CIAGI

(Analiza Matematyczna 1, wykład 3)

Ciągi

Ciąg **jest funkcją określoną na zbiorze (lub podzbiorze) liczb naturalnych.**

Rozpatrywać będziemy ciągi o wartościach rzeczywistych.

Ciąg może być nieskończony lub skończony.

Oznaczenia:

$$a(n) = 2n - 1, \qquad b_n = 2^{n-1} + 3n,$$

Przykład.

$$a_n = 2^n + 1, \qquad a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 17, \ldots$$

Ciąg może być zadany *rekurencyjnie* (zależność rekurencyjna oraz warunki początkowe).

$$a_n = a_{n-1} + 12, \text{ (}n\text{>1 oraz } a_1 = 4\text{).}$$

<u>Przykład</u>

Wyznaczyć czwarty wyraz ciągu

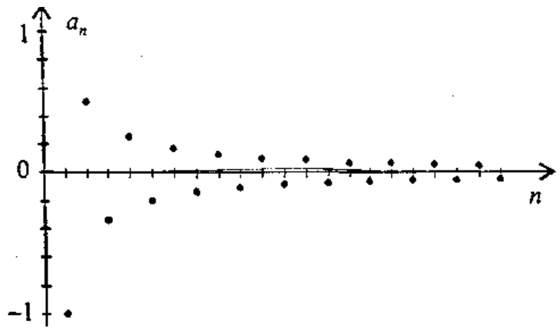
$$a_{n+1} = a_n + 2n + 2, \text{ przy czym } a_1 = 2.$$

Obliczamy kolejno:

$$a_2 = a_1 + 2\cdot 1 + 2 = 6, \quad a_3 = a_2 + 2\cdot 2 + 2 = 12, \quad a_4 = a_3 + 2\cdot 3 + 2 = 20.$$

($a_n=2a_{n-1}+1$, $a_0=0$, $a_n=2^n-1$)

Skoro ciąg jest funkcją, to możemy mówić o wykresie ciągu. Składa się on z pojedynczych, izolowanych punktów.



Rozróżnia się ciągi *rosnące*, *malejące* (*monotoniczne*), itd.

Przykład.

Wykazać, że ciąg $a_n = 2^n - n$ jest rosnący.

Wystarczy pokazać, że każdy wyraz jest większy od poprzedniego, czyli $a_{n+1} - a_n > 0$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (2^{n+1} - (n+1)) - (2^n - n) = \\ &= (2^{n+1} - 2^n) - (n+1) + n = \\ &= (2 \cdot 2^n - 2^n) - 1 = 2^n - 1 \geqslant 2 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Czasem wygodniej sprawdzać, czy iloraz kolejnych wyrazów jest większy od 1.

Podobnie bada się, czy ciąg jest malejący.

Ciąg rosnący nie ma wyrazu największego, a wyrazem najmniejszym jest wyraz pierwszy. W ciągu malejącym jest na odwrót.

W ciągu nie monotonicznym szukanie największego lub najmniejszego wyrazu bywa znacznie trudniejsze.

Przykład

Wyznaczyć najmniejszy wyraz ciągu $a_n = n^2 - 19n + 4.$

Wykres ciągu jest zbiorem izolowanych punktów leżących na paraboli

$$y = x^2 - 19x + 4.$$

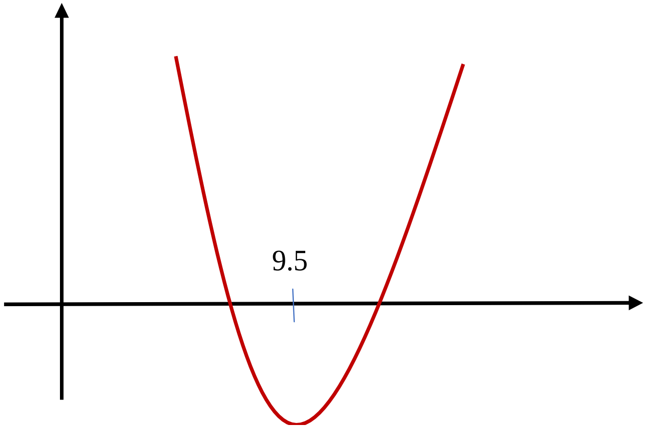
Wierzchołek tej paraboli ma współrzędną

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{19}{2} = 9,5.$$

Ponieważ badamy ciąg, więc interesują nas argumenty naturalne. Zatem

najmniejszy może być wyraz a_9 lub Łatwo sprawdzić, że

$$a_9 = a_{10} = -86.$$



Ciągi arytmetyczne

W *ciągu arytmetycznym* kolejny wyraz (oprócz pierwszego) jest sumą wyrazu poprzedniego oraz pewnej ustalonej liczby zwanej różnicą.

$$\forall n>1, \quad a_n = a_{n-1} + r, \text{ gdzie } r \in R.$$

Własności:

1. Różnica dwóch kolejnych wyrazów w ciągu arytmetycznym jest stała (jest to warunek konieczny i wystarczający).
2. Wyraz ogólny

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r.$$

3. $$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

4. Suma *n* początkowych wyrazów

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Ciągi geometryczne

W *ciągu geometrycznym* **każdy wyraz (oprócz pierwszego) jest iloczynem wyrazu poprzedniego oraz pewnej ustalonej liczby zwanej ilorazem.**

Własności:

1. **Iloraz kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego jest stały (jest to warunek konieczny i wystarczający).**
2. **Wyraz ogólny ciągu geometrycznego:**

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

3. $$a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}.$$

4. **Sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:**

$$S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1, \\ n a_1 & \text{dla } q = 1. \end{cases}$$

Granice ciągów

Kolejne wyrazy ciągu $a_n = \frac{1}{n}$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

są coraz bliższe 0. Mówimy, że przy *n* dążącym do nieskończoności ciąg a_n **dąży do zera lub też, że zero jest jego granicą. Symbolicznie zapisujemy to następująco:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

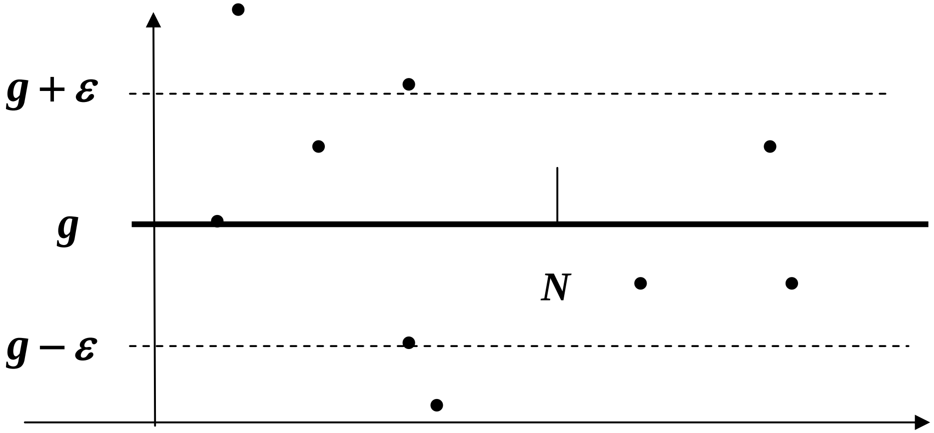
Symbol $n \to \infty$ **oznacza, że *n* dążącym do nieskończoności.**

Definicja granicy Cauchy'ego

Ciąg liczb rzeczywistych a_n ma *granicę* g wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N\ \ |a_n - g| < \varepsilon.$$
$$\Updownarrow$$
$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ (mówimy, że ciąg a_n dąży do granicy *g*).



Ciąg a_n ma *granicę skończoną g,* jeżeli dla dowolnie wybranego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n różnią się od liczby *g* o mniej niż ε.

Prawie wszystkie* oznacza *wszystkie oprócz skończenie wielu.

Przykład

Niech $a_n = \frac{1}{n}$. Korzystając z definicji granicy wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Należy wykazać, że

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N\ \ |a_n - g| < \varepsilon,$$ gdzie $a_n = \frac{1}{n}$ oraz g=0

Wybieramy dowolne $\varepsilon > 0$. Należy pokazać, że

$$\exists N, \forall n > N\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \qquad (1)$$

to znaczy

$$\exists N, \forall n > N\ \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

Po przekształceniu otrzymujemy $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Warunek (1) jest więc spełniony, gdy $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Jeżeli *N* ma być liczbą naturalną,

więc można przyjąć $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Np. dla $\varepsilon = \frac{2}{7}$, $N = \left[\frac{7}{2}\right] + 1 = 5$. Łatwo sprawdzić, że $\frac{1}{5} < \frac{2}{7}$.

Przykład

Korzystając z definicji granicy wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+3} = 0.$$

Należy wykazać, że

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N\ \ |a_n - g| < \varepsilon, \quad \text{gdzie } a_n = \frac{2}{n+3} \quad \text{oraz} \quad g=0$$

Wybieramy dowolne $\varepsilon > 0$. Należy pokazać, że

$$\exists N, \forall n > N \left| \frac{2}{n+3} - 0 \right| < \varepsilon, \qquad (1)$$

to znaczy

$$\exists N, \forall n > N \ \frac{2}{n+3} < \varepsilon,$$

Po przekształceniu otrzymujemy $n > \frac{2}{\varepsilon} - 3$.

Warunek (1) jest więc spełniony, gdy $n > \frac{2}{\varepsilon} - 3$. **Jeżeli *N* ma być liczbą naturalną, więc**

można przyjąć $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 3\right] + 1$.

Niech $\varepsilon = \frac{1}{10}$. **Wówczas** $N = \frac{2}{\frac{1}{10}} - 3 + 1 = 28.$

Ciąg a_n jest *rozbieżny do nieskończoności* (tj. $+\infty$), jeżeli dla dowolnie wybranego M prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n są większe od M, tj.

$$\forall M \in R, \exists N \in N_+, \forall n > N \quad a_n \geq M.$$

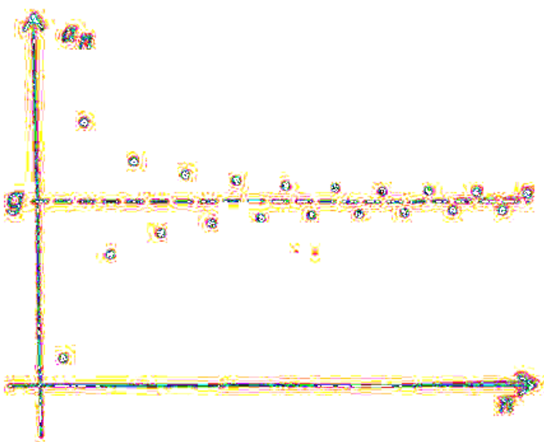
Podobnie określamy *ciągi rozbieżne do minus nieskończoności, tj.*

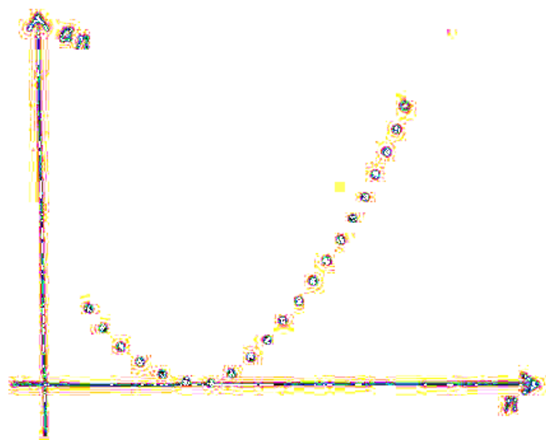
$$\forall M \in R, \exists N \in N_+, \forall n > N \quad a_n \leq M.$$

O ciągach rozbieżnych do plus albo minus nieskończoności mówimy, że mają *granicę niewłaściwą*.

Przykład

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2000} = -\infty.$$





Klasyfikacja ciągów:

1. **zbieżny do granicy skończonej,**
2. **rozbieżny do nieskończoności (inaczej zbieżny do granicy niewłaściwej),**
3. **nie mający granicy (ani zbieżny, ani rozbieżny).**

Przykład

Przykłady ciągów, które nie mają granicy (nawet niewłaściwej). np.

$$a_n = (-1)^n, \qquad a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 1,\ \ldots$$

$$a_n = (-2)^n, \qquad a_1 = -2,\ a_2 = 4,\ a_3 = -8,\ a_4 = 16,\ \ldots$$

(wyrazy parzyste dążą do $+\infty$, a nieparzyste do $-\infty$).

Własności granic

Twierdzenie 1.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ istnieją i są skończone, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$

Ponadto, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

6^0 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^k = (\lim\limits_{n\to+\infty} a_n)^k \qquad k \in Z \setminus \{0\}$

7^0 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[k]{a_n}) = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} \qquad k \in N \setminus \{1\}$

8^0 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{a_n}) = a^{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} \qquad a > 0$

$\square$

Przykład

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^3+3n^2+2} = ?$

Twierdzenie. 2. (*o trzech ciągach*)

Jeżeli dla prawie wszystkich *n* zachodzi nierówność

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g, \quad \text{to}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g. \qquad \square$$

Pewne granice : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$, dla $q > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Przykład

Obliczyć granicę ciągu $b_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n}$.

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{3^n + 4^n} \le \sqrt[n]{4^n + 4^n} = 4\sqrt[n]{2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$a_n \le \qquad b_n \le \qquad c_n$$

Zasada zupełności

Każdy zbiór liczb rzeczywistych ograniczony z góry ma kres górny i każdy zbiór liczb rzeczywistych ograniczony z dołu ma kres dolny.

Z zasady zupełności ciąg malejący i ograniczony ma kres dolny. Istnieje więc

$$q = \inf\{x_n : n = 0,1,2,\ldots\};$$

oczywiście, $q = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Twierdzenie

- **(i)** **ciąg zbieżny jest ograniczony;**
- **(ii)** **ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny;**
- **(iii)** **jeżeli** (a_n) **jest zbieżny, to ciąg** (a_n') **powstały z ciągu** (a_n) **przez przestawienie, usunięcie lub dołączenie skończonej liczby wyrazów, jest także zbieżny i ma tę samą granicę co ciąg** (a_n).

TWIERDZENIE (Bolzano-Weierstrassa)

Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

WNIOSEK.

Z każdego ciągu liczbowego można wybrać podciąg posiadający granicę (właściwą lub niewłaściwą).

Twierdzenie (o dwóch ciągach)

Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ spełniają nierówności:

1^0 $a_n \le b_n$ dla każdego $n > n_o$

2^0 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$,

to $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Natomiast, gdy ciągi $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ spełniają nierówności:

1^0 $a_n \le b_n$ dla każdego $n > n_o$

2^0 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$,

to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenie.

Jeżeli $|q|<1,\quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$ □

Przykład

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]=0+0=0.$$

Ważniejsze granice

$1^0\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad 2^0\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b}{n^\alpha}=0\quad \alpha>0\quad b\in R\qquad 3^0\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a^n=\begin{cases}+\infty & a>1\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$

$3^0\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a^{-n}=\begin{cases}0 & a>1\\ +\infty & 0<a<1\end{cases}\qquad 4^0\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\ \ \text{dla}\ a>0$

Twierdzenie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0.$$

Przykład

Obliczyć granicę ciągu

$$a_n=(1)^n\frac{2n+1}{3n^2}.$$

Liczymy granicę modułów

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{2n+1}{3n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n^2}=0.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0,$ więc korzystając z powyższego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Twierdzenie

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

PRZYKŁAD

Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = (2+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2^n}}.$$

ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = 2 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0,$$

więc korzystając z powyższego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2^n}} = 2^0 = 1.$$

Definicja liczby e.

Twierdzenie

Jeżeli a_n jest ciągiem rosnącym i ograniczonym z góry, to ma granicę właściwą.

Pokażemy, że ciąg $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ spełnia założenia powyższego twierdzenia a więc istnieje granica $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ którą oznacza się symbolem e. Wobec tego

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2{,}7182818285....... \approx \frac{878}{323}.$$

Udowodnimy, że ciąg a_n jest:

- **rosnący, tj. $a_{n+1} > a_n$ dla każdego n**
- **ograniczony, tj. $a_n<3$ dla każdego n.**

Wykażemy, że a_n jest ciągiem rosnącym.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Porównując kolejne wyrazy w obu rozwinięciach otrzymamy:

$$a_{n+1} > a_n$$

Zatem ciąg a_n jest więc rosnący. Ponadto

$$2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$//$$

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Co dowodzi ograniczoności ciągu a_n i kończy dowód istnienia liczby *e*.

Własności granic.

Jeżeli	*To*
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \begin{cases} a_n > 0 \\ a_n < 0 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \quad \begin{cases} b > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = +\infty \; i \; \lim b_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ?$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = ?$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ?$
$\lvert a_n \rvert < M \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \lvert b_n \rvert = +\infty \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ?$

Przyklady

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n^2 \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n^2 \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & dla \quad n < k \\ \frac{a_n}{b_n} & dla \quad n = k \\ \infty & dla \quad n > k \end{cases}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+2)}{n!\,n} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{3n^3 + 2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n+1)} = \frac{1}{9}$

Przykład. Wyznaczyć granice ciągów

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n+1}{3^{n+1}-2}\right)^3=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2\cdot 3^n+1):3^n}{(3^{n+1}-2):3^n}\right)^3=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)^3=\left(\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}2+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\lim\limits_{n\to+\infty}3-2\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)^3=\left(\frac{2+0}{3-2\cdot 0}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+7^n+3^n}$

$$7=\sqrt[n]{7^n}\le\sqrt[n]{2^n+7^n+3^n}\le\sqrt[n]{3\bullet 7^n}=7\sqrt[n]{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}7=7\qquad \lim_{n\to+\infty}7\sqrt[n]{3}=\lim_{n\to+\infty}7\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}=7\cdot 1=7$$

Z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+7^n+3^n}=7$.

Twierdzenie

Jeżeli ciąg $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e.$ □

Uwaga. Twierdzenie jest także prawdziwe, gdy $x_n\to-\infty$.

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Przykład

a) Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

Ponieważ

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

Z twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e,$$

stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\sqrt{e}.$$

b) Obliczyć

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4n+3}\right)^{8n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4n+3}\right)^{2(4n+3)-6}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{4n+3}\right)^{4n+3}\right)^{2}}{\left(1+\frac{1}{4n+3}\right)^{6}}=\frac{e^{2}}{(1+0)^{6}}=e^{2}$$

Symbole nieoznaczone

Dla pewnych działań na ciągach nie można z góry przewidzieć, jaka jest granica "wynikowa" mimo, że znane są granice poszczególnych ciągów.

Dla przykładu rozważmy dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ rozbieżne do $+\infty$ i zbadajmy ich różnicę $\{a_n-b_n\}$ Okazuje się, że w zależności od konkretnych ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ ich różnica może mieć granicę właściwą lub niewłaściwą lub nie mieć granicy. Mówimy wówczas, że ∞ lub $-\infty$ jest *symbolem nieoznaczonym*. Dla takiego symbolu nie możemy sformułować twierdzenia analogicznego do powyższego. Mamy siedem takich symboli nieoznaczonych:

$$\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \tfrac{0}{0},\quad \tfrac{\infty}{\infty},\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0}.$$

<u>PRZYKŁAD</u>

Dla każdego z powyższych symboli nieoznaczonych podano przykłady ciągów mających granicę, dających w wyniku wykonania wskazanych działań ciągi o różnych granicach lub bez granicy.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$	$\infty-\infty$
$a_n=n^2$	$b_n=n^2$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$
$a_n=n^2$	$b_n=n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=+\infty$
$a_n=n$	$b_n=n^2$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=-\infty$
$a_n=n$	$b_n=(n-a)$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=a \quad (\text{gdzie } a\in\mathbb{R})$
$a_n=n+(-1)^n$	$b_n=n$	$\{a_n-b_n\}$ nie ma granicy

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$	$0\cdot\infty$
$a_n = \dfrac{-1}{n}$	$b_n = n^2$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n) = -\infty$
$a_n = \dfrac{1}{n}$	$b_n = n^2$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n) = +\infty$
$a_n = \dfrac{a}{n}$	$b_n = n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n) = a$ (gdzie $a\in\mathbb{R}$)
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$	$b_n = n$	$\{a_n\cdot b_n\}$ nie ma granicy

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$	$\dfrac{0}{0}$
$a_n = \dfrac{-1}{n}$	$b_n = \dfrac{1}{n^2}$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$
$a_n = \dfrac{1}{n}$	$b_n = \dfrac{1}{n^2}$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$
$a_n = \dfrac{a}{n}$	$b_n = \dfrac{1}{n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = a$ (gdzie $a\in\mathbb{R}$)
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$	$b_n = \dfrac{1}{n}$	$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ nie ma granicy

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$
$a_n = n^2$	$b_n = n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$
$a_n = an$	$b_n = n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = a$ (gdzie$a\in\mathbb{R}$)
$a_n = n + \dfrac{(-1)^n n}{2}$	$b_n = n$	$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ nie ma granicy

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$	$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$	1^∞
$a_n = 1 + \frac{1}{n}$	$b_n = n^2$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = +\infty$
$a_n = 1$	$b_n = n$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 1$
$a_n = 1 + \frac{1}{n}$	$b_n = n$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = e$
$a_n = 1 + \frac{1}{n}$	$b_n = n \ln a$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a \quad (\text{gdzie } a > 1)$
$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$	$b_n = n$	$\{a_n^{b_n}\}$ nie ma granicy

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$	$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$	∞^0
$a_n = 2^{n^2}$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = +\infty$
$a_n = n$	$b_n = 0$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 1$
$a_n = \frac{1}{a^n}$	$b_n = \frac{-1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a \quad (\text{gdzie } a \in (0,1))$
$a_n = a^n$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a \quad (\text{gdzie } a > 1)$
$a_n = (3 + (-1)^n)^n$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\{a_n^{b_n}\}$ nie ma granicy

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$	$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$	0^0
$a_n = \frac{1}{n}$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 1$
$a_n = 0$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0$
$a_n = a^n$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a \quad (\text{gdzie } a \in (0,1))$

Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $b_n = \dfrac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$

c) $c_n = \sqrt[n]{5^n - 3^n - 2^n}$

d) $a_n = \left(\dfrac{4n}{4n+1}\right)^n$

a) 0 **b)** 0

c) $5\sqrt[n]{\left(\dfrac{12}{25}\right)} = \sqrt[n]{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^1} \le 5\sqrt[n]{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n} \le 5\sqrt[n]{1-0-0}$

d) $\left(\dfrac{4n}{4n+1}\right)^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{4n+1}{4n}\right)^n} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{4n}}} \to \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$