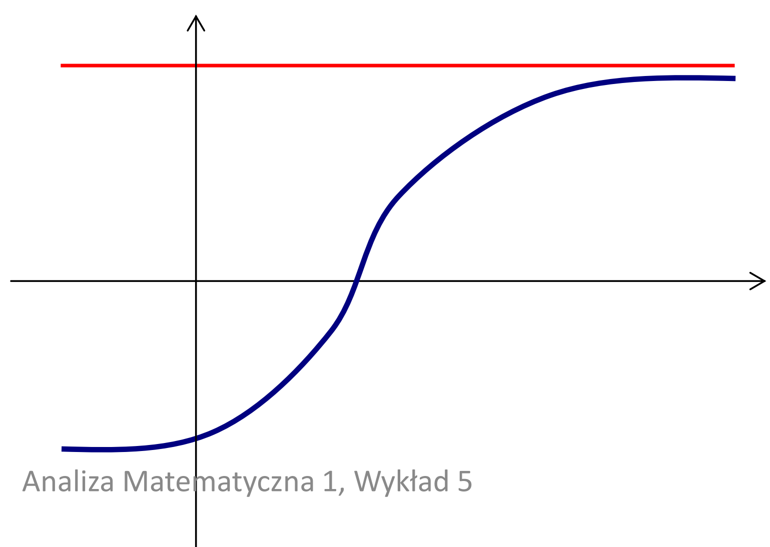
Prosta $y = mx + k$ jest *asymptotą ukośną lewostronną* (*poziomą*, gdy $m = 0$) funkcji $f(x)$ iff, gdy

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad k = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx).$$

Podobnie definiujemy parametry *asymptoty ukośnej prawostronnej*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad k = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx).$$





Przykład.

Wykres funkcji $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **ma asymptotę ukośną obustronną** $y=2x$,

ponieważ:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2 \quad \textbf{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2, \ \textbf{a ponadto}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0.$$

Podobnie

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0.$$

Przykład

Zbadać asymptoty funkcji $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

- **Wykres funkcji ma asymptotę pionową o równaniu x=1**
- **Asymptoty ukośne i poziome:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad\Rightarrow\quad m=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=1=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right]\Rightarrow k=1$$

Wykres funkcji posiada asymptotę ukośną obustronną o równaniu $y=\dfrac{1}{2}x+1$