LOGIKA I RACHUNEK ZDAŃ

ZDANIA PROSTE

Zdanie	Symbol
10 jest liczbą parzystą	p
7 jest liczbą pierwszą	q
13 lutego jest sobota	r

SPÓJNIKI ZDANIOWE

Zapis	Nazwa	Symbol
... nieprawda, że ...	negacja	$\neg(\sim)$
... lub ...	alternatywa	$\vee$
... i ...	koniunkcja	$\wedge$
Jeżeli ... , to ...	implikacja	$\Rightarrow$
... wtedy i tylko wtedy, gdy ...	równoważność	$\Leftrightarrow$

HIERARCHIA SPÓJNIKÓW

$$\neg, \quad \wedge \quad \vee \quad \Leftrightarrow \quad \Rightarrow.$$

ZDANIA ZŁOŻONE

Zapis słowny *Jeżeli 10 jest liczba parzystą to 13 lutego jest sobota*

$$p \Rightarrow q.$$

Jeżeli 10 jest liczba parzystą i 7 jest liczba pierwszą to 13 lutego jest sobota

$$(p \wedge q) \Rightarrow r.$$

ZDANIA (FORMUŁY) POPRAWNIE ZBUDOWANE

Spójniki zdaniowe (operatory, znaki działań) są jedno, jak np. $\neg$ oraz dwuargumentowe, jak:

$$\wedge, \quad \vee, \quad \Leftrightarrow, \quad \Rightarrow .$$

Oznacza to, że zdania poprawnie zbudowane to takie, w których spójniki operują na odpowiedniej liczbie argumentów (zdań).

Zdania niepoprawnie zbudowane:

$$p\neg p, \quad p \Rightarrow\Rightarrow q, \quad p \wedge \vee q.$$

TABLICE WARTOŚCI LOGICZNYCH DLA POSZCZEGÓLNYCH OPERATORÓW LOGICZNYCH

Negacja

p	$\neg p$
0	1
1	0

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

PRAWA LOGIKI (PRZEKSZTAŁCANIA FORMUŁ)

Prawa przemienności

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Prawa łączności

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r; \quad p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

Prawa powtórzeń

$$p \wedge p \wedge p \wedge \cdots \wedge p \Leftrightarrow p; \quad p \vee p \vee p \vee \cdots \vee p \Leftrightarrow p$$

Prawa de Morgana

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q; \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

PRZYKŁAD
$((p \vee q) \wedge \neg p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q); \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$

PRAWA (TAUTOLOGIE, SPRZECZNOŚCI)

Zdania złożone, które są zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zmiennych zdaniowych $p,\ q$ nazywamy tautologiami.

$$p \vee \neg p \equiv 1; \quad ((p \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow q \equiv 1.$$

Zdaniem sprzecznym (sprzecznością) nazywamy zdanie złożone, które jest zawsze fałszywe.

$$p \wedge \neg p \equiv 0; \quad \neg(p \vee \neg p) \equiv 0.$$

PREDYKATY

Predykat umożliwia w skrótowy, symboliczny sposób zapisywać zdania wyrażające właściwości i/lub relacje o prawdziwości. Przykładowo zapis $P(x)$ oznacza, że obiekt x spełnia właściwość $P(.)$ np. tę, że $x = 3$ co zapisujemy:

$$P(x) = [x = 3].$$

Predykaty jedno-argumentowe:
$P(x) = [Q(x) \wedge U(x)]$, $P(x) =$[pije mleko], $P(x) =$[jest zielony].
Predykaty wielo-argumentowe :

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

PRZYKŁADY
$P(x, y, z) = [x + y = z]$, $P(x, y) = [x > y]$,
P(Janek,Zosia) $=$ [Janek jest bratem Zosi],
$P(V, x, y, z) = [V = xyz]$.

KWANTYFIKATORY

$\forall x$ - dla każdego x
$\exists x$ - istnieje x
$\exists! x$ - istnieje jeden x
Pozwalają oddać charakter właściwości obiektu opisywanego predykatem $P(x)$

PRZYKŁAD
$\forall x \in R[x + 0 = x]$, $\exists x \in N[x = x]$, $\neg\exists x \in N[x < 0]$,
$\exists x \in R[x < 0]$, $\forall x \in$ zbiór kotów [x pije mleko],
$\forall x \in$ zbiór szpaków [x jest ptakiem],
$\forall x \in$ zbiór dzieci $\exists y \in$ zbiór rodziców [x jest dzieckiem y].

PRAWA PRZEKSZTAŁCANIA

$$\neg\left[(\forall x P(x))\right] \Leftrightarrow \exists x\left[\neg P(x)\right]$$

$$\neg\left[(\exists y Q(y))\right] \Leftrightarrow \forall y\left[\neg Q(y)\right]$$

$$\neg\left(\exists x \forall y\left[y > x\right]\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \exists y\left[y \leqslant x\right]\right).$$

REGUŁY WNIOSKOWANIA

Modus ponens $p \Rightarrow q$

Modus tollens $\neg p \Rightarrow \neg q$

Zasada rezolucji $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

SCHEMATY WNIOSKOWANIA

Wnioskowanie naturalne (zasada modus ponens)

$$p \Rightarrow q$$

Jeżeli p jest prawdą, to q jest zawsze prawdą.

PRZYKŁAD

p – dzisiaj jest niedziela

q – mam wolny dzień

r – jadę na ryby

Jeżeli prawdą jest $p \Rightarrow q$ oraz jeżeli prawdą jest, że $q \Rightarrow r$, zatem oznacza to fakt, że jadę na ryby.

Sprowadzanie do sprzeczności (Zasada rezolucji)

$$(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow 1; \quad a \Rightarrow a \Leftrightarrow \neg a \vee a \Leftrightarrow 1$$

SPOSOBY DOWODZENIA

Twierdzenia Pitagorasa.

Przyjmując następujące predykaty:

$P(x) =$ [x jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej C i przyprostokątnych A i B]

$Q(x) =$ [w trójkącie x zachodzi: $A^2 = B^2 + C^2$],

rozważać możemy prawdziwość twierdzenia

$$\forall x P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Wobec tego dowód twierdzenia sprowadza się do wykazania prawdziwości zdania typu implikacja:

$$P \Rightarrow Q.$$

($P \Rightarrow Q$ jest prawdą wówczas, gdy P i Q są prawdziwe, bądź gdy P jest fałszem)

Dowód wprost:

Zakładając, że P jest prawdą, należy wykazać prawdę Q

Dowody nie wprost (przez kontrapozycję):

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ jest równoważne $P \Rightarrow Q$, należy zatem przyjmując za prawdę $\neg Q$, wykazać prawdę $\neg P$.

PRZYKŁAD

Udowodnić, że jeśli liczba n^2 jest parzysta, to n jest też liczbą parzystą

$P(n) =$ [n^2 jest liczbą parzystą],

$Q(n) =$ [n jest liczbą parzystą]

([n^2 jest liczbą parzystą] $\Rightarrow$ ([n jest liczbą parzystą]) $\Leftrightarrow$ ($\neg$[n jest liczbą parzystą] $\Rightarrow$ ([n^2 jest liczbą parzystą])

Ponadto

($\neg$ [n jest liczbą parzystą] $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow \neg$[$n^2$ jest liczbą parzystą]

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności:

Zakładając, że wykazanie iż $\neg Q \Rightarrow P$ prowadzi do sprzeczności, należy:

przyjmując fałszywość Q wykazać prawdziwość P, a tym samym przyjąć iż prawdą jest Q.

Należy pamiętać, że $P \Rightarrow Q$ jest prawdziwa m.in. gdy Q jest prawdziwe i P fałszywe.

Dowód indukcyjny:

Należy wykazać, że właściwość predykatu $P(n)$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych począwszy od pewnego k, czyli $n \geqslant k,\ \ k, n \in N$.

Zasada indukcji matematycznej

Jeżeli istnieje taka liczba naturalna n_0, że:

1^o $P(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym

2^o dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant n_0$ jest prawdziwa implikacja

$$P(k) \Rightarrow P(k+1),$$

to $P(n)$ jest zdaniem prawdziwym $\forall n \geqslant n_0$.

PRZYKŁAD

Wykaż, że $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dowód indukcyjny:

1^o $\ n = 1$, wówczas $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$

2^o $\ n = k$, wówczas $1 + 2 + 3 + ... + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ (założenie indukcyjne), to dla $n = k + 1$

$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2}$ (teza indukcyjna),

stąd

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

cnd.