ZESTAW: A **I Kolokwium Algebra** GRUPA: piątek 17.00
2 listopada 2022

Zadanie 1

Znaleźć rozwiązania poniższego równania i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$(z-2)^3 = -8i.$$

$z_{k+1}=z_k\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_{k+1}=z_k\left(-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}/2\right)$

$z-2=\sqrt[3]{-8i}=\{2i,\ \underbrace{2i\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{-\sqrt{3}-i},\ \underbrace{(-\sqrt{3}-i)\left(-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}/2\right)}_{\sqrt{3}-i}\}$

(4+1 pkt)

Zadanie 2

a) Znaleźć część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej $z=\frac{2i-\sqrt{12}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=$

$=\frac{2i-2-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i}{2}=-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i \Rightarrow$

$\operatorname{Re} z=-1-\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z=1-\sqrt{3}$

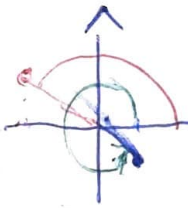
(2 pkt)

b) Obliczyć $\left|\frac{2i-\sqrt{12}}{1-i}\right|.=$

$=\frac{|2i-\sqrt{12}|}{|1-i|}=\frac{\sqrt{4+12}}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ //

(1.5 pkt)

c) Obliczyć $\operatorname{Arg}\left(\frac{2i-\sqrt{12}}{1-i}\right).=\underbrace{\operatorname{Arg}(2i-\sqrt{12})}_{5\pi/6}-\underbrace{\operatorname{Arg}(1-i)}_{\frac{7\pi}{4}}+2k\pi=$



$\cos\varphi=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

(1.5 pkt)

$=\frac{5\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}+2k\pi \underset{k=1}{=} \frac{10\pi}{12}-\frac{21\pi}{12}+\frac{24\pi}{12}=\frac{13\pi}{12}$ //

Zadanie 3

Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej zbiory spełniające poniższe warunki

a) $|iz+1-2i|<2.$

(2.5 pkt)

b) $\frac{3\pi}{2}\leqslant \operatorname{Arg}(-iz)<2\pi.$

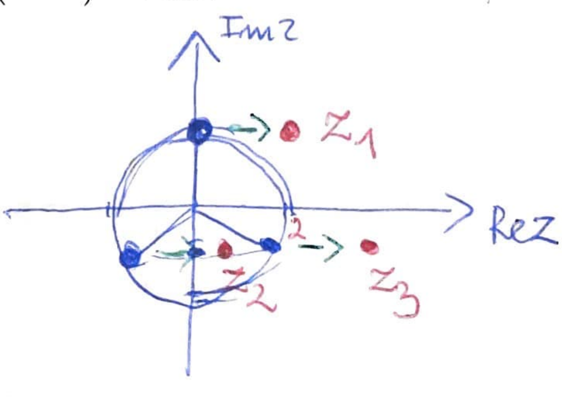
(2.5 pkt)

zad 1 cd.

(1) $z_1=2+2i$

(2) $z_2=2-\sqrt{3}-i$

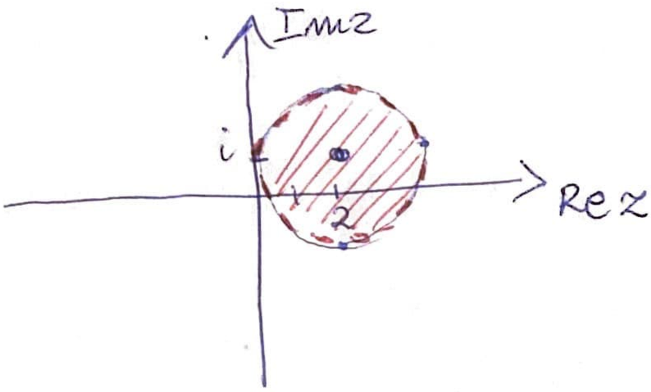
(3) $z_3=2+\sqrt{3}-i$



a)

$$|iz+1-2i| = \left|i\left(z+\frac{1-2i}{i}\right)\right| = \overset{1}{|i|}\cdot\left|z+\frac{1-2i}{i}\cdot\frac{i}{i}\right| =$$

$$= |z-(2+i)| < 2$$



б)

$$\frac{3\pi}{2} \le \mathrm{Arg}(-iz) < 2\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} \le \mathrm{Arg}(-i) + \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi < 2\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} \le \frac{3\pi}{2} + \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi < 2\pi \quad \Big| -\frac{3\pi}{2} - 2k\pi$$

$$-2k\pi \le \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad \Leftarrow k=0$$

$$0 \le \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$$