Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 4
Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych
Równania i nierówności w ciele liczb zespolonych

4.1. Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniające warunki:
a) $z^2 = \overline{z}$, b) $|z^4| = z$, c) $z^3 \cdot (\overline{z})^2 = -1$.

4.2. Wykonać działania stosując wzór de Moivre'a
a) $(1-i)^{12}$, b) $(1+\sqrt{3}i)^8$,
c) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$, d) $(1+i)^{10} - (1+i)^6$,
e) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{12}$, f) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

4.3. Wyznaczyć wartości wyrażeń
a) $Re\frac{(1+3i)(1-i)^3}{3+i}$, b) $Im\frac{(1-i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^6}$,
c) $|\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}|$, d) $Arg\left(\frac{2+2i}{i}\right)$.

4.4. Obliczyć i przedstawić w postaci algebraicznej pierwiastki:
a) $\sqrt{-4}$, b) $\sqrt{-8i}$, c) $\sqrt{3-4i}$, d) $\sqrt{-15-8i}$, e) $\sqrt{-11-60i}$,
f) $\sqrt{-8-6i}$, g) $\sqrt[3]{i}$, h) $\sqrt[6]{-64}$, i) $\sqrt[4]{16}$, j) $\sqrt[4]{-4}$.

4.5. Rozwiązać równania
a) $2z + (3-i)\overline{z} = 5+4i$, b) $z + i = \overline{z+i}$,
c) $z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 3+2i$, d) $z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) = 5+3i$,
e) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\overline{z}}$, f) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$,
g) $z^2 - 4z + 13 = 0$, h) $(z+2)^2 = (\overline{z}+2)^2$,
i) $z^2 - (6+i)z + 11 - 7i = 0$.

4.6. Rozwiązać równania
a) $z^2 + 4z + 5 = 0$, b) $z^3 = -8$,
c) $z^2 + (1+4i)z = (5+i)$, d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$,
e) $z^4 - 4i\sqrt{3}z^2 = 16$, f) $(z-i)^4 = (iz+3)^4$.

4.7. Rozwiązać równania
a) $|z| + z = 8+4i$, b) $|z| - z = 8+12i$.

4.8.* Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić podane funkcje przez $\cos\varphi, \sin\varphi$:
a) $\cos 3\varphi$, b) $\sin 4\varphi$.

4.9.* Obliczyć i^n dla $n \in \mathbb{N}$. (Podać odpowiedź w postaci ogólnej).

4.10.* Wykazać, że
a) jeśli $|z| < 1$, to $|z^2 - z + i| < 3$, b) jeśli $z \leqslant 2$, to $1 \leqslant |z^2 - 5| \leqslant 9$.

ODPOWIEDZI

4.1. a) $0, 1, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 - i\sqrt{3}/2$, b) $0, 1$, c) -1.
4.2. a) -2^6, b) $2^7(-1 + \sqrt{3}i)$, c) -4^{30}, d) $40i$, e) 1, f) $-32i$.
4.3. a) $2/5$, b) $1/2$, c) 2, d) $\frac{7}{4}\pi$.
4.4. a) $\pm 2i$, b) $\pm(2 - 2i)$, c) $\pm(2 - i)$, d) $\pm(1 - 4i)$, e) $\pm(5 - 6i)$, f) $\pm(1 - 3i)$, g) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), -i$, h) $\pm(\sqrt{3} + i), \pm(\sqrt{3} - i), \pm(2i)$, i) $\pm 2, \pm 2i$, j) $1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$.
4.5. a) $\frac{1}{6} - \frac{25}{6}i$, b) $z = a - i, a \in \mathbb{R}$, c) $-\sqrt{2} + i, \sqrt{2} + i$, d) $\emptyset$, e) brak rozwiązań, f) $\frac{7-i}{6}$, g) $2 - 3i, 2 + 3i$, h) $Rez = -2, Imz = 0$, i) $1 - 2i, 5 + 3i$.
4.6. a) $-2 + i, -2 - i$, b) $-2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}$, c) $1 - i, -2 - 3i$, d) $\pm\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$, e) $\pm(1 + i\sqrt{3}), \pm(\sqrt{3} + i)$, f) $1 + 2i, 2i, -1 + 2i$.
4.7. a) $3 + 4i$, b) $5 - 12i$.
4.8. a) $\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$, b) $4\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$.
4.9. $i^n = \cos\frac{1}{2}n\pi + i\sin\frac{1}{2}n\pi$.