Lista 1

Zadanie 1

```
a)
X = sum_i=-inf^+inf x_iB^i
  = sum_i=0^+inf  x_iB^i
  + sum_i=-inf^-1 x_iB^i


X = sum_i=0^+inf x_iB^i
  = x_0B^0 + sum_i=1^+inf x_iB^i
  = x_0B^0 + B*sum_i=1^+inf x_iB^(i-1)


9432,33_(10) -> ()_(2)

9432_(10) -> 10010011011000_(2)

0,33_(10)=0,01(0101000111101011100)_(2)

9432_(10) ->
 10010011011000,01(0101000111101011100)_(2)

9432 | 0 <- 2*4716+0
4716 | 0 <- 2*2358+0
2358 | 0 <- 2*1179+0
1179 | 1 <- 2* 589+1
 589 | 1 <- 2* 294+1
 294 | 0 <- 2* 147+0
 147 | 1 <- 2*  73+1
  73 | 1 <- 2*  36+1
  36 | 0 <- 2*  18+0
  18 | 0 <- 2*   9+0
   9 | 1 <- 2*   4+1
   4 | 0 <- 2*   2+0
   2 | 0 <- 2*   1+0
   1 | 1.


X_f = sum_i=-inf^-1 x_iB^i
    = x_-1B^-1 + sum_i=-inf^-2 x_iB^i
    = x_-1B^-1 + B^-1*sum_i=-inf^-2 x_iB^(i+1)

     0, | 0,33
      0 | 0,66
      1 | 0,32
      0 | 0,64
      1 | 0,28
      0 | 0,56
      1 | 0,12
      0 | 0,24
      0 | 0,48
      0 | 0,96
      1 | 0,92
      1 | 0,84
```

```
      1 | 0,68
      1 | 0,36
      0 | 0,72
      1 | 0,44
      0 | 0,88
      1 | 0,76
      1 | 0,52
      1 | 0,04
      0 | 0,08
      0 | 0,16
      0 | 0,32



c)
X = sum_i=-inf^+inf x_i*B^i

X = sum_i=0^+inf  x_i*B^i
  + sum_i=-inf^-1 x_i*B^i



6543,11_(7) -> _(10)


6*7^3+5*7^2+4*7^1+3*7^0

7^3=343 ; 6*343=2058
7^2=49  ; 5*49=  245
7^1=7   ; 4*7=    28
7^0=1   ; 3*1=     3
----------------------
                2334

0,11_(7) = 1*7^-1 + 1*7^-2
         = 7^-2*( 1*7 + 1 )

11_(7)*13_(7) = ...

0,11_(7) = ( 1*7 + 1 )/7^2_(10)
         = 8/49_(10)
         = 0,(163265306122448920408)_(10)


6543,11_(7) -> 2334,(163265306122448920408)_(10)


8/49 = sum_i=-inf^-1 x_i*B^i
8/49 = sum_i=-inf^-1 x_i*10^i
8/49 = x_-1*10^-1 + x_-2*10^-2 + ...

10*8/49 = 10*( x_-1*10^-1 + x_-2*10^-2 + ... )
        = x_-1 + 10*(x_-2*10^-2 + ... )
        = x_-1 +     x_-2*10^-1 + ...

             |  8/49
            1| 31/49
310/49 ->   6| 16/49
160/49 ->   3| 13/49
130/49 ->   2| 32/49
320/49 ->   6| 26/49
260/49 ->   5| 15/49
```

```
150/49 ->   3|  3/49
 30/49 ->   0| 30/49
300/49 ->   6|  6/49
 60/49 ->   1| 11/49
110/49 ->   2| 12/49
120/49 ->   2| 22/49
220/49 ->   4| 24/49
240/49 ->   4| 44/49
440/49 ->   8| 48/49
480/49 ->   9| 10/49
100/49 ->   2|  2/49
 20/49 ->   0| 20/49
200/49 ->   4|  4/49
 40/49 ->   0| 40/49
400/49 ->   8|  8/49
 80/49 ->   1| 31/49
 ...

d)
X = sum_i=-inf^+inf x_i*B^i

X = sum_i=0^+inf  x_i*B^i
  + sum_i=-inf^-1 x_i*B^i
  = X_C + X_U
  + sum_i=1^+inf  x_i*B^i
  + sum_i=-inf^-1 x_i*B^i

X_C = sum_i=0^+inf  x_i*B^i
    = x_0B^0
    + sum_i=1^+inf  x_i*B^i

|X_C|_B = |x_0B^0 + sum_i=1^+inf  x_i*B^i| = x_0

\floor(X_C/B) = \floor( (x_0B^0 + sum_i=1^+inf  x_i*B^i)/B )
              = sum_i=1^+inf  x_i*B^i

X_C = B\floor(X_C/B) + |X_C|_B


BX_U = Bsum_i=-inf^-1 x_i*B^i
     = B( x_-1B^-1 + sum_i=-inf^-2 x_i*B^i )
     = B x_-1B^-1 + B sum_i=-inf^-2 x_i*B^i )
     = x_-1B^0 + sum_i=-inf^-2 x_i*B^(i+1)
     = x_-1    + sum_i=-inf^-1 x_(i-1)*B^i




5426,32_(7) -> _(9)

X_C = 5426_(7)
X_U = 0,32_(7)

9 = 12_(7)

1*12 =  12
2*12 =  24
3*12 =  36
4*12 =  51
5*12 =  63
6*12 = 105
```

```
    424
   ----
   5426:12
  -51
  ---
    32
   -24
   ---
     56
    -51
    ---
      5

    32
   ---
   424:12
  -36
  ---
    34
   -24
   ---
    10


    2
   --
   32:12
  -24
   --
    5

 5426/12 = 424 | 5     | 5
  424/12 =  32 | 10    | 7
   32/12 =   2 | 5     | 5
    2/12 =   0 | 2     | 2

 => X_C = 2575

0,32_(7) = 32/100

    32
  x 12
  ----
   32
    64
  ----
   414

    14
  x 12
  ----
   14
    31
  ----
   201

           0,  | 32/100 * 12
414/100      4 | 14/100 * 12
201/100      2 |  1/100 * 12
 12/100      0 | 12/100 * 12
144/100      1 | 44/100 * 12 ...
```

```
 => X_U = 0,420|1...
```

=> X = 2575,42_(9)

```
e)
X = sum_i=0^+inf x_iB^i
  = sum_i=0^+inf x_iB^i
  = x_0B^0 + sum_i=1^+inf x_iB^i
  = x_0B^0 + B*sum_i=1^+inf x_iB^(i-1)

|X|_B = |x_0B^0 + B*sum_i=1^+inf x_iB^(i-1)|_B
      = x_0

|B|_B=0

sum_i=0^+inf x_iB^i
 = x_0B^0 + x_1B^1+ ...
 = x_0B^0 + sum_i=1^+inf x_iB^i


X_f = sum_i=-inf^-1 x_iB^i
    = x_-1B^-1 + sum_i=-inf^-2 x_iB^i
    = x_-1B^-1 + B^-1*sum_i=-inf^-2 x_iB^(i+1)

X_f*B = B*(x_-1B^-1 + B^-1*sum_i=-inf^-2 x_iB^(i+1))
      =    x_-1 + sum_i=-inf^-2 x_iB^(i+1))

3,(24)_(10) -> (...)_(3)

0,(24)_(10) = 24/99_(10) = 8/33_(10)

 100*X = 24,(24)
-    X =  0,(24)
----------------
  99*X = 24     => X = 24/99

3_(10)       -> 10_(3)
 0,(24)_(10) ->  0,0(20112)_(3)

3,(24)_(10) -> 10,0(20112)_(3)

          0, | 8/33 *3
 8/11      0 | 8/11 *3
24/11     >2 | 2/11 *3
 6/11      0 | 6/11 *3
18/11      1 | 7/11 *3
21/11      1 |10/11 *3
30/11     >2 | 8/11 *3
24/11      ...


Zaokrąglenie:

0,0(20112)_(3) -> 0,020|1_(3)

0,0 = 0/3 -> 0,0
0,1 = 1/3 -> 0,0
0,2 = 2/3 -> 1,0


0<= x_i < B
```

```
(0)12345

0<= x_i < 23

X = sum_i=0^2 x_i23^i


f)
X = sum_i=-inf^+inf x_iB^i
  = sum_i=0^+inf  x_iB^i
  + sum_i=-inf^-1 x_iB^i


X = sum_i=0^+inf x_iB^i
  = x_0B^0 + sum_i=1^+inf x_iB^i
  = x_0B^0 + B*sum_i=1^+inf x_iB^(i-1)


0 < X_f < 1
X_f = sum_i=-inf^-1 x_iB^i
    = x_-1B^-1 + sum_i=-inf^-2 x_iB^i
    = x_-1B^-1 + B^-1*sum_i=-inf^-2 x_iB^(i+1)

X_f*B = x_-1B^0 + sum_i=-inf^-2 x_iB^(i+1)



5,4(32)_(10) = (...)_(5)

5,4(32)_(10) = 5_(10) + 0,4(32)_(10)


X_f = 0,4(32)_(10) = (...)_(5)

0,4(32)_(10) = 0,4_(10) + 0,0(32)_(10) =

0,0(32)_(10) = 32/99/10_(10)
    0,4_(10) =  4/10_(10)
------------------------
            = 160/495
           +198/495
          = 358/495


0,4(32)_(10) =  0,2040100111240323..._(5)
5,4(32)_(10) = 10,2040100111240323..._(5)








           0, |  214/495 *5
214/99 ->   2 |   16/99  *5
 80/99 ->   0 |   80/99  *5
400/99 ->   4 |    4/99  *5
 20/99 ->   0 |   20/99  *5
100/99 ->   1 |    1/99  *5
  5/99 ->   0 |    5/99  *5
 25/99 ->   0 |   25/99  *5
125/99 ->   1 |   26/99  *5
```

```
130/99 ->   1 |   31/99  *5
155/99 ->   1 |   56/99  *5
280/99 ->   2 |   82/99  *5
410/99 ->   4 |   14/99  *5
 70/99 ->   0 |   70/99  *5
350/99 ->   3 |   53/99  *5
265/99 ->   2 |   67/99  *5
335/99 ->   3 |   38/99  *5
          ...

alt.:

 100*X = 32,(32)
-    X =  0,(32)
---------------
  99*X = 32
=>   X = 32/99
```

Zadanie 2

```
max(X) = max(sum_i=-inf^+inf x_iB^i)
max(X) = max(x_0B^0+x_1B^1+x_2B^2+...)

i=0...2; B=23
max(X) = max( x_0 23^0+x_1 23^1+x_2 23^2 )

0<=x_i<23 => max( x_i ) = 22

max(X) = max( x_0·23^0+x_1·23^1+x_2·23^2 )
       = max(  22·23^0 +22·23^1+ 22·23^2 )
       = ...
```

Zadanie 3

```
b)

X = 1110111_(2)
Y = 1001011_(2)

Dodawanie:
0+0+0 = 0
1+0+0 = 1·1 + 0
1+1+0 = 2·1 + 0
1+1+1 = 2·1 + 1


X+Y

   1111111
    1110111
  + 1001011
  ---------
   11000010


Odejmowanie:
0-0-0 = 0
1-0-0 = 1·1 + 0
```

```
1-1-0 = 0
0-0-1 = -2·1 + 1

X-Y

 (-)001000
    1110111
  - 1001011
  ---------
    0101100
```

Lista 2

Zadanie 1

e)

```
X = sum_{i=0}^{+inf} x_iB^i

X_(3) = sum_{i=0}^{+inf} x_i*3^i
      = x_0*3^0 + x_1*3^1 + x_2*3^2 + sum_{i=3}^{+inf} x_i*3^i
      = sum_{i=0}^{+inf}           x_{3i+2}*3^{3i+2} + x_{3i+1}*3^{3i+1} + x_{3i}*3^{3i}
      = sum_{i=0}^{+inf}  3^{3i}*( x_{3i+2}*3^2      + x_{3i+1}*3^1      + x_{3i}*3^0   )
      = sum_{i=0}^{+inf} (3^3)^i*( x_{3i+2}*3^2      + x_{3i+1}*3^1      + x_{3i}*3^0   )
      = sum_{i=0}^{+inf}    27^i*( x_{3i+2}*3^2      + x_{3i+1}*3^1      + x_{3i}*3^0   )


                 2211012102101_(3) -> ()_(27)
  -> (002)(211)(012)(102)(101)_(3) -> ()_(27)
  ->  (02) (22) (05) (11) (10)_(27)
```

i)

```
X_(16) = sum_{i=0}^{+inf} 16^i*x_i
       = sum_{i=0}^{+inf} 16^i*( (x_i%2) + (x_i/2)%2*2 + (x_i/4)%2*4 + (x_i/8)%2*8 )
       = sum_{i=0}^{+inf}  2^4i(x_i%2) + 2^{4i+1}((x_i/2)%2) + 2^{4i+2}((x_i/4)%2) + 2^{4i+3}((x_i/8)%2)



731AC_(U16) -> ()_(U2)

      (7)   (3)   (1)   (A)   (C)_(U16) -> ()_(U2)
   (0111)(0011)(0001)(1010)(1100)_(U2)
             01110011000110101100_(U2)



X = sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i
```

```
X = p(x_{k-1})B^k sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i

 /p(x_{k-1}) = 0 gdy 0 <= x_{k-1} < B/2
<
 \           = -1 w przeciwnym wypadku


X = p(x_{k-1})16^k sum_{i=0}^{k-1} x_i16^i

 /p(x_{k-1}) = 0 gdy 0 <= x_{k-1} < 8
<
 \           = -1 w przeciwnym wypadku
```

f)

```
       846213,6272_(U9) -> ()_(U27)
->  (8) 8 4 6 2 1 3, 6 2 7 2_(U9)
-> (22)221120020110,20022102_(U3)
->(222) 221 120 020 110,200 221 020_(U3)
-> (26)(25)(15)(06)(12),(18)(25)(06)_(U27)


U9  U3
 0-> 0
 1-> 1
 2-> 2
 3->10
 4->11
 5->12
 6->20
 7->21
 8->22

X = sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i

X = p(x_{k-1})B^k sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i


 /p(x_{k-1}) = 0 gdy x_{k-1}<B/2
<
```

```
 \           = -1 w przeciwnym wypadku


U9, k=6, X \in Z

X    = p(x_5)B^6 sum_{i=0}^5 x_iB^i
     = p(x_5)B^6+x_0+x_1*9+x_2*81+x_3*729+x_4*6561+x_5*59049

Xmax = ....0....+.8.+.8*9.+.8*9^2+.8*9^3.+8*9^4...+.4*9^5...
Xmin = ....0....+.8.+.8*9.+.8*9^2+.8*9^3.+8*9^4...+.8*9^5...

-1 w (9), k=1   ->   8_(U9)
          k=2   ->  88_(U9)
          k=3   -> 888_(U9)
        k=inf -> (8)_(U9)

Xmax  = 488888
           ...
        000001 = 1
Xzero = 000000
        888888 = -1
           ...
        500001
Xmin  = 500000



U9:
dodatnia: x_{k-1}= 0-4
ujemna:   x_{k-1}= 5-8
```

pozycja najstarsza
albo najbardziej znacząca

b)

```
X_(U) = p(x_{k-1})B^k + sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i
```

```
 /p(x_{k-1}) = 0 gdy x_{k-1}<B/2
<
 \           = -1 w przeciwnym wypadku

U10:
dodatnia: x_{k-1}= 0-4
ujemna:   x_{k-1}= 5-9


U78:
dodatnia: x_{k-1}= 0-38
ujemna:   x_{k-1}= 39-77


X_(78) = p(x_1)78^2 + sum_{i=0}^1 x_i*78^i
       = p(x_1)78^2 + x_0    + x_1*78^1

  Xmax =    0       + 77     + 38*78  = 2964+77   = 3041
  Xmin =   -1*78^2  +  0     + 39*78  =-6084+3042 =-3042


     (38)(77) -> 3041
     (38)(76) -> 3040
          ...
     ( 0)( 1) ->    1
     ( 0)( 0) ->    0
     (77)(77) ->   -1
     (77)(76) ->   -2
          ...
     (39)( 1) ->-3041
     (39)( 0) ->-3042
```

Zadanie 2

```
a)
X = sum_{i=0}^+inf x_iB^i

X = sum_{i=0}^1 x_i78^i
  = x_0 + 78*x_1

0 <= x_i < 77 ? i=1,...

max(X)_{x_i} = 77+78*77 = 6083 ?

B=78
```

Zadanie 3

```
a)
```

```
-37,9_(10) -> (9)62,1_(U10) lub 62,1_(U10)

 (9)99,9
-   37,9
+    0,1
--------
 (9)62,1
    62,1

             62,1
           x 43,4
           ------
                4
              8
              3
             6
             4
            8
          8264
           111
         --------
          83551 4 -> 8355,14_(U10)
                    -1644,86_(10)

   43,4 * 40 =  1736,0
   43,4 * -40 = 8264,0

             (9)62,1
           x    43,4 -> 43,4 * -1 = 56,6
           ---------
                   4
                 8
              2 4
                 3
                6
            1 8
                4
              8
           24
           56 6
           12 1 1
           ---------
           83 5 51 4

c)


X = p(x_{k-1})B^k + sum_{i=0}^{k-1} x_iB^k

 /p(x_{k-1}) = 0 gdy x_{k-1}<B/2
<
 \           = -1 w przeciwnym wypadku

U16:
dodatnia: x_{k-1}= 0-7
ujemna:   x_{k-1}= 8-F

U16, k=4

Xmax  = 7FFF
         ...
        0001
```

```
Xzero = 0000
        FFFF
        FFFE
         ...
Xmin  = 8000


-X = 0-X

    A,12_(16)
x -82,31_(16)
-------------
       ?_(U16)


A,12_(16) = (0)A,12_(U16)

-1_(16) =    F_(U16) (k=1)
        =   FF_(U16) (k=2)
        =  FFF_(U16) (k=3)
      =  (F)_(U16)

      0 =  (F)    + 1
        =  (F),FF + 0,01

1. konwersja (16)->U16

-82,31 =

  (F)FF,FF
-  0 82,31
+     0,01
----------
  (F)7D,CF_(U16)

      -82,31_(16) = ( (0)    - 82,31        )_(U16)
                  = ( (F)    - 82,31 + 1    )_(U16)
                  = ( (F),FF - 82,31 + 0,01 )_(U16)

(F) = -1
(F) * 0A,12 = -0A,12
            = (F),FF-0A,12+0,01

2. mnożenie

2b. mnożenie najstarszej cyfry (F)

  (F)F,FF
 -   A,12
 +   0,01
 --------
  (F)5,EE

     A,12
   x   (F)
   ------
  (F)5,EE

2a. mnożenie najmłodszych cyfr

                  (0)0A,12
               x  (F)7D,CF
```

```
              -----------
                       1E
                       F
                    96
                     1 8
                     C
                  7 8
                    1A
                    D
                8 2
                    E
                  7
               46
          + (F)5E E       <- A,12 x (F)
               12 2 11    <- przeniesienia
          ---------------
            (F)AE 0,EE 8E
```

```
 (F)FF F,FF FF
-(F)AE 0,EE 8E
+ 0 00 0,00 01
--------------
-   51 F,11 72_(16)
```

2a-2. mnożenie najmłodszych cyfr (2. metoda)

```
                (0)00A,12
              x (F)F7D,CF
              -----------
                       1E
                       F
                    96
                     1 8
                     C
                   78
                    1A
                    D
                 8 2
                    E
                   7
               4 6
                 1 E
                 F
              96
         + (F)5E E       <- A,12 x (F)
              12 2 211
          ---------------
           (F)FA E 0EE 8E
```

Zadanie 4

b)

-135,64_(10) -> ()_(U8)

135_(10) -> ()_(8)

```
135_(10) ->    10000111_(2)
         -> 010 000 111_(2)
         ->   2   0   7_(8) -> 207_(8)

-135,64_(10) = - 135_(10) - 0,64_(10)

0,64_(10) -> 0,(50753412172702436561)_(8)


135,64_(10) -> 207,(50753412172702436561)_(8)


-135,64_(10) -> 0 - 135,64_(10)


X          = p(x_{k-1})B^k +  suma_{i=0}^{k-1} x_iB^i
X_rational = p(x_{k-1})B^k + suma_{i=-N}^{k-1} x_iB^i

 / p(x_{k-1}) = -1 gdy B-1 > x_{k-1} >= B/2
<
 \            =  0 w przeciwnym wypadku

        37 ... 77 -> ...
        ..     ..    ..
        00 ... 02 -> 2
        00 ... 01 -> 1
        00 ... 00 -> 0
        77 ... 77 -> -1
        77 ... 76 -> -2
        ..     ..
        40 ... 00 -> -...

        -1_(10) ->    7_(U8) (na jednej pozycji w U8)
                ->   77_(U8) (na dwóch pozycjach)
                ->  777_(U8)
                ->  (7)_(U8)

              0 = (7)_(U8) + 1_(U8)
       -207_(8) =                 0 - 207_(8)
                = (7)_(U8) + 1_(U8) - 207_(U8)
                = (7)777-207 + 1
                = (7)571_(U8)

  777
- 207
+   1
-----
  571

-207,(50753412172702436561)_(8) =
     0 - 207,(50753412172702436561)_(8)

     0 = -B^k + (suma_{i=-N}^{k-1} (B-1)B^i) + B^-N
       = lim_{k->inf, N->inf} -B^k + (suma_{i=-N}^{k-1} (B-1)B^i) + B^-N
     0 =    (7),7 +    0,1  _(U8)
       =   (7),77 +   0,01  _(U8)
       = (7),7777 + 0,0001  _(U8)
       =  (7),(7)           _(U8)

 (7)777,(77777777777777777777)
-   207,(50753412172702436561)
```

```
------------------------------
 (7)570,(27024365605075341216)_(U8)
=   570,(27024365605075341216)_(U8)



       570_(U8) = -1*8^3 + 5*8^2 + 7*8^1 + 0*8^0
                = -512   +   320 +    56 +     0
                = -136


                   ^
                   |
                   |
                   |     /
                   |    /
                   |   /
                   |  /
                   | /
                   |/
-------------------+----------------------->
                   |          /
                   |         /
                   |        /
                   |       /
                   |      /
                   |
                   |
                   |


     0000 -> 0
     7777 -> -1
     ....
     7370 ->
```

```
            0, | 64/100 * 8
512/100  ->  5 | 12/100 * 8
 96/100  ->  0 | 96/100 * 8
768/100  ->  7 | 68/100 * 8
544/100  ->  5 | 44/100 * 8
352/100  ->  3 | 52/100 * 8
416/100  ->  4 | 16/100 * 8
             1
             2
```

```
                 1
                 7
                 2
                 7
                 0
                 2
                 4
                 3
                 6
                 5
                 6
                 1
```

Lista 3

Zadanie 1

b)

1011010101_(NB) x 101101_(NB)

```
           1011010101
         x     101101
         ------------
            22 1 1
           1011010101
          0000000000
         1011010101
        0000000000
       1011010101
      0000000000
     1011010101
    1011010101
   0000000000
+ 1011010101
---------------------
             00111001
```

a)
 1011010101_U2 x 101101_U2

- zwykła

```
  (1)111111111
 -(1)011010101
```

```
 +           1
 ------------
  (0)100101011

               1011010101 = -100101011 = -299
             x     101101 = -10011 = -19
             ------------
        1111111011010101
        111111011010101
        11111011010101
       +000100101011
            1 1 1 1111
        1010101010
       1 10
       ------------------
          001011000110001 = 5681

- bez rozszerzeń

   -x = ~x-1 dla x \in {0,1}

              (1)011010101
             x    (1)01101
             -------------
              (1)011010101
             (0)000000000
            (1)011010101
           (1)011010101
          (0)000000000
         (0)100101011
       -------------------
                0011010101
               1000000000
              0011010101
             0011010101
            1000000000
           1100101011
       +(1)000001
           1   1 1 1111
             101010

         (-111111000000000)
       -------------------
           001011000110001

- Bootha (postać kanoniczna)

 1011010101_U2 x 101101_U2

mnożnik:
 bit n: -1

  11    -> 10n    ->     3 =   4-1
  111   -> 100n   ->     7 =   8-1
  1...1 -> 10...n -> 2^n-1 = 2^n-1

   1n = 01
   n1 = 0n

  101101_U2 ->
  n01101_SD ->
  n10n01_SD ->
```

```
  0n0n01_SD


            (1)011010101
           x       n0n01
           -------------
            (1)011010101
           (0)000000000
          (0)100101011
         (0)000000000
        (0)100101011
     -------------------
              0011010101
             1000000000
            1100101011
           1000000000
          1100101011
      +(1)00001
          1111  11111
              10

        (-11111000000000)
     -------------------
          01011000110001
```

```
X_NB = sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i

X_U2 = p(x_{k-1})B^k + sum_{i=0}^{k-1} x_iB^i
```

b)

```
1011010101_NB x 101101_NB

- zwykła
             ==++++====          = 208
             1011010101 = 512 + 13*16 + 5 = 725
           x     101101 = 45
           ------------
             1011010101
            0000000000
           1011010101
          1011010101
         0000000000
        1011010101
         11  1011111
           10
      -----------------
        111111101110001 = 32767 - 14 - 128 = 32625

725 * 45 = 28000 + 1000 + 3500 + 125 = 32625


- z rozszerzeniami (rozszerzenie zerami bo NB)
```

```
               ==++++====          = 208
               1011010101 = 512 + 13*16 + 5 = 725
             x     101101 = 45
             ------------
          000001011010101
          00000000000000
          0001011010101
          001011010101
          00000000000
          1011010101
           11  1011111
             10
        -----------------
          111111101110001



- Bootha (postać kanoniczna)

mnożnik:
 bit n: -1

  11    -> 10n    ->     3 =   4-1
  111   -> 100n   ->     7 =   8-1
  1...1 -> 10...n -> 2^n-1 = 2^n-1

   1n = 01
   n1 = 0n

    101101 ->
->  110n01 ->
   10n0n01

    101101 ->
    111111 - 10010 = 1000000 - 10010 - 1
                   = 1000000 + n00n0 + n
                   = 10n00nn
                   = 10n0n01
                   = 0101101

    101101 ->
    10111n ->
    110n1n -> ...

-1 * 1011010101 =
 =
   (1)1111111111
  -   1011010101
  +            1
  -------------
   (1)0100101011

           0 = 0
           1 = -1
         1 1 = -1
          (1)= -1
         (1)1= -1
        (1)11= -1
        (1) 0= -2
          (1)=  n

               1011010101
```

```
             x    10n0n01
             ------------
               1011010101
          (1)0100101011
        (1)0100101011
         1011010101
        -----------------
        0 000001011010101
       (1)1110100101011
       (1)10100101011
        1 011010101
        1 11 11  11111
               10
        -----------------
        0 111111101110001
```

- Bootha (postać kanoniczna) bez rozszerzeń

```
      -x = ~x-1, x \in {0,1}

               1011010101
             x    10n0n01
             ------------
            (0)1011010101
           (0)0000000000
          (1)0100101011
         (0)0000000000
        (1)0100101011
       (0)0000000000
      (0)1011010101
      -------------------

              11011010101
             10000000000
            00100101011
           10000000000
          00100101011
         10000000000
        11011010101
   + (1)00000010000000000
        1 11  1  11111
            10 10

      (-11111110000000000)
  -----------------------
        00111111101110001
```

- Bootha (Y_SD2)

proste:

Y_SD2 = y_{k-1}...y_0

y_i = x_{i-1} – x_i (\in {-1, 0, 1}); x_{-1} = 0

mnożnik:

```
 i= 6 543210
 X= 0|101101|0 ->
           0-1
          1-0
         0-1
        1-1
       1-0
      0-1
    1-0
    1 n10n1n

0|101101 = 45
1|n10n1n = 64-32+16-4+2-1 = 45


  0|101101|0
-   010110 1
------------
    1n10n1 n
```

przesunięte:

y_i = x_{i} - x_{i+1} (\in {-1, 0, 1})

```
 i= 6 543210
 X= 0|101101|0 ->
             n
           1-0
          0-1
         1-1
        1-0
       0-1
      1-0
      1n10n1 n = 64-32+16-4+2-1 = 45

  0|101101
-    10110 (-x_0 (x_0=1))
-----------------
    1n10n1 n
```

- Bootha-McSorley'a (Y_SD4)

2y_{i+1}+y_i = -2x_{i+1}+x_i+x_{i-1} (\in {-2, -1, 0, 1, 2}); *i* = 0...

proste:

```
                -
  i= 6 54 32 10 1
  X= 0'10'11'01'0
         -2·0+1+0            y_1||y_0 = -2x_1+x_0+x_-1 =  0+1+0 = 1 = 01
      -2·1+1+0               y_3||y_2 = -2x_3+x_2+x_1  = -2+1+0 =-1 = 0n
   -2·1+0+1                  y_5||y_4 = -2x_5+x_4+x_3  = -2+0+1 =-1 = 0n
-2·0+0+1                     y_7||y_6 = -2x_7+x_6+x_5  =  0+0+1 = 1 = 01
     1 -1 -1  1

    01 0n 0n 01 = 64-16-4+1 = 45
```

przesunięte:

```
i indeksowane od 1; y_0 = -x_0

                 -
  i= 6 54 32 10 1
  X= 0'10'11'01                  y_0 = -x_0 = -1                  =  n
        -2·1+0+1            y_2||y_1 = -2x_2+x_1+x_0 = -2+0+1 = -2 = 0n
     -2·0+1+1               y_4||y_3 = -2x_4+x_3+x_2 =  0+1+1 =  2 = 10
  -2·0+1+0                  y_6||y_5 = -2x_6+x_5+x_4 =  0+1+0 =  1 = 01
        1  2 -1 [-1]=-x0
       01 10 0n n = 32 + 16 -2 – 1 = 45
```

```
przesunięte (47):

                 -
  i= 6 54 32 10 1
  X= 0'10'11'11   = 47
        -2·1+1+1
     -2·0+1+1
  -2·0+1+0
        1  2  0 [-1]=-x0
       01 10 00 n = 32 + 16 – 1 = 47
```

```
przesunięte (46):

                 -
  i= 6 54 32 10 1
  X= 0'10'11'10   = 46
        -2·1+1+0
     -2·0+1+1
  -2·0+1+0
        1  2 -1 [-0]=-x0
       01 10 0n 0 = 32 + 16 – 2 = 46
```

c)

```
01011010_U2 x 1011010_U2

         1
 (1)1111111
- 0 1011010
+         1
-----------
 (1)0100110

   (1)011010
= -   100110 = -38

- zwykła

             01011010 = 90
           x  1011010 = -38
           ----------
             00000000
            01011010
           00000000
```

```
          01011010
         01011010
        00000000
     (1)0100110
         111 111
           10
    +
    -----------------
     (1)1001010100100
=       -110101011100 = -3420
```

- Bootha (postać kanoniczna)

```
    1011010_U2 =
  = n011010_SD =
  = n10n010_SD =
  = 0n0n010_SD

             01011010
           x   n0n010
           ----------
            01011010
        (1)0100110
      (1)0100110
      ---------------
            01011010
      111110100110
      1110100110
        11 11111

      ---------------
      (1)001010100100
     (1)1001010100100 <- poprzedni wynik
```

- Bootha + bez rozszerzeń

```
   -x = ~x-1 dla x \in {0,1}


             01011010
           x   n0n010
           ----------
           (0)0000000
          (0)1011010
         (0)0000000
        (1)0100110
       (0)0000000
      (1)0100110
      ---------------
             10000000
            11011010
           10000000
          00100110
         10000000
        00100110
    +(1)0000010000000
         111 111
           10

     (-01111110000000)
      ---------------
```

```
(1)1001010100100
 (1)001010100100
```

Lista 4

Zadanie 1

1 c)

```
X = p(x_{N-1})B^N + sum_{i=0}^{N-1} x_iB^i

X/D = (p(x_{N-1})B^N + sum_{i=0}^{N-1} x_iB^i)/D

Jeżeli X jest ujemne (x_{N-1}>=B/2), to

X/D = (-B^N + sum_{i=0}^{N-1} x_iB^i)/D
    = (x_{N-1}B^{N-1}-B^N + sum_{i=0}^{N-2} x_iB^i)/D
    = (x_{N-1}B^{N-1}-B·B^{N-1} + sum_{i=0}^{N-2} x_iB^i)/D
    = ((x_{N-1}-B)B^{N-1} + sum_{i=0}^{N-2} x_iB^i)/D
    = (((x_{N-1}-B)B + X_{N-2})B^{N-2} + sum_{i=0}^{N-3} x_iB^i)/D

...
```

Opis 1:
1. znajdujemy przesunięcie dzielnika takie, że wartość bezwzględna po przesunięciu jest większa niż wartość bezwzględna dzielnej
2. znak dzielnej i dzielnika przeciwne ->
   -> dodajemy (przeskalowany) dzielnik do dzielnej ->
   -> otrzymujemy 1. resztę częściową ->
   -> 1. cyfra ilorazu = (9) o wadze takiej, jak najmłodsza waga przeskalowanego dzielnika
3. przepisujemy kolejną cyfrę dzielnej -> otrzymujemy resztę częściową
   -> jeżeli dotarliśmy do przecinka lub osiągnęliśmy zamierzaną precyzję to koniec, lub
   -> jeżeli przekroczyliśmy przecinek i nie ma cyfr dzielnej, to przepisujemy zero
4. znajdujemy ile razy mieści się dzielnik w reszcie częściowej (wartość bezwzględna mniejsza lub równa - uwaga na zapis uzupełnieniowy) -> krotność określa kolejną cyfrę ilorazu
    -> przy liczbach ujemnych należy uwzględnić wszystkie cyfry (także te jeszcze nie przepisane)
5. odejmujemy "krotność": i idziemy do kroku 3

Uwaga: znak reszty częściowej powinien być taki sam jak znak dzielnika

Opis 2 (poprawiony):

Pojęcia: dzielna, dzielnik, iloraz, cyfra ilorazu, reszta częściowa

1. znajdujemy przesunięcie (w lewo) dzielnika takie, że wartość bezwzględna dzielnika po przesunięciu jest większa niż wartość bezwzględna dzielnej
2. znak dzielnej i dzielnika przeciwne ->
   -> dodajemy (przeskalowany) dzielnik do dzielnej ->

-> otrzymujemy 1. resztę częściową ->
-> 1. cyfra ilorazu = (9) o wadze takiej, jak najmłodsza waga przeskalowanego dzielnika
... w przeciwnym wypadku ->
-> dzielna jest 1. resztą częściową

3. przepisujemy kolejną cyfrę dzielnej -> otrzymujemy resztę częściową
   -> jeżeli dotarliśmy do przecinka lub osiągnęliśmy zamierzaną precyzję to koniec, lub
   -> jeżeli przekroczyliśmy przecinek i nie ma cyfr dzielnej, to przepisujemy zero
4. znajdujemy ile (maksymalnie) razy mieści się dzielnik w reszcie częściowej (wartość bezwzględna krotności dzielnika mniejsza lub równa wartości bezwzględnej reszty częściowej - uwaga na zapis uzupełnieniowy) -> krotność określa kolejną cyfrę ilorazu
   -> przy liczbach ujemnych należy uwzględnić wszystkie cyfry reszty częsciowej (także te jeszcze nie przepisane)
5. odejmujemy "krotność": i idziemy do kroku 3

Uwaga: znak reszty częściowej powinien być taki sam jak znak dzielnika

```
     1
   9999
 - 7610_(U10) -> -2390_(10)
 +    1
 ------
   2390

       7_(10) -> -3_(10)

      |-3*10^4| = |-3*10000| = 30000 > |-2390|

    (9)7*10 = (9)70 = -30
    (9)9*10 = (9)90 = -10

     0*(9)7 =     0
     1*(9)7 = (9)97
     2*(9)7 = (9)94
     3*(9)7 = (9)91
     4*(9)7 = (9)88
     5*(9)7 = (9)85
     6*(9)7 = (9)82
     7*(9)7 = (9)79
     8*(9)7 = (9)76
     9*(9)7 = (9)73

7610_(U10)/7_(U10)

      (0)796,6(6)
   -----------
     (9)7610 : (9)7
     (9)76
    -(9)79
    ------
      (9)71
     -(9)73
     ------
       (9)80
      -(9)82
      ------
        (9)8 0
```

```
      ...

 2390/3 = 796 2/3 = 796,(6)
```

1 d)

```
 38500_(U10)/93_(U10)

    99
  - 93_U10
  +  1
  ----
  -  7
       0 =   0 =     0
  (9)3x1 =  -7 = (9)93: -1x7 =    0-7
  (9)3x2 = -14 = (9)86: -2x7 = -1x7-7
      x3 = -21 = (9)79: -3x7 = -2x7-7
       4 = -28 = (9)72
       5 = -35 = (9)65
       6 = -42 = (9)58
       7 = -49 = (9)51
       8 = -56 = (9)44
       9 = -63 = (9)37

  (9)99900
- (9)94500
+       1
  --------
-     5500

- przesunięcie: x10^4

   (9)94500
    --------------
      38500 : (9)3
  +(9)3
  -----
   (9)68
  -(9)72
  ------
   (9)965
  -(9)965
  -------
       000
```

Zadanie 2

```
   X = p(x_{N-1})B^N + sum_{i=0}^{N-1} x_iB^i
     = p(x_{N-1})B^N + x_0B^0 + sum_{i=1}^{N-1} x_iB^i
     = x_0B^0 + p(x_{N-1})B^N + sum_{i=1}^{N-1} x_iB^i
     = x_0B^0 + B( p(x_{N-1})B^{N-1} + sum_{i=1}^{N-1} x_iB^{i-1} )
     ...
     = x_0B^0 + x_1B^1 + ... + B^{N-1}( p(x_{N-1})B + x_{N-1} )
```

```
X_(U10) = 6880_(U10) -> ..._(U16)

       1
  (9)9999
- (9)6880
+       1
 --------
     3120
    16000

     (9)999
    -(9)805
    +     1
    -------
        195
       1600

      (9)99
     -(9)87
     +    1
     ------
     -   13

      (F)F
     -   D
     +   1
     -----
      (F)3

x_0 = 0 = 0
x_1 = 13 = D
x_2 = -13 = -D = (F)3

=> X_(U16) = (F)3D0_(U16)

     (9)9805          (9)987
     ------------    ------------    ------------
    (9)96880 : 16 =   (9)9805 : 16 =   (9)987 : 16
   +   16            +   16            +
   ------            ------
       128               140
      -128              -128
      ----              ----
         080               125
        - 80              -112
      ----              ----
         0               13

sprawdzenie:

       1
   (F)FFF
  -(F)3D0
  +     1
  -------
      C30

X_(U10) = (9)6880_(U10) = -3120_(10)
X_(U16) = (F)3D0_(U16)  =  -C30_(16)  = -( 12*256 + 3*16 ) = -( 3072 + 48 ) =
-3120_(10)
```

Lista 5

Zadanie 1

```
a)

odtwarzająca:

X - R = Q * D
X = Q * D + R

101001101_(U2) : 1011_(U2)

  - (1)01001101           = -179_(10)
  -------------
    (0)10110011 = 176 + 3 = 179_(10)

  - (1)011 = -5_(10)
  --------
    (0)101 =  5_(10)

 skalowanie:
    (0)10110011
   (0)101

   X  -   R  =  Q *  D
 -179 - (-4) = 35 * -5

 Q=         0100011          = 35
      ------------------
 X=    (1)101001101 : (1)011 = D
      -(1)011
      --------
          010 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
      +(1)011
      -------
       (1)1010 <- ... odtwarzamy
      -(1)1011
      --------
        (1)1110 <- znak taki sam jak znaku dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
       -(1)1011
       --------
            011 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
        +(1)011
       --------
          (1)101 <- ... odtwarzamy
         -(1)011
        --------
             10 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
         +(1)011
        --------
           (1)011 <- ... odtwarzamy
          -(1)011
         --------
```

```
               0 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
         +(1)011
        --------
          (1)0110 <- ... odtwarzamy
         -(1)1011
        ---------
           (1)0111 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
          -(1)1011
         ---------
        R=   (1)00 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i koniec
```

1. znajdujemy przesunięcie dzielnika takie, że wartość bezwzględna po przesunięciu jest większa niż wartość bezwzględna dzielnej
2. znak dzielnej i dzielnika przeciwne ->
   -> dodajemy (przeskalowany) dzielnik do dzielnej ->
   -> otrzymujemy 1. resztę częściową ->
   -> 1. cyfra ilorazu = -1 o wadze takiej, jak najmłodsza waga przeskalowanego dzielnika
3. przepisujemy kolejną cyfrę dzielnej -> otrzymujemy resztę częściową
   -> jeżeli dotarliśmy do przecinka lub osiągnęliśmy zamierzaną precyzję to koniec, lub
   -> jeżeli przekroczyliśmy przecinek i nie ma cyfr dzielnej, to przepisujemy zero
4. odejmujemy przeskalowany dzielnik od reszty częściowej. W zależności od znaku różnicy kolejna cyfra ilorazu to:
   -> jeżeli jest taki sam jak znak dzielnika -> 1
   -> jeżeli jest różny -> 0, dodajemy dzielnik
5. idziemy do kroku 3

8<---------------------------------

nieodtwarzająca:

```
 Q=         0100011
      ------------------
 X=    (1)101001101 : (1)011 = D
     - (1)011
     --------
          100 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
      + (1)011
      --------
         (1)110 <- znak taki sam jak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
       - (1)011
       --------
           0111 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
        + (1)011
        --------
              101 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
         + (1)011
         --------
                00 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
          + (1)011
          --------
            (1)0111 <- znak taki sam jak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
          - (1)1011
          ---------
```

```
        R=   (1)100 <- znak taki sam jak dzielnika, 1 i koniec

1c)

    011011011_(U2) : 10_(U2)

 -> 011011011_(U2) : (1)0_(U2)

 ->   011011011 : (1)0
 ->   011011011 : ( 010 * (1) )
 ->   011011011 : ( (1) * 010 )
 ->   011011011 : (1) : 010
 ->   011011011 * (1) : 010
 -> (1)00100101 : 010
 -> (1)0010010     R=1


 Q = (1)0010010
   --------------
 X =  011011011 : (1)0
  +(1)10
   -----
   (1)111
   - (1)0
   ------
       010 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
     +(1)0
    ------
         01 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
      +(1)0
     ------
        (1)1 <- znak taki sam jak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
       -(1)0
      ------
          010 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
        +(1)0
       ------
            01 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
         +(1)0
        ------
          (1)11 <- znak taki sam jak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
          +(1)0
         ------
         R=  01 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i koniec



1d)

X - R = Q * D
X = Q * D + R

(1)011110_(U2) : (1)01_(U2)

-  100010_(NB) :-   11_(NB)
  -------
   11
      -34_(N10):-    3_(N10)


  X - R    =   Q * D
```

```
-34 - (-1) =  11 * (-3)

odtwarzająca

 Q =      01011
     ------------
 X =  (1)011110 : (1)01 = D
     -(1)01
     ------
          0 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
     +(1)01
     ------
      (1)011 <- ... odtwarzamy
     -(1)101
     -------
        (1)01 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
       -(1)01
       ------
            0 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
       +(1)01
       ------
        (1)011 <- ... odtwarzamy
       -(1)101
       --------
          (1)00 <- znak taki sam jak znaku dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
         -(1)01
       --------
 R =         (1) <- znak taki sam jak znaku dzielnika, 1 i nie odtwarzamy

 8<------------------------------------

nieodtwarzająca

 Q =      01011
     ------------
 X =  (1)011110 : (1)01 = D
     -(1)01
     ------
          01 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
      +(1)01
       -----
        (1)01 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
       -(1)01
      -----
          01 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
        +(1)01
       -----
        (1)00 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
         -(1)01
        -----
 R =         (1) <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i koniec


8<---------------------------------------------


1e)

X - R = Q * D
X = Q * D + R
```

```
     1011100_(U2) :  101_(U2)
   (1)011100_(U2) :(1)01_(U2)
     -100100_(NB) :  -11_(NB) ->
   -> 11
         -36_(10) :   -3_(10)
```

odtwarzająca

wariant (1)

```
   X  - R    =   Q *   D
(-36) - 0    =  12 * (-3)

 Q =      01100
     ------------
 X =  (1)011100 : (1)01 = D
     -(1)01
     ------
          0 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
     +(1)01
     ------
      (1)011 <- ... odtwarzamy
     -(1)101
     -------
        (1)0100 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
       -(1)0100
       ------
            000 <- reszta częściowa == dzielnik, koniec
```

wariant (2)

```
   X  -   R     =   Q *   D
(-36) - (-3)    =  11 * (-3)

 Q =      01011
     ------------
 X =  (1)011100 : (1)01 = D
     -(1)01
     ------
          0 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
     +(1)01
     ------
      (1)011 <- ... odtwarzamy
     -(1)101
     -------
        (1)01 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
       -(1)01
       ------
            0 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i...
       +(1)01
       ------
        (1)010 <- ... odtwarzamy
       -(1)101
        ------
         (1)010 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i nie odtwarzamy
        -(1)101
      -------
          (1)01 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i koniec
```

```
nieodtwarzająca


 Q =      01100
     ------------
 X =  (1)011100 : (1)01 = D
     -(1)01
     ------
         01 <- znak różny od znaku dzielnika, 0 i dodajemy dzielnik
      +(1)01
      ------
        (1)0100 <- znak taki sam jak znak dzielnika, 1 i odejmujemy dzielnik
       -(1)01
       ------
          000 <- wyzerowana reszta częściowa, koniec
```

Zadanie 2

```
a)

 1 : 2^Emin_znorm. x 0,00...01  = 2^-1022 x 2^-52 = 2^-1054
     ...
   : 2^Emin_znorm. x 0,11...10
   : 2^Emin_znorm. x 0,11...11

 2 : Emin_zak.  = 000 0000 0001 = -1022   N=+1023
    Xmin_znorm. = 1,Mmin x 2^Emin_znorm.
                = 1,0    x 2^-1022 = 2^-1022

 3 : Emax_zak.  = 111 1111 1110 =  1023
    Xmax_znorm. = 1,Mmax x 2^Emax_znorm.
                = 1,1...1 x 2^1023 = 2^1024 - 2^(1023-52)
                               = 2^1024 - 2^971
      ___________________       ___________________
     /               \   \     /D  /      N        \
 --8+-----------------+---+-0-+---+-----------------+8-->
                              1   2                 3

 1 : 2^Emin_znorm. x 0,00...01  = 2^-126 x 2^-23 = 2^-149
     ...
   : 2^Emin_znorm. x 0,01...11
     ...
   : 2^Emin_znorm. x 0,11...11

Emin_zak (zdenorm.) = 0000 0000 = -126
Mmin = 0

 2 : 2^Emin_znorm. x 1,Mmin     =
     2^-126 x 1,0               = 2^-126

Emax_zak (znorm.)   = 1111 1110 = +127
Mmax = 1,0 - 2^-23

 3 : 2^Emax_znorm. x 1,Mmax     =
     2^+127 x ( 1,0 + 1,0 - 2^-23 ) =
```

```
     2^+128 - 2^+104


Emin_zak. = 0000 0001 = -126
Mmin = 0

 X = (-1)^S x [01],M x 2^E
   = (-1)^S x ( (0|1) + 0,M ) x 2^E = (-1)^S x 1,M x 2^E

...= DCD00000
   =     D    C    D    0    0    0    0    0
   =  1101 1100 1101 0000 0000 0000 0000 0000
 X = 1 1011 1001 1010 0000 0000 0000 0000 000

S=1
N=2^(k-1)-1=+127

Ebiased = 1011 1001 => E = 10111001 -  01111111
                         = 10111001 - (10000000 - 1)
                         = 10111001 -  10000000 + 1
                         = 00111010
                         = 58_(10)

1,M = 1,101_(2)

  ulp = 2^23 x 2^E = 2^58 x 2^-23 = 2^35

X = (-1)^S x 1,101 x 10^111010_(2)
  = -1     x 13    x 2^55
  = -1     x 13    x 36028797018963968
  = -46 8374 3612 4653 1584
 ~= -4,68 x 10^17

  2^53 = 2^32 x 2^21 = 9007199254740992

2b)

 X = (-1)^S x [01],M x 2^E
   = (-1)^S x ( (0|1) + 0,M ) x 2^E = (-1)^S x 1,M x 2^E


   = 00680000
   =    0      0    6    8    0    0    0    0
   = 0000   0000 0110 1000 0000 0000 0000 0000
 X = 0 0000 0000 1101 0000 0000 0000 0000 000

N = 2^(n-1)-1
Ebiased = 0000 0000 = -126 (w. specjalna)
/!\ Liczba zdenormalizowana

X = (-1)^0 x 0,1101 x 10^-0111 1110
  =      1 x 1,101  x 10^-0111 1111_(2)
  =      1 x 1,625  x 2^-127
 ~= 9,55 * 10^-39
```

Zadanie 3

```
a)

 X = (-1)^S x 1,M x 2^E
```

```
 X = 1 1110 1011

S = 1
Ebiased = 1110; N = 0111 = +7
M = 1011

E = 7
1,M = 1,1011

 X = -1 x 1,1011           x 10^0111_(2)
   = -1 x 1 1011 x 10^-100 x 10^0111_(2)
   = -1 x 1 1011 x           10^0011_(2)
   = -1 x 27     x           2^3    _(10)
   = -1 x 27     x 8
   = -216
  ~= -2,16 x 10^2

3b)

 X = (-1)^S x 1,M x 2^E

 X = 0 0100 100

S = 0
Ebiased = 0100; N = 0111 = +7
M = 100

E = -3
1,M = 1,100

 X = 1 x 1,100 x 10^-011_(2)
   = 1 x 3     x 2^-3_(10)
   = 0,375
   = 3,75 x 10^-1
```

Zadanie 4

```
a)


 X = (-1)^S x [01],M x 2^E
   = (-1)^S x    1,M x 2^E

 X =        (0)101101011_(U2)
   =          1 01101011_(U2)
   =          1,01101011 0...0 x 10^1000_(U2)
   = (-1)^0 x 1,01101011 0...0 x  2^( 8 + 1023 - 1023 )
   = (-1)^0 x 1,01101011 0...0 x  2^( 1031     - 1023 )
   = S=0      M=01101011 0...0      E=10 0000 0111
   = 0 10 0000 0111 011010110...0
   = 0100 0000 1110 1101 0110 0...0
   =    4    0    E    D    6 0 00 00 00 00 00
   = 40ED 6000 0000 0000

 X = S E...E         M...M    s = 1, e = 11, m = 52
```

4b)

```
 X = (-1)^S x [01],M x 2^E

 X = (1)011110000_(U2)
   =    100001111 + 1_(2)
   =    100010000_(2)

 X = S E...E         M...M    s = 1, e = 11, m = 52
   = (-1)^1 x 1 0001 0000       x 2^0
   = (-1)^1 x 1,0001 0000 0...0 x 2^8
   = (-1)^1 x 1,0001 0000 0...0 x 2^(8+1023 - 1023)
   = (-1)^1 x 1,0001 0000 0...0 x 2^( 100 0000 0111 - 011 1111 1111)
   = (-1)^S x 1,    M           x 2^(       E       )
   = 1 100 0000 0111 0001 0000 0...0
   = 1100  0000 0111 0001 0000 0...0
   =    C     0    7    1    00 00 00 00 00 00
   = C071000000000000
```

double:
 - S: 1
 - M: 52
 - E: 11 +N, N=2^10-1

```
   X1 = S E...E  M1...M1  = (-1)^S x 1,M1 x 2^E
```

```
+ X2 = S E...E  M2...M2  = (-1)^S x 1,M2 x 2^E
        ...              = (-1)^S x 2^E x (1,M1 + 1,M2)
        ...              = (-1)^S x 2^E x (1+1 + 0,M1 + 0,M2)
        ...




- obcięcie
1,00001 -> 1,0
1,10000 -> 1,0


- +inf
1,00001 -> 10,0
1,10000 -> 10,0

- -inf
1,00001 ->  1,0
1,10000 ->  1,0

- ->0
1,00001 ->  1,0
1,10000 ->  1,0

- do najbliższej
1,00001 ->  1,0
1,10000 ->  1,0 lub 10,0

- symetryczne (do parzystej)
 0,1 ->   0,0
 1,1 ->  10,0
10,1 ->  10,0
11,1 -> 100,0

- symetryczne (do nieparzystej)
 0,1 ->   1,0
 1,1 ->   1,0
10,1 ->  11,0
11,1 ->  11,0



 0,0           -> 0,0
 0,00...010... -> 0,0
 0,1(0)        -> ?
 0,10...010... -> 1,0
 0,1(1)        -> 1,0

   1,0...0/1,1...1 ~= 0,1...1|GRs...s -> 1,1...1G|RS; S=or(s...s)
```

Lista 6

Zadanie 1

```
a)

  X = (-1)^S x [01],M x 2^E; N=+2^(k-1)-1

  N=+01111

X1 =  1 10101 1010
X2 =  1 10011 1001

      1        1
  01111    01111
  10101    10011
 -01111   -01111
 ------   ------
  00110    00100

X1 = (-1)^S1 x [01],M1 x 2^E1
X2 = (-1)^S2 x [01],M2 x 2^E2

  S1=1 E1=10101_(+N); E1=00110_(2) M1=1010
  S2=1 E2=10011_(+N); E2=00100_(2) M2=1001

  X1 x X2 = (-1)^S1x(-1)^S2 x [01],M1x[01],M2 x 2^E1 x 2^E2
          = (-1)^(S1+S2) x [01],M1x[01],M2 x 2^(E1+E2)

        1,M1 x 1,M2 =

         1,1010
       x 1,1001
       --------
         1,1010
        1101 0
    +  11010
       1111
    -------------
     10,1000 1010

       2^(E1+E2) = 2^(110+100)

  X1 x X2 = (-1)^(S1+S2) x [01],M1x[01],M2 x 2^(E1+E2)
          = (-1)^2 x 10,1000 1010 x 2^1010
          = (-1)^0 x 1,01000 1010 x 2^1 x 2^1010
          = (-1)^0 x 1,01000 1010 x 2^1011

       2^01011 = 2^11010_(+N)

     1,0100 0 1010 -> 1,M
     1,0100|0 1010: 1,0100+ulp = 1,0101 (+INF)
                    1,0100+0   = 1,0100 (-INF)
                    1,0100+0   = 1,0100 (0)
                    1,0100+ulp = 1,0101 (+abs)
                    1,0100+0   = 1,0100 (do parz.)

  X = X1 x X2 =
    = (-1)^0 x 1,0101 x 2^11010
    = 0 11010 0101
    (+INF, +abs)

... = (-1)^0 x 1,0100 x 2^11010
```

```
    = 0 11010 0100
    (-INF, 0, do parz.)



1b)

  X = (-1)^S x [01],M x 2^E; N=+2^(k-1)-1

  N=+01111

X1 = 1 00000 1100
X2 = 0 11011 0001


X1 = (-1)^S1 x [01],M1 x 2^E1
X2 = (-1)^S2 x [01],M2 x 2^E2

  S1=1 E1=00000_(+N*) -> E1=00001_(+N) E1=-01110; M1=1100
  S2=0 E1=11011_(+N)                   E1= 01100; M2=0001


  X1 x X2 = (-1)^(S1+S2) x [01],M1x[01],M2 x 2^(E1+E2)
          = (-1)^(1+0) x 0,1100 x 1,0001   x 2^(-01110+01100)
          = (-1)^1     x 0,1100 1100       x 2^(-10)
                              GR S=0
          = (-1)^1     x 0,1100 1100       x 2^(-10)
                             GR S=0
          = (-1)^1     x 1,100 1100 x 2^-1 x 2^(-10)
          = (-1)^1     x 1,100 1100        x 2^(-11)
          = (-1)^1     x 1,100 1100        x 2^(01100_(+N))

        1,1001 100 -> 1,M
        1,1001|100:   1,1001+0  = 1,1001 (+INF)
                 :   1,1001+ulp= 1,1010 (-INF)
               :   1,1001+0  = 1,1001 (0)
               :   1,1001+ulp= 1,1010 (+abs)
               :   1,1001+ulp= 1,1010 (do parz.)

   X = X1 x X2
     = (-1)^S x 1,M x 2^E
 ... = 1 01100 1001 (+INF, 0)
 ... = 1 01100 1010 (-INF, +abs, do parz.)

          0,1100
      x 1,0001
     ---------
          0 1100
    + 01100
    ------------
     0,1100 1100
```

Zadanie 2

```
  X1 = 0 1011 01   S1=0 E1=0100_(2) M1=01 ; N=+0111
  X2 = 0 1100 11   S2=0 E2=0101_(2) M2=11

  X1/X2 = (-1)^(S1-S2) x [01],M1/[01],M2 x 2^E1/2^E2
```

```
     = (-1)^(S1-S2) x [01],M1/[01],M2 x 2^(E1-E2)
   = (-1)^0 x 1,01/1,11 x 2^(0100-0101)
                GR
   = (-1)^0 x 0,1011(011) x 2^-1
               GR S=1
   = (-1)^0 x 1,011(011) x 2^-1 x 2^-1
   = (-1)^0 x 1,011(011) x 2^-2
   = (-1)^0 x 1,011(011) x 2^0101

... = 0 0101 10 (+INF, +abs, do parz.)
    = 0 0101 01 (0, -INF)

    2^-2 = 2^0101_(+N)

  1,01 1(S=1)
  1,01|1(S=1): 1,01+ulp = 1,10 (+INF)
             : 1,01+0   = 1,01 (-INF)
        : 1,01+0   = 1,01 (0)
        : 1,01+ulp = 1,10 (+abs)
        : 1,01+ulp = 1,10 (do parz.)

   1,M1 / 1,M2 = 1,01/1,11
              = 0,1011(011)
          GR
      0,1011(011)
   ---------------
   1,01 : 1,11
   - 1,11
   ------
   (1),10 0
   + 0,11 1
  ---------
      01 10
    - 1 11
      ------
      (1)10
       +111
       ----
        1010
        -111
        ----
         0110 = S
         -111
         ----
         (1)10
          +111
          ----
           1010
```

Zadanie 3

```
  X = (-1)^S x 1,M x 2^E      N=+0111

  1/X = ( (-1)^S x 1,M x 2^E )^-1
      = (-1)^-S x 1,M^-1 x 2^-E


    X = 1 0110 110  S=1  M=110  E=0110_(+N) -> E=-1_(2)
  1/X = (-1)^-1 x 1/1,110 x ( 2^-1 )^-1
```

```
   = (-1)^1 x 1/1,110 x 2^1
                 GR S=1
 = (-1)^1 x 0,1011011(011) x 2^1
                  GR S=1
 = (-1)^1 x 1,01101 x 2^-1 x 2^1
                  GR S=1
 = (-1)^1 x 1,01101        x 2^0
                  GR S=1
 = (-1)^1 x 1,01101        x 2^(0111_(+N))

     G R S
 1,011 0 S=1
 1,011|0 S=1: 1,011+0   = 1,011 (+INF)
            : 1,011+ulp = 1,100 (-INF)
        : 1,011+0   = 1,011 (0)
        : 1,011+ulp = 1,100 (+abs)
        : 1,011+0   = 1,011 (do parz.)

1/X = (-1)^S x 1,M x 2^E
...  = 1 0111 011 (+INF, 0, do parz.)
...  = 1 0111 100 (-INF, +abs)

1/1,110

     0,1011011
------------------
  1,00 : 1,11
- 1,11
-------
  (1)0 0
+1 1 1
------
   1 10
  -1 11
  -----
   (1)10
    +111
  ------
     1010
    - 111
    -----
       110
      -111
      ----
      (1)10 = S
       +111
       ----
        1010
          -111
      ----
        110
       -111


    R         P   N
0,00 ->  0
0,01 ->  0
0,10 ->  ?  0    1
0,11 ->  1
1,00 ->  1
1,01 ->  1
1,10 ->  ? 10    1
```

```
     1,11 -> 10
      10,00 -> 10
      10,01 -> 10
      10,10 ->  ? 10  11
      10,11 -> 11
      11,00 -> 11
      11,01 -> 11
      11,10 ->  ?100  11
      11,11 ->100

       R   S*
     0,00...0 -> 0
     0,00...1 -> 0
     0,01...1 -> 0
     0,10...0 -> ?
     0,10...1 -> 1
     0,11...1 -> 1

       RS
     0,00 -> 0
     0,00 -> 0
     0,01 -> 0
     0,10 -> ?
     0,10 -> 1
     0,11 -> 1
```

Lista 7

Zadanie 1

a)

```
     sqrt( 754,335_(10) )

        - grupujemy cyfry zapisu pozycyjnego liczby po dwie
        - osobno grupujemy część całkowitą i ułamkową
        - rekurencyjnie rozwiązujemy nierówność: (2*n*B+X)*X < R
               n - bieżące przybliżenie pierwiastka
                   (na początku 0)
               R - bieżąca reszta częściowa
                   (na początku pierwsza/najstarsza grupa dwóch cyfr)
               X - kolejna cyfra przybliżenia pierwiastka (0 <= X < B; B - baza
systemu)

      754,335
   _______________
  V|07|54|,|33|50|= 27,46515974
    07       (2*0*10+X)*X < 7 => X=2 bo 2*2 = 4 < 7
   -04 ............................................ odejmujemy wartość lewej
strony nierówności i przepisujemy kolejną parę cyfr do reszty częściowej
   ---
    03|54     (2*2*10+X)*X < 354 => X=7 bo 47*7 = 329 < 354
   -03 29
   ------
      25   33 (2*27*10+X)*X < 2533 => X=4 bo (540+4)*4=2176
     -21   76
```

```
      --------
        3   57 50 (2*274*10+X)*X < 35750 => X=6  => 32916
       -3   29 16
       ----------
            28 34 00 (2*2746*10+X)*X < 283400 => X=5 => 274625
           -27 46 25
           ---------
               87 7500 (2*27465*10+X)*X < 877500 => X=1 => 549301
              -54 9301
              --------
               32 819900 (2*274651*10+X)*X < 32819900 => X=5 => 27465125
              -27 465125
              ----------
                5 35477500 (2*2746515*10+X)*X < 535477500 => X=9 => 494372781
               -4 94372781
               -----------
                  4110471900 (2*27465159*10+X)*X < 4110471900 => X=7 =>
3845122309
                 -3845122309
                 -----------
                   26534959100 > (2*274651597*10+X)*X => X=4 => 21972127776
                  -21972127776
                  ------------
                    456283132400 > ...



         27,4
       * 27,4
       ------
          1 6
         28
         8
         28
        49
       14
         8
       14
       4
       131
     --------
       7507 6
        750,76
```

1b)

```
      sqrt( 3435,6_(7) )

       3435,6
     ____________
    V|34|35|,|60|= 50,2446
      34 >          X*X => X=5
     -34
     ---
       0 35 > (2*5*10+X)*X => X=0
      -0 00
      -----
         35   60 > (2*50*10+X)*X => X=2 => 2604
        -26   04
        --------
```

```
          6   53 00 > (2*502*10+X)*X => X=4 => 55242
         -5   52 42
         ----------
          1   00 2500 > (2*5024*10+X)*X => X=4 => 552662
         -0   55 2662
         ------------
              11 650500 > (2*50244*10+X)*X => X=6 => 11443641
             -11 443641
             ----------
                 20352600 > ...


             50,2
           * 50,2
           ------
              0 4
            13
            13
          340

       ----------
          34260 4
          3426,04
```

1c)

```
      sqrt( 10111,011_(2) )

      10111,011 = 23,375

    __________________
   V|01|01|11|,|01|10|= 100,1101 = 4,8175
   - 01     >=  X*X => X=1
    ---
      0 01 > (10 *1*10+X)*X => X=0
     -0 00
     -----
         1 11 > (10 *10*10+X)*X => X=0
        -0 00
        -----
         1 11   01 > (10 *100*10+X)*X => X=1
        -1 00   01
        ----------
           11   01 10 > (10 *1001*10+X)*X => X=1
          -10   01 01
          -----------
            1   00 01 00 > (10 *10011*10+X)*X => X=0
           -0   00 00 00
           -------------
            1   00 01 0000 > (10 *100110*10+X)*X => X=1
           -    10 01 1001
           ---------------
                 1 11 0110 ...
```

Zadanie 2

a)

```
                    (E-E%2)/2 = floor(E/2)
```

```
  X = 5dedc85b
    = 0101 1101 1110 1101 1100 1000 0101 1011
    = 0 1011 1011 1101 1011 1001 0000 1011 011
  X = (-1)^S x 1,M x 2^E
 ___  ___________________
V X =V         1,M x 2^E

      ____
    =V 1,M x 2^( E/2 )
      ____
    =V 1,M x 2^( ((E%2+ (E-E%2))/2 )
      ____
    =V 1,M x 2^( E%2/2 + floor(E/2) )
      ___________________
    =V 1,M x 2^2*( E%2/2) * 2^floor(E/2)
      ______________
    =V 1,M x 2^(E%2) * 2^floor(E/2)

      S  E(kod)            M             N = 011111111
  X = 0 10111011 11011011100100001011011


  10111011
 -01111111
 ---------
       1
   11111
 +00111011
 -01111111
 ---------
  00111100

   __________________________________________          GR
  V|01|,|11|01|10|11|10|01|00|00|10|11|01|10 = 1,010111000
   -01   => X=1
   ---
     0   11 > (10*1*10+X)*X => X=0
    -0   00
    -------
         11 01 > (10*10*10+X)*X => X=1
        -10 01
        ------
          1 00 10 > (10*101*10+X)*X => X=0
         -0 00 00
         --------
          1 00 10 11 > (10*1010*10+X)*X => X=1
         -  10 10 01
         -----------
            10 00 10 10 > (10*10101*10+X)*X => X=1
           - 1 01 01 01
           ------------
               11 01 01 01 > (10*101011*10+X)*X => X=1
              -10 10 11 01
              ------------
                  10 10 00 00 > (10*1010111*10+X)*X => X=0
                 -          0
                 ------------
                  10 10 00 00 00 > (10*10101110*10+X)*X => X=0
                 -             0
                 ---------------
                  10 10 00 00 00 10 > (10*101011100*10+X)*X => X=0
                 - 1 01 01 11 00 00
                 ------------------
```

```
                                    ... => S=1

     E = 00011110 = 10011101-01111111
     1,M = 1,010111|000 (S=1)
         = 1,011000 (+INF, w.w.b)
         = 1,010111 (pozostałe)

          _
         VX = 0 10011101 0110 0000 0000 0000 0000 000 (+INF, w.w.b)
            = 0 10011101 0101 1100 0000 0000 0000 000 (pozostałe)

2b)

      X = 0 10100 1110
      X = (-1)^S x 1,M x 2^E
     ___  ___________________
    V X =V         1,M x 2^E
           ____
        =V 1,M x 2^(E/2)
           ____
        =V 1,M x 2^( E%2/2 + floor(E/2) )
           ____
        =V 1,M x 2^( E%2/2 ) x 2^floor(E/2)
           ________________
        =V 1,M x 2^( E%2 ) x 2^floor(E/2)


         S   E    M
         0 10100 1110   N=01111

      X = (-1)^0 x 1,1110 x 10^(10100-01111)
        =          1,1110 x 10^101


      _     ________________
     VX = V 1,1110 x 10^101
            _______________________
        = V 1,1110 x 10^1 x 10^100
            ______________
        = V 1,1110 x 10^1 x 10^10
            _______
        = V 11,110        x 10^10

               GR S=1
        = 1,11101     x 10^10


               G|R S=1
    1,M = 1,1110|1     => 1,1110+ulp = 1,1111 (+INF)
                       => 1,1110+0   = 1,1110 (-INF)
                       => 1,1110+0   = 1,1110 (0)
                       => 1,1110+ulp = 1,1111 (abs.)
                       => 1,1110+ulp = 1,1111 (najbl./sym.)

      E=10 => E (z. obc.) = 10+01111 = 10001
      S=0
      _
     VX = 0 10001 1110 (-INF, 0)
          0 10001 1111 (+INF, abs., najbl.)

           _______
         V 11,110
```

```
       __________          GR S=1
     V |11|,|11| = 1,11101
       - 01
       -----
         10 , 11 > (10 *1*10+X)*X => X=1
        - 1   01
        --------
          1   10 00 > (10 *11*10+X)*X => X=1
         -0   11 01
         ----------
              10 1100 > (10 *111*10+X)*X => X=1
             - 1 1101
             --------
                 111100 > (10 *1111*10+X)*X => X=0
                -     0
                -------
                 11110000 > (10 *11110*10+X)*X => X=1
                - 1111001
                ---------
                  1110111 => S=1
```

2c)

```
      X = 0 00000 1101
      X = (-1)^S x 1,M x 2^E
   ___  ___________________
    V X =V         1,M x 2^E
          ____
       =V 1,M x 2^(E/2)
          ____
       =V 1,M x 2^( E%2/2 + floor(E/2) )
          ____
       =V 1,M x 2^( E%2/2 ) x 2^floor(E/2)
          ________________
       =V 1,M x 2^( E%2 ) x 2^floor(E/2)

        S     E    M
        0 00000 1101

        X = (-1)^0 x 0,1101 x 10^( 1-01111 )
          =          0,1101 x 10^(  -01110 )
        ___      _________________________
       V X  = V 0,1101 x 10^(  -01110 )
                 ____________________________________
            = V  11,01 x 10^(-10) x 10^(  -01110 )
                 ____________________________________
            = V 11,01  x            10^(  -10000 )
                 _______
            = V 11,01   x 10^( -01000 )
                 ________
            = V 0,1101  x 10^( -00111 )

                  G|R S=1
      1,M = 1,1100|1      => 1,1100+ulp = 1,1101 (+INF)
                          => 1,1100+0   = 1,1100 (-INF)
                          => 1,1100+0   = 1,1100 (0)
                          => 1,1100+ulp = 1,1101 (abs.)
                          => 1,1100+ulp = 1,1101 (do najbl.)
```

```
      E=-1000 => E (z. obc.) = -1000+01111 = 00111
      S=0


        _
        VX = 0 00111 1100 (-INF, 0)
             0 00111 1101 (+INF, abs., najbl.)



               ___________         GR S=1
              V |11|,|01|   = 1,11001
                - 1
                ----
                 10   01 > (10 *1*10+X)*X => X=1
                - 1   01
                --------
                  1   00 00 > (10 *11*10+X)*X => X=1
                  -   11 01
                  ---------
                         1100 > (10 *111*10+X)*X => X=0
                        -   0
                        -----
                         110000 > (10 *1110*10+X)*X => X=0
                        -     0
                        -------
                         11000000 > (10 *11100*10+X)*X => X=1
                        - 1110001
                        ---------
                     S <= 100111100 > (10 *111001*10+X)*X => X=1
                         - 11100101
                         ----------
                            1010111
```

Zadanie 3

```
a)

     X1 = 0 11011 1010
     X2 = 1 11101 0101

         S1     E1   M1
     X1 = 0 11011 1010
         S2     E2   M2
     X2 = 1 11101 0101

      X1 = (-1)^S1 x 1,M1 x 2^E1
      X2 = (-1)^S2 x 1,M2 x 2^E2

           X  =
      X1 x X2 = (-1)^S1 x 1,M1 x 2^E1 x (-1)^S2 x 1,M2 x 2^E2
              = (-1)^(S1+S2) x 1,M1 x 1,M2 x 2^(E1+E2)
              = (-1)^(0+  1) x 1,1010 x 1,0101 x 10^( 11011* + 11101* ) * <- kod
z obc. N=+01111
              = (-1)^1       x 1,1010 x 1,0101 x 10^( 11011-01111 + 11101-
01111 )
              = (-1)^1       x 1,1010 x 1,0101 x 10^( 1100 + 1110)
```

```
              = (-1)^1       x 1,1010 x 1,0101 x 10^( 11010 ) > 1,1111 x
2^( 01111 = 11110* )
              => -INF S=1 E=11111 M=0000

           X = 1 11111 0000
```

```
3b)
     X1 = 1 00011 1100
     X2 = 1 00101 1011

         S1    E1   M1
     X1 = 1 00011 1100
         S2    E2   M2
     X2 = 1 00101 1011

      X1 = (-1)^S1 x 1,M1 x 2^E1
      X2 = (-1)^S2 x 1,M2 x 2^E2

           Xmin_denorm. = 0,0001 x 10^( 00001-01111 )
                        = 0,0001 x 10^( -1110 )
                        = 10^(-100) x 10^( -1110 )
                        = 10^( -10010 )               -> (2^-18)

           X  =
      X1 x X2 = (-1)^S1 x 1,M1 x 2^E1 x (-1)^S2 x 1,M2 x 2^E2
              = (-1)^(S1+S2) x 1,M1 x 1,M2 x 2^(E1+E2)
              = (-1)^(1+1  ) x 1,1100 x 1,1011 x 10^( 00011* + 00101* ) * <- kod
z obc. +N=+01111
              = (-1)^10      x 1,1100 x 1,1011 x 10^( 00011-01111 + 00101-01111)
              = (-1)^10      x 1,1100 x 1,1011 x 10^( -1100 - 1010 )
              = (-1)^10      x 1,1100 x 1,1011 x 10^( -10110 ) < 2^( -20 )
                                                               < Xmin_denorm.
              => +0,0 S=0 E=0 M=0

           X = 0 00000 0000
```

Lista 8

Zadanie 1

a)

```
   wykładnik 4-bitowy

   X - Y   N=2^(k-1)-1 -> N=2^4-1 -> k=5

   X = \sum_{n=0}^4 2^i x_i + N
   Y = \sum_{n=0}^4 2^i y_i + N

    -a = ~a-1 dla a={0,1}

      x_i + ~y_i + c_i = s_i + 2 c_{i+1}
```

```
      c_0 = 0

   X - Y =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i + N
      - ( \sum_{n=0}^4 2^i y_i + N )
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i + N
        - \sum_{n=0}^4 2^i y_i - N
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i
        - \sum_{n=0}^4 2^i y_i
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i
        - \sum_{n=0}^4 2^i y_i
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i
        + \sum_{n=0}^4 2^i ~y_i - \sum_{n=0}^4 2^i
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i
        + \sum_{n=0}^4 2^i ~y_i - 2^4 - (2^4 - 1)
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i
        + \sum_{n=0}^4 2^i ~y_i - 2^4 - N ( +N)
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i x_i
        + \sum_{n=0}^4 2^i ~y_i - 2^4
       =
          \sum_{n=0}^3 2^i x_i
        + \sum_{n=0}^3 2^i ~y_i
        + x_4 - y_4
       =
          \sum_{n=0}^4 2^i (s_i + 2 c_{i+1}) - 2^4


   X* \in [0; 2^5-1]
   Y* \in [0; 2^5-1]

b)


   Y = 6_(10) = 110_(2)

   X = \sum_{i=0}^4 2^i x_i
   Y = \sum_{i=0}^4 2^i y_i
     = \sum_{i=0}^4 2^i (s_i + 2 c_{i+1})

                  x_i + y_i + c_i = s_i + 2 c_{i+1} ( s_i = x_i^y_i^c_i )
      00_(2) <= x_i + y_i + c_i <= 11_(2)         (c_{i+1} = x_iy_i | x_ic_i |
y_ic_i)

            * c_i=0:  x_i + y_i + 0 = s_i + 2 c_{i+1} ( s_i = x_i^y_i )
                                                    (c_{i+1} = x_iy_i)

   X   =  \sum_{i=0}^{k-1} 2^i x_i
   Y   =  \sum_{i=0}^{k-1} 2^i y_i
   X+Y =
          \sum_{i=0}^{k-1} 2^i x_i
        + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i y_i
       = x_0 + y_0 +
          \sum_{i=1}^{k-1} 2^i x_i
        + \sum_{i=1}^{k-1} 2^i y_i
       = s_0 + 2c_1
```

```
          \sum_{i=1}^{k-1} 2^i x_i
        + \sum_{i=1}^{k-1} 2^i y_i
       = s_0 + 2(c_1 + x_1 + y_1) +
          \sum_{i=2}^{k-1} 2^i x_i
        + \sum_{i=2}^{k-1} 2^i y_i
       = s_0 + 2s_1 + 4c_2 +
          \sum_{i=2}^{k-1} 2^i x_i
        + \sum_{i=2}^{k-1} 2^i y_i
       =
       ...
       = s_0 + 2s_1 + ... + 2^{k-2} s_{k-2} + 2^{k-1} + c_{k-1}
          2^{k-1} x_{k-1}
        + 2^{k-1} y_{k-1}
       = s_0 + 2s_1 + ... + 2^{k-1} s_{k-1} + 2^k c_k
```

c)

```
        4X+5 -> 4=2^2
      = 2^2X+5

   X      =  \sum_{i=0}^{k-1} 2^i x_i
   Y      =  \sum_{i=0}^{k-1} 2^i y_i
   2^aX+Y =
            2^a\sum_{i=0}^{k-1} 2^i x_i
           +   \sum_{i=0}^{k-1} 2^i y_i
          =
               \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+a} x_i
           +   \sum_{i=0}^{k-1} 2^i     y_i
          =
               \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+a} x_i
           +   \sum_{i=0}^{a-1} 2^i     y_i
           +   \sum_{i=a}^{k-1} 2^i     y_i
          =
               \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+a}   x_i
           +   \sum_{i=0}^{a-1} 2^i       y_i
           +   \sum_{i=0}^{k-a-1} 2^{i+a} y_{i+a}
          =
               \sum_{i=k-a}^{k-1} 2^{i+a} x_i
           +   \sum_{i=0}^{k-a-1} 2^{i+a} x_i
           +   \sum_{i=0}^{k-a-1} 2^{i+a} y_{i+a}
           +   \sum_{i=0}^{a-1} 2^i       y_i
          =
               \sum_{i=k-a}^{k-1} 2^{i+a}  x_i
           +   \sum_{i=0}^{k-a-1} 2^{i+a} (x_i + y_{i+a})
           +   \sum_{i=0}^{a-1} 2^i        y_i
          =
               \sum_{i=0}^{a-1} 2^i        y_i
           +   \sum_{i=0}^{k-a-1} 2^{i+a}  s_i
           +   \sum_{i=k-a}^{k-1} 2^{i+a}  x_i
           +   2^{k-a} c_{k-a}
          =
               \sum_{i=0}^{a-1} 2^i        y_i
           +   \sum_{i=0}^{k-a-1} 2^{i+a}  s_i
           +   \sum_{i=k-a}^{k-1} 2^{i+a}  s_i
           +   2^{k+a} c_k
          =
               \sum_{i=0}^{a-1} 2^i      y_i
           +   \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+a}  s_i
           +   2^{k+a} c_k
```

1 d)

```
    -~a =  a-1,
     -a = ~a-1, a \in {0,1}

  X   = -2^{k-1} x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i

  0-X =
      = 0 - (-2^{k-1} x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i)
      =       2^{k-1} x_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i
      =       2^{k-1} x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i ~x_i - \sum_{i=0}^{k-2}
2^i
      =       2^{k-1} x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i ~x_i - (2^{k-1}-1)
      =       2^{k-1} x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i ~x_i - 2^{k-1} + 1
      =       2^{k-1} x_{k-1}-2^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i ~x_i + 1
      =       2^{k-1}(x_{k-1}-1) + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i ~x_i + 1
      =       2^{k-1} ~x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i ~x_i + 1
      =                          \sum_{i=0}^{k-1} 2^i ~x_i + 1
      =                          \sum_{i=0}^{k-1} 2^i ~x_i + 0...01
```

Zadanie 2

a)

```
  X = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_16 = \sum_{i=0}^16 x_i
    = x_0 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + ... + x_16
    = x_0 +  s_1 + 2c_1    +      s_2 + 2c_2 + ... + s_5 + 2c_5 + x_16
    = x_0 +  s_1+...+s_5+x_16 + 2(c_1+...+c_5)
    = x_0 +  s_1+...+s_5+x_16 + 2(c_1+...+c_5)
    ...
```

2 b)

```
  X = ~x_0 + ~x_1 + ~x_2 + ... + ~x_16 + ~x_17 + ~x_18 = \sum_{i=0}^18 ~x_i
    =(~x_0 + ~x_1 + ~x_2)+ ... +(~x_15 + ~x_16 + ~x_17) + ~x_18
    =  s_01+2c_01 + ...  + ....+ s_06+2c_06 + ~x_18
    =  s_01+...+s_06 + ~x_18 + 2(c_01 + ...  + c_06)
    =  s_11+s_12+s_13+2(c_11+c_12+c_13) + ~x_18 + 2(c_01 + ...  + c_06)
    ...
```

2 c)

```
 A+B+C+D+E+F+G+H =
   a_0+2a_1+4a_2 +
   b_0+2b_1+4b_2 +
   c_0+2c_1+4c_2 +
   d_0+2d_1+4d_2 +
   e_0+2e_1+4e_2 +
   f_0+2f_1+4f_2 +
   g_0+2g_1+4g_2 +
   h_0+2h_1+4h_2 +
```

2 d)

```
diff_H(A, B) = H(A, B) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i, gdzie x_i = a_i^b_i


H(A, B) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i =
        =  x_0+x_1+x_2  +  x_3+x_4+x_5 + ...
        = (x_0+x_1+x_2) + (x_3+x_4+x_5) + (...
        =   s_10+2c_11  +   s_20+2c_21 + s_30+2c_31 +...
        =   (s_10+s_20+s_30)+... + 2((c_11+c21+c_31) + ... )
```

Lista 9

Zadanie 1

a)

```
X = \sum_{i=1}^11 x_i

X_min <= \sum_{i=1}^11 x_i <= X_max

x_min = 100_(U2) = -4_(2)
x_max = 011_(U2) =  3_(2)

-4 <= x_i <= 3

X_min = \sum_{i=1}^11 -4 = -44
X_max = \sum_{i=1}^11  3 =  33

l. A k-bitowa: [-2^{k-1}; 2^{k-1}-1]

3-bitowa: [-4; 3]
4-bitowa: [-8; 7]
...
7-bitowa: [-64; 63] => N=7
```

c)

```
-x   = ~x-1
-x+1 = ~x


-2x   = 2( ~x-1 )
-2x   = ~x||0 – 2
```

Lista 10

Zadanie 1.

```
7 liczb 4-bitowych w U2

a) korekta:

  p(x) = -1 dla x=1, 0 dla x=0
       = ~x-1

  S =   \sum_{i=1}^7 X_i
  X_i = p(x_{i,3})*2^3 + \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
      = \sum_{k=3}^inf x_{i,3}*2^k + \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
      = (-2^{m-1} + \sum_{k=3}^{m-2} x_{i,3})*2^k
                                    + \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j

  S = \sum_{i=1}^7 ( p(x_{i,3})*2^3 + \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j )
    = \sum_{i=1}^7   p(x_{i,3})*2^3 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
    = \sum_{i=1}^7 (~x_{i,3}-1)*2^3 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
    = \sum_{i=1}^7 ~x_{i,3}*2^3 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
     +\sum_{i=1}^7 ( -1*2^3 )
    = \sum_{i=1}^7 ~x_{i,3}*2^3 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
     - 7*1*2^3
    = \sum_{i=1}^7 ~x_{i,3}*2^3 + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=0}^2 x_{i,j}*2^j
     + (1)001000_(U2)

  -7*1*2^3 =

  (1)111000
    -111000
    +  1000
  ---------
  (1)001000

b) Największa liczba operandów:
    - 7 liczb 4-bitowych do dodania
    - stała
    - razem 8

    L(3)=1

    L(1)=3
    L(2)=4
    L(3)=6
    L(4)=9
    L(5)=\floor(9/2)*3 + 9%2 = 13
    ...
    L(k+1)=\floor( L(k)/2 )*3 + L(k)%2
    ...

    ~ L_poziomów = \ceil(\log_{3/2} L_operandów)
                 = \ceil(\log_{3/2} 8)
               = 6
              (4)

c) Liczba bitów sumy:
```

```
    N_sumy = \ceil( n+\log_2( L_operandów ) )
           = \ceil( 4+\log_2 7 )
         = 7

d) Liczba sumatorów pełnych

    d.1 liczba poziomów niewytwarzających bitów sumy:
      ~ \ceil( \log_3 L_operandów ) =
        \ceil( \log_3 7 ) = 2
    d.2 liczba bitów sumy przed CPA:
      ~ \floor( \log_2 L_operandów ) = 2
    d.3 liczba sygnałów wchodzących do CPA:
      ~   (7 /*l. całkowita bitów*/ -2 /*zredukowane przed CPA*/ )*2
        = 10
    d.4 liczba sygnałów wyjściowych drzewa CSA:
      ~ sygnały CPA + bity sumy
        = 10 + 2 = 12
    d.5 liczba sygnałów wejściowych drzewa CSA:
      7*4 /* operandy */ + 2 /* niezerowe bity stałej */
        = 30
    d.6 liczba sumatorów pełnych (niedokładne):
      ~ ( L_operandów-2 /* liczba warstw */ )*n /*szerokość*/
       =  ( 8-2 )*4
       =  24

    d.6a (dokładne)
      L. bitów wejściowych - L. bitów wyjściowych
       30 - 12 = 18
```

Zadanie 3.

```
    L. poziomów: 4

    1 liczba poziomów niewytwarzających bitów sumy:
       0
    2 liczba bitów sumy przed CPA:
       l. poziomów - l. poziomów niewytw. bitów sumy: 4-0 = 4
    3 liczba sygnałów wchodzących do CPA:
       ~   (16 /*l. całkowita bitów*/ -4 /*zredukowane przed CPA*/ )*2
              = 24
    4 liczba sygnałów wyjściowych drzewa CSA:
      sygnały CPA + bity sumy
      = 24 + 4 = 28
    5 liczba sygnałów wejściowych drzewa CSA:
      = 8*8 = 64
    6 liczba sumatorów pełnych
      L. bitów wejściowych - L. bitów wyjściowych
             64 - 28 = 36
```

Lista 11

Zadanie 1.

```
X+Y

X = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i
Y = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i y_i

x_i + y_i + c_i = s_i + 2c_{i+1}
s_i = x_i XOR y_i XOR c_i
h_i = x_i XOR y_i => s_i = h_i XOR c_i

c_{i+1} = x_iy_i | c_i(x_i XOR y_i) = x_iy_i | c_i(x_i|y_i)
        =                              g_i  | c_ip_i       (p_i=x_i|y_i)
                                                          (g_i=x_iy_i)

S =   2^n c_n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i s_i
X+Y =
                \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i
              + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i y_i
    =
     \sum_{i=0}^{a-1} 2^ix_i + \sum_{i=a}^{b-1} 2^ix_i + \sum_{i=b}^{n-1}
2^ix_i
    +\sum_{i=0}^{a-1} 2^iy_i + \sum_{i=a}^{b-1} 2^iy_i + \sum_{i=b}^{n-1}
2^iy_i
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i + \sum_{i=a}^{b-1} 2^ix_i + \sum_{i=0}^{a-1}
2^ix_i
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i + \sum_{i=a}^{b-1} 2^iy_i + \sum_{i=0}^{a-1}
2^iy_i
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i + 2^{b-1}x_{b-1} + \sum_{i=0}^{b-2} 2^ix_i
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b-1}y_{b-1} + \sum_{i=0}^{b-2} 2^iy_i
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i + 2^{b-1}x_{b-1} +
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b-1}y_{b-1} + 2^{b-1}c_{b-1} + S_{b-2:0}
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i +       2^bc_b               + 2^{b-1}s_{b-1} +
S_{b-2:0}
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i + 2^b(g_{b-1}|c_{b-1}p_{b-1}) + 2^{b-1}s_{b-1} +
S_{b-2:0}
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i + 2^b(g_{b-1}|c_{b-1}p_{b-1}) + S_{b-1:0}
    =
   \sum_{i=b}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b}^{n-1} 2^iy_i + 2^b(g_{b-1},p_{b-1})x(c_{b-1}) + S_{b-1:0}
    =
   \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}(g_b|(g_{b-1}|c_{b-1}p_{b-1})p_b) +
2^bs_b + S_{b-1:0}
    =
   \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}(g_b|(g_{b-1}|c_{b-1}p_{b-1})p_b) +
S_{b:0}
    =
   \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
    +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}(g_b|g_{b-1}p_b|c_{b-1}p_{b-1}p_b) +
S_{b:0}
```

```
      =
     \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
      +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}((g_b|g_{b-1}p_b, p_{b-1}p_b)x(c_{b-
1})) + S_{b:0}
      =
     \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
      +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}((g_b,p_b)o(g_{b-1},p_{b-1})x(c_{b-
1})) + S_{b:0}
      =
     \sum_{i=b+2}^{n-1} 2^ix_i +
      +\sum_{i=b+2}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+2}((g_{b+1},p_{b+1})o(g_b,p_b)o(g_{b-
1},p_{b-1})x(c_{b-1})) + S_{b+1:0}
      =
     \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
      +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}(G_{b:b-1},P_{b:b-1})x(c_{b-1}) +
S_{b:0}
      =
     \sum_{i=b+1}^{n-1} 2^ix_i +
      +\sum_{i=b+1}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+1}(G_{b:b-1}|c_{b-1}P_{b:b-1}) +
S_{b:0}
      =
     \sum_{i=b+2}^{n-1} 2^ix_i +
      +\sum_{i=b+2}^{n-1} 2^iy_i + 2^{b+2}(G_{b+1:b-1}|c_{b-1}P_{b+1:b-1}) +
S_{b+1:0}


      (G_{b:a},P_{b:a}) =  (g_b,p_b)o(g_{b-1},p_{b-1}) o...o(g_{a+1},p_{a+1})
o(g_a,p_a)
                         = ((g_b,p_b)o(g_{b-1},p_{b-1}))o...o(g_{a+1},p_{a+1})
o(g_a,p_a)
                         =  (g_b,p_b)o((g_{b-1},p_{b-
1})o...o(g_{a+1},p_{a+1}))o(g_a,p_a)
                         = ((g_b,p_b)o(g_{b-1},p_{b-
1}))o...o((g_{a+1},p_{a+1})o(g_a,p_a))

   (g1, p1)o(g0, p0) = (g1|p1g0, p1p0)
   (g, p)o(g, p) = (g|pg, pp) = (g, p)
   (G_{b:a},P_{b:a})o(G_{b:a},P_{b:a}) = (G_{b:a},P_{b:a})

   (G_{l:i}, P_{l:i})o(G_{i+j:k}, P_{i+j:k}) =
 (G_{l:i+j+1}, P_{l:i+j+1})o(G_{i+j:i},P_{i+j:i})o(G_{i+j:i},P_{i+j:i})o(G_{i-
1:k},P_{i-1:k}) =
 (G_{l:i+j+1}, P_{l:i+j+1})o(G_{i+j:i},P_{i+j:i})o(G_{i+j:i},P_{i+j:i})o(G_{i-
1:k},P_{i-1:k}) =
 (G_{l:i+j+1}, P_{l:i+j+1})o((G_{i+j:i},P_{i+j:i})o(G_{i+j:i},P_{i+j:i}))o(G_{i-
1:k},P_{i-1:k}) =
 (G_{l:i+j+1}, P_{l:i+j+1})o(G_{i+j:i},P_{i+j:i})o(G_{i-1:k},P_{i-1:k}) =
     = (G_{l:k}, P_{l:k})

   (G_{l:i}, P_{l:i})o(G_{i  :k}, P_{i  :k}) = (G_{l:k}, P_{l:k})

   (G_{l:i}, P_{l:i})o(G_{i+2:k}, P_{i+2:k}) =
     (G_{l:i}, P_{l:i})o(G_{i+2:i}, P_{i+2:i})o(G_{i-1:k}, P_{i-1:k})
           = (G_{l:k}, P_{l:k})


   (G_{l:i}, P_{l:i})o(G_{i+1:k}, P_{i+1:k}) =
     (G_{l:i+1}, P_{l:i+1})o(G_{i:i}, P_{i:i})o(G_{i:i}, P_{i:i})o(G_{i-1:k},
P_{i-1:k})
           = (G_{l:k}, P_{l:k})

   (G_{i:i}, P_{i:i}) = (g_i, p_i) = (x_iy_i, x_i|y_i)
```

```
(G_{a:a}, P_{a:a})o(G_{a-1:a-1}, P_{a-1:a-1})
                   = (G_{a:a-1}, P_{a:a-1})
                   = (G_{a:a}|P_{a:a}G_{a-1:a-1}, P_{a:a}P_{a-1:a-1})

(G_H, P_H)o(G_L, P_L) = (G_{H:L}, P_{H:L})
                      = (G_H|P_HG_L, P_HP_L)

(G_{2:1}, P_{2:1}) = (g_2, p_2)o(g_1, p_1)
(G_{2:1}, P_{2:1}) = (G_{2:2}, P_{2:2})o(G_{1:1}, P_{1:1})
((g_3, p_3)o(g_2, p_2))o(g_1, p_1)=
        (g_3, p_3)o((g_2, p_2)o(g_1, p_1))


c_{j+1} = G_{j:i} | P_{j:i}c_i

X = 1011 0111 1010 0101
Y = 1000 1000 1100 1110

g = 1000 0000 1000 0100
p = 1011 1111 1110 1111
h = 0011 1111 0110 1011
```

a)

```
(G_{3:0}, P_{3:0})
        = (g_3, p_3)o(g_2, p_2)o(g_1, p_1)o(g_0, p_0)
        = (0, 1)o(1, 1)o(0, 1)o(0, 1)
      = (0|1.1, 1.1) o(0|1.0, 1.1)
      = (1, 1)o(0, 1)
      = (1|1.0, 1.1)
      => G_{3:0} = 1

(G_{7:4}, P_{7:4})
        = (g_7, p_7)o(g_6, p_6)o(g_5, p_5)o(g_4, p_4)
        = (1, 1)o(0, 1)o(0, 1)o(0, 0)
      = (1|1.0, 1.1)o(0|1.0, 0.1)
      = (1, 1)o(0, 0)
      = (1|1.0, 1.0)
      => G_{7:4} = 1

(G_{11:8}, P_{11:8})
        = (g_11, p_11)o(g_10, p_10)o(g_9, p_9)o(g_8, p_8)
      = (0, 1)o(0, 1)o(0, 1)o(0, 1)
      = (0|1.0, 1.1)o(0|1.0, 1.1)
      = (0, 1)o(0, 1)
      = (0|1.0, 1.1)
      => G_{11:8} = 0
```

b)

```
P_{7:4}  = 0
P_{11:8} = 1
```

c)

```
(G_{11:0}, P_{11:0})
  = (G_{11:8}, P_{11:8})o(G_{7:4}, P_{7:4})o(G_{3:0}, P_{3:0})
  = (0, 1)o(1, 0)o(1, 1)
```

```
     = (0|1.1, 1.0)o(1, 1)
     = (1, 0)o(1, 1)
     = (1|0.1, 0.1)
     => G_{11:0} = 1
```

d)

```
   s_12 = h_12 XOR c_12
   c_12 = G_{11:0} | P_{11:0}c_0 (c_0 = 0)
        = G_{11:0}

   c_12 = 1
   s_12 = 1 XOR 1 = 0
```

Lista 12

Zadanie 1. alg. Euklidesa

```
a) NWP(379, 133)

int nwd(int a, int b)
{
      while( b != 0 )
      {
            a = a mod b;
            swap(a, b);
      }
      return a;
}

a = 379, b = 133, a mod b = 379 mod 133 = |-20|_133 = 113; b = 113, a = 133
a = 133, b = 113, a mod b = 133 mod 113 = 20       ; b = 20,  a = 113
a = 113, b = 20,  a mod b = 113 mod 20  = 13       ; b = 13,  a = 20
a = 20,  b = 13,  a mod b = 20  mod 13  = 7        ; b = 7,   a = 13
a = 13,  b = 7,   a mod b = 13  mod 7   = 6        ; b = 6,   a = 7
a = 7,   b = 6,   a mod b = 1   mod 6   = 1        ; b = 1,   a = 6
a = 6,   b = 1,   a mod b = 6   mod 1   = 0        ; b = 0,   a = 1

=> NWP(379, 133) = 1

b) NWP(714, 366)

a = 714, b = 366, a mod b = 714 mod 366 = -18 = 348; b = 348, a = 366
a = 366, b = 348, a mod b = 366 mod 348 = 18       ; b = 18,  a = 348
a = 348, b = 18,  a mod b = 348 mod 18  = |-12|_{18] = 6  ; b = 6,   a = 18
a = 18,  b = 6,   a mod b = 18  mod 6   = 0        ; b = 0,   a = 6

=> NWP(714, 366) = 6
```

Zadanie 2.

```
      |a +c|_m = ||a|_m      +|c|_m|_m
      |ab  |_m = ||a|_m*|b|_m      |_m
      |ab+c|_m = ||a|_m*|b|_m+|c|_m|_m
```

a)

```
511_10 = 1 11 11 1 111_2 = 777_8

1347211_(8) mod 511_(10) = |1347211|_777 (zapis ósemkowy)
                         = |1*1000*1000 + 347*1000 +211|_777 // |1000|_777 = 1
                   = |1*1*1 + 347+211|_777
                   = | 1 +558 |_777
                   = 559_8
```

b)

```
123321_(6) mod 37_(10) = |123321_(6)|_{37_(10)}
                       = |123321_(6)|_{101_(6)}

- w systemie o B=6:
      |123321|_101
    = |123*1000 + 321 |_101
    = |12*100*100 + 3*10*100 + 3*100 + 21 |_101 // |100|_101 = |-1|_101
    = |12*(-1)*(-1) + 3*10*(-1) + 3*(-1) + 21 |_101
    = |12           - 30        - 3      + 21 |_101
    = 0
```

c)

```
987612345 mod 1001 = |987612345|_1001

      |987612345|_1001
    = |987*1000*1000 + 612*1000 + 345|_1001 // |1000|_1001 = |-1|_1001
    = |987*(-1)*(-1) + 612*(-1) + 345|_1001
    = |987-612+345|_1001 = 720
```

d)

```
A4C214_{16} mod 513_{10} = |A4C214|_201

      |A4C214|_201
    = |A4C*1000+214|_201
    = |A4C*8*200+214|_201 // |200|_201 = |-1|_201
    = |A4C*8*(-1)+214|_201
    = |-A40*8-C*8+214|_201
    = |-A00*8-40*8-C*8+214|_201
    = |-5*200*8-200-C*8+214|_201
    = |-5*(-1)*8-(-1)-C*8+13|_201
    = |5*8+1-C*8+13|_201
    = |-7*8+1+13|_201
    = |-2A|_201
    = 1D7 (do sprawdzenia w domu)
```

Zadanie 3.

```
baza systemu: (m1, m2, m3, m4) = (5, 7, 9, 11)
zakres dynamiczny systemu: M = m1*m2*m3*m4 =  5*7*9*11 = 3465
```

```
{xi: xi = |X|_{mi}, i = 1...r}

a) 255

x1 = |255|_5 = 0
x2 = |255|_7 = |5 + 5*3 + 2*2|_7 = |5+15+4|_7 = 3
x3 = |255|_9 = |5 + 5 + 2|_9 = 3
x4 = |255|_11 = |5 - 5 + 2|_11 = 2

=> (0, 3, 3, 2)

b) 2957

x1 = |2957|_5 = 2
x2 = |2957|_7 = |7 + 5*3 + 9*2 + 2*6|_7 = |7+15+18+12|_7 = 3
x3 = |2957|_9 = |7 + 5 + 9 + 2|_9 = 5
x4 = |2957|_11 = |7 - 5 + 9 - 2|_11 = 9

{"x":["7", "5", "9", "2"]}

=> (2, 3, 5, 9)

|1|_11 = 1
|10|_11 = |-1|_11
|100|_11 = 1
|1000|_11 = |-1|_11
|10000|_11 = 1
...
```

Zadanie 4.

```
baza systemu: (m1, m2, m3, m4) = (5, 7, 9, 11)
zakres dynamiczny systemu: M = m1*m2*m3*m4 =  5*7*9*11 = 3465

a) X = (0, 3, 3, 2)


X = |\sum_1^r xi*qi*|1/qi|_mi |_M
  = |\sum_1^r    qi*|xi/qi|_mi |_M

       qi = M/mi; b=|1/a|_m => |ab|_m=1 (odwrotność multiplikatywna; NWD(a,m)=1)
                       ! jeżeli NWD(a,m)!=1 to odwr. multiplikatywna nie
istnieje

     M = 3465
     q1 = 3465/5 = 693 ; |1/q1|_m1 = |1/693|_5 = 2
     q2 = 3465/7 = 495 ; |1/q2|_m2 = |1/495|_7 = 3
     q3 = 3465/9 = 385 ; |1/q3|_m3 = |1/385|_9 = 4
     q4 = 3465/11 = 315; |1/q4|_m4 = |1/315|_11= 8

X = | 0*693*2 + 3*495*3 + 3*385*4 + 2*315*8 |_3465
  = 255

sprawdzenie:
   | 255 |_5 = 0
   | 255 |_7 = 3
   | 255 |_9 = |2+5+5|_9 = 3
   | 255 |_11= |2-5+5|_11 = 2

b) X = (2, 2, 3, 5)
```

```
X = | 2*693*2 + 2*495*3 + 3*385*4 + 5*315*8 |_3465
  = 2172

sprawdzenie:
   | 2172 |_5 = 2
   | 2172 |_7 = | 2 + 0 + 1*2 + 2*6 |_7 = 2
   | 2172 |_9 = | 2 + 7 + 1 + 2 |_9 = 3
   | 2172 |_11 = | 2-7+1-2 |_11 = |-6|_11 = 5

c)

(1, 3, 3, 4)*(3, 1, 4, 4) = (|1*3|_5, |3*1|_7, |3*4|_9, |4*4|_11)
                          = (3, 3, 3, 5)

Uwaga: iloczyn modulo M (redukcja przy przepełnieniu następuje modulo M)
```