FUNKCJE
(Analiza Matematyczna 1, wykład 2)

X, Y - niepuste zbiory.

Przypomnienie

Funkcja $f : X \to Y$ przyporządkowuje, każdemu elementowi zbioru X dokładnie jeden element zbioru Y.

Wykres funkcji f - zbiór punktów płaszczyzny (podzbiór produktu *X*x*Y*,

$$\{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Funkcja f na zbiorze A jest:

1^0 ***rosnąca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

2^0 ***malejąca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

Funkcję $f(x)$ jest ***różnowartościową***, iff

$$\forall t, u, t \neq u \Rightarrow f(t) \neq f(u)$$

Funkcja rosnąca albo malejąca (ściśle monotoniczna) jest różnowartościowa.

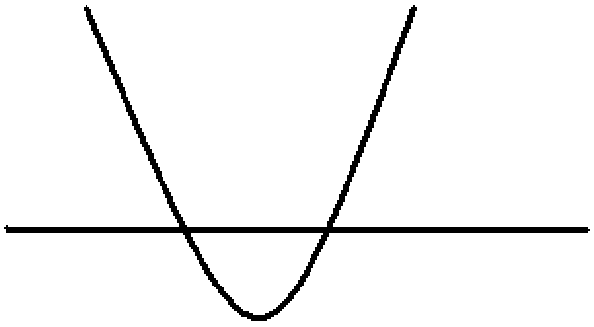
Funkcja f na zbiorze A jest:

1^0 ***parzystą*** $\Leftrightarrow \forall x \in A, (-x \in A \wedge f(-x) = f(x))$

2^0 ***nieparzystą*** $\Leftrightarrow \forall x \in A, (-x \in A \wedge f(-x) = -f(x))$

Funkcja kwadratowa

$y = ax^2 + bx + c,$ **gdzie** $a \neq 0.$



$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ **- dwa pierwiastki rzeczywiste (**$\Delta = 0$ **- jeden)**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}.$$

$a > 0$ **- ramiona w górę oraz**

- $\Delta > 0$ **- parabola przecina oś *X* w dwóch punktach,**
- $\Delta = 0$ **- wierzchołek styczny do osi *X*,**
- $\Delta < 0$ **- wierzchołek powyżej osi *X*.**

$a < 0$ **- ramiona w dół oraz**

- $\Delta > 0$ **- parabola przecina oś *X* w dwóch punktach,**
- $\Delta = 0$ **- wierzchołek styczny do osi *X*,**
- $\Delta < 0$ **- wierzchołek poniżej osi *X*.**

Wielomiany

Wielomianem stopnia *n* jest funkcja postaci:

$$W_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_i \in R$, $a_n \neq 0$.

Liczba *a* jest *pierwiastkiem (zerem)* wielomianu, jeżeli $W_n(a) = 0$, tzn.

$$a_n a^n + \ldots + a_1 a + a_0 = 0$$

Wyznaczanie miejsc zerowych wielomianów (*algorytmy pierwiastkowe)*

- **Algorytm Ferro, Tartaglii – *wielomiany stopnia 3.***
- ***Algorytm Ferrari* – wielomiany stopnia 4.**
- **Twierdzenie Nielsa Abela i Evarista Galois – *nie istnieje algorytm pierwiastkowy dla wielomianów stopni* $n \geq 5$.**

Funkcje wymierne

Funkcja wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów, tj.

$$f(x) = \frac{w_n(x)}{g_m(x)},$$

gdzie $w_n(x)$ i $g_m(x)$ są wielomianami.

Dziedziną jest R, oprócz miejsc zerowych wielomianu $g_m(x)$.

Działania na funkcjach, składanie

Funkcję

$$f : X \to Y,$$

gdzie $X \subset R$ i $Y \subset R$ możemy traktować jako

$$f : X \to R.$$

Jeżeli

$$f : X \to R \quad \text{i} \quad g : X \to R,$$

to definiujemy ich sumę, iloczyn, iloraz, mnożenie przez stałą, odpowiednio:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad dla \quad g(x) \neq 0 \text{ oraz } x \in X.$$

Złożenie (superpozycja) funkcji

Mając dwie funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$, można utworzyć *funkcję złożoną,*

$$(g \circ f): X \to Z$$

określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.
Wtedy f jest funkcją *wewnętrzną*, g - *zewnętrzną.*

<u>Przykład</u>.
Niech

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt[4]{x} \text{, to}$$

$$f: R \to [1,+\infty) \qquad g: [0,+\infty) \to [0,+\infty).$$

Wtedy $[1,+\infty) \subset [0,+\infty)$ i

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt[4]{x^2+1} \quad dla \quad x \in R.$$

Funkcja odwrotna

Dla każdej funkcji wzajemnie jednoznacznej $f : X \xrightarrow{1-1} Y$ można określić funkcję

$$f^{-1} : Y \to X \text{ taką, że}$$

$$\forall x \in X, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

którą nazywa się *funkcją odwrotną*.

Własności funkcji odwrotnej:

1^0 $(f^{-1})^{-1} = f$

2^0 $f^{-1}(f(x)) = x = id_X \;\; dla \;\; x \in X$

3^0 $f(f^{-1}(y)) = y = id_Y \;\; dla \;\; y \in Y$

4^0 **Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$.**

Funkcja f^{-1} jest odwrotną do $f \Leftrightarrow$ spełnione własności 2^0 i 3^0.

Przykład

$$f(x)=x^3 \qquad f: R \xrightarrow{1-1} R.$$

Wtedy $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ **jest funkcją odwrotną funkcji** f**, bowiem**

$$\forall x \in R \;\wedge\; y \in R \qquad \left(\sqrt[3]{y}=x \Leftrightarrow x^3=y\right)$$

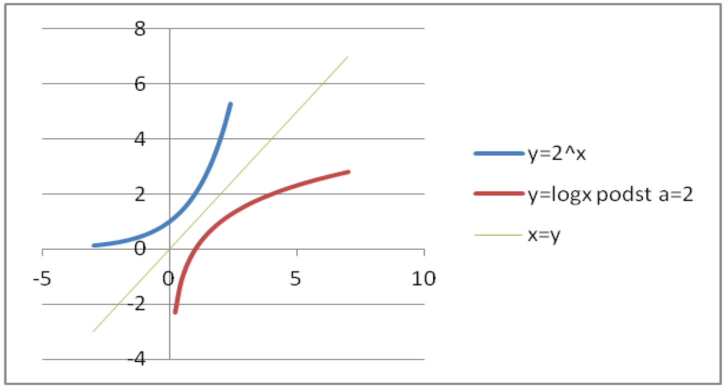
ponieważ

$$f^{-1}(f(x))=\sqrt[3]{x^3}=x \;\text{ i }\; f(f^{-1}(y))=(\sqrt[3]{y})^3=(y^{\frac{1}{3}})^3=y$$

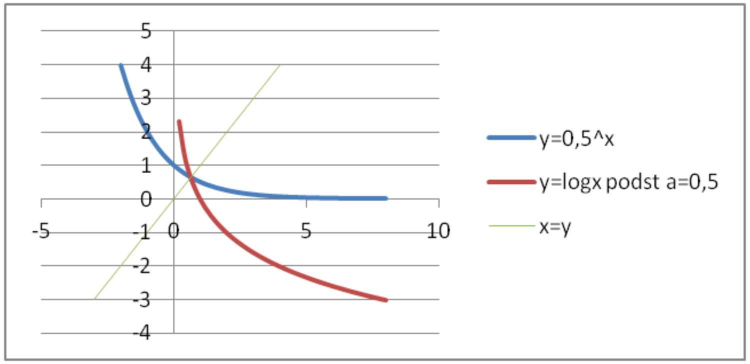
spełnione są więc własności 2^0 **i** 3^0**.**

Funkcja wykładnicza $y = a^x$ **i logarytmiczna** $y = \log_a x$ ***są względem siebie odwrotne*.**

Dla $a > 1$, **np.** $a = 2$.



Dla $0 < a < 1$ **np.** $a = 0{,}5$.



Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej *x*

$$|x| = \begin{cases} x \ \ dla\ x \geq 0 \\ -x \ \ dla\ x < 0 \end{cases}$$

Z definicji wynika, że $x \leq |x|$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *r*, *s*, zachodzi:

a. $|-r| = |r|$**,**

b. $|s + r| \leq |s| + |r|$**,**

c. $||s| - |r|| \leq |s - r|$**,**

d. $|s - r|$ **jest odległością pomiędzy punktami *r* oraz *s* na prostej rzeczywistej,**

e. $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$**,**

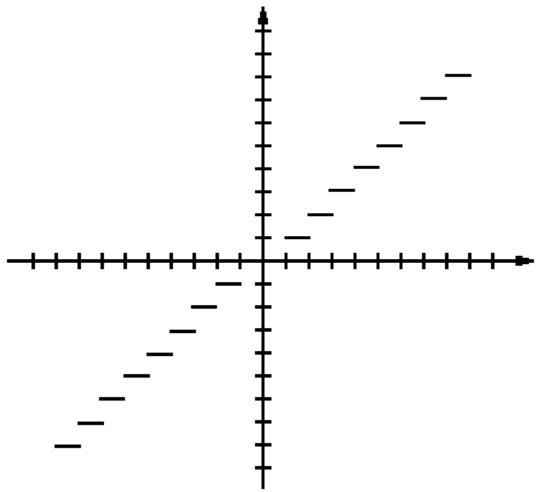
f. $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$**.**

Funkcje zaokrąglające do liczb całkowitych

Częścią całkowitą **liczby rzeczywistej *x* (*podłogą*):**

$\lfloor x \rfloor =$ ***największa liczba całkowita n taka, że n*** $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad x = n + r,\ 0 \leq r < 1,$$



Powała **(*sufit*) liczby rzeczywistej *x*:**

$\lceil x \rceil =$***najmniejsza z liczb całkowitych n taka, że*** $x \leq n$

$$\left\lfloor 3\frac{1}{3} \right\rfloor = 3, \quad \left\lceil 3\frac{1}{3} \right\rceil = 4, \quad \lfloor 5 \rfloor = \lceil 5 \rceil = 5$$

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$$

Funkcje okresowe i trygonometryczne

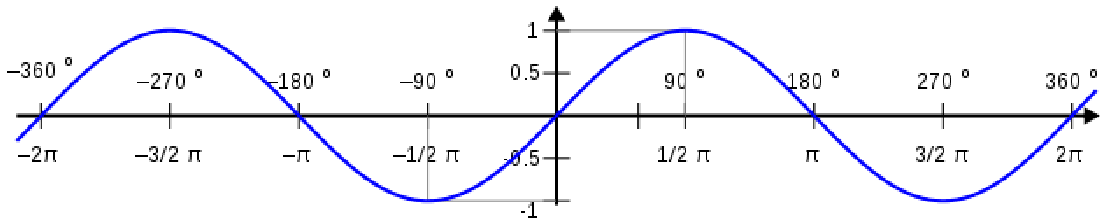
Funkcja f na zbiorze X jest *okresowa*, jeżeli

$$\exists t \neq 0,\ \forall x \in X \ \ (x+t \in X \ \wedge \ \ x-t \in X \ \wedge f(x+t) = f(x-t) = f(x)).$$

Funkcja okresowa ma nieskończenie wiele okresów.

Najmniejszy dodatni okres - *okres podstawowy*.

Funkcja sinus (*sin*)



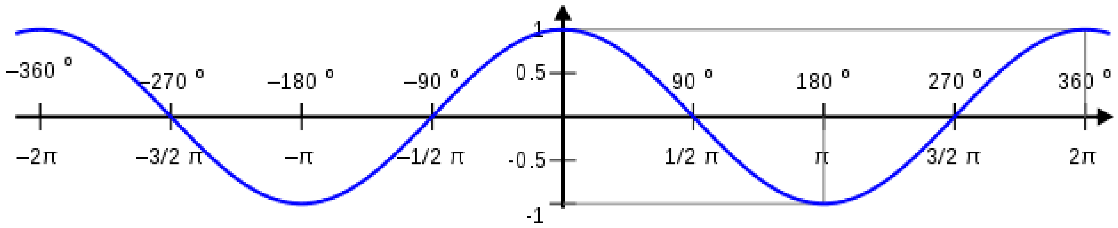
Własności:

- **dziedzina - zbiór liczb rzeczywistych,**
- **zbiór wartości (przeciwdziedzina) – przedział [-1,1],**
- **jest funkcją nieparzystą (wykres funkcji jest symetryczny względem punktu (0, 0)), tj.**

$$\forall x \in R, sin(-x) = -sin\, x$$

- **jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π (wartości funkcji powtarzają się co 2π),**
- **miejscami zerowymi są liczby postaci** $k\pi, k \in Z$,
- **funkcja *sinus* jest w I i II ćwiartce dodatnia, w III i IV ujemna.**

Funkcja cosinus (*cos*)

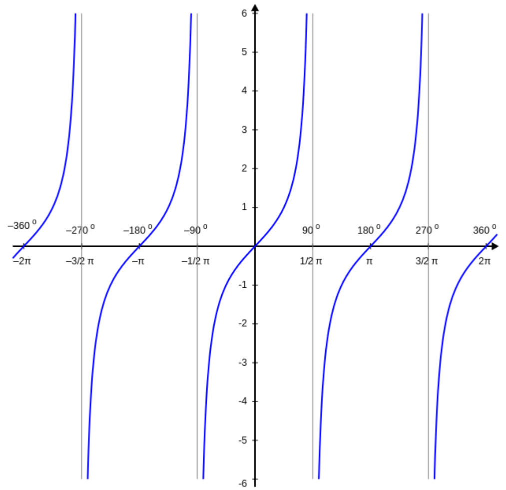


Własności:

- **dziedzina, przeciwdziedzina, okres, miejsca zerowe, znak, …**
- **jest funkcją parzystą (wykres funkcji jest symetryczny względem osi *OY*), tj.**

$$\forall x \in R, \cos(-x) = \cos x$$

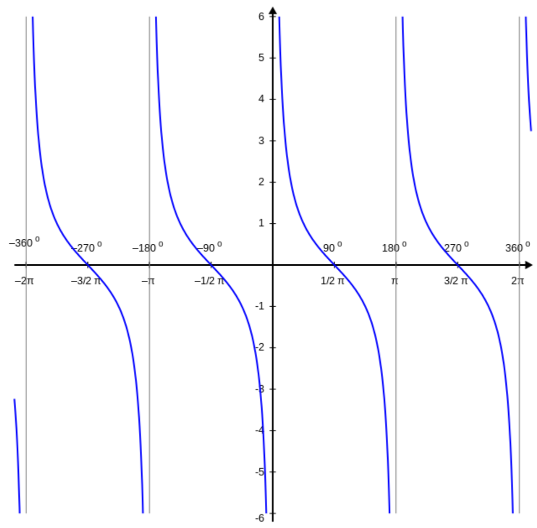
Funkcja tangens (*tg*)



Własności:

- **dziedzina - zbiór liczb rzeczywistych różnych od** $\pi / 2 + k\pi, k \in Z$ **(w tych punktach są asymptoty pionowe),**
- **zbiór wartości (przeciwdziedzina) - *R***
- **jest funkcją nieparzystą,**
- **jest funkcją okresową o okresie podstawowym *π* (wartości funkcji powtarzają się co *π*),**
- **miejscami zerowymi są liczby postaci** $k\pi, k \in Z$**,**
- **funkcja *tangens* jest w I i III ćwiartce dodatnia, w II i IV ujemna.**

Funkcja cotangens (*ctg*)



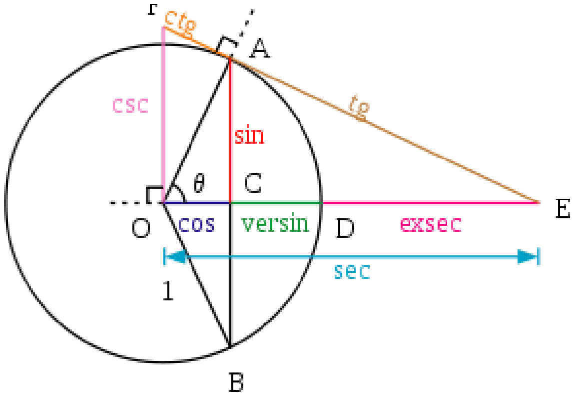
Własności:

- **dziedzina - zbiór liczb rzeczywistych …,**
- **zbiór wartości (przeciwdziedzina)**
- **jest funkcją parzystą/nieparzystą ?**
- **jest funkcją okresową ?**
- **miejscami zerowymi są …,**
- **funkcji jest dodatnia/ujemna.**

B. Definicja funkcji trygonometrycznych na okręgu jednostkowym

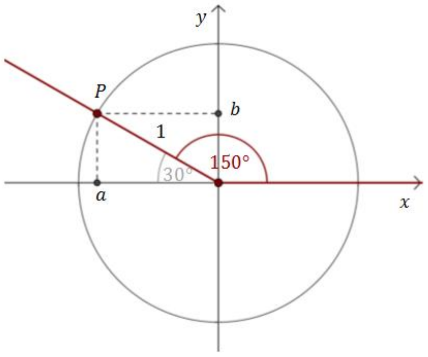
Jeżeli wokół wierzchołka kąta poprowadzimy okrąg o promieniu 1, to funkcje trygonometryczne kąta ostrego *Θ* są długościami odpowiednich odcinków:

$$\sin\Theta = |AC|, \qquad \cos\Theta = |OC|.$$
$$tg\Theta = |AE|, \qquad ctg\Theta = |AF|.$$



<u>Przykład.</u>

Obliczyć: sin150°, cos150°



Funkcje cyklometryczne
(odwrotne do trygonometrycznych)

Funkcja *arcsin*

Rozpatrujemy funkcję

$$y = \sin x\,,\ \text{dla}\quad x \in [-\tfrac{1}{2}\pi\,,\tfrac{1}{2}\pi].$$

W tym przypadku $y \in [-1\,,1]$. **Wobec tego**

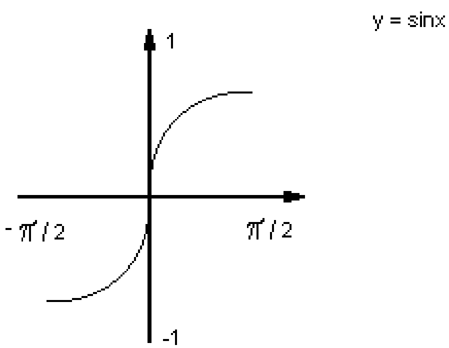
$$\sin:\ [-\tfrac{1}{2}\pi\,,\tfrac{1}{2}\pi] \xrightarrow{1-1} [-1\,,1].$$

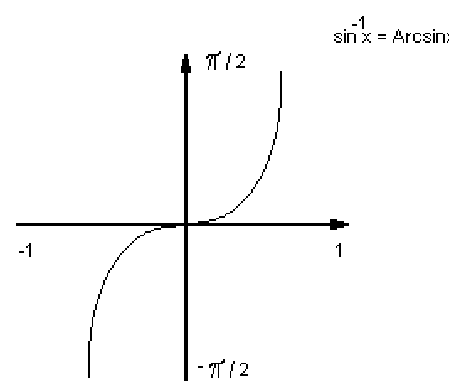
Funkcję odwrotną do funkcji *sin,* tj.

$$\sin^{-1} = \arcsin:\ [-1\,,1] \to [-\tfrac{1}{2}\pi\,,\tfrac{1}{2}\pi]$$

definiuje się następująco:

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x\,,\quad x \in [-1\,,1]\,,\quad y \in [-\tfrac{1}{2}\pi\,,\tfrac{1}{2}\pi].$$





Funkcja arccos

Niech

$$y = \cos x\,,\ \text{dla}\ \ x \in [0\,,\pi] \quad y \in [-1\,,1],\ \text{więc}$$

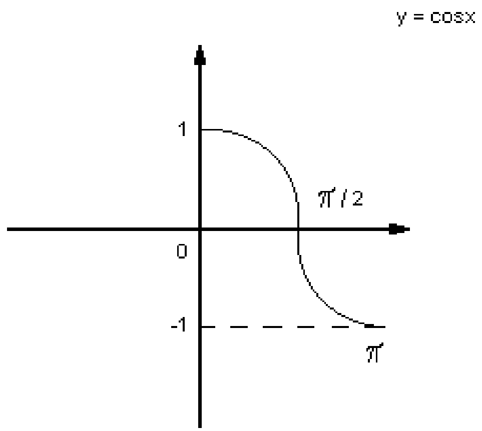
$$\cos:\ [0\ ,\pi] \xrightarrow{1-1} [-1\,,1].$$

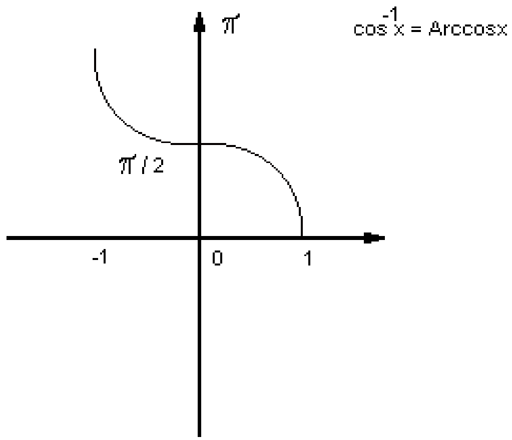
Stąd

$$\cos^{-1} = \arccos:\ [-1\,,1] \to [0\,,\pi]$$

jest funkcją odwrotną funkcji *cos*, którą definiujemy

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x\,, \quad x \in [-1\,,1]\ ,\ \ y \in [0\,,\pi].$$





Funkcja *arctg*

Niech $y = tgx$.

Dla $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ wartość $y \in R$ i wobec tego

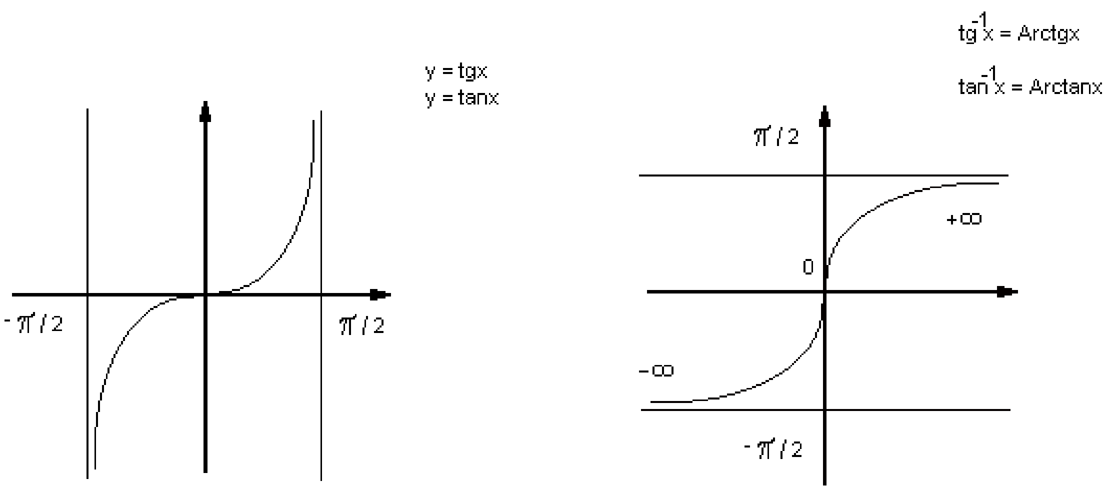
$$tg : (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \xrightarrow{1-1} R.$$

Definiujemy

$$tg^{-1} = arctg : R \to (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi),$$

która jest funkcją odwrotną funkcji *tg*, tj.

$$arctgx = y \Leftrightarrow tgy = x, \quad x \in R, \quad y \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$$



Funkcja $arcctg$

Niech $y = ctgx$.

Dla $x \in (0\,,\pi)$, wartość funkcji $y \in R$ oraz

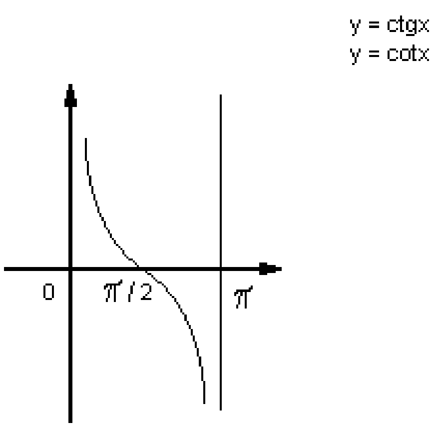
$$ctg:\ (0\,,\pi) \xrightarrow{1-1} R.$$

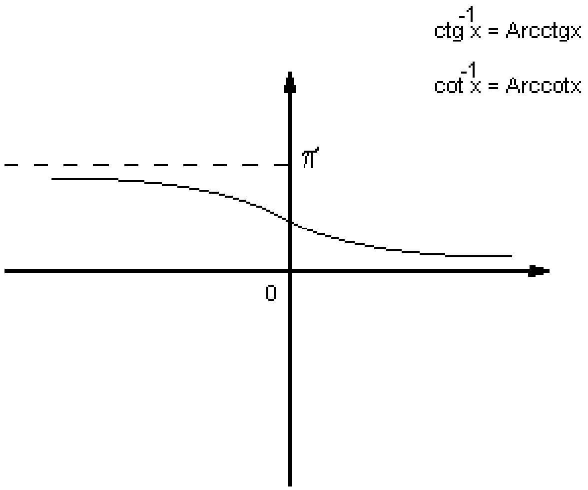
Wobec tego

$$ctg^{-1} = arcctg : R \to (0\,,\pi)$$

jest funkcją odwrotną funkcji *ctg* definiowaną następująco:

$$arcctgx = y \Leftrightarrow ctgy = x\,,\ x \in R\,,\quad y \in (0, \pi).$$





Twierdzenie (*tożsamości trygonometryczne*)

(i) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arccos x & x \geq 0 \\ \pi - \arccos x & x < 0 \end{cases}$