ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 2

Struktury algebraiczne: grupa, pierścień, ciało
Ciało liczb zespolonych
Postać algebraiczna liczby zespolonej
Liczba sprzężona do liczby zespolonej
Działania w ciele liczb zespolonych

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania liczb zespolonych

- znajdowanie pierwiastków wielomianów oraz rozwiązań układów równań,
- znajdowanie wartości całek oznaczonych funkcji rzeczywistych przy pomocy residuów,
- cyfrowa analiza sygnałów (szeregi i transformata Fouriera),
- analiza obwodów elektrycznych prądu przemiennego,
- fraktale - kompresja obrazu i dźwięku, grafika komputerowa,
- mechanika kwantowa.

GRUPA, PIERŚCIEŃ, CIAŁO

Grupą K nazywamy zbiór G, z działaniem dwuargumentowym $\circ$ spełniający warunki:

- $\forall_{a,b,c\in G}\ a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ (łączność)
- $\exists_{e\in G}\ \forall_{a\in G}\ a\circ e=e\circ a=a$ (element neutralny)
- $\forall_{a\in G}\ \exists_{b\in G}\ a\circ b=b\circ a=e$ (element przeciwny)

Jeżeli ponadto zachodzi warunek

- $\forall_{a,b\in G}\ a\circ b=b\circ a$ (przemienność)

to taką grupę nazywamy ***przemienną (abelową)***.

Niels Henrik Abel (1802 - 1829) norweski matematyk, zajmował się różnymi gałęziami matematyki. Jego prace z algebry koncentrowały się wokół **rozwiązywania równań algebraicznych piątego stopnia.** Zastosował do tego celu tak zwaną teorię grup. Ponadto Abel zajmował się równaniami całkowymi i funkcjami eliptycznymi. W zakresie teorii liczb rozważał natomiast **zbieżność szeregów liczbowych i potęgowych.** Pozostawił po sobie dotyczące tego problemu tak zwane twierdzenia Abela. W wieku lat 16 **udowodnił wzór dwumianowy Newtona dla dowolnego wykładnika rzeczywistego**.

Pierścieniem nazywamy zbiór P z dwoma działaniami $+$ oraz $\cdot$, taki że

- $(P, +, 0)$ jest grupą abelową
- $\forall_{a,b,c \in P}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (łączność)
- $\forall_{a,b,c \in P}\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Jeżeli działanie $\cdot$ jest przemienne, to P nazywamy ***pierścieniem przemiennym***.

Jeżeli działanie $\cdot$ ma element neutralny 1, to P nazywamy ***pierścieniem przemiennym z jedynką***.

Ciałem nazywamy pierścień przemienny z jedynką $(F, +, \cdot)$, w którym $0 \neq 1$, przy czym 0 oznacza element neutralny $+$, a 1 to element neutralny $\cdot$ i taki, że każdy różny od zera element zbioru F ma element odwrotny względem $\cdot$.

Przykład 2.1.

Ciałami są

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ - ciało liczb wymiernych,
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ - ciało liczb rzeczywistych,

Ciałami nie są

- $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ - zbiór liczb naturalnych
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ - zbiór liczb całkowitych

CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH

Niech $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie zbiorem uporządkowanych par liczb rzeczywistych. W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy działania dodawania i mnożenia:

- $\forall_{z_1,z_2 \in \mathbb{C}}\ z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$,
- $\forall_{z_1,z_2 \in \mathbb{C}}\ z_1 \cdot z_2 = (a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$.

Strukturę $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$, gdzie $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$ nazywamy ***ciałem liczb zespolonych***. Elementy $\mathbb{C}$ nazywamy ***liczbami zespolonymi***.

Ponadto w $\mathbb{C}$ zachodzą zależności

- $\forall_{z_1,z_2 \in \mathbb{C}}\ z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ (odejmowanie)
- $\forall_{z_1,z_2 \in \mathbb{C}}\ z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ (dzielenie).

Niech $z_1 = (a,0)$, a $z_2 = (c,0), a, c \in \mathbb{R}$. Wtedy

- $z_1 + z_2 = (a + c, 0)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c, 0)$.

Zatem liczbę $(a,0)$ możemy utożsamiać z liczbą rzeczywistą a, tzn.

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \; a = (a,0) \in \mathbb{C}.$$

Liczbę $z = (0,1)$ nazywamy ***jednostką urojoną*** i oznaczamy i.

Oczywiście

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0).$$

Stąd

$$i^2 = -1.$$

POSTAĆ ALGEBRAICZNA LICZBY ZESPOLONEJ

Twierdzenie 2.1. *Każdą liczbę zespoloną $z = (a, b)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$z = a + bi,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a i jest jednostką urojoną.

Istotnie.
$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$

Postać liczby zespolonej

$$z = a + bi$$

nazywamy ***postacią algebraiczną liczby zespolonej***. Liczbę a nazywamy ***częścią rzeczywistą*** liczby z, liczbę b zaś nazywamy ***częścią urojoną*** liczby z i oznaczamy odpowiednio $Re(z) = a$, (czyt. realis z) i $Im(z) = b$, (czyt. imaginalis z).

Niech $z = x + iy, z_1 = a + bi, z_2 = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wtedy

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $-z = -x - yi$
- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i, \quad z_1 \neq 0$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i, \quad z_2 \neq 0$

Liczbą sprzężoną do liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę

$$\overline{z} = a - bi.$$

Dla liczb sprzężonych, jeśli $z = a + bi$ prawdziwe są równości

- $z + \overline{z} = 2a = 2Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2bi = 2i \cdot Im(z)$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z})} = z$