ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 9

Macierz odwrotna
Równanie macierzowe
Rząd macierzy

MACIERZ ODWROTNA

Skoro dla macierzy kwadratowych istnieje element neutralny względem mnożenia, (jest nim macierz jednostkowa I), naturalnym staje się pytanie o istnienie macierzy B dla danej macierzy A takiej, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Taką macierz B nazywamy ***macierzą odwrotną*** i oznaczamy symbolem A^{-1}. Macierz odwrotna wyznaczona jest jednoznacznie.

Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to nazywamy ją ***macierzą odwracalną***.

Z twierdznia 8.3 [Cauchy'ego] wynika, że tylko macierz nieosobliwa jest macierzą odwracalną.

Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A = [a_{ij}]$ taka. Elementami macierzy odwrotnej A^{-1} są

$$b_{ji} = \frac{d_{ij}}{\det A},$$

gdzie

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

jest dopełnieniem algebraicznym, a $\det M_{ij}$ - minorem macierzy A wyznaczonym przez element a_{ij}. Powyższe wzory doprowadzają nas do wzoru na macierz odwrotną

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T,$$

gdzie $D = [d_{ij}]$.

Twierdzenie 9.1 [Własności macierzy odwrotnych].
Niech macierze A i B tego samego stopnia będą odwracalne i nich $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$*.Wtedy macierze* $A^{-1}, A^T, A \cdot B, kA$ *i* A^n *też są odwracalne i prawdziwe są równości*

- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}(A^{-1})$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Bezwyznacznikowe znajdowanie macierzy odwrotnej

Niech A będzie macierzą nieosobliwą. Aby znaleźć macierz odwrotną A^{-1} postępujemy jak następuje. Z prawej strony macierzy dopisujemy macierz jednostkową I tego samego stopnia, co macierz A. Na wierszach otrzymanej w ten sposób ***macierzy blokowej*** $[A \mid I]$ wykonujemy ***operacje elementarne***:

1. zamiana kolejności wierszy;
2. pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę $k \in \mathbb{R}$ różną od zera,
3. dodanie wielokrotności dowolnego wiersza do innego wiersza.

Przy pomocy tych operacji sprowadzamy macierz blokową $[A \mid I]$ do macierzy do postaci $[I \mid B]$. Wtedy $A^{-1} = B$.

$$[A \mid I] \to [\text{operacje elementarne}] \to [I \mid A^{-1}].$$

Metoda ta nazywana jest też ***metodą przekształceń elementarnych***.

RÓWNANIA MACIERZOWE

Równanie złożone z macierzy, w których niewiadomą jest również macierz nazywamy ***równaniem macierzowym***. Przykładami równań macierzowych mogą być

$$A \cdot X = B, \qquad X \cdot A = B + C, \qquad A \cdot X \cdot B = C,$$

gdzie A, B, C są danymi macierzami, a X - macierzą szukaną. Rozwiązaniami takich równań są odpowiednio macierze

$$X = A^{-1} \cdot B, \qquad X = (B + C) \cdot A^{-1}, \qquad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Oczywiście, nie każde równanie macierzowe ma rozwiązanie. Należy pamiętać o tym, że macierze znajdujące się po tej samej stronie równania co macierz X muszą być odwracalne, a macierze po drugiej stronie równania muszą spełniać warunek mnożenia macierzy.

RZĄD MACIERZY

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.

Rząd macierzy A oznaczamy przez $\text{rz}(A)$ lub $\text{rank}(A)$.

Przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy 0.

Twierdzenie 9.2 [Własności rzędu macierzy].

- *Rząd macierzy nieosobliwej jest równy jej stopniowi.*
- $rz(A) = rz(A^T)$ *dla dowolnej macierzy A.*
- *Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) nie zmieniają rzędu macierzy.*
- *Usunięcie z macierzy wierszy (kolumn) złożonych z samych zer nie zmienia rzędu macierzy.*

Macierz nazywamy ***schodkową***, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach.

Przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków.

ALGORYTM GAUSSA-JORDANA

Algorytm Gaussa-Jordana służy do przekształcania macierzy nieosobliwych do postaci macierzy jednostkowych za pomocą operacji elementarnych. Ma następujący schemat

$$[A] \to [B] \to [I],$$

gdzie
A - dowolna macierz nieosobliwa,
B - macierz trójkątna z "jedynkami" na głównej przekątnej
I - macierz jednostkowa.

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922)
matematyk francuski, był jednym ze współtwórców francuskiej szkoły teorii funkcji, od jego nazwiska pochodzą: miara Jordana, twierdzenie Jordana, postać Jordana i krzywa Jordana. Zajmował się też algebrą i teorią grup. Jego prace dotyczyły ponadto topologii, analizy matematycznej i równań różniczkowych.