Równania ruchu – kinematyka

Ruch jednostajnie przyspieszony

Załóżmy, że ciało porusza się ruchem z przyspieszeniem $a = 3\frac{m}{s^2}$, $v_0 = 1\frac{m}{s}$, droga początkowa wynosiła 10 m.

Wiemy, że: $a = \frac{dv}{dt}$

Zastosujmy rozwiązanie z równaniem różniczkowym

$$3 = \frac{dv}{dt}$$

$$3\int dt = \int dv$$

Interesuje nas zależność prędkości od czasu. Zapiszemy, więc wynik powyższego całkowania tak, aby stała C znajdowała się w równaniu po przeciwnej stronie niż prędkość.

$$v = 3t + C$$

Z warunków początkowych mamy $v_0 = 3 \cdot 0 + C$ Widać, że C = v_0.

Równanie określające zmiany prędkości w tym ruchu ma postać

$$v(t) = 3t + v_0 = v_0 + at \qquad \left[\frac{m}{s} + \frac{m}{s^2} \cdot s = \frac{m}{s}\right]$$

Przebytą drogę należy obliczyć z zależności $v = \frac{dS}{dt}$

$$\int dS = \int v(t)\, dt$$

$$S = \int (v_0 + at)\, dt$$

$$S = v_0 t + a\frac{t^2}{2} + C$$

Dla t=0 droga początkowa wynosiła S_0 = 10m

$$S(t) = S_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2} \text{ [m]}$$

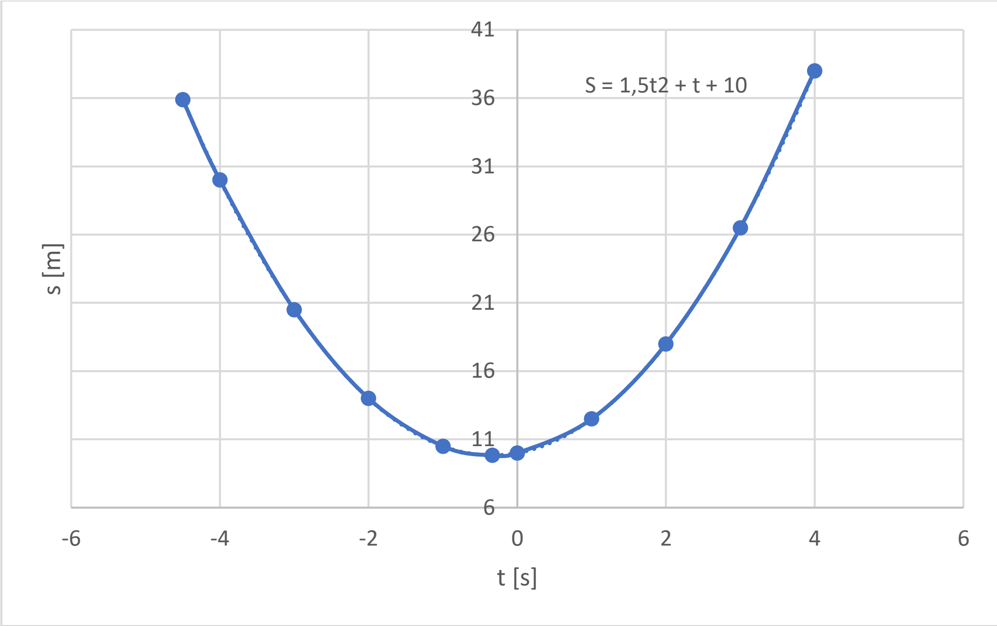
W ten sposób uzyskaliśmy równania wykorzystywane w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$v(t) = v_0 + at = 1 + 3t \text{ (zależność liniowa)}$$

$$S(t) = S_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2} = 10 + 1 \cdot t + \frac{3}{2}t^2 \text{ (zależność kwadratowa)}$$

Zadania do rozważenia

- *Wyprowadź ten sam zestaw równań dla ruchu jednostajnie opóźnionego zakładając, że* $a = -3\frac{m}{s^2}$.
- Wykres funkcji $S(t) = 10 + t + \frac{3}{2}t^2$ [m] przedstawiono poniżej



Dziedzina tej funkcji to liczby rzeczywiste. Czy wartości dla t< 0 mają interpretację fizyczną?

Ruch o niejednostajnym przyspieszeniu – zależność od czasu

Założmy, że ciało porusza się ruchem z przyspieszeniem $a = 5t \ \left[\frac{m}{s^3} \cdot s = \frac{m}{s^2}\right]$, $v_0 = 1\frac{m}{s}$, droga początkowa wynosiła 10 m.

Wiemy że: $a = \frac{dv}{dt}$

Zastosujmy rozwiązanie z równaniem różniczkowym

$$5t = \frac{dv}{dt}$$

$$5\int t\ dt = \int dv$$

Interesuje nas zależność prędkości od czasu. Zapiszemy, więc wynik powyższego całkowania tak, aby stała C znajdowała się w równaniu po przeciwnej stronie niż prędkość.

$$v = 5 \cdot \frac{1}{2}t^2 + C$$

Z warunków początkowych mamy $v_0 = 0 + C$ Widać, że C = v_0.

Równanie określające zmiany prędkości w tym ruchu ma postać

$$v(t) = 5 \cdot \tfrac{1}{2}t^2 + v_0 \qquad \left[\frac{m}{s^3} \cdot s^2 + \frac{m}{s} = \frac{m}{s}\right]$$

Przebytą drogę należy obliczyć z zależności $v = \frac{dS}{dt}$

$$\int dS = \int v(t)\ dt$$

$$S = \int \left(\frac{5}{2}t^2 + v_0\right)\ dt$$

$$S = v_0 t + \frac{5}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C$$

Dla t=0 droga początkowa wynosiła S_0 = 10m

$S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{5}{6}t^3$ [m]

W ten sposób uzyskaliśmy równania wykorzystywane w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$v(t) = \frac{5}{2}t^2 + v_0 = 1 + \frac{5}{2}t^2 \left[\frac{m}{s}\right] \text{ (zależność liniowa)}$$

$$S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{5}{6}t^3 = 10 + t + \frac{5}{6}t^3 \text{ [m] (wielomian 3-go stopnia)}$$

Ruch o niejednostajnym przyspieszeniu – zależność od prędkości

Załóżmy, że ciało porusza się ruchem z przyspieszeniem $a = \beta \cdot v$ $\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{m}{s} = \frac{m}{s^2}\right]$, prędkość początkowa wynosi v_0, droga początkowa wynosiła zero. (Zadanie z OZE zad 2.1.1.5)

W tym przypadku otrzymaliśmy następujące równania:

$$v(t) = v_0 \cdot e^{\beta t} \left[\frac{m}{s}\right] \text{ (wykładnik potęgi jest bezwymiarowy: } \frac{1}{s} \cdot s = 1 \text{)}$$

$$S(t) = \frac{1}{\beta} v_0 \left(e^{\beta t} - 1\right) \left[s \cdot \frac{m}{s} = m\right]$$

Zadania do rozważenia

- *Po jakim czasie ciało, którego prędkość opisują równania:* $v(t) = \frac{5}{2}t^2$ *oraz* $v(t) = v_0 \cdot e^{\beta t}$ *osiągnie prędkość światła?*