ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 3

Moduł i argument liczby zespolonej
Postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej
Wzór de Moivre'a
Pierwiastek z liczby zespolonej

MODUŁ I ARGUMENT LICZBY ZESPOLONEJ

Liczba zespolona z została zdefiniowana jako uporządkowana para liczb rzeczywistych, $z = (a, b)$. Możemy ją utożsamić z punktem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$.

Długość r wektora $\overline{0z}$ łączącego początek układu współrzędnych z punktem z nazywamy ***modułem*** liczby zespolonej i oznaczamy $|z|$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są równości

- $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{dla } z_2 \neq 0$

Każdy kąt φ spełniający równości

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{Re(z)}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{Im(z)}{|z|}$$

nazywamy ***argumentem*** liczby z i oznaczamy $\varphi = \arg(z)$. Ten spośród argumentów danej liczby z, który spełnia warunek $0 \leqslant \arg(z) = \varphi_0 < 2\pi$ nazywamy ***argumentem głównym*** liczby z i oznaczamy $\mathrm{Arg}(z)$.
Zatem

$$0 \leqslant \mathrm{Arg}(z) = \varphi_0 < 2\pi$$

$$\arg(z) = \varphi_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Argument główny jest więc kątem nachylenia wektora $\vec{0z}$ do osi rzeczywistej.

Dla liczb zespolonych $z \neq 0, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ i odpowiadających im argumentów $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ zachodzą równości

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) = n\varphi$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2$

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ

WZÓR DE MOIVRE'A

Z geometrycznej interpretacji modułu i argumentu liczby zespolonej wynika natychmiast, że liczbę zespoloną, $z \neq 0$, można przedstawić w postaci

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

którą nazywamy ***postacią trygonometryczną*** liczby zespolonej.

Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ i niech $n \in \mathbb{N}$.
Prawdziwe są równości

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$
- $z^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$

Ostatni wzór nazywamy ***wzorem de Moivre'a***.

Abraham de Moivre (1667–1754) francuski matematyk, najbardziej znany z odkrycia **wzoru de Moivre'a** (1730). Był matematycznym samoukiem. Zajmował się geometrią analityczną, rachunkiem prawdopodobieństwa, teorią szeregów i liczbami zespolonymi. Przyjaźnił się z Isaakiem Newtonem.

POSTAĆ WYKŁADNICZA LICZBY ZESPOLONEJ

Liczbą Eulera e nazywamy

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7183.$$

Dla dowolnej liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, mamy

$$z = re^{i\varphi}.$$

Postać tę nazywamy ***postacią wykładniczą liczby zespolonej***.

Zamiennie będziemy stosować zapis $\exp(i\varphi)$, co oznacza $e^{i\varphi}$.

Leonhard Euler (1707–1783) szwajcarski matematyk i fizyk; był pionierem w wielu obszarach obu tych nauk. Dokonał licznych odkryć w tak różnych gałęziach matematyki jak **rachunek różniczkowy i całkowy** oraz **teoria grafów**. Wniósł duży wkład w rozwój terminologii i notacji matematycznej. Jako pierwszy w historii użył pojęcia i oznaczenia funkcji. Opublikował wiele ważnych prac z zakresu mechaniki, optyki i astronomii. Euler jest uważany za czołowego matematyka XVIII wieku i jednego z najwybitniejszych w całej historii.

Liczby zespolone $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ **są równe**, gdy
$r_1 = r_2 = 0$
albo
$r_1 = r_2 > 0$ oraz $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$.

Niech $z = re^{i\varphi}, z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ o ile $z_2 \neq 0$
- $z^k = r^k e^{ik\varphi}$
- $\overline{z} = re^{-i\varphi}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$ o ile $z \neq 0$
- $-z = re^{i(\varphi + \pi)}$

Wzory Eulera

Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą wzory

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

PIERWIASTEK Z LICZBY ZESPOLONEJ

Pierwiastkiem stopnia** n**,** $n \in \mathbb{N}$**, z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość $w^n = z$.

Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczmy przez $\sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie 3.1. *Każda liczba zespolona z, ($z \neq 0$), ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n. Pierwiastki te wyrażają się wzorem*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k = 0, 1, ..., n-1$, $\alpha = Arg(z)$, a $\sqrt[n]{|z|}$ jest rozumiany jako pierwiastek arytmetyczny z nieujemnej liczby rzeczywistej.
Zatem

$$\sqrt[n]{z} = \{w_k :\ k = 0, 1, ..., n-1\}.$$

Wzór na pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej z można zapisać w postaci wykładniczej jako

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} exp(i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Istnieje zatem n różnych pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z. Wszystkie one mają ten sam moduł, leżą więc na wspólnym okręgu o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$, w równej między sobą odległości kątowej wynoszącej $\frac{2\pi}{n}$, pokrywają się z wierzchołkami $n-$kąta foremnego.