Algebra liniowa 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw zadań nr 1

Liczby całkowite
Algorytm Euklidesa
Rozszerzony algorytm Euklidesa

1.1. Wyznaczyć wszystkie dzielniki liczby 195.

1.2. Obliczyć 1234 mod 45.

1.3. Znaleźć liczbę całkowitą a taką, że $a\ mod\ 2 = 1, a\ mod\ 3 = 1, a\ mod 5\ = 1$.

1.4. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczyć NWD danych par liczb w pierścieniu $\mathbb{Z}$: $(287, 14), (231, 94), (871, 3627), (2159, 221), (29049, 2047)$.

1.5. Obliczyć $NWD(235, 124)$ za pomocą algorytmu Euklidesa i przedstawić ten największy wspólny dzielnik w postaci kombinacji liniowej liczb 235 i 124.

1.6. Wyznaczyć rozkład na czynniki pierwsze liczby 37800.

1.7. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa obliczyć a) $NWD(6, 3)$, b) $NWD(84, 15)$, c) $NWD(26, 15)$.

1.8. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa znaleźć odwrotność liczb n modulo k, gdy a) $n = 2, k = 5$, b) $n = 7, k = 13$, c) $n = 13, k = 19$, d) $n = 23, k = 27$.

1.9. Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania podanych równań: a) $27x + 15y = 13$, b) $12x + 20y = 14$, c) $28x + 20y = 16$.

1.10.* Udowodnić twierdzenia

1. Jeśli $a|b$ i $b|c$, to $a|c$.
2. Jesli $a|b$, to $ac|bc$ dla dowolnej liczby c.
3. Jeśli $c|a$ i $c|b$, to $c|da + eb$ dla dowolnych liczb d i e.
4. Jeśli $a|b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leqslant |b|$.
5. Jeśli $a|b$ i $b|a$, to $|a| = |b|$.

1.11.* Udowodnić, że jesli $NWD(a, m) = 1$ i $NWD(b, m) = 1$, to $NWD(ab, m) = 1$.

1.12.* Udowodnić, że liczba złożona n taka, że $n > 1$ ma dzielnik pierwszy p spełniający nierówność $p \leqslant \sqrt{n}$.

1.13.* Niech m będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech a i b będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że $a = b\ mod\ m$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest dzielnikiem różnicy $b - a$.

1.14.* Udowodnić, że wynikiem działania algorytmu Euklidesa jest największy wspólny dzielnik liczb a i b.

Odpowiedzi:

1.1. 1,3,5,13,15,39,65,195.

1.2. 19.

1.3. 31.

1.4. NWD(287,14) = 7, NWD(231,94) = 1, NWD(871, 3627) = 13, NWD(2159, 221) = 17, NWD(29049, 2047) = 23.

1.5. NWD(235, 124) = 1.

1.6. $37800 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

1.7. NWD(6,3) = 3, NWD(84, 15) = 3, NWD(26,15) = 1.

1.8. a) 3, b) 2, c) 3, d) 10.

1.9. a) NWD(27, 15) = 3, $3 \nmid 13$, nie ma rozwiązania,

b) NWD(12, 20) = 4, $4 \nmid 14$, nie ma rozwiązania,

c) NWD(28, 20) = 4, $4|16$, rozwiązanie (a_n, b_n), gdzie $a_n = 2 + 10n, b_n = -a_n + 4n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.