•

Powtórzenie

(Analiza Matematyczna 1, wykład 15)

1. Ciągi i granice ciągów.
2. Szeregi liczbowe, kryteria zbieżności (Cauch. , de Al.).
3. Granica funkcji. Asymptoty. Ciągłość funkcji.
4. Pochodnej funkcji. Różniczka, tw. Del'Hospitala.
5. Badanie przebiegu funkcji (monotoniczność, wypukłość, punkty przegięcia, ekstrema funkcji).
6. Funkcja dwu i trzech zmiennych. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych.
7. Pochodne cząstkowe. Ekstrema funkcji dwu i trzy zmiennych.
8. Całka nieoznaczonej i jej własności. Całkowanie przez podstawienie i przez części, funkcji wymiernych i trygonometrycznych.
9. Całka oznaczona i jej zastosowania (np. średnia wartość funkcji na przedziale, pole obszaru, objętość bryły, etc).
10. Całki podwójna i potrójna , zamiana zmiennych.

Zadanie 1 Obliczyć pochodną funkcji:

a. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

b. $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$

Rozwiązanie:

a. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

b. $a=e^{\ln a}\Rightarrow \sin x=e^{\ln\sin x}\Rightarrow$

$f(x)=(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}$

$$f'(x)=e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\left(-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)=$$

$$=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

Zadanie 2. Oblicz poniższe granice korzystając z twierdzenia de l'Hospitala:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{tgx}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}} \cos x\cdot\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

<u>Rozwiązanie:</u>

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{tgx}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx-x}{xtgx}\right)\overset{H}{=}$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)-1}{tgx+\left(\frac{x}{\cos^2 x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x+x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=0$$

b. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos x\cdot\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\cos x}} \overset{H}{=}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\frac{1}{x-\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot x-\left(\frac{\pi}{2}\right)} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-2\cos x\sin x}{\cos x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x} = 0$$

<u>Zadanie 5</u> Stosując twierdzenie Rolle'a określić liczbę rzeczywistych pierwiastków równania

$$x^3 - 6x^2 + 15x + 3 = 0$$

<u>Rozwiązanie:</u>

Wielomian jest stopnia nieparzystego, a zatem istnieje co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty *r*,

$$f(r) = 0$$

czy istnieje jeszcze jeden pierwiastek *s*?

Jeśli tak, to na mocy twierdzenia Rolle'a, istnieje punkt *c*, miedzy punktami *r* i *s*, taki, że

$$f'(c) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 180}}{6}$$

$144 - 180 < 0$**, a zatem równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.**
Stąd

$$f'(x) \neq 0 \qquad \text{dla każdego } x.$$

Wielomian posiada tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 6. **Dla poniższej funkcji ustal dziedzinę, zbadaj monotoniczność i podaj ekstrema:**

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{2x}$$

Rozwiązanie:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{2x} \qquad D=\Re\setminus\{0\}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot 2x-2(x+1)^2}{4x^2}=$$

$$=\frac{4x(x+1)-2(x+1)^2}{4x^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{4x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$$

Zatem

Funkcja rośnie dla $x\in(-\infty;-1),\ x\in(1;+\infty)$

Funkcja maleje dla $x\in(-1;0),\ x\in(0;1)$

Maksimum jest w punkcie *x* = –1

Minimum jest w punkcie *x* = 1

<u>Zadanie 7</u> W zależności od parametru *a* zbadaj liczbę punktów przegięcia dla funkcji:

$$f(x) = x^a, \quad \textbf{\textit{gdzie a}} \in Z$$

<u>Rozwiązanie:</u>

$f(x) = x^a, \quad$ ***gdzie a*** $\in Z$

$f^{'}(x) = ax^{a-1}$

$f(x) = a(a-1)x^{a-2}$

- **Jeśli $a \leq 0$ lub *a* = 2, wówczas brak punktów przegięcia (dla żadnego *x* druga pochodna nie równa się 0)**
- **Jeśli $a = 0 \text{lub}\, a = 1$, wówczas brak punktów przegięcia (druga pochodna wynosi 0 w każdym punkcie, ale brak zmiany znaku)**
- **Jeśli $a > 2$ i nieparzyste, wówczas jest jeden punkt przegięcia (dla x = 0 druga pochodna równa się 0 i zmienia się znak)**
- **Jeśli $a > 2$ i parzyste, wówczas brak punktów przegięcia (dla x = 0 druga pochodna równa się 0, ale nie zmienia się znak)**

<u>Zadanie 8</u> Znajdź asymptoty funkcji:

$$f(x)=\frac{1}{x}e^{x}$$

<u>Rozwiązanie:</u>

$f(x)=\frac{1}{x}e^{x}$, $\qquad D=\Re\setminus\{0\}$

Asymptoty pionowe:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

Prosta *x* = 0 jest asymptotą pionową obustronną.

Asymptoty ukośne (w tym poziome):

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^2}=0=m_l$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-m_l x\right]=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x}=0=k_l$$

Prosta *y* = 0 jest asymptotą poziomą lewostronną.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$$

Brak asymptot poziomych prawostronnych.

Zadanie 9

Wyznacz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji danej wzorem: $f(x,y)=x^y$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$$

i dalej

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1\cdot x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=yx^{y-1}\cdot\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}=x^{y-1}(y\ln x+1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln x\cdot\ln x=x^y\ln^2 x.$$

Zadanie 10

Gradient funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) $\quad \nabla f(x_0,y_0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$.

Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie $P=(x_0,y_0)$ w kierunku wektora $\vec{v}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\circ\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=x^2-2xy$ w punkcie $P=(2,1)$ w kierunku wektora $\vec{v}=[3,4]$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2y,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=-4 \quad \text{oraz} \quad \left|\vec{v}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$$

Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1)=\nabla f(2,1)\circ\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=[2,-4]\circ\frac{[3,4]}{5}=[2,-4]\circ\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]=\frac{6}{5}-\frac{16}{5}=-\frac{10}{5}=-2.$$

Zadanie 11 Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne oraz istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe $f_x'(x_0, y_0)$ i $f_y'(x_0, y_0)$, *to:*

$f_x'(x_0, y_0) = 0$ i $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

Punkt, w którym spełniony jest warunek konieczny, nazywamy **punktem stacjonarnym**.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja *f* ma w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego (x_0, y_0) pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe oraz:

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to w punkcie (x_0, y_0) **istnieje ekstremum lokalne**, przy czym:

Jeśli $f_{xx}''(x_0, y_0) > 0$, to w punkcie (x_0, y_0) istnieje **minimum lokalne**.

Jeśli $f_{xx}''(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie (x_0, y_0) istnieje **maksimum lokalne**.

Jeżeli $W(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie stacjonarnym (x_0, y_0) **nie ma ekstremum**.

Jeżeli $W(x_0, y_0) = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga o istnieniu ekstremum.

<u>Zadanie 12</u> Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=2x^3+y^3-6x-12y$.

Wyznaczamy punkty stacjonarne (pochodne cząstkowe przyrównujemy do zera).

$f_x'(x,y)=6x^2-6$, $f_y'(x,y)=3y^2-12$, **rozwiązujemy układ równań:**

$$\begin{cases} 6x^2-6=0 \\ 3y^2-12=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x^2-1=0 \\ y^2-4=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=1 \vee x=-1 \\ y=2 \vee y=-2 \end{matrix}.$$

Otrzymujemy punkty: $P_1(I,2)$, $P_2(I,-2)$, $P_3(-I,2)$, $P_4(-I,-2)$, w których może być ekstremum.
Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu, następnie wyznacznik $W(x,y)$:

$f_{xx}''(x,y)=12x$, $f_{xy}''(x,y)=0$, $f_{yx}''(x,y)=0$, $f_{yy}''(x,y)=6y$. $W(x,y)=\begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$

Badamy znak wyznacznika (war. wystarczający) w punktach $P_1(I,2)$, $P_2(I,-2)$, $P_3(-I,2)$, $P_4(-I,-2)$.

Punkt $P_1(1,2)$. $W(P_1)=\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}=144$ **> 0, istnieje ekstremum,** $f_{xx}''(1,2)$ **> 0, <u>minimum lokalne</u>.**

Punkt $P_2(I,-2)$. $W(P_2)=\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}=-144$ **< 0, w tym punkcie nie istnieje ekstremum**

Punkt $P_3(-I,2)$. $W(P_3)=\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}=-144$ **< 0, w tym punkcie nie istnieje ekstremum**

Punkt $P_4(-I,-2)$. $W(P_4)=\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}=144$ **> 0, istnieje ekstremum**

$f_{xx}''(-1,-2)$ **= -12 < 0, punkcie $P_4(-I,-2)$ istnieje <u>maksimum lokalne</u>.**

Zadanie 13 Oblicz całkę nieoznaczoną:

a. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\cdot arc\left(tgx\right)}$

b. $\int x \sin x dx$

Rozwiązanie:

a. $$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\cdot arc\left(tgx\right)} = \left| \begin{array}{c} t = arc\left(tgx\right) \\ dt = \frac{1}{\left(1+x^2\right)}dx \\ dx = \left(1+x^2\right)dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\left(1+x^2\right)dt}{\left(1+x^2\right)\cdot t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|arc\left(tgx\right)\right| + C$$

b. $$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ v' = \sin x \end{array} \right| \begin{array}{c} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$