Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 9
Wektory i wartości własne macierzy
Diagonalizacja macierzy

9.1. Sprawdzić czy dany wektor jest wektorem własnym endomorfizmu φ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ określonej wzorem $\varphi([x_1, x_2]) = [x_1 + 4x_2, 4x_1 + 7x_2]$. W przypadku pozytywnej odpowiedzi wskazać wartośc własną, której odpowiada ten wektor:
a) $[1, 2]$, b) $[5, 4]$, c) $[8, -4]$.

9.2. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, którego wartość $\varphi([x_1, x_2])$ jest równa:
a) $[6x_1 + x_2, x_1 + 6x_2]$, b) $[3x_1 - 9x_2, x_1 - 3x_2]$,
c) $[x_1 + 7x_2, 4x_1 + 4x_2]$, d) $[5x_1 - 5x_2, x_1 + x_2]$,
e) $[x_1 + 5x_2, x_1 + 5x_2]$, f) $[7x_1 - x_2, 9x_1 + x_2]$.

9.3. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne danej macierzy:
a) $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 9 & -7 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.4. Znaleźć macierz diagonalną B podobną do macierzy A, jeśli taka macierz B istnieje. Znaleźć też wtedy macierz odwracalną C taką, że $B = C^{-1}AC$:
a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,
e) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

9.5. Znaleźć macierz diagonalną B podobną do macierzy A, jeśli taka macierz B istnieje. Znaleźć też wtedy macierz odwracalną C taką, że $B = C^{-1}AC$:
a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$,
d) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix}$,
g) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 8 & -7 & 1 \\ 8 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix} -11 & 5 & 5 \\ -12 & 5 & 6 \\ -12 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

9.6.* Obliczyć wektory własne i wartości własne macierzy określonych nad ciałem liczb zespolonych:
a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ $(a \neq 0)$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

9.7.* Wykazać, że wartościami własnymi macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ w ciele liczb zespolonych są liczby $1, -1, i, -i$.

9.8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć A^n gdy dana jest macierz A:

a) $\begin{bmatrix} 13 & -4 \\ 30 & -9 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, j) $\begin{bmatrix} 9 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{bmatrix}$, k) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$.

9.9. Obliczyć pierwiastek kwadratowy z danej macierzy o elementach zespolonych:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 19 & 6 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

9.10.* Znając wartości własne macierzy A, znaleźć wartości włąsne macierzy A^{-1}.

9.11.* Znając wartości własne macierzy A, znaleźć wartości własne macierzy A^2.

9.12.* Wykazać, że macierze A i A^T mają takie same równania charakterystyczne.

9.13.* Wykazać, że dowolna macierz kwadratowa jest pierwiastkiem swego równania charakterystycznego.

ODPOWIEDZI

9.1. a) Tak, 9, b) nie, c) tak, -1.
9.2. a) $Sp(\varphi)=\{5,7\}$, wektory własne odpowiednio $[t,-t],[t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
b) $Sp(\varphi)=\{0\}$, wektory własne $[3t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
c) $Sp(\varphi)=\{-3,8\}$, wektory własne odpowiednio $[7t,-4t],[t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
d) $Sp(\varphi)=\emptyset$,
e) $Sp(\varphi)=\{0,6\}$, wektory własne odpowiednio $[5t,-t],[t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
f) $Sp(\varphi)=\{4\}$, wetkory własne $[t,3t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
9.3. a) $Sp(\varphi)=\{-1,0,2\}$, wektory własne odpowiednio $[2t,3t,0],[0,0,t],[t,t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
b) $Sp(\varphi)=\{1\}$, wektory własne $[0,t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
c) $Sp(\varphi)=\{1,2\}$, wektory własne odpowiednio $[t,0,-t],[0,t,t]$ dla $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
9.4 c), d), g), h) macierz nie jest diagonalizowalna, w pozostałych przypadkach jest.
9.5. d) h) macierz nie jest diagonalizowalna, w pozostałych przypadkach jest.
9.6. a)$Sp(\varphi)=\{ai,-ai\}$, wektory własne odpowiednio $[c,ci],[c,ci]$ dla $c\in\mathbb{C}$,
b) $Sp(\varphi)=\{0,\sqrt{14}i,-\sqrt{14}i\}$, wektory własne odpowiednio $[3c,-c,2c],[(3+2\sqrt{14}i),13c,(2+3\sqrt{14}i)],[(3-2\sqrt{14}i),13c,(2-3\sqrt{14}i)]$ dla $c\in\mathbb{C}$.
9.8. a) $\begin{bmatrix}2\cdot3^{n+1}-5 & 2-2\cdot3^n\\ 5\cdot3^{n+1}-15 & 6-5\cdot3^n\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}4-3(-1)^n & 4(-1)^n-4\\ 3-3(-1)^n & 4(-1)^n-3\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}4\cdot3^n-3\cdot2^n & 3\cdot2^n-3^{n+1}\\ 4\cdot3^n-2^{n+2} & 2^{n+2}-3^{n+1}\end{bmatrix}$,
d) $\frac14\begin{bmatrix}7^n+3^{n+1} & 3\cdot7^n-3^{n+1}\\ 7^n-3^n & 3\cdot7^n+3^n\end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix}2(-1)^n-4^n & 2(4^n-(-1)^n)\\ (-1)^n-4^n & 2\cdot4^n-(-1)^n\end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix}2\cdot4^n-5^n & 2(5^n-4^n)\\ 4^n-5^n & 2\cdot5^n-4^n\end{bmatrix}$,
g) $\frac12\begin{bmatrix}7^n+1 & 7^n-1\\ 7^n-1 & 7^n+1\end{bmatrix}$, h) $\frac12\begin{bmatrix}6^n+4^n & 6^n-4^n\\ 6^n-4^n & 6^n+4^n\end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix}1 & 2^n-1 & 2^n-1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2^n-1 & 2^n-1\end{bmatrix}$,
j) $\begin{bmatrix}5\cdot3^n-6 & 2\cdot3^n-2 & 6-4\cdot3^n\\ 3 & 1 & -3\\ 5\cdot3^n-6 & 2\cdot3^n-2 & 6-4\cdot3^n\end{bmatrix}$, k) $\begin{bmatrix}2^{n+1}-1 & 2^{n+1}-2 & 1-2^n\\ 2^n-1 & 3\cdot2^n-2 & 1-2^n\\ 2^{n+2}-4 & 2^{n+3}-8 & 4-3\cdot2^n\end{bmatrix}$
9.9. a) $\pm\frac13\begin{bmatrix}4 & 10\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, b) $\pm\begin{bmatrix}6 & -8\\ 5 & -7\end{bmatrix}$, $\pm\frac13\begin{bmatrix}-2 & 8\\ -5 & 11\end{bmatrix}$, c) $\pm\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, $\pm\frac15\begin{bmatrix}11 & 1\\ 4 & 14\end{bmatrix}$,
d) $\pm\frac12\begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$, $\pm\frac14\begin{bmatrix}9 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$, e) $\pm\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 10 & 5\end{bmatrix}$, f)$\pm\frac14\begin{bmatrix}15 & 5\\ 19 & 1\end{bmatrix}$,$\pm\frac16\begin{bmatrix}25 & 5\\ 19 & 11\end{bmatrix}$, g) $\pm\frac15\begin{bmatrix}6+2i & 12-6i\\ 2-i & 4+3i\end{bmatrix}$,
$\pm\frac15\begin{bmatrix}6-2i & 12+6i\\ 2+i & 4-3i\end{bmatrix}$, h) $\pm i\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, $\pm\frac{i}{3}\begin{bmatrix}8 & -5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.
9.10 War.tości własne macierzy A^{-1} sa odwrotnościami wartości własnych macierzy A.
9.11. Wartości własne macierzy A^2 są kwadratami wartości własnych macierzy A.