ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 10

Układy równań liniowych
Wzory Cramera
Twierdzenie Kroneckera-Capellego
Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania układów równań liniowych

- rozwiązanie równań macierzowych,
- zagadnienia optymalizacyjne, (np. w programowaniu liniowym),
- rozwiązanie liniowych układów elektrycznych (np. wyznaczanie układów zastępczych),
- analiza małosygnałowa układów elektronicznych, (teoria obwodów wymaga rozwiązywania dużych układów równań),
- reprezentacja układów dynamicznych, macierzy transmitancji,
- wyrażanie zależności między natężeniem i napięciem prądu w obwodach prądu przemiennego, (np. opór elektryczny).

UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH

Niech dany będzie układ;

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

układem m ***równań liniowych o*** n ***niewiadomych*** lub krótko ***układem równań liniowych***. W układzie tym występują trzy typy składowych:

- **współczynniki** a_{ij}; $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$,
- **zmienne** $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
- **wyrazy wolne** $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Zapisujemy je w postaci macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Zatem układ możemy zapisać w postaci równania macierzowego:

$$A \cdot X = B.$$

Jeżeli $m = n$ oraz $\det A \neq 0$, to rozwiązaniem układu jest

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Układ równań liniowych nazywamy

- ***oznaczonym***, gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie,
- ***sprzecznym***, gdy nie ma rozwiązania,
- ***nieoznaczonym***, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeżeli macierz B jest macierzą zerową, tzn. gdy

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

to taki układ równań nazywamy ***układem jednorodnym***, w przeciwnym przypadku mówimy o ***układzie niejednorodnym***.

Układ jednorodny zawsze ma przynajmniej jedno rozwiązanie, mianowicie $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

TWIERDZENIE CRAMERA

Twierdzenie 10.1 [Cramera]. *Jeżeli układ n równań o n niewiadomych ma macierz współczynników A, której wyznacznik jest różny od zera, to jedyne rozwiązanie tego układu ma postać*

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_{x_n}}{\det A},$$

gdzie $A_{x_i}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie jej i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.*

Gabriel Cramer (1704 - 1752) szwajcarski matematyk i fizyk, uczeń Johanna Bernoulliego (1667-1748). Autor prac z zakresu teorii wyznaczników, analizy matematycznej, teorii krzywych algebraicznych oraz historii matematyki. W 1750r. podał **wzory wyrażające rozwiązanie układu równań za pomocą wyznaczników** (odkryte w 1729r. przez szkockiego matematyka Colina Maclaurina (1698-1746)).

TWIERDZENIE KRONECKERA-CAPELLEGO

Jeżeli macierz A jest macierzą współczynników układu równań liniowych, a macierz B jest jego macierzą wyrazów wolnych, to macierz

$$U = [A \mid B]$$

powstała z macierzy A przez dołączenie do niej kolumny wyrazów wolnych b nazywamy ***macierzą uzupełnioną*** układu równań liniowych.

Twierdzenie 10.2 [Kroneckera-Capellego]. *Układ m równań liniowych o n niewiadomych $A \cdot X = B$ jest układem*

1. *oznaczonym, gdy $rz(A) = rz(U) = n$.*
2. *nieoznaczonym, gdy $rz(A) = rz(U) = r < n$, przy czym układ ten jest zależny od $n - r$ parametrów.*
3. *sprzecznym, gdy $rz(A) \neq rz(U)$.*

Leopold Kronecker (1823(Legnica) - 1891) niemiecki matematyk i logik. Zajmował się algebrą, teorią liczb i teorią funkcji. Propagował arytmetyzację matematyki, którą chciał sprowadzić do arytmetyki liczb całkowitych. Od roku 1843 pracował na Uniwersytecie we Wrocławiu zajmując się teorią liczb, później przeniósł się do Legnicy. Występował przeciwko teoriom Karla Weierstrassa i George'a Cantora.

Alfredo Capelli (1855 - 1910) włoski matematyk. Jego najbardziej znanym wynikiem jest **Twierdzenie Kroneckera-Capellego**.

METODA ELIMINACJI GAUSSA-JORDANA

Aby znaleźć rozwiązanie układu równań liniowych $A \cdot X = B$ stosujemy tzw. **metodę eliminacji Gaussa - Jordana.** Polega ona na zbudowaniu macierzy uzupełnionej $U = [A \mid B]$, a następnie, poprzez operacje elementarne na wierszach, sprowadzeniu jej do macierzy $[I \mid X]$, gdzie kolumna X jest macierzą rozwiązań tego układu:

$$[A \mid B] \to [\text{operacje elementarne na wierszach}] \to [I \mid X].$$