Matematyka Dyskretna – Lista 6 – 04-24.04.2023r.

Zasada gołębnika.

1. Jeżeli na 3 półkach znajduje się 11 książek, to na którejś z nich muszą znajdować się nie więcej niż 3 książki, a na którejś muszą leżeć co najmniej 4 książki.
2. Kabel o długości 100cm tniemy na 6 części (długości różnią się całkowitą liczbą centymetrów). Uzasadnić, że zawsze któraś z części będzie miała przynajmniej 17cm.
3. Pokazać, że wśród 5 punktów wybranych w trójkącie równobocznym o boku 1 istnieje przynajmniej jedna para punktów odległych od siebie o co najwyżej $\frac{1}{2}$.
4. Jeżeli w kwadracie o boku 2 umieścimy 5 punktów, to co najmniej dwa z nich są oddalone o nie więcej niż o $\sqrt{2}$.
5. Pokazać, że wśród 20 punktów rzuconych w trójkąt równoboczny o boku 1 znajdziemy przynajmniej trzy we wzajemnej odległości nie większej niż $\frac{1}{3}$.
6. Udowodnić, że każdy wielościan zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.
7. A jest 9-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \cdots, 30\}$. Wykazać, że w zbiorze A istnieją dwa różne podzbiory czteroelementowe o tej samej sumie elementów.
8. Studenci zdają 1 egzamin. Możliwe oceny 2,3,4. Ile musi być co najmniej studentów, abyśmy mieli pewność, że co najmniej 10 studentów będzie miało takie same oceny? A ilu musiałoby zdawać, gdyby były 3 egzaminy?
9. Pokazać, że dwa dowolne prostopadłościany można ułożyć jeden na drugim tak, aby nic nie wystawało.
10. Ze zbioru $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ wybieramy $n + 1$ różnych liczb. Pokazać, że
    (a) istnieje para liczb, których suma wynosi $2n + 1$,
    (b) istnieje para liczb względnie pierwszych,
    (c) istnieje para liczb, w których jedna z liczb dzieli drugą.
11. Pokazać, że wśród dowolnych n liczb naturalnych istnieje podzbiór, którego suma elementów dzieli się przez n.
12. Rzucamy dwiema kostkami. Przy ilu rzutach można mieć pewność, że:
    a) na obu kostkach będzie taka sama liczba oczek,
    b) powtórzy się suma oczek.
13. Wybieramy 10 rożnych liczb naturalnych $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$ spośród $0, 1, 2, \cdots, 100$. Pokazać, że w zbiorze $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$ można wybrać dwa rozłączne podzbiory o tej samej sumie elementów.

Zasada włączania i wyłączania.

14. W pewnej klasie 20 uczniów zdaje maturę z matematyki, 16 z geografii i 14 z fizyki. Ilu jest uczniów w tej klasie, jeżeli każdy z nich zdaje maturę przynajmniej z jednego z przedmiotów, nikt nie zdaje matury z wszystkich z trzech przedmiotów, 10 uczniów zdaje matematykę i fizykę, 6 matematykę i geografię, a 4 fizykę i geografię.
15. Spośród 100 studentów 50 uczy się francuskiego, 40 łaciny, a 20 obu tych języków. Ilu z nich nie uczy się ani francuskiego, ani łaciny?
16. W pewnym klubie jest 10 osób grających w szachy, 15 grających w brydża i 12 w pokera. Spośród nich 5 gra w szachy i brydża, 3 w szachy i pokera, a 2 we wszystkie gry. Ile osób jest w tym klubie?
17. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 70 i względnie pierwszych z 70.
18. Ile liczb naturalnych z przedziału od 1 do 250 jest podzielnych przez co najmniej jedną z cyfr 2,3,5,7?