Twierdzenie Rolle'a, przebieg funkcji

(Analiza Matematyczna 1, wykład 7)

Pochodne wyższych rzędów

Pochodna pochodnej funkcji *f*(*x*) jest drugą pochodną tej funkcji.

Oznaczenia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2},\ f''(x),\ \ f^{(2)}(x),\ \frac{d^{(2)} f}{dx^{(2)}}.$$

<u>Przykład</u>

$f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

Podobnie definiujemy pochodne wyższych rzędów.

<u>Przykład</u>

Obliczyć *n*-tą pochodna funkcji

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{df}{dx} = 3x^2 - 4x = 1, \quad f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(1)}(x)\right) = 6x - 4$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(2)}(x)\right) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0$$

Wszystkie pochodne funkcji *f(x)* rzędu większego od *3* są równe *0.*

<u>Przykład</u>

Obliczyć *n-tą* pochodną funkcji $f(x) = \cos x$.

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(1)}(x)\right) = \frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x$$

Ciąg nieskończony

Zastosowania pochodnych

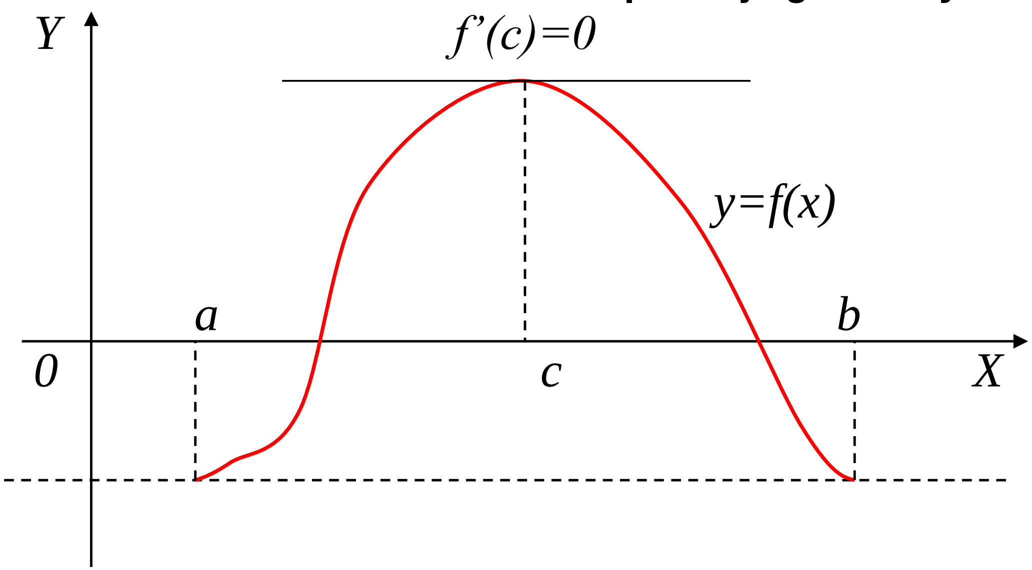
Twierdzenie *(Rolle'a)*

Jeżeli funkcja *f* jest:

- **ciągła na przedziale** $[a,b]$**,**
- **różniczkowalna na przedziale** $(a;b)$
- $f(a)=f(b)$**,**

to istnieje taki punkt $c\in(a;b)$**, że** $f'(c)=0$**.**

Interpretacja geometryczna twierdzenia



Uwaga:

Z twierdzenia Rolle'a wynika, że w przedziale $(a;b)$ ***istnieje punkt c, w którym*** $f'(c)=0$**.** ***Nie wyklucza to, że punktów takich może być więcej.***

Przykład

Zastosowanie twierdzenia Rolle'a dla funkcji $f(x)=\sin x$ **w przedziale [0, π],**

- **funkcja ciągła i różniczkowalna**
- $f(0)=f(\pi)=0$.

Istnieje więc taki punkt $c\in(0;\pi)$**, że** $f'(c)=0$**. Ponieważ** $f'(x)=\cos x$**, stąd** $c=\frac{\pi}{2}$**.**

Przykład

Zastosowanie twierdzenia Rolle'a do funkcji

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **, w przedziale [-*1,1*]**

- **funkcja ciągła i różniczkowalna w przedziale (-1,1)**
- $f(-1)=0=f(1)$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

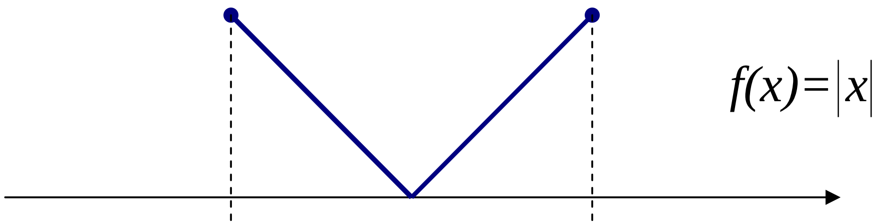
Istnieje *c*, że $f'(c)=0$

$$\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$$

Przykład

Czy można zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji

$f(x) = |x|$ **w przedziale** $[a,b] = [-2,2]$



- $f(-2) = f(2) = 2$
- ***f(x)*** **jest ciągła w przedziale** $[a,b]$

Nie można zastosować twierdzenia Rolle'a, gdyż funkcja nie jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału [*a,b*].

<u>Twierdzenie</u> ***(o przyrostach, Lagrange'a)***

Jeżeli funkcja *f* jest:

- **ciągła na przedziale domkniętym o końcach x_0 i *x*,**
- **ma pierwszą pochodną wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt *c* leżący między x_0 i *x*, że**

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

Inaczej $= f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$.

Niech

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ **-** **przyrost funkcji *f***

$\Delta x = x - x_0$ **-** **przyrost zmiennej *x***

wtedy:

$$\Delta f = f'(c)\Delta x$$

Przykład

Zastosowanie twierdzenia Lagrange'a do funkcji

$$f(x) = 2x^3 - 8x + 1 \text{ dla } a=1 \text{ i } b=3.$$

$$f(a) = f(1) = -5, \quad f(b) = f(3) = 31$$

Na mocy twierdzenia istnieje dokładnie jedna wartość *c* pomiędzy *a=1* i *b=3*, taka, że

$$f'(c) = \frac{31-(-5)}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$$

Obliczmy wartość *c*.

$$f'(x) = 6x^2 - 8$$

$$6x^2 - 8 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{13}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{13}{3}},\ x_2 = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{13}{3}} \in (1,3) \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

Wnioseki

- **Jeżeli w każdym punkcie przedziału $(a;b)$ $f'(x)=0$, to *f* jest stała na tym przedziale.**
- **Jeżeli $f'(x)>0$ w każdym punkcie przedziału $(a;b)$, to funkcja *f* jest na tym przedziale rosnąca.**

Dowód

x_1 , $x_2 \in (a;b)$, ***przy czym*** $x_1 < x_2$.

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ ***oraz*** $f'(c) > 0$, ***więc***

$f(x_2) - f(x_1) > 0$, ***czyli*** $f(x_2) > f(x_1)$.

- **Jeżeli $f'(x)<0$ w każdym punkcie przedziału $(a;b)$, to funkcja *f* jest na tym przedziale malejąca.**

Uwaga:

Warunek $f'(x)>0$ (lub $f'(x)<0$) dla każdego $x \in (a;b)$ *jest wystarczający* do tego, aby funkcja *f* była rosnąca (lub odpowiednio malejąca) na przedziale $(a;b)$.

Warunek ten nie jest jednak konieczny!

Przykład

Funkcji $f(x)=x^3$ jest rosnąca na każdym przedziale, natomiast $f'(0)=0$.

Przykład

Udowodnić, że funkcja

$$f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x$$

jest stała.

$$f'(x)=-6\cos 3x\sin 3x+6\sin 3x\cos 3x=0$$

a zatem funkcja *f(x)* jest stała.

Określamy wartość funkcji *f(x)*

$$f(0)=\cos^2 0+\sin^2 0=1$$

Stąd $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x=1.$

Wniosek

Jeżeli funkcja *f jest rosnąca (lub malejąca*) na przedziale $(a;b)$, w którym jest różniczkowalna, to $f'(x)\geq 0$ (lub odpowiednio $f'(x)\leq 0$) dla każdego $x\in(a;b)$.

Przykład

$f(x)=x^3+3x^2-7$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

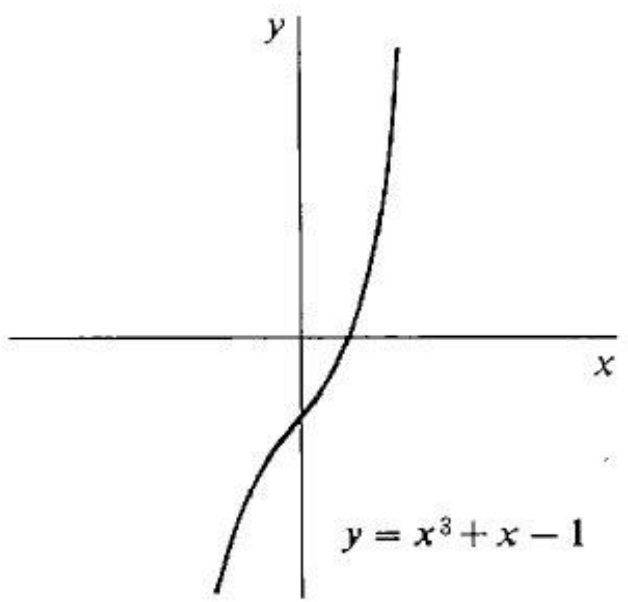
$f'(x)=0$ dla $x=0$ lub $x=-2$

$f'(x)>0$ dla $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ – funkcja jest ściśle rosnąca

$f'(x)<0$ dla $x\in(-2,0)$ – funkcja jest ściśle malejąca

Przykład

Funkcja $y(x)=x^3+x-1$ ma pochodną $y'(x)=3x^2+1>0$. Pochodna jest zawsze dodatnia, zatem funkcja jest zawsze rosnąca.



2. Ekstrema lokalne

Definicja

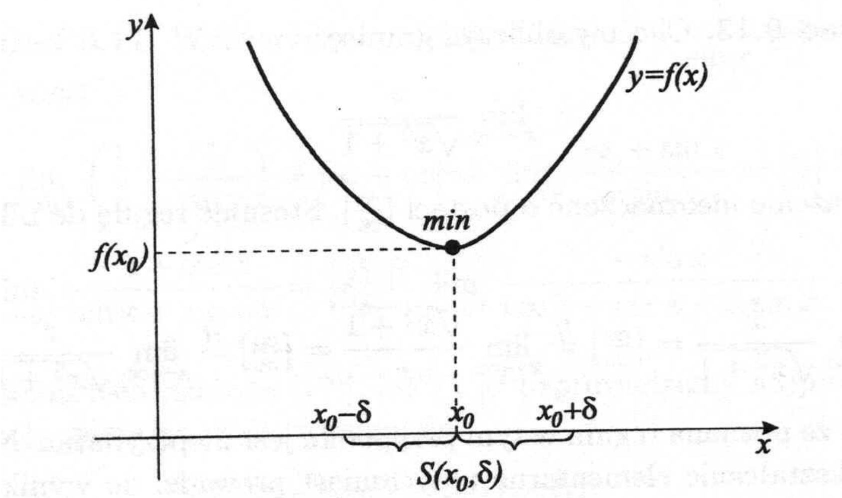
Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 *maksimum lokalne*, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0,\delta)$ takie, że $\forall x \in S$ jest spełniona nierówność:

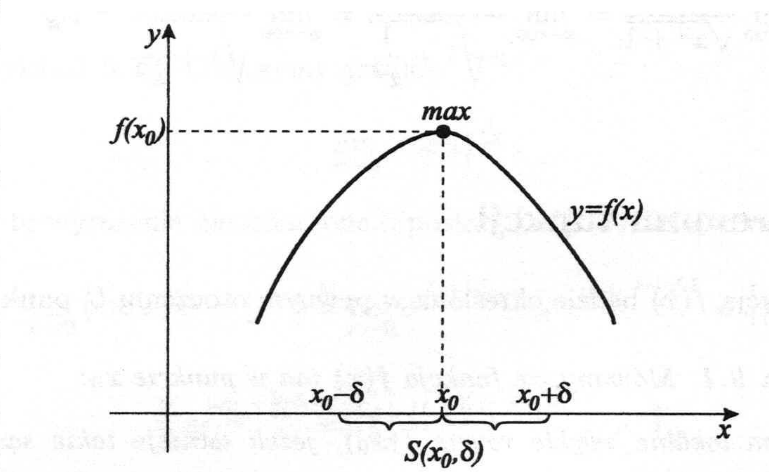
$$f(x) \le f(x_0)$$

Definicja

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 *minimum lokalny*, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0,\delta)$ takie, że $\forall x \in S(x_0,\delta)$ jest spełniona nierówność:

$$f(x) \ge (x_0)$$





Maksimum i minimum lokalne nazywamy *ekstremami lokalnymi*.

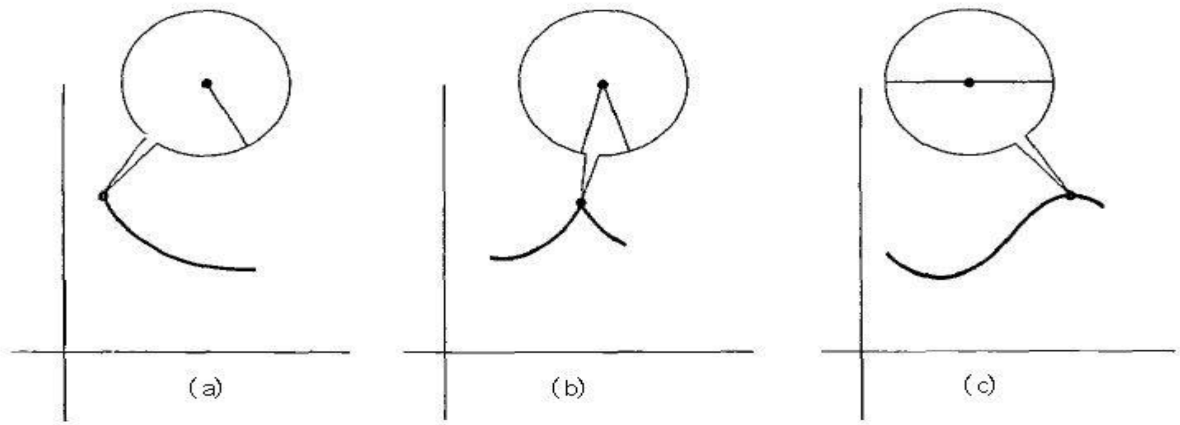
Twierdzenie (*o ekstremum funkcji ciągłej*)

Niech *f* będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $c \in D$ oraz, że *f* ma ekstremum w punkcie c. Wówczas, zachodzi jeden z poniższych wypadków:

a) punkt *c* jest punktem brzegowym *D*,

b) nie istnieje wartość pochodnej $f'(c)$,

c) $f'(c) = 0$.



Punkty, w których zachodzi warunek a) lub b) lub c) nazywamy ***punktami krytycznymi***.

Objaśnienie:

Jeśli funkcja *f* ma maksimum lub minimum w punkcie *c*, to albo *c* jest punktem krańcowym funkcji, albo istnieje "ostrze" funkcji, albo funkcja ma poziome nachylenie do osi *X*. Wobec tego, maksimum (minimum) jest albo punktem brzegowym, albo wierzchołkiem ostrza, albo wierzchołkiem "szczytu".

Twierdzenie

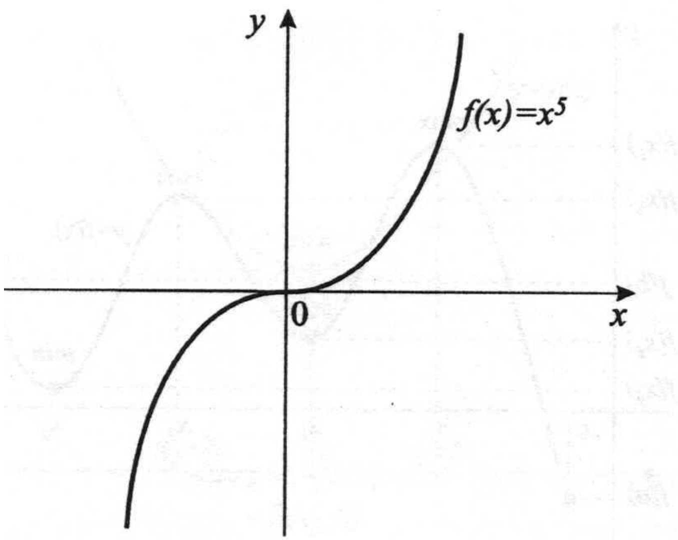
Jeżeli funkcja różniczkowalna $f(x)$ ma w punkcie c ekstremum, to $f'(c)=0$.

Przykład

$f(x) = x^5$

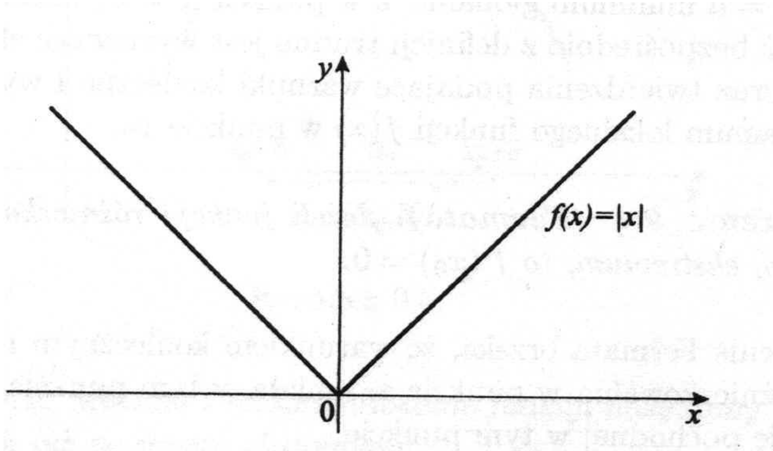
$f'(x) = 5x^4$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$, ale w punkcie $c=0$ funkcja $f(x)$ nie ma ekstremum (nie jest to więc warunek dostateczny!).



Przykład

$f(x)=|x|$



Pochodna tej funkcji w punkcie x=0 nie istnieje, ale f_{min}=0 (przypomnienie: w punkcie 0 pochodna nie istnieje!).

Uwaga 1.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie c i $f'(c)\neq 0$, to funkcja $f(x)$ nie ma w punkcie c ekstremum.

Uwaga 2.

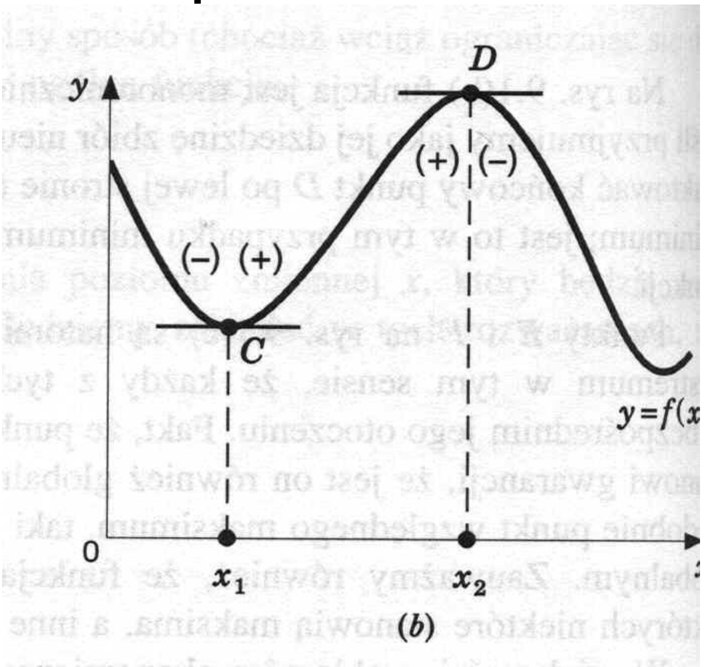
Funkcja $f(x)$ może mieć (ale nie musi) ekstremum tylko w punktach, w których pochodna *nie istnieje* albo *jest równa* 0.

<u>Twierdzenie</u> (*warunek wystarczający istnienia ekstremum*)

Jeżeli funkcja *f*(x) jest w punkcie x_0 ciągła, różniczkowalna i <u>pochodna</u> *f'*(x) zmienia znak w sąsiedztwie tego punktu, to *f* ma w punkcie x_0 ekstremum i jest to:

- ***maksimum*, gdy zmienia się znak + na -**
- ***minimum*, gdy zmienia się znak - na +**

Jeśli pochodna funkcji *f'*(x) ma stały znak w sąsiedztwie x_0, to funkcja *f*(*x*) w tym punkcie nie posiada ekstremum.



Przykład

Wyznaczyć ekstremum i przedziały monotoniczności funkcji:

$$f(x)=x^3-12x^2+36x+8$$

1. $D_f = R$
2. $f'(x)=3x^2-24x+36, \quad D_{f'} = R$
3. $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-24x+36=0 \Rightarrow x^2-8x+12=0,\ x_1=2,\ x_2=6$
4. $f'(x)>0 \Rightarrow x^2-8x+12>0 \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$
5. $f'(x)<0 \Rightarrow x^2-8x+12<0 \Rightarrow x\in(2,6)$

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,6)$	6	$(6,\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	max	$\downarrow$	min	$\uparrow$

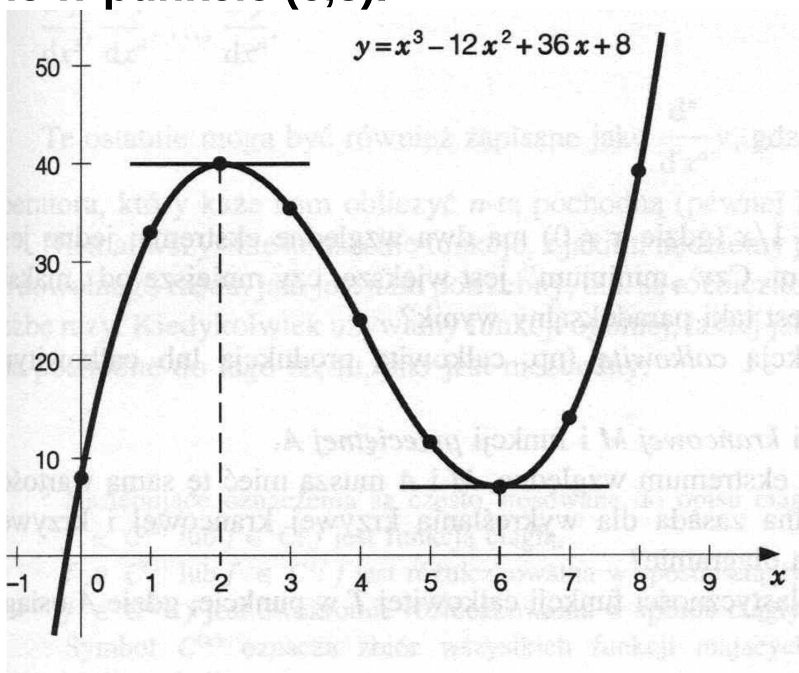
Dla x=2 mamy maksimum lokalny $f_{max}=f(2)=40$,

Dla x=6 mamy minimum lokalny $f_{min} = f(6)=8$,

x	(-∝,2)	2	(2,6)	6	(6,∝)
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	max	↓	min	↑

Podsumowanie:

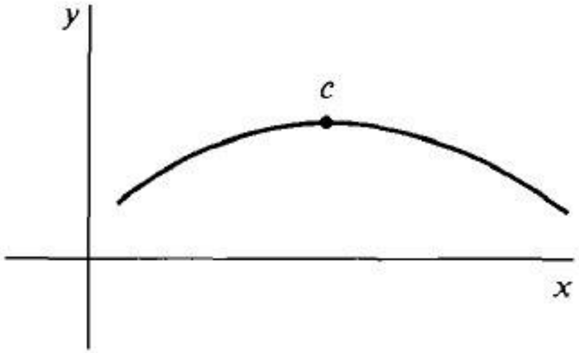
- ***f*** **rośnie w przedziałach (-∝,2) oraz (6,∝) i maleje w przedziale (2,6),**
- ***f*** **ma maksimum lokalne w punkcie (2,40).**
- ***f*** **ma minimum lokalne w punkcie (6,8).**



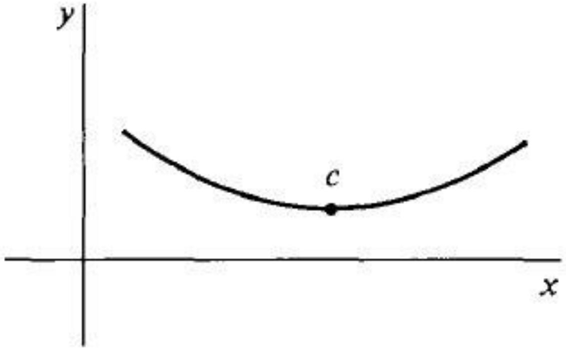
Test drugiej pochodnej

Załóżmy, że *c* jest punktem krytycznym funkcji *f* oraz $f'(c)=0$. Jeżeli

- $f^{(2)}(c)<0$**, to *f* ma w punkcie *c* maksimum.**
- $f^{(2)}(c)>0$**, to *f* ma w punkcie *c* minimum.**



(i) $f''(c)<0$, max



(ii) $f''(c)>0$, min

Algorytm wyznaczania ekstremów

Krok 1: Obliczenie pochodnej funkcji *f*.

Krok 2: Wyznaczenie punktu krytycznego *c*.

Krok 3: Sprawdzenie, czy jest to ekstremum - stosujemy test bezpośredni lub drugą pochodną.

Przykład

$$f(x)=x^3/3-4x^2+12x+8$$

$f'(x)=x^2-8x+12$

$$\Delta = 64-48=16, \quad x_1=6, \; x_2=2$$

$f''(x)=2x-8$

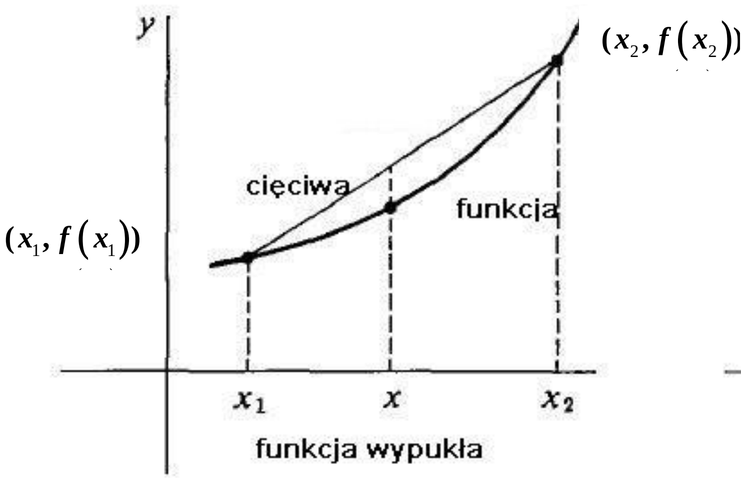
$$f''(6)=4>0 \Rightarrow x_1=6 \text{ - minimum,}$$

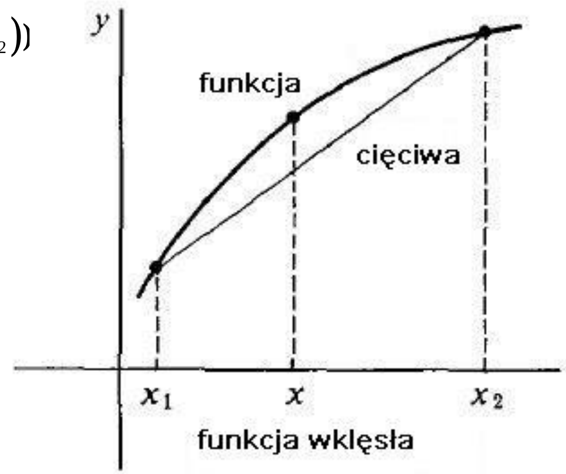
$$f''(2)=-4<0 \Rightarrow x_2=2 \text{ - maksimum.}$$

Druga pochodna i kształt funkcji

Funkcja $f\left(x\right)$ jest <u>wypukła</u>, jeśli dla dowolnych punktów $x_1 < x_2$ wykres funkcji jest poniżej cięciwy łączącej punkty $(x_1, f\left(x_1\right))$, $(x_2, f\left(x_2\right))$.

Funkcja $f\left(x\right)$ jest <u>wklęsła</u>, jeśli dla dowolnych punktów $x_1 < x_2$ wykres funkcji jest powyżej cięciwy łączącej punkty $(x_1, f\left(x_1\right))$, $(x_2, f\left(x_2\right))$.





Twierdzenie

Załóżmy, że funkcja *f* jest ciągła i ma drugą pochodną w każdym punkcie pewnego przedziału. Jeżeli

- **$f^{(2)}\left(x\right) > 0$, to funkcja jest wypukła,**
- **$f^{(2)}\left(x\right) < 0$, to funkcja jest wklęsła.**

<u>Przykład 6</u>. $f(x) = x^3 + x - 1$

Obliczmy pierwszą i drugą pochodną.

$$f'(x) = 3x^2 + 1, \quad f^{(2)}(x) = 6x.$$

Pierwsza pochodna jest zawsze dodatnia, $f^{(2)}(x) = 0$ **dla** $x = 0$**.**

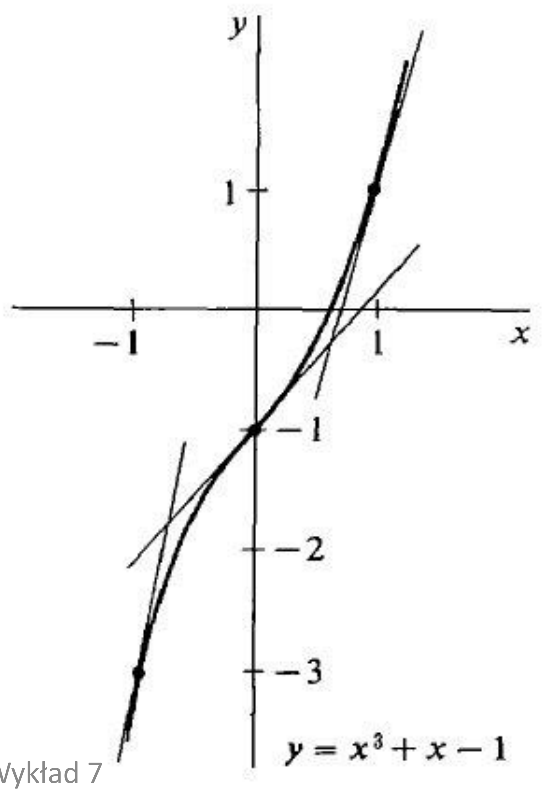
Tworzymy tabelkę dla *x* oraz obu pochodnych:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(2)}(x)$
<0	<-1	>0	<0
0	-1	1	0
>0	>-1	>0	>0

Wnioski:

1. **Ponieważ** $f'(x) > 0$ **funkcja jest rosnąca.**
2. $f^{(2)}(x) < 0$**, dla** $x < 0$**; funkcja jest wklęsła.**
3. $f^{(2)}(x) > 0$**, dla** $x > 0$**; funkcja jest wypukła.**

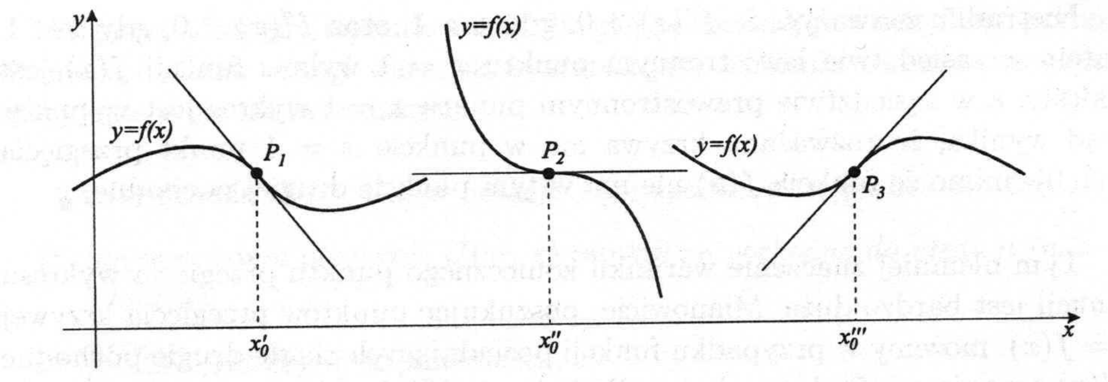
W punkcie $x = 0$ **funkcja zmienia się z wklęsłej na wypukła. Taki punkt nazywamy *punktem przegięcia*.**



3. Punkty przegięcia funkcji

<u>Definicja</u>

Punkt (x_0,$f(x_0)$) nazywamy *punktem przegięcia* funkcji $f(x)$, jeżeli jest ona ciąga w punkcie x_0 oraz wklęsła w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 i wypukła w pewnym prawostronnym jego sąsiedztwie, albo na odwrót.



<u>Twierdzenie</u> (*warunek konieczny*)

Warunkiem koniecznym na to, aby punkt (x_0, $f(x_0)$) był punktem przegięcia funkcji $f(x)$, jest

$$f^{(2)}(x_0)=0.$$

<u>Twierdzenie</u> (*warunek wystarczający*)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w x_0, dwukrotnie różniczkowalna w sąsiedztwie tego punktu i druga pochodna funkcji $f(x)$ zmienia znak przy przejściu przez x_0, to punkt (x_0,$f(x_0)$) jest punktem przegięcia $f(x)$.

Przykład

Wyznaczyć punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = x^4e^{-x}$$

$f'(x)=4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}=(4x^3 - x^4)e^{-x}$

$f^{(2)}(x)=(12x^2-4x^3)e^{-x}-(4x^3-x^4)e^{-x} =(x^4-8x^3+12x^2)e^{-x}=x^2(x^2-8x+12)e^{-x}$

$f^{(2)}(x)=0$ dla $x=0$, $x=2$, $x=6$.

$f^{(2)}(x)<0$ dla $(x^2-8x+12)<0 \Rightarrow x\in(2,6)$

$f^{(2)}(x)>0$ dla $(x^2-8x+12)>0 \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$, $x\neq 0$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,6)$	6	$(6,\infty)$
$f''(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	0	$\cup$	*p.p.*	$\cap$	*p.p.*	$\cup$

$f(2)=16e^{-2}$, $f(6)=6^4e^{-6}$.

Odpowiedź

Punkty $(2,16e^{-2})$ oraz $(6,6^4e^{-6})$ są punktami przegięcia funkcji.

Ogólny schemat badania przebiegu funkcji

I. Analiza funkcji.

- **Dziedzina funkcji.**
- **Szczególne własności funkcji: parzystość, nieparzystość, okresowość itp.**
- **Punkty przycięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.**
- **Ustalenie znaku funkcji.**
- **Granice funkcji na końcach przedziałów określoności.**
- **Punkty nieciągłości funkcji.**
- **Asymptoty.**

II. Analiza pierwszej pochodnej.

- **Obliczamy pierwszą pochodną.**
- **Dziedzina pierwszej pochodnej i jej punkty nieciągłości.**
- **Przedziały monotoniczności.**
- **Ekstrema lokalne funkcji.**

III. Analiza drugiej pochodnej.

- **Obliczamy drugą pochodną.**
- **Dziedzina drugiej pochodnej i jej punkty nieciągłości.**
- **Przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji.**
- **Punkty przegięcia wykresu funkcji.**

IV. Ostateczny szkic wykresu funkcji.

Przykład

Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$

1. Dziedzina funkcji: X= $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty$$

2. Asymptoty:

- ***Wykres funkcji ma asymptotę pionową o równaniu x=1***

$$\lim_{x\to1-} y=+\infty,\quad \lim_{x\to1+} y=+\infty$$

- ***Asymptoty pochyłe i poziome:***

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\quad\Rightarrow\quad m=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=1=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right]\Rightarrow k=1$$

Wykres funkcji posiada asymptotę pochyłą obustronną o równaniu:

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

3. *Analiza pierwszej pochodnej*

$$f'(x) = \frac{1}{2} \bullet \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2}{2(x-1)^3}(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \quad dla \quad x_1 = 0,\, x_2 = 3$$

- ***w punkcie*** $x_1 = 0$ ***nie ma ekstremum*, bo f ′(x) >0**
  w otoczeniu $x_1 = 0$ (pochodna nie zmienia znaku!)
- ***w punkcie*** $x_2 = 3$ ***jest minimum lokalne*, bo**

$$f'(x) < 0 \quad dla \quad x < 3$$
$$f'(x) > 0 \quad dla \quad x > 3$$

$$y_{\min} = f(3) = \frac{27}{8}$$

- $f'(x) > 0 \; dla \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$
  funkcja rosnąca
- $f'(x) < 0 \; dla \quad x \in (1, 3)$, ***funkcja malejąca***

4. *Analiza drugiej pochodnej*

$$f''(x)=\frac{3x}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)<0 \qquad dla \quad x\in(-\infty,0)$$

$$f''(0)=0$$

$$f''(x)>0 \qquad dla \quad x\in(0,1)$$

$$f''(x)>0 \qquad dla \quad x\in(1,+\infty)$$

Funkcja jest:

- ***wypukła** w przedziałach (0,1) i (1,+∞)*
- ***wklęsła** w przedziale* $(-\infty,0)$

Punkt (0,0) jest punktem przegięcia.

Przebieg zmienności funkcji

x	$-\infty$	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	3	$\ldots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	**0** ***p.p.***	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{8}$ ***min.***	$\nearrow$	$+\infty$