Przykłady rozkładów zmiennej losowej dyskretnej

Zmienna losowa X ma *rozkład zero-jedynkowy*, jeżeli jej rozkład prawdopodobieństwa jest następujący:

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p=q, \qquad p\in[0,1].$$

Dla tej zmiennej losowej: $\boldsymbol{E(X)=p}$, $\quad \boldsymbol{D^2(X)=p*q}$.

$$E(X)=p*1+(1-p)*0=p,$$
$$D^2(X)=(1-p)^2p+(0-p)^2*(1-p)=p*q.$$

Przykład 7.

Klientami sklepu są kobiety i mężczyźni. Prawdopodobieństwo zakupu przez kobietę wynosi 0.6.

Zmienną losową jest płeć klienta.

Przyjmuje ona wartość 1 (sukces) w przypadku kobiety oraz 0 w przypadki mężczyzny P(X=1)=0.6.

$$E(X)=0.6, \qquad D^2(X)=0.6*0.4=0.24. \qquad +$$

Zmienna losowa X ma *rozkład dwumianowy* (Bernoulliego), jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa:

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},\quad gdzie\ k=0,1,2,\ \dots\ ,n.}$$

$$\boldsymbol{E(X)=n*p,} \qquad \boldsymbol{D^2(X)=n*p*q,\ \ (q=1-p).}$$

Z rozkładem takim mamy do czynienia, gdy:

1. **przeprowadza się *n* jednakowych prób,**
2. **dla każdej próby możliwe są dwa wyniki: sukces i porażka,**
3. **prawdopodobieństwo sukcesu wynosi *p*, a porażki *q*=1-*p*,**
4. **próby są doświadczeniami niezależnymi.**

<u>Przykład</u> 8.

Sprzedawca pewnego produktu kontaktuje się z 8 potencjalnymi klientami dziennie. Z wcześniejszych doświadczeń wynika, że prawdopodobieństwo zakupu towaru przez klienta wynosi 0.10.

Mamy w ciągu dnia 8 niezależnych prób. Każda kończy się sukcesem lub porażką. prawdopodobieństwo sukcesu (w każdej próbie) *p*=0.1, a porażki *q*=1-*p*=0.9. Wartościami zmiennej losowej *X* jest liczba sukcesów. Ma ona rozkład dwumianowy:

$$P(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},\quad gdzie\ k=0,1,2,\dots,8.$$

a) **Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie dwóch klientów zakupi towar?**

$$P(X=2)=\frac{8!}{2!(8-2)!}(0.1)^2(1-0.1)^{8-2}=0.1488.$$

b) **Jakie jest prawdopodobieństwo, że sprzedawca przeprowadzi co najmniej dwie transakcje dziennie?**

$$\boldsymbol{P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+,\ \dots\ ,+P(X=8)=0.19}$$
$$\boldsymbol{=1-P(X=0)-(X=1)}$$

c) **Jaki odsetek będą stanowiły dni, w których sprzedawca nie dokona żadnej transakcji?**

$$P(X=0)=\frac{8!}{0!(8-0)!}(0.1)^0(1-0.1)^{8-0}=0.43.$$

d) **Jaka jest średnia wielkość sprzedaży (każdego dnia)?**

$$E(X)=n*p=8*0.1=0.8.$$

+

***Rozkład Poissona* jest uogólnieniem rozkładu dwumianowego. Stosuje się go, gdy spełnione są założenia dotyczące rozkładu dwumianowego oraz**

a) **liczba prób** $n\geq 20$,

b) **prawdopodobieństwo sukcesu** $p<0.2$.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej:

$$P(X=k)=\frac{\mu^k*e^{-\mu}}{k!},\qquad gdzie\ \ \mu=E(X)=n*p,\ e=2.718$$

Przykład 9.

Wadliwość produkcji przedsiębiorstwa wynosi 3%. Sprzedano 40 sztuk wyrobów.

a) **Jaka jest średnia liczba braków w sprzedanej partii?**

$$E(X) = \mu = n * p = 40 * 0.03 = 1.2.$$

b) **Jakie jest prawdopodobieństwo, że w sprzedanej partii jest dokładnie 5 sztuk wadliwych?**

$$P(X = 5) = \frac{\mu^5 * e^{-1.2}}{5!} = 0.006.$$

c) **Jakie jest prawdopodobieństwo, że w sprzedanej partii są więcej niż 3 braki?**

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5)+, \dots, P(X = 40) =$$

$$1 - P(X \le 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) = 0.034.$$

d) **Jakie jest prawdopodobieństwo, że w sprzedanej partii są mniej niż 3 braki?**

$$P(X < 4) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) = 0.966.$$

Zmienne losowe - przykłady

Przykład 10. Rzucamy jednocześnie 3 jednakowymi monetami. Jest to pewne zdarzenie losowe.

Wynikiem, którego nie jesteśmy w stanie przewidzieć, jest jedno ze *zdarzeń elementarnych*:

$$e_1 = \{R, R, R\},\ e_2 = \{O, R, R\} \quad e_3 = \{O, O, R\} \quad e_4 = \{O, O, O\}$$

***Przestrzeń* zdarzeń elementarnych $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.**

Ponieważ prawdopodobieństwo zajścia każdego zdarzenia elementarnego jest takie same, stąd

$\boldsymbol{P(e_1) = P(e_4) = 1/8,\ P(e_2) = P(e_3) = 3/8 \quad i = 1, 2, 3, 4}$. **Niech**

$$p_i = P(e_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Na przestrzeni Ω definiujemy *zmienną losową*:

***X* – liczbę orłów wśród wyrzuconych (trzech) monet.**

Zmienna ta przyjmuje wartości: 0, 1, 2, 3. Przy czym

$$X(e_1) = 0, \quad X(e_2) = 1, \quad X(e_3) = 2, \quad X(e_4) = 3.$$

Niech $x_i = X(e_i),\ i = 1, 2, 3, 4.$

Każdą z tych wartości zmienna ta przyjmuje z pewnym prawdopodobieństwem:

$$\boldsymbol{P(X = 0) = P(e_1) = 0.125, \qquad P(X = 1) = P(e_2) = 0.375,}$$
$$\boldsymbol{P(X = 2) = P(e_3) = 0.375, \qquad P(X = 3) = P(e_4) = 0.125.}$$

***Wartość oczekiwana* zmiennej losowej:**

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i p_i = 0 * 0.125 + 1 * 0.375 + 2 * 0.375 + 3 * 0.125 = 1.5.}$$

***Wariancja*:**

$$\boldsymbol{D^2(X) = \sum_{i=0}^{4} (x_i - E(X))^2 p_i = (0 - 1.5)^2 * 0.125 + (1 - 1.5)^2 * 0.375 +}$$
$$\boldsymbol{+(2 - 1.5)^2 * 0.375 + (3 - 1.5)^2 * 0.125 = 0.75}$$

***X* jest zmienną losową dyskretną.**

PRZYKŁAD 11. **Przedsiębiorstwo, zarejestrowało w ciągu ostatnich 200 dni następującą liczbę sprzedanych mieszkań:**

L. sprz. mieszkań	l. dni	Prawdop.
0	60	*0.30=60/200*
1	80	*0.40*
2	40	*0.20*
3	16	*0.08*
4	4	*0.02*

Wyznacz prawdopodobieństwa zajścia poszczególnych zdarzeń losowych,

1. **jakie jest prawdop., że w danym dniu nie sprzeda się żadnego mieszkania,**
2. **jakie jest prawdop., że w danym dniu sprzeda się co najmniej 2 mieszkania,**
3. **jakie jest prawdop., że w danym dniu sprzeda się 1 lub 2 mieszkania,**
4. **jakie jest prawdop., że w danym dniu sprzeda się mniej niż 3 mieszkania.**

Odp. 0.3, 0.3, 0.6 0.9.

Przykład 12

Prawdopodobieństwo, że losowa wybrana osoba w Polsce spędza wieczór domu, wynosi 0.85. Jakie jest prawdopodobieństwo, że telefonując do 10 znajomych:

a) **zastaniemy wszystkich w domu,**
b) **nie zastaniemy dwóch osób,**
c) **zastaniemy nie więcej niż połowę znajomych.**

X **- zmienna losowa. Jej wartością jest liczba osób (spośród 10-ciu) spędzających wieczór w domu. Przyjmuje ona wartości ze zbiory** $\{0,1,2,\dots,10\}$**.**

Zmienna losowa *X* ma *rozkład dwumianowy* (Bernoulliego) jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa:

$$P(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}, \quad gdzie\ k=0,1,2,\dots,n.$$

Jest to wzór na prawdopodobieństwo tego, że w *n* próbach, *k* z nich zakończy się sukcesem.

Z rozkładem (procesem) takim mamy do czynienia, gdy:

1. ***przeprowadza się n jednakowych prób,***
2. ***dla każdej próby możliwe są dwa wyniki: sukces i porażka,***
3. ***prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p, a porażki q=1-p,***
4. ***próby są doświadczeniami niezależnymi.***

Cd. zadania $n = 10, \quad p = 0.85, \quad 1 - p = q = 0.15.$

a) $P(X = 10) = \dfrac{10!}{10!(10-10)!}(0.85)^{10}(0.15)^{10-10} = 0.85^{10}$

b) $P(X = 8) = \dfrac{10!}{8!(10-8)!}(0.85)^{8}(0.15)^{10-8}$

c)

$$P(X \le 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

Przykład 13

Rodzina ma troje dzieci. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród tych dzieci są:

a) dwaj chłopcy, b) trzy dziewczynki.

(Zakładamy, że chłopcy i dziewczynki rodzą się tak samo często)

***X* – zmienna losowa określająca liczbę chłopców, wśród trójki dzieci (ma rozkład dwumianowy).**

$n = 3, \quad p = 0.5, \quad 1 - p = q = 0.5.$

a) $P(X = 2) = \dfrac{3!}{2!(3-2)!}(0.5)^{2}(0.5)^{3-2} =$

b) $P(X = 0) = \dfrac{3!}{0!(3-0)!}(0.5)^{0}(0.5)^{3-0} =$

<u>Przykład</u> 14.

Badania statystyczne wykazują, że 40% Polaków korzysta z kart kredytowych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród 10 osób robiących zakupy:

a) pięciu klientów zapłaci kartą,

b) nie mniej niż dwóch zapłaci kartą,

c) żaden nie zapłaci kartą,

d) wszyscy zapłacą kartą.

***X* – zmienna losowa określająca liczbę osób spośród 10-tki płacących kartą (ma rozkład dwumianowy).**

$$n = 10, \quad p = 0.4, \quad 1 - p = q = 0.6.$$

a) $P(X = 5) = \dfrac{10!}{5!(10-5)!}(0.4)^5(0.6)^{10-5} =$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$

c) $P(X = 0) =$

d) $P(X = 10) =$

<u>Przykład</u> 15

Z badań wynika, że 40% z nowo powstałych przedsiębiorstw w Polsce „przeżywa” 5 lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z 6 nowo powstałych przedsiębiorstw przynajmniej 3, „przeżyją” 5 lat?

***X* – zmienna losowa określająca liczbę przedsiębiorstw, spośród 6-ciu, które „przeżyją” 5 lat (rozkład dwumianowy).**

$$n = 6, \quad p = 0.4, \quad 1 - p = q = 0.6.$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

Inaczej:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

<u>Zadanie 1.</u> Skuteczność rzutów osobistych Johna Black, w bieżącym sezonie, wynosi 90%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wykonując 5 rzutów,

a) **wszystkie będą celne,** 0.9^5

b) **wszystkie będą niecelne,** 0.1^5

c) **celne będą co najmniej 3 rzuty,**

d) **jakie będą wartości tych prawdopodobieństw przy 10 rzutach (2 razy więcej).**

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots + P(X = 5)}$$

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{n!}{k!\,(n5 - k)!} 0.9^k (1 - 0.9)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ \ldots\ , 5.}$$

Zmienna losowa *X* ma *rozkład dwumianowy* (Bernoulliego)

<u>Zadanie 2.</u> Z egzotycznego kraju sprowadzono większą partię płyt CD. Zbadano próbę i okazało się, że 3% ma wady. Zapakowano je w paczki po 15 sztuk. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w zakupionej przez nas paczce:

1. **wszystkie są bez wady,**
2. **bez wad jest co najmniej 13 płyt.** $\boldsymbol{P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)}$

Rozkład Poissona $P(X = k) = \dfrac{\mu^k * e^{-\mu}}{k!}, \quad gdzie \ \mu = E(X) = n * p, \ e = 2.718$

<u>Zadanie 3</u> Prawdopodobieństwo tego, że los kupiony na loterii wygrywa wynosi 0.001. Kupiliśmy 25 losów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród tych losów są:

1. **dwa wygrywające,**
2. **pięć lub 6**
3. **żaden,**
4. **co najmniej należy kupić losów, aby prawdopodobieństwo tego, że wśród nich jest 1 wygrywający wynosiło co najmniej 50%.**