ALGEBRA LINIOWA 2

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w Karcie Przedmiotu.

WYKŁAD 4

Pierścień wielomianów

WIELOMIAN

Niech P będzie pierścieniem. **Wielomianem** stopnia $n \in \mathbb{N}$ nazywamy funkcję $W\colon P \to P$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_k \in P$ dla $k = 0, ..., n$ oraz $a_n \neq 0$. Liczby $a_k, k = 0, ..., n$ nazywamy **współczynnikami wielomianu** W.
Stopień wielomianu W oznaczamy symbolem st_W lub $deg(W)$.

Niech W i V będą wielomianami odpowiednio stopnia n i m. **Sumę** wielomianów W i V określamy jako

$$(W+V)(X) = W(X) + V(X).$$

Wielomian $-V$ nazywamy **wielomianem przeciwnym** do wielomianu V. Wtedy **różnicę wielomianów** W i V określamy jako

$$(W-V)(X) = (W+(-V)(X) = W(X) + (-V(X)).$$

Wtedy $st_{W\pm V} \leqslant \max\{n,m\}$.

Iloczyn wielomianów W i V określamy jako

$$(W \cdot V)(X) = W(X) \cdot V(X).$$

Wtedy $st_{W \cdot V} = n + m$.

Oczywiście suma, różnica i iloczyn wielomianów są wielomianami.

Mówimy, że wielomian Q jest **ilorazem**, a wielomian R jest **resztą** z dzielenia wielomianu W przez wielomian V, jeżeli dla każdego $x \in P$ spełniony jest warunek

$$W(X) = V(X) \cdot Q(X) + R(X)$$

oraz $st_R < st_V$. Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to mówimy, że **wielomian W jest podzielny przez wielomian V.**

PIERŚCIEŃ WIELOMIANÓW

Niech $P[X]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach z pierścienia P.

$(P[X], +, \cdot)$, gdzie działania $+$ oraz $\cdot$ są odpowiednio dodawaniem i mnożeniem wielomianów jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

$(P[X], +, \cdot)$ nazywamy **pierścieniem wielomianów.**

Wielomian z $P[X]$ oznaczać też będziemy symbolem

$$f = (a_0, a_1, ..., a_m, ...),$$

gdzie $a_0, a_1, ... \in P$, a $a_n = 0$ dla $n > m$. Wtedy m będziemy nazywać stopniem wielomianu f i oznaczamy st_f.
Ponadto $0 = (0, 0, ..., 0, ...)$ oraz $1 = (1, 0, ..., 0, ...)$.
Jeśli wielomian niezerowy jest stopnia m oraz $a_m = 1$, to wielomian taki nazywamy **unormowanym**.
Stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$.

Działania w pierścieniu $P[X]$

Niech $f = (a_0, a_1, ...), g = (b_0, b_1, ...)$. Wtedy

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$$

$$f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, ...)$$

gdzie

$c_0 = a_0 \cdot b_0,$

$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0,$

$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0,$

...

TWIERDZENIE BÉZOUT'A

Twierdzenie 4.1. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-a)$ w $P[X]$ jest równa $W(a)$.

Twierdzenie 4.2. [Bézout]. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W w $P[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$.

Twierdzenie 4.3. Wielomian stopnia n nad ciałem K ma co najwyżej n pierwiastków w K.

(Definicja ciała - Wykład 5).

Étienne Bézout (1730–1783) francuski matematyk, zajmował się głównie algebrą, a zwłaszcza metodami rozwiązywania układów równań algebraicznych każdego stopnia. Był autorem podręczników do nauki matematyki, które przez wiele lat były podstawowymi podręcznikami na Uniwersytecie Harvarda w USA. W Polsce jego imieniem zostało nazwane powyższe twierdzenie, choć nie zostało przez niego ani sformułowane ani udowodnione i było znane już wcześniej. Bézout udowodnił sformułowane przez Colina Maclaurina **twierdzenie o liczbie punktów przecięcia dwóch krzywych algebraicznych.**