ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 1

Elementy logiki matematycznej
Indukcja matematyczna
Wzór dwumianowy Newtona

ELEMENTY LOGIKI MATEMATYCZNEJ
I ALGEBRY ZBIORÓW

Zdaniem logicznym nazywamy zdanie orzekające, któremu możemy przypisać jedną w dwóch wartości logicznych: prawdę lub fałsz.
Zdania logiczne oznaczamy małymi literami z końca alfabetu: $p, q, r, s, \ldots$. Zdania logiczne możemy łączyć spójnikami tworząc zdania złożone. I tak

- $\neg p$ lub $\sim p$ czytamy: *nieprawda, że p*,
- $p \wedge q$ czytamy: *p i q*,
- $p \vee q$ czytamy: *p lub q*,
- $p \Rightarrow q$ czytamy: *jeżeli p, to q*,
- $p \Leftrightarrow q$ czytamy: *p wtedy i tylko wtedy, gdy q*.

Funkcjami zdaniowymi nazywamy zdania orzekające, którym nie można przypisać określonej wartości logicznej, gdyż zawierają zmienną przebiegającą pewien zbiór X (zwany dziedziną funkcji zdaniowej). Jednak, gdy przyjmiemy zamiast zmiennej dowolny element dziedziny, to funkcja zdaniowa staje się zdaniem logicznym.
Funkcje zdaniowe oznaczamy jako $\phi(x), \psi(x)$, itp.

Funkcje zdaniowe na ogół poprzedzac będziemy ***kwantyfikatorami***: kwantyfikatorem ***ogólnym*** $\forall$ i kwantyfikatorem ***szczegółowym*** $\exists$. I tak

- $\forall_{x \in X} \phi(x)$ czytamy: *dla każdego* $x \in X$ *zachodzi* $\phi(x)$,
- $\exists_{x \in X} \phi(x)$ czytamy: *istnieje takie* $x \in X$*, że zachodzi* $\phi(x)$.

Czasem używamy $\bigwedge$ zamiast $\forall$ oraz $\bigvee$ zamiast $\exists$.

Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym, którego nie definiujemy.

Sposoby określania zbiorów:

- poprzez wypisanie elementów

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

- poprzez podanie warunku przynależności:

$$A = \{x \in X : \phi(x)\}.$$

Definiujemy

- $A \cap B = \{x \in X\colon x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in X\colon \phi(x) \wedge \psi(x)\}$
- $A \cup B = \{x \in X\colon x \in A \vee x \in B\} = \{x \in X\colon \phi(x) \vee \psi(x)\}$
- $A \setminus B = \{x \in X\colon x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in X\colon \phi(x) \wedge \neg\psi(x)\}$
- $A' = \{x \in X\colon x \notin A\} = \{x \in X\colon \neg\phi(x)\}$
- $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall_{x \in X}(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))$
- $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall_{x \in X}(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy parę, w której określono kolejność elementów.

Iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów A i B nazywamy zbiór par uporządkowanych

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}.$$

Zbiory oznaczamy następującymi symbolami:

- $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,
- $\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych (o tym na następnych wykładach).

LICZBY NATURALNE

Liczba 0 jest ***liczbą naturalną***. Jeżeli do liczby 0 dodamy 1, następnie znowu 1 i tak dalej, to za każdym razem otrzymamy ***liczbę naturalną***.

- W zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.
- Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna liczba naturalna następująca bezpośrednio po niej, jest ona postaci $n+1$.
- Każda liczba naturalna (z wyjątkiem 0) ma poprzednik, tzn. dla każdej liczby naturalnej $n>0$ istnieje liczba $n-1$ i jest ona liczbą naturalną.
- Suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą naturalną.
- Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest liczbą naturalną.
- Zbiór liczb naturalnych jest zbiorem nieskończonym.
- Zbiór liczb naturalnych jest uporządkowany przez relację $<$.
- W każdym niepustym podzbiorze zbioru liczb naturalnych jest liczba najmniejsza.

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

Załóżmy, że mamy pewne twierdzenie o liczbach naturalnych, a mówiąc dokładniej zbiór twierdzeń sformułowanych w taki sposób, że zawierają one wypowiedzi o liczbach naturalnych. Wypowiedzi te stają się zdaniami po podstawieniu konkretnej liczby. Jest to więc zbiór funkcji zdaniowych $\{T(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$.

Niech A oznacza zbiór tych liczb naturalnych, dla których zdanie $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym. Jeżeli do A należy 0 i wraz z każdą liczbą należy jej następnik, to w myśl własności wyróżnionej powyżej zbiór A jest zbiorem liczb naturalnych.

A zatem chcąc udowodnić twierdzenie o liczbach naturalnych, postępujemy według schematu:

1. Sprawdzamy, czy twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 0,
2. Dowodzimy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja: jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla liczby n, to jest również prawdziwe dla liczby $n+1$.

Jeżeli udowodnimy, że zachodzą warunki 1) i 2), to możemy wnioskować, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n. Zasadę określoną powyżej nazywamy ***zasadą indukcji matematycznej***.

Przykład 1.1. Pokażemy, że wzór

$$0+1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 0$.
Podstawiając w powyższym wzorze $n=0$, otrzymujemy $0=\frac{0 \cdot 1}{2}$, a więc wzór powyższy jest prawdziwy dla $n=0$. Wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja: jeżeli dla liczby n zachodzi wzór

$$0+1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

to wzór ten zachodzi dla liczby $n+1$, tzn. prawdziwa jest równość

$$0+1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Przykład 1.1 cd.
Z założenia indukcyjnego mamy

$$0+1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

co po kolejnych przekształceniach daje

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Zatem wzór

$$0+1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 0$.

DEFINIOWANIE PRZEZ INDUKCJĘ

Zasada indukcji matematycznej może być użyta przy definiowaniu nowych pojęć. Postępujemy według następującego schematu:
Definiujemy pojęcie dla $n = 0$. Następnie podajemy sposób definiowania pojęcia dla następnika przy założeniu, że wiemy jak pojęcie zostało określone dla poprzednika. Dalej w myśl zasady indukcji wnioskujemy, że zdefiniowaliśmy pojęcie dla dowolnej liczby naturalnej.

Silnia

Niech $n \in \mathbb{N}$. Symbol $n!$ (czyt. „n silnia”) definiujemy następująco:

$0! = 1$,

$1! = 1$,

$2! = 1 \cdot 2 = 1! \cdot 2$,

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3$,

$\ldots$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (n-1)! \cdot n$.

ogólnie

$$0! = 1,\ n! = (n-1)! \cdot n, \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Symbol Newtona

Niech n oraz k będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leqslant n$. Symbolem Newtona $\binom{n}{k}$ dla n k (czyt. „n po k”) nazywamy iloraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

określony dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Isaac Newton (1642/1643(?) - 1727) angielski fizyk, matematyk, astronom, filozof, historyk, badacz Biblii i alchemik. Odkrywca trzech zasad dynamiki. Autor prawa powszechnego ciążenia oraz prawa ruchu. Niezależnie od Gottfrieda Leibniza przyczynił się do rozwoju **rachunku różniczkowego i całkowego**. Podał matematyczne uzasadnienie dla praw Keplera i udowodnił, że orbity ciał niebieskich są nie tylko eliptyczne, ale mogą być też hiperboliczne i paraboliczne. Sformułował **twierdzenie o dwumianie**. Zajmował się też pomiarami prędkości dźwięku w powietrzu. Jako pierwszy opisał matematycznie zjawisko pływów morskich (1687).

Trójkąt Pascala

Wartości symbolu Newtona możemy ustawić w następującą tabelkę mającą kształt trójkąta:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

....

Blaise Pascal (1623–1662) francuski matematyk, fizyk i filozof religii, wniósł znaczący wkład w powstanie i rozwój dwóch nowych działów wiedzy. Już jako szesnastolatek napisał pracę obejmującą zagadnienia **geometrii rzutowej**, później zaś (wraz z francuskim matematykiem Pierre'em de Fermatem (1601–1665), autorem słynnego twierdzenia Fermata) rozważał kwestie **teorii prawdopodobieństwa**, wywierając tym samym niemały wpływ na rozwój nowoczesnej ekonomii i nauk społecznych.

Wzór dwumianowy Newtona

Każdą naturalną potęgę dwumianu $(a+b)$ można wyrazić w postaci tzw. wzoru dwumianowego Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

gdzie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Przykład 1.2. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona wyznaczymy $(x-y)^3$. Podstawiając we wzorze $a=x$, $b=-y$ oraz $n=3$, otrzymujemy $(x-y)^3 =$
$\binom{3}{0}x^3(-y)^0 + \binom{3}{1}x^{3-1}(-y)^1 + \binom{3}{2}x^{3-2}(-y)^2 + \binom{3}{3}x^{3-3}(-y)^3 =$
$\binom{3}{0}x^3(-b)^0 + \binom{3}{1}x^2(-y)^1 + \binom{3}{2}x^1(-y)^2 + \binom{3}{3}x^0(-y)^3 =$
$x^3 + 3x^2(-y) + 3x(-y)^2 + (-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.
Zatem
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$