Przykład 1   Obliczyć wyznaczniki macierzy

a) $\det\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = -2$

b) $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = +1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$-$ $+$

c)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix} = +1\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2(-1) =$$

$$= 3 + 0 + 0 - 0 - 4 + 6 = 5$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = +1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 0 + 0(-1)\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 3 =$$

$$= 3 + 0 + 0 - 0 - 4 + 6 = 5$$

d) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & \\ & 4 & 5 & 6 & \\ & 7 & 8 & 9 & + \\ - & 1 & 2 & 3 & + \\ - & 4 & 5 & 6 & + \\ - & & & & \end{array}$$

Przykład Stosując wzór Laplace'a obliczyć wyznacznik macierzy

a) $$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + (-4)(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 + (-2-9) + 4(2-(-3)) = -11 + 4\cdot 5 = 9$$

b) $\det\begin{bmatrix}1&0&3&0\\2&1&0&2\\0&-1&1&0\\1&0&1&3\end{bmatrix} = 0 + 1\cdot(-1)^{2+2}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\1&1&3\end{bmatrix}}_{= \mathrm{I}} + (-1)(-1)^{3+2}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1&3&0\\2&0&2\\1&1&3\end{bmatrix}}_{\mathrm{II}} + 0 = (*)$

$\det \mathrm{I} = \det\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\1&1&3\end{bmatrix} = 1(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}1&0\\1&3\end{bmatrix} = 3$

$-$ $+$

$\det \mathrm{II} = \det\begin{bmatrix}1&3&0\\2&0&2\\1&1&3\end{bmatrix} = 0+0+6-0-2-18 = -14$

$\begin{matrix}1&3&0\\2&0&2\end{matrix}$

$(*) = 3 + (-14) = -11$

c) $\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \overline{I}_w(-2)+\overline{II}_w \\ = \\ \overline{I}_w + \overline{IV}_w \end{matrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1(-2)+2 & 3(-2)+0 & 0(-2)+1 & 2(-2)+4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1+(-1) & 3+1 & 0+5 & 2+0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} =$

$= 1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = -12 - 4 - 30 + 4 = -42$

$\begin{matrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{matrix}$

metode Sarruse

alternatywnie

$= \det\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \overline{II}_k(6)+\overline{I}_k \\ = \end{matrix} \det\begin{bmatrix} 1(6)+(-6) & 1 & 0 \\ 1(6)+(-2) & 1 & -1 \\ 5\cdot 6+4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 34 & 5 & 2 \end{bmatrix} =$

$= 1(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 34 & 2 \end{bmatrix} = (-1)\left(8-(-34)\right) = -42$

d) $\det\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \underline{I}_w(-2)+\underline{II}_w \\ = \\ \underline{I}_w(5)+\underline{IV}_w \end{matrix} \det\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ (-2)(-2)+0 & 0(-2)+(-1) & 3(-2)+3 & 1(-2)+2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ (-2)\cdot 5+1 & 0\cdot 5+2 & 3\cdot 5+1 & 1\cdot 5+(-5) \end{bmatrix} =$

$= \det\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ -9 & 2 & 16 & 0 \end{bmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4} \det\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -9 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \underline{II}_k(4)+\underline{I}_k \\ = \\ \underline{II}_k(-3)+\underline{III}_k \end{matrix} (-1)\det\begin{bmatrix} (-1)\cdot 4+4 & -1 & (-1)(-3)+3 \\ 4\cdot 4+3 & 4 & 4(-3)+2 \\ 2\cdot 4+(-9) & 2 & 2(-3)+16 \end{bmatrix} =$

$= (-1)\det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 19 & 4 & -10 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 19 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = (-1)\cdot(180-10) =$

$\ominus \qquad \oplus$

$= -180$