0 1 2

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 13, 09.01.2023)

Całka podwójna.

Zad. 1. Obliczyć całki podwójne (w prostokącie):

a) $\iint\limits_P x^2(2+4y)dxdy$, gdy prostokąt P opisany jest nierównościami: $0\leq x\leq 3$, $1\leq y\leq 2$.

b) $\iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy$, gdy prostokąt D opisany jest nierównościami: $0\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$.

Zad. 2. Obliczyć całki podwójne: (w obszarze normalnym):

a) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

d) $\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{(x+1)^2}$, $D: x+y=0, x=y^2$

b) $\iint_D (x^3+4y)dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $y=x^2, y=2x$.

c) $\iint_D (sinxcosy)dxdy$, gdzie obszar całkowania D jest trójkątem o wierzchołkach: (0,0), (1,1), (0,2).

Zad. 3. Zmiana kolejności całkowania.

a) obliczyć całkę $\iint_D \left(\frac{x^2}{y^2}\right)dxdy$, gdzie D jest ograniczony przez $0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 2-x$ (D jest to obszarem normalnym względem osi OX). Następnie, zmieniając kolejność całkowania obliczyć tę całkę (obszar D jest wówczas sumą dwóch rozłącznych obszarów normalnych względem osi OY).

b) obliczyć całkę $\int_0^1\int_1^{2-y}(x+y)^2dxdy$. Następnie, zmienić kolejność całkowania i obliczyć tę całkę.

Zad. 4. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($x=rcos\varphi,\ y=rsin\varphi$), obliczyć

a) $\iint\limits_D x^2ydxdy$, gdzie D jest obszarem leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ograniczony okręgami $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=4$,

b) $\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2}dxdy$, gdzie D jest opisany przez $x^2+y^2\leq 4$.

Zad. 5. Pole powierzchni figury płaskiej $\iint_D dxdy$ – pole D. Obliczyć pole figury:

a) ograniczone łukiem krzywej $f(x)=x^3+x^2-2x$, osią OX oraz prostymi $x=-2$ i $x=2$,

b) pomiędzy osią OX, funkcją sin, na przedziale $[0,\pi]$.

c) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant\sqrt{3},\ x^2+y^2\leqslant 12\right\}$

Zad. 6. Obliczyć pole płata powierzchniowego, którego rzutem jest obszar D

$$(\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

a) $z=x+4y+2$ leżącego nad prostokątem $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$,

b) wyciętego walcem $x^2+y^2=16$ z powierzchni $x^2+y^2+z^2=25$.

Zad. 7. Objętość bryły nad obszarem D i ograniczonej powierzchniami $z=f(x,y)\ i$ $z=g(x,y),\ \iint_D (g(x,y)-f(x,y))dxdy$. Obliczyć objętość brył:

a) $x=y=z=0, x=y=1, x+y+z=2$,

b) $x=y=0, x=y=1, z=x^2+2y^2, z=-x^2-2y^2$.