Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 8
Układy równań liniowych
Rząd macierzy

8.1. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania układów równań

a) $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 2x+3y+z=3, \\ 3x+y+2z\ =2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ 4x+3y-z=7, \\ x-y+z\ =2; \end{cases}$

8.2. Rozwiązać układy równań metodą macierzy odwrotnej:

a) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=5, \\ 2x+2y+z=3, \\ 3x+2y+z\ =1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x-3y+5z=-5, \\ -x+2y-z\ =2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y+z+t=4, \\ x+z+t=-1, \\ x+y+t=2, \\ x+y+z=-2; \end{cases}$

8.3. Rozwiązać układy równań w zbiorze liczb zespolonych:

a) $\begin{cases} z+iw=2+2i \\ iz+w=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1-i)z+iw=1-3i \\ (1+i)z+w=3+i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2z+(3-i)w=3+i \\ -iz+(1-3i)w=2-3i \end{cases}$ d) $\begin{cases} z+iw+2t=3+2i \\ w-t=-i \\ z+it=2i \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2z-w+2it=6-3i \\ -z+t=-1-2i \\ z+iw+it=3+i. \end{cases}$

8.4. Wyznaczyć rzędy następujących macierzy:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 7 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & -8 & 0 & 7 \\ 2 & -11 & 5 & -5 & 13 \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 13 & 11 \\ 4 & 0 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M=\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ i & -3 & 2+3i \\ 2-i & 4-i & -2i \end{bmatrix}.$$

8.5. Zbadać rzędy macierzy w zależności od parametru $p\in\mathbb{R}$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

8.6. Stosując twierdzenie Kroneckera - Capellego wskazać liczbę rozwiązań układów równań

a) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x+3y+4z=2, \\ 3x+2y+z\ =3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+y=4, \\ 4x+8y=11, \\ x+4y\ =10; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-3y-z=3, \\ 2x+y-z=1, \\ 3x-2y+2z=-4, \\ x-y-2z=-2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-3y+2z=7, \\ x-t=2, \\ -x-3y+2z+2t=3; \end{cases}$

8.7. Rozwiązać układy równań metodą eliminacji Gaussa - Jordana

a) $\begin{cases} x+y=1, \\ x+2y-3z=-3, \\ 2x+4y+z=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y+z=-1, \\ x+2z=-6, \\ 3y+2z=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+z+t=7, \\ 2x-y-z+4t=2, \\ 5x+5y+2z+7t=1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ x+y+z=1, \\ 2x-3y+5z=10, \\ 5x-6y+8z=19; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ 2x+2y+z+t=0, \\ 3x+2y+3z+2t=3, \\ 6x+4y+3z+2t=2; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y+3z+t=1, \\ 2x+4y-z+2t=2, \\ 3x+6y+10z+3t=3, \\ x+y+z+t=0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-y+z-2s+t=0, \\ 3x+4y-z+s+3t=1, \\ x-8y+5z-9s+t=-1; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-2y+3s+t=1, \\ 2x+-3y+z+8s+2t=3, \\ x-2y+z+3s-t=1, \\ y+3s+5t=0, \\ x-2y+5s+8t=-1; \end{cases}$

8.8.* Rozwiązać układy równań metodą "kolumn jednostkowych"

a) $\begin{cases} 5x+2y-2z=5, \\ 3x+y+2z=1, \\ 2x+3y+2z=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z-t=-4, \\ 2x-y-z+t=1, \\ x+y+2z-t=5, \\ x+y-z+t=4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y+z+t=0, \\ y+z=0, \\ 2x+y+z+s=0, \\ y+z+s+t=4, \\ x+z+t=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z+t=1, \\ 2x+4y-z+2t=2, \\ 3x+6y+10z+3t=3, \\ x+y+z+t=0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+3y+2z-t=3, \\ 2x+y+z+2s+3t=6, \\ 3x-z+s+t=3' \\ y+4s+t=1, \\ 2x+y+z-2s+5t=8; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z-2s+t=0, \\ 3x+4y-z+s+3t=1, \\ x-8y+5z-9s+t=-1; \end{cases}$

8.9. Rozwiązać układy równań dowolną metodą

a) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 3x+4y=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+y=2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+y+2z=0, \\ x+2y+3z=0, \\ 2x+3y+z\ =0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y-z\ =5, \\ 2x-3y+z\ =-5, \\ x+2y+3z=2; \end{cases}$ f) $\begin{cases} -5x+z\ =1, \\ y+2z=4, \\ 2x+3y+4z=2; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y-z\ =0, \\ 2y-t=0; \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+y+z\ =1, \\ x+2y+z\ =2, \\ x+y+2z=4; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 8x-2y-2z=2, \\ -4x+y-z=3; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+y-2z=2, \\ x+2y+3z=1, \\ x+y+z\ =1; \end{cases}$ k) $\begin{cases} x+y+z\ =5, \\ 2x+2y+z\ =3, \\ 3x+2y+z\ =1; \end{cases}$ ł) $\begin{cases} 2x-y-z\ =4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11; \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+y+4z=31, \\ 3x-y+z\ \ =10, \\ 5x+y+2z=29; \end{cases}$ n) $\begin{cases} 4x+2y+z\ \ +4t=1, \\ -8x-4y-2z-8t=0; \end{cases}$ o) $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ x-y+z\ \ =0, \\ 2x+y+2z=1; \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1, \\ 2x-3y-11z-15t=1, \\ 4x-6y+2z+3t=2; \end{cases}$ r) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8, \\ 4x+3y-9z=9, \\ x+8y-7z=12, \\ 2x+3y-5z=2. \end{cases}$ s) $\begin{cases} 3x+4y+z\ \ +2t=3, \\ 6x+8y+2z+4t=7. \end{cases}$

8.10. Korzystając ze wzorów Cramera znaleźć wartość parametru p, dla którego układ ma rozwiązanie:

a) $\begin{cases} (p+1)x-py=1, \\ 2x+(p-1)y=3p. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2px+4y-pz=4, \\ 2x+y+pz=1, \\ (4+2p)x+6y+pz=3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} px+3y+pz=0, \\ -px+2z=3, \\ x+2y+pz=p. \end{cases}$ d)* $\begin{cases} x-4y-z-t=px, \\ -x+y-z-t=py, \\ -x-y+z-t=pz, \\ -x-y-z+t=pt. \end{cases}$

8.11. Określić liczby rozwiązań układów równań w zależności od parametru p:

a) $\begin{cases} (p+1)x+(2-p)y=p, \\ (1-3p)x+(p-1)y=-6. \end{cases}$ b) $\begin{cases} (p+1)x-y+pz=1, \\ (3-p)x+4y-pz=-4, \\ px+3y=-3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} px+y+2z=1, \\ x+py+2z=1, \\ x+y+2pz=1. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+(p-2)y-2pz=4, \\ px++(3-p)y+4z=1, \\ (1+p)x+y+2(2-p)z=7. \end{cases}$

e)* $\begin{cases} 2x+py+pz+pt=1, \\ 2x+2y+pz+pt=2, \\ 2x+2y+2z+pt=3, \\ 2x+2y+2z+2t=4. \end{cases}$ f)* $\begin{cases} x-y+2z=4, \\ 3x+y-z=2, \\ 7x+5y-7z-t=-2, \\ 6x-2y+5z=p. \end{cases}$

8.12.* Podać przykład układu:

a) pięciu równań liniowych z trzema niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

b) czterech równań liniowych z pięcioma niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

c) dwóch równań liniowych z czterema niewiadomymi, który jest sprzeczny;

d) dwóch równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru, przy czym jednym z jego rozwiązań jest $x=1, y=0$, $z=3$.

e) trzech równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, t, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów, a wśród jego rozwiązań są: $x=1, y=0, z=1$, $t=1$ oraz $x=3, y=1, z=4, t=2$.

ODPOWIEDZI

8.1. a) $\begin{cases} x=\frac{14}{11}, \\ y=\frac{2}{11}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{2}{3}, \\ z=-\frac{1}{3}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3; \end{cases}$

8.2. a) $\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=-2, \\ y=0, \\ z=7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=3, \\ y=2, \\ z=-1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=-3, \\ y=2, \\ z=-1, \\ t=3; \end{cases}$

8.3. a) $\begin{cases} z=1+i \\ w=1-i \end{cases}$, b) $\begin{cases} z=2-i \\ w=0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} z=i \\ w=1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} z=i \\ w=1-i \\ t=1 \end{cases}$, e) $\begin{cases} z=1-i \\ w=2+i \\ t=-3i \end{cases}$.

8.4. $\mathrm{rz}(A)=2$; $\mathrm{rz}(B)=2$; $\mathrm{rz}(C)=2$; $\mathrm{rz}(D)=2$; $\mathrm{rz}(E)=2$; $\mathrm{rz}(F)=3$; $\mathrm{rz}(G)=2$; $\mathrm{rz}(H)=3$; $\mathrm{rz}(K)=4$; $\mathrm{rz}(L)=5$; $\mathrm{rz}(M)=2$.

8.5. $rz(A)=3$ dla $p\neq 3$, $rz(A)=2$ dla $p=3$; $rz(B)=3$ dla $p\neq 0$, $rz(B)=2$ dla $p=0$.

8.6. a) nieskończenie wiele rozwiązań, 1 parametr; b) brak rozwiązań; c) brak rozwiązań; d) nieskończenie wiele rozwiązań, 1 parametr.

8.7. a) $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=1; \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \\ z=-3; \end{cases}$; c) układ sprzeczny; d) $\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ z=1; \end{cases}$; e) $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=0, \\ t=2; \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=0, \\ t=-2; \end{cases}$; g) $\begin{cases} x=\frac{1}{7}-\frac{3}{7}z+s-t, \\ y=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}z-s; \end{cases}$, gdzie $z,s,t\in\mathbb{R}$; h) $\begin{cases} x=10, \\ y=3, \\ z=0, \\ s=-1, \\ t=0; \end{cases}$.

8.8. a) $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \\ z=-\frac{1}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \\ z=-3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=4-t, \\ z=1-t; \end{cases}$, gdzie $t\in\mathbb{R}$.

e) $\begin{cases} x=\frac{8}{7}, \\ y=-\frac{1}{7}, \\ z=-\frac{3}{7}; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x=\frac{1}{7}-\frac{3}{7}z+s-t, \\ y=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}z-s, \\ z=7; \end{cases}$, gdzie $z,s,t\in\mathbb{R}$.

8.9. a) $\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=0, \\ y=\frac{1}{2}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=-1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x=1, \\ y=-8, \\ z=6; \end{cases}$

g) układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, np. $\begin{cases} x=z-\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{1}{2}t; \end{cases}$ dla $z,t\in\mathbb{R}$; h) $\begin{cases} x=-\frac{3}{4}, \\ y=\frac{1}{4}, \\ z=\frac{9}{4}; \end{cases}$

i) układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, np. $\begin{cases} y=4x+1, \\ z=-2; \end{cases}$ dla $x\in\mathbb{R}$; j) $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{2}{3}, \\ z=-\frac{1}{3}; \end{cases}$

k) $\begin{cases} x=-2, \\ y=0, \\ z=7; \end{cases}$ l) $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \\ z=1; \end{cases}$ m) $\begin{cases} x=\frac{18}{7}, \\ y=\frac{27}{7}, \\ z=\frac{43}{7}; \end{cases}$ n) układ sprzeczny; o) $\begin{cases} x=0, \\ y=\frac{1}{3}, \\ z=\frac{1}{3}; \end{cases}$ p) układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, np. $\begin{cases} x=\frac{3}{2}y-\frac{1}{16}t+\frac{1}{2}, \\ z=-\frac{11}{8}t; \end{cases}$ r) układ sprzeczny; s) układ sprzeczny.

8.10. a) dla $p \neq -1-\sqrt{2}$ oraz $p \neq -1+\sqrt{2}$; b) nie istnieje takie p; c) dla każdego $p \in \mathbb{R}$; d) dla $p \neq -2$ oraz $p = 2$.

8.11. Układ nie ma rozwiązań, ma dokładnie jedno rozwiązanie, ma nieskończenie wiele rozwiązań odpowiednio

a) dla $p=\frac{1}{2}$, dla $p \neq \frac{1}{2}, p \neq 3$, dla $p=3$.

b) nigdy, dla $p \neq 4, p \neq 0$, dla $p=4$ lub $p=0$.

c) dla $p=-2$, dla $p \neq -2, p \neq 1$, dla $p=1$.

d) dla $p \in \mathbb{R}$, nigdy, nigdy;

e) dla $p=2$, dla $p \neq 2$, nigdy.

f) dla $p \neq 14$, nigdy, dla $p=14$.