•

Całkowanie funkcji wymiernych i trygonometrycznych

(Analiza Matematyczna 1, wykład 11)

Funkcje wymierne postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

oraz

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } p^2-4q<0\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

natomiast *A, B, a, p, q* oznaczają pewne stałe, nazywamy *ułamkami prostymi* (1 i 2-giego rodzaju).

Funkcje wymierną $\frac{P(x)}{Q(x)}$, będącą ilorazem wielomianów *P(x)* i *Q(x)* można przedstawić

w postaci

$$W(x)+\frac{L(x)}{M(x)},$$

gdzie *W(x)*, *L(x)* i *M(x)* są wielomianami takimi, że w ilorazie $\frac{L(x)}{M(x)}$ stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika.

<u>Twierdzenie</u>.

Dowolną funkcję wymierną, której stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika można przedstawić jako sumę ułamków prostych.

Pytania:

1. Jak rozłożyć?

2. Jak całkować?

Rozważmy funkcję wymierną

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

(ułamek nieskracalny, licznik jest stopnia niższego niż mianownik) i jej rozkład na ułamki proste.

Należy najpierw rozłożyć mianownik *Q(x)* na czynniki pierwsze.

Czynnikowi $(x-a)$ odpowiadać będzie ułamek prosty $\frac{A}{x-a}$;

gdy $(x-a)$ występuje w potędze *k*-tej, odpowiada mu suma *k* ułamków

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Podobnie czynnikowi kwadratowemu $x^2 + px + q$ przyporządkujemy ułamek prosty

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q},$$

zaś czynnikowi $(x^2 + px + q)^k$ sumę

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

<u>Przykłady.</u> Rozłożyć ułamek właściwy na ułamki proste:

a) $\dfrac{2x^3+x^2+6x+4}{x^4+x^3}$

Rozkładamy mianownik ułamka na czynniki:

$$x^4+x^3=x^3(x+1)$$

Należy znaleźć stałe *A*, *B*, *C*, *D* takie, że

$$\frac{2x^3+x^2+6x+4}{x^4+x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}$$

Mnożąc to stronami przez $x^3(x+1)$ **otrzymujemy**

$$2x^3+x^2+6x+4=Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3$$

Współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej *x*:

$$A+D=2,\quad A+B=1,\quad B+C=6,\quad C=4,$$

skąd otrzymujemy *A* = –1, *B* = 2, *C* = 4 i *D* = 3, zatem

$$\frac{2x^3+x^2+6x+4}{x^4+x^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x+1}$$

b) $\dfrac{x^2+3x+17}{x^3+4x^2+9x+10}$

Mianownik $x^3+4x^2+9x+10$ **przedstawia się jako iloczyn**

$$x^3+4x^2+9x+10=(x^2+2x+5)(x+2),$$

skąd

$$\frac{x^2+3x+17}{x^3+4x^2+9x+10}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+5}+\frac{C}{x+2}$$

Po przemnożeniu stronami przez $(x^2+2x+5)(x+2)$ **dostajemy**

$$x^2+3x+17=(Ax+B)(x+2)+C(x^2+2x+5)$$

Współczynniki przy jednakowych potęgach *x*:

$A + C = 1$, $2A + B + 2C = 3$, $2B + 5C = 17$,

Stąd $A = -2$, $B = 1$, $C = 3$ **i ostatecznie:**

$$\frac{x^2+3x+17}{x^3+4x^2+9x+10}=\frac{-2x+1}{x^2+2x+5}+\frac{3}{x+2}.$$

Całkowanie funkcji wymiernych sprowadza się zatem do całkowania wielomianów i ułamków prostych

Całkowania ułamków prostych

A) **Ułamek prosty typu** $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ **całkujemy podstawiając** $t = x - a$, **co daje**

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \dfrac{A(x-a)^{1-n}}{1-n}, & n \neq 1 \\ A\ln|x-a|, & n = 1 \end{cases}$$

B) Przy całkowaniu ułamka prostego typu

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\text{, gdzie } p^2-4q<0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

funkcję podcałkową można przedstawić w postaci

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+\frac{D}{(x^2+px+q)^n}\text{, gdzie } D=B-\frac{Ap}{2}.$$

Zatem

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\cdot\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+D\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

Pierwszą z całek po prawej stronie obliczamy podstawiając $t=x^2+px+q$, w drugiej zaś przekształcamy trójmian x^2+px+q do postaci kanonicznej $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$ i przyjmując $x+\frac{p}{2}$ jako nową zmienną u i oznaczając $q-\frac{p^2}{4}$ jako a^2 otrzymujemy całkę $\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}$, którą wylicza się za pomocą wzoru rekurencyjnego dla n = 2, 3, ... :

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C, \quad \text{dla } n=1.$$

<u>Przykład</u>. Wyznaczyć całkę funkcji wymiernej

a) $$\int \frac{4x-5}{x^2+2x+2}dx$$

Trójmian x^2+2x+2 **ma wyróżnik ujemny, więc funkcja podcałkowa jest ułamkiem prostym. Wyrazimy licznik tego ułamka za pomocą pochodnej mianownika. Skoro** $(x^2+2x+2)'=2x+2$**, zatem**

$$\int \frac{4x-5}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \int \frac{2(2x+2)-9}{x^2+2x+2}dx = 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 9\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Dla pierwszej całki mamy:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \ln(x^2+2x+2)$$

Dla drugiej całki zapiszemy

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

i następnie stosując podstawienie $x + 1 = t$ dostajemy, że

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = arctg(x+1)$$

Ostatecznie

$$\int \frac{4x-5}{x^2+2x+2}dx = \ln(x^2+2x+2) + arctg(x+1) + C$$

b) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$

$$J=\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx = \int \frac{x^4-1+2}{x^4-1}dx = \int dx + \int \frac{2}{x^4-1}dx = x + \int \frac{2}{x^4-1}dx$$

Ostatnia całka:

$$x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$$

skąd

$$\frac{2}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

Po obliczeniach ***A = 0, B = –1***, $C=\frac{1}{2}$ **i** $D=-\frac{1}{2}$.

Zatem

$$\int \frac{2}{x^4-1}dx=\int\left(\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx=-\operatorname{arctg}x+\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Ostatecznie więc

$$J=x-\operatorname{arctg}x+\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

1. **Całki kwadratów i innych parzystych potęg sinusa i cosinusa wyznacza się stosując następujące wzory na obniżenie potęg:**

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \text{(a)}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \text{(b)}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \qquad \text{(c)}$$

2. **Całki sześcianów i innych nieparzystych potęg sinusa i cosinusa wyznacza się przez oddzielenie od nieparzystej potęgi jednego czynnika (jeśli jest to sinx, to zamianie parzystych potęg sinx na cosx i podstawienie t=cosx).**

Całkę $\int \cos^m x \sin^n x dx$ obliczamy korzystając z reguły:

- **1-szej, gdy liczby *m* i *n* są parzyste,**
- **2-giej, gdy choć jedna z liczb *m*, *n* jest nieparzysta**

Przykład.

Obliczyć całkę $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Korzystając z (c) otrzymujemy:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx,$$

następnie z (a):

$$\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$$

Ostatecznie:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$$

Przykład.

Obliczyć $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Korzystając z reguły 2 otrzymujemy:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

Podstawiamy:

$$\sin x = t, \quad \text{zatem} \quad dx = dt/\cos x$$

więc:

$$\int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int t^2 (1 - t^2) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = t^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{t^2}{5} \right) + C,$$

wracając do zmiennej x ostatecznie otrzymujemy:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \sin^3 x \left(\frac{1}{3} - \frac{\sin^2 x}{5} \right) + C.$$

3. Przy obliczaniu całek typu:

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx,$$

korzystamy ze wzorów:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right], \qquad \text{(d)}$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right], \qquad \text{(e)}$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right]. \qquad \text{(f)}$$

<u>Przykład</u>.

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]$$

Obliczyć $\int \sin 2x \cos 3x dx$.

Korzystając ze wzoru (d) otrzymujemy:

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin 5x + \sin(-x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x dx - \int \sin x dx\right] = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Całkowanie funkcji wykładniczych

Wyrażenie, gdy funkcja podcałkowa jest zależną od x^{α}, gdzie α – liczba ułamkowa. można sprowadzić do wyrażenia wymiernego, wprowadzając nową zmienną:

$$t = x^{\frac{1}{q}},$$

gdzie q – wspólny mianownik ułamków wykładnika potęg x.

<u>Przykład</u>. Obliczyć całkę $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$. Wykładniki 2/3 i ½.

Wykonujemy podstawienie :

$$t = x^{\frac{1}{6}}, \quad \text{stąd} \quad x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt$$

zatem:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^4 + t^3} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3(t+1)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t+1}$$

Otrzymaliśmy całkę funkcji wymiernej:

$$6\int \frac{t^2 dt}{t+1}.$$

Ponieważ

$$\frac{t^2}{(t+1)} = t - 1 + \frac{1}{t+1}, \quad \text{więc}$$

$$6\int \frac{t^2 dt}{t+1} = 6\int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 6\left(\int t dt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1} \right) =$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C.$$

Następnie, powrócić do zmiennej x podstawiając $t = \sqrt[6]{x}$,