Przykład 1 Niech $W = \text{lin}([1,5,1,1],[4,2,0,-1])$. Znaleźć układ równań liniowych opisujących podprzestrzeń W przestrzeni $\mathbb{R}^4$

Wsk do 6.3, 6.4

R) Weźmy dowolny wektor $[x,y,z,t] \in W$. Wtedy istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ t. że

$$[x,y,z,t] = a[1,5,1,1] + b[4,2,0,-1]$$

$$\begin{cases} a + 4b = x \\ 5a + 2b = y \\ a = z \\ a - b = t \end{cases}$$

Eliminujemy z układu a i b

$a = z$
$b = z - t$, bo $b = a - t$

$$\begin{cases} z + 4(z-t) = x \\ 5z + 2(z-t) = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z - 4t - x = 0 \\ 7z - 2t - y = 0 \end{cases}$$

odp $W = \begin{cases} -x + 5z - 4t = 0 \\ -y + 7z - 2t = 0 \end{cases}$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\text{rz} A = \text{rz} U = 2$$

Przykład 2 Znaleźć możliwie najmniejszy układ generatorów danej podprzestrzeni $W = \text{lin}([1,5,7,8],[3,7,5,0],[3,8,7,3])$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Wskazówka do 6.5

(R)

$$r\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \overset{I_w(-3)+II_w}{} \\ \overset{I_w(-3)+III_w}{} \end{matrix} r\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \end{bmatrix} \begin{matrix} II_w(-\frac{1}{8}) \\ = \\ III_w(\frac{1}{7}) \end{matrix} r\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \overset{II_w+III_w}{=}$$

operacje tylko na wierszach

$$= r\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{II_w(-5)+I_w}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$

trzeci wektor jest kombinacją pozostałych wektorów

odp $W = \text{lin}([1,0,-3,-7],[0,1,2,3])$.

6.8 a) $v=[a,b]$ $\mathcal{B}=([4,5],[1,3])$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ $\det\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\neq 0$

R $[a,b]=x[4,5]+y[1,3]$ i wyznaczamy x, y

$$\begin{cases}4x+y=a\\ 5x+3y=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3a-b}{7}\\ y=\dfrac{-5a+4b}{7}\end{cases}$$

odp $[a,b]=\dfrac{3a-b}{7}[4,5]+\dfrac{-5a+4b}{7}[1,3]$

Przykład 3 Wyznaczyć jedną z baz podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie

Wzór do 6.8

$$W = \begin{cases} x - y + 3z - 3t = 0 \\ 4x - 4y + 11z - 8t = 0 \end{cases}$$

R $r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 11 & -8 \end{bmatrix} \overset{I w(-4) + II w}{=} r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 2 = r(A) = r(U)$

Z tw. Kroneckera-Capellego układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $4 - 2 = 2$ parametrów (4 - liczba niewiadomych, 2 - rząd $A = r\, U$)

Przekształcamy układ W do postaci

$$\begin{cases} x - y + 3z - 3t = 0 \\ -z + 3t = 0 \end{cases}$$

niech $t = \alpha$, $y = \beta$ } parametry wzoru

$$\begin{cases} x = \beta - 3(3\alpha) + 3\alpha = -6\alpha + \beta \\ z = 3\alpha \\ t = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6\alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = 3\alpha \\ t = \alpha \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odp $W = \mathrm{lin}([-6, 0, 3, 1], [1, 1, 0, 0])$