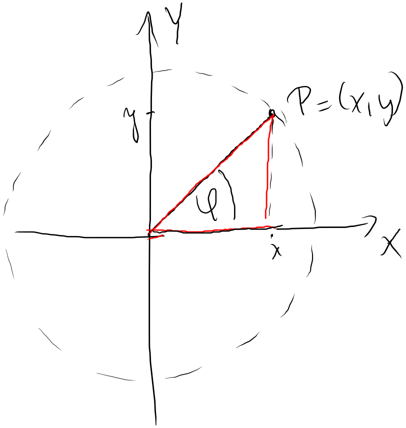
WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\varphi$

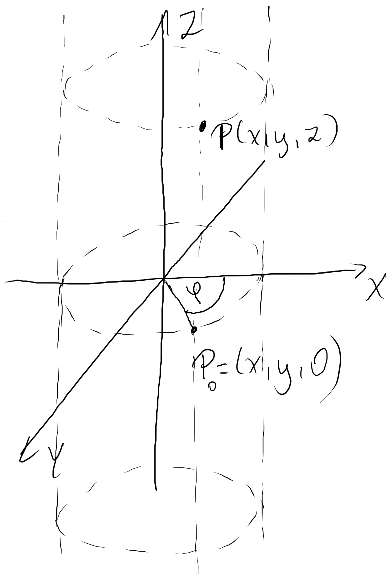
$\varphi \in [0, 2\pi)$

$(x, y) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$P = (x, y)$
współrzędne kartezjańskie

$P = (r, \varphi)$
współrzędne biegunowe

WSPÓŁRZĘDNE WALCOWE (CYLINDRYCZNE)



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(x, y, z) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

$P = (x, y, z)$
współrzędne
kartezjańskie

$P = (r, \varphi, z)$
współrzędne
walcowe

Przykład 1 Zamienić współrzędne walcowe punktu $A = (3, \frac{3}{2}\pi, -5)$ na kartezjańskie

$$r \quad \varphi \quad z$$

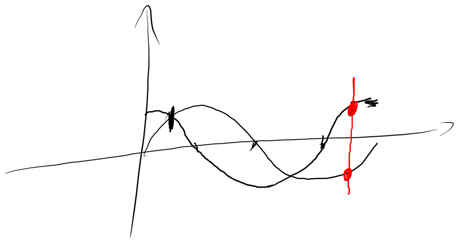
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = 3 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \\ y = r\sin\varphi = 3\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3 \\ z = z = -5 \end{cases}$$

$$A = (0, -3, -5)$$

Przykład 2 Zamienić współrzędne kartezjańskie punktu $A = (3, -3, 2)$ na współrzędne walcowe

$x \quad y \quad z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$



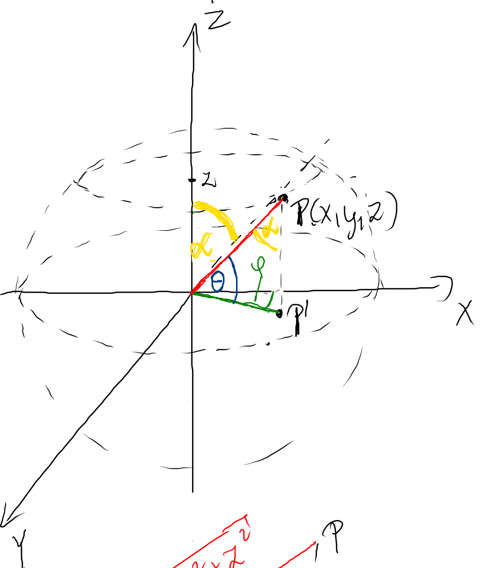
$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

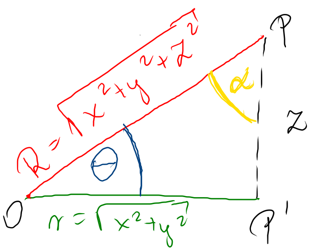
$\varphi = \frac{7}{4}\pi$

$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A = (r, \varphi, z) = \left(3\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi, 2\right)$

WSPÓŁRZĘDNE SFERYCZNE





P' - rzut prostokątny punktu P na płaszczyznę XOY

$P' = (x, y, 0)$

$(x, y, 0) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \sphericalangle(OP, XOY)$ $\quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\frac{z}{R} = \sin\theta \Rightarrow z = R\sin\theta$

$\frac{r}{R} = \cos\theta \Rightarrow r = R\cos\theta$

$(x, y, z) \longmapsto (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$

$P = (x, y, z)$ współrzędne kartezjańskie

$P = (R, \theta, \varphi)$ współrzędne sferyczne

$\alpha = \measuredangle(OZ, OP) \qquad \alpha \in [0, \pi]$

$\frac{z}{R} = \cos\alpha$

$\frac{r}{R} = \sin\alpha$

wtedy $\quad (x, y, z) \longmapsto (R\sin\alpha\cos\varphi, R\sin\alpha\sin\varphi, R\cos\alpha)$

Przykład 3 Zamienić współrzędne sferyczne punktu $A = \left(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$
$R \quad \Theta \quad \varphi$

na współrzędne kartezjańskie

$$x = R\cos\Theta\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

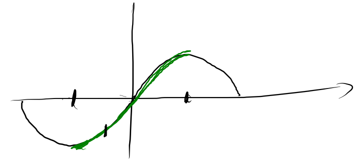
$$y = R\cos\Theta\sin\varphi = 3\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

$$z = R\sin\Theta = 3\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A = \left(\frac{3}{4}\sqrt{6}, \frac{3}{4}\sqrt{6}, \frac{3}{2}\right)$$

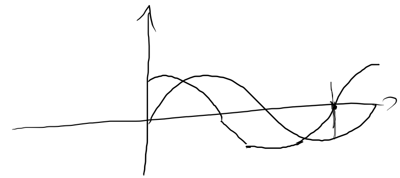
Przykład 4 Zamienić współrzędne kartezjańskie punktu $A = (0, -5\sqrt{3}, -5)$ na współrzędne sferyczne

$x \quad y \quad z$



$$R = \sqrt{0^2 + (-5\sqrt{3})^2 + (-5)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sin\Theta = \frac{z}{R} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \qquad \Theta = -\frac{\pi}{6}$$



$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{0}{5\sqrt{3}} = 0 \qquad \varphi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = -1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{3}$$

$$A = (R, \Theta, \varphi) = \left(10, -\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\pi\right)$$