ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 16

Krzywe stożkowe.
Okrąg. Elipsa. Hiperbola. Parabola.

Stożek.
Niech dane będą dwie proste przecinające sie pod kątem $\alpha, (0 < \alpha < \pi/2)$. Jedną z nich nazwiemy ***osią obrotu***, a drugą ***tworzącą***. ***Stożkiem*** nazywamy powierzchnię zakreśloną przez tworzącą, podczas obrotu wokół osi. Punkt przecięcia prostych nazywamy ***wierzchołkiem*** stożka. Dzieli on stożek na dwie części zwane ***powłokami***.

Krzywe stożkowe.

Stożkowymi nazywamy krzywe, które można otrzymać w wyniku przecięcia stożka płaszczyzną nie przechodzącą przez wierzchołek. W zależności od kąta x jaki tworzy oś stożka z płaszczyzną tnącą, otrzymaną krzywa nazywamy:

okręgiem, gdy $x = \pi/2$,

elipsą, gdy $\alpha < x < \pi/2$,

hiperbolą, gdy $0 \leqslant x < \alpha$,

parabolą, gdy $x = \alpha$.

Okrąg. Równanie okręgu.
Zbiór punktów P płaszczyzny położonych w odległości r, ($r > 0$), od ustalonego punktu S tej płaszczyzny nazywamy ***okręgiem***

$$|PS| = r.$$

Punkt S nazywamy ***środkiem***, a stałą r nazywamy ***promieniem*** okręgu.
Równanie okręgu o środku $S = (x_0, y_0)$ i promieniu $r > 0$ ma postać

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Równanie stycznej okręgu.
Niech punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ należy do okręgu $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Wtedy równanie stycznej okręgu w punkcie P_1 ma postać

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0) = r^2.$$

Elipsa. Zbiór punktów P płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1, F_2 tej płaszczyzny jest stała i większa od odległości między F_1 i F_2 nazywamy ***elipsą***.

$$|PF_1| + |PF_2| = const.$$

Punkty F_1, F_2 nazywamy ***ogniskami*** elipsy, a odległość między nimi $2c = |F_1 F_2|$ ogniskową. Elipsa ma dwie osie symetrii: ***oś wielką*** przechodzącą przez ogniska F_1, F_2 oraz ***oś małą*** będącą symetralną odcinka $F_1 F_2$. Oś wielka przecina się z elipsą w punktach K, L, przyjmujemy, że $|KL| = 2a$, a oś mała przecina elipsę w punktach M, N, przyjmujemy $|MN| = 2b$, ($b < a$ oraz $c < a$). Punkt przecięcia osi symetrii jest jej ***środkiem***, zaś punkty K, L, M, N jej ***wierzchołkami***. Z kolei liczbę $\varepsilon = c/a < 1$ nazywamy ***mimośrodem***.

Równanie elipsy.
Równanie elipsy o środku $S = (x_0, y_0)$ oraz osiach $2a, 2b$ równoległych do osi układu współrzędnych ma postać

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Ogniska F_1, F_2 mają współrzędne $F_1 = (x_0 - c, y_0), F_2 = (x_0 + c, y_0)$, gdzie $2c$ jest ogniskową elipsy.

Równanie stycznej elipsy.

Niech $P_1 = (x_1, y_1)$ należy do elipsy $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Wtedy równanie stycznej elipsy w punkcie P_1 ma postać

$$\frac{(x_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

Hiperbola.
Zbiór punktów P płaszczyzny, których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch ustalonych punktów F_1, F_2 tej płaszczyzny jest stała i mniejsza niż odległość między F_1, F_2 nazywamy ***hiperbolą***

$$||PF_1| - |PF_2|| = const.$$

Punkty F_1, F_2 nazywamy ***ogniskami*** hiperboli, a odległość między nimi $2c = |F_1F_2|$ ***ogniskową***. Hiperbola składa się z dwóch części zwanych ***gałęziami*** i ma dwie osie symetrii: oś przechodzącą przez ogniska F_1, F_2 oraz oś będącą symetralną odcinka F_1F_2. Punkt przecięcia osi symetrii jest jej ***środkiem***. ***Wierzchołkami*** hiperboli nazywamy punkty K, L należące do osi symetrii zawierającej ogniska. Odległość $2a = |KL|$ nazywamy ***osią rzeczywistą***. Oczywiście $c > a$. ***Mimośrodem*** hiperboli nazywamy liczbę $\varepsilon = c/a > 1$.

Równanie hiperboli.

Równanie hiperboli o środku $S = (x_0, y_0)$, ogniskowej $2c$ oraz osi rzeczywistej $2a$, która jest równoległa do osi OX ma postać

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ gdzie } b = \sqrt{c^2-a^2}.$$

Ogniska F_1, F_2 hiperboli o powyższym równaniu mają współrzędne $F_1 = (x_0 - c, y_0), F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Asymptoty hiperboli.
Hiperbola o powyższym równaniu ma asymptoty

$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0),\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Liczbę $2b$ nazywamy osią urojoną hiperboli. Jeżeli $a = b$, to hiperbolę nazywamy ***równoosiową***. Po obrocie takiej hiperboli o kąt $\pi/4$ równanie przyjmuje postać

$$(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a^2}{2}.$$

Asymptotami tej hiperboli są $x = x_0, y = y_0$.

Równanie stycznej hiperboli.
Niech punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ należący do hiperboli $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$ gdzie $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Wtedy równanie stycznej hiperboli w punkcie P_1 ma postać

$$\frac{(x_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

Równanie stycznej hiperboli równoosiowej $(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a^2}{2}$ ma postać

$$(y_1 - y_0)(x - x_1) + (x_1 - x_0)(y - y_1) = 0.$$

Parabola.
Zbiór punktów P płaszczyzny równooddalonych od ustalonego punktu F i ustalonej prostej k na płaszczyźnie, przy czym $F \notin k$, nazywamy ***parabolą***

$$|PF| = |PK|.$$

Punkt F nazywamy ***ogniskiem***, a prostą k ***kierownicą*** paraboli. Parabola ma tylko jedną oś symetrii. Punkt W paraboli położony na osi symetrii nazywamy jej ***wierzchołkiem***, a liczbę $2p = 2|FO|$, gdzie O jest punktem kierownicy należącym do osi symetrii paraboli, nazywamy ***parametrem*** paraboli.

Równanie paraboli.

Niech liczba $2p$ będzie parametrem, a punkt $W = (x_0, y_0)$ wierzchołkiem paraboli, której oś symetrii jest równoległa do osi OX. Wtedy równanie paraboli ma postać

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Równanie kierownicy k takiej paraboli ma postać $x = x_0 - p/2$, a ognisko F współrzędne $F = (x_0 + p/2, y_0)$.
Równanie paraboli obróconej o kąt $\pi/2$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara ma postać $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.
Wykres każdej funkcji postaci $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ jest parabolą. Wierzchołek W ma współrzędne
$W = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a})$.

Równanie stycznej paraboli.
Niech punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ należy do paraboli $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. Wtedy równanie stycznej paraboli w punkcie P_1 ma postać

$$(y_1 - y_0)(y - y_0) = p[(x_1 - x_0) + (x - x_0)].$$