ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 5

Rozkład wielomianu na czynniki liniowe
Funkcja wymierna
Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania (rozkładu) funkcji wymiernych

- obliczanie wartości całek oznaczonych funkcji wymiernych,
- wyznaczanie transformat Laplace'a.

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI LINIOWE

Twierdzenie 5.1. *Niech W będzie wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$ o współczynnikach rzeczywistych. Niech x_j będą pierwiastkami rzeczywistymi tego wielomianu o krotnościach odpowiednio $k_j, j = 1, ..., s$ oraz niech $z_j, \overline{z_j}$, gdzie $Imz_j > 0$ będą pierwiastkami zespolonymi tego wielomianu o krotnościach l_j, $j = 1..., t$, przy czym $(k_1 + ... + k_s) + 2(l_1 + ... + l_t) = n$. Wtedy*

$$W(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} ...(x - x_s)^{k_s}(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} ...(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

gdzie $p_j = -2Rez_j$ oraz $q_j = |z_j|^2$ dla $j = 1, ..., t$.

Zatem każdy wielomian rzeczywisty można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego. Mówimy wtedy o **rozkładzie wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.**

Natomiast kazdy wielomian zespolony można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów zespolonych stopnia pierwszego, tzn. czynników liniowych, (Wniosek 4.1). Mówimy wtedy o **rozkładzie wielomianu na czynniki liniowe.**

FUNKCJA WYMIERNA

UŁAMKI PROSTE

Funkcję postaci

$$f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)},$$

gdzie W i Q są wielomianami rzeczywistymi (zespolonymi) oraz Q nie jest wielomianem zerowym, nazywamy ***funkcją wymierną***.

Funkcję wymierną nazywamy ***właściwą***, gdy $st_W < st_Q$. Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Zespolonym ***ułamkiem prostym*** nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(z+a)^n},$$

gdzie $A, a \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 5.1. *Każda funkcja wymierna właściwa zespolona jest sumą zespolonych ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. W szczególności*

$$\frac{W(z)}{c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}...(z-z_m)^{k_m}},$$

jest sumą $k_1+k_2+...+k_m$ *ułamków prostych, przy czym czynnikowi* $(z-z_i)^{k_i}$ *odpowiada suma* k_i *ułamków prostych postaci*

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i}+\frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2}+...+\frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1},A_{i2},...,A_{ik_i}\in\mathbb{C}$ *dla* $i=1,...,m$.

Rzeczywistym ***ułamkiem prostym pierwszego rodzaju*** nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x+a)^n},$$

gdzie $A, a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Rzeczywistym ***ułamkiem prostym drugiego rodzaju*** nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ oraz $p^2 - 4q < 0$.

Twierdzenie 5.2. *Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista jest sumą rzeczywistych ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. W szczególności*

$$\frac{W(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}...(x-x_t)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}},$$

jest sumą $k_1+k_2+...+k_s$ *rzeczywistych ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz* $l_1+l_2+...+l_t$ *rzeczywistych ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym*

Twierdzenie 5.2. cd.

czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych postaci

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2}+\ldots+\frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i} \in \mathbb{R}$ dla $i=1,\ldots,m$,
a czynnikowi $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci

$$\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\ldots+\frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jl}, C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jl_j} \in \mathbb{R}$ dla $j=1,\ldots,t$.