ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 8

Wyznacznik macierzy, rozwinięcie Laplace’a
Macierz nieosobliwa
Operacje elementarne na macierzach
Twierdzenie Cauchy’ego

WYZNACZNIK MACIERZY

Niech A będzie macierzą kwadratową. Każdej takiej macierzy przyporządkujemy pewną liczbę $\det A$. Liczbę tę nazywamy ***wyznacznikiem macierzy*** A. (Czasem zamiennie będziemy używać symbolu $|A|$). Prawdziwe są wzory

dla macierzy stopnia 1

$$\det[a] = a,$$

dla macierzy stopnia 2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

dla macierzy stopnia 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Ostatni wyznacznik w łatwy sposób można obliczyć korzystając z tzw. ***metody Sarrusa***, polegającej na przepisaniu dwóch górnych wierszy poniżej macierzy, a następnie mnożeniu elementów na skos prawoskrętnie dodając, lewoskrętnie odejmując.

$$
\begin{array}{c}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Ten sam efekt można uzyskać stosując ***metodą Sarrusa***, polegającą na przepisaniu dwóch pierwszych kolumn po prawej stronie macierzy, a następnie mnożeniu elementów na skos prawoskrętnie dodając, lewoskrętnie odejmując.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Metoda Sarrusa służy tylko do obliczania wyznacznika macierzy stopnia 3.

Pierre Frédéric Sarrus (1798 – 1861) francuski matematyk, odkrył łatwy do zapamiętania algorytm ułatwiający **obliczanie wyznacznika macierzy trzeciego stopnia** znany obecnie jako schemat Sarrusa. Jest autorem kilku traktatów naukowych, między innymi **o całkach wielokrotnych, o równaniach z wieloma niewiadomymi, o przewidywaniu orbit komet.**

WZÓR LAPLACE’A

Niestety dla macierzy o wyższych stopniach nie możemy posłużyć się powyższymi wzorami. Bardziej uniwersalną jest metoda zwana ***wzorem Laplace'a***. Pozwala ona na **obliczanie wyznacznika macierzy kwadratowej dowolnego stopnia**. Stosując ten wzór sprowadzamy obliczanie wyznaczników macierzy wyższego stopnia do obliczania wyznaczników macierzy niższego stopnia, przy czym metodę tę przy obliczaniu wyznacznika możemy stosować wielokrotnie.

Matematyka zawdzięcza **Laplace'owi (1749-1827)** oprócz rozwinięcia teorii równań różniczkowych **(przekształcenie Laplace'a, laplasjan)** i stworzenie rachunku prawdopodobieństwa, także **twierdzenie o rozwinięciu wyznacznika (1772)**. Później zajmował się badaniem równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu oraz równań różnicowymi cząstkowych. Przy obliczaniu całek oznaczonych zastosował zespolone granice całkowania, jak również zespolone podstawienia. Ważne znaczenie miały również prace Laplace'a w dziedzinie fizyki molekularnej, ciepła, akustyki, elektryczności i optyki, (m.in. podał metodę obliczania prędkości dźwięku w powietrzu).

Wzory Laplace'a

Niech dana będzie macierz $A = [a_{ij}]$ stopnia n. Dla danego elementu a_{ij} macierzy A rozważmy macierz M_{ij} powstałą z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Liczbę

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

nazywamy ***dopełnieniem algebraicznym*** elementu a_{ij}, a $\det M_{ij}$ nazywamy ***minorem*** macierzy A (wyznaczonym przez element a_{ij}).

Wzory Laplace'a

$$\det A = a_{i1}d_{i1} + a_{i2}d_{i2} + ... + a_{in}d_{in}$$

$(= a_{i1}(-1)^{i+1}\det M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}\det M_{i2} + ... + a_{in}(-1)^{i+n}\det M_{in}),$

(rozwinięcie względem i-tego wiersza),

$$\det A = a_{1j}d_{1j} + a_{2j}d_{2j} + ... + a_{nj}d_{nj}$$

$(= a_{1j}(-1)^{1+j}\det M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}\det M_{2j} + ... + a_{nj}(-1)^{n+j}\det M_{nj}).$

(rozwinięcie względem j-tej kolumny).

Twierdzenie 8.1 [własności wyznaczników].
Dla dowolnej macierzy kwadratowej

1. *zachodzi równość* $\det A = \det A^T$,
2. *zmiana miejscami dowolnych dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak, ale nie zmienia wartości bezwzględnej wyznacznika,*
3. *pomnożenie jednego wiersza (jednej kolumny) przez liczbę* $k \in \mathbb{R}$ *różną od zera zmienia wartość wyznacznika* k*-krotnie,*
4. *dodanie wielokrotności dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) do innego wiersza (innej kolumny) nie zmienia wartości wyznacznika.*

MACIERZ OSOBLIWA

Macierz kwadratową A nazywamy ***macierzą osobliwą***, gdy

$$detA = 0.$$

W przeciwnym razie mówimy, że macierz A jest ***nieosobliwa***.

Twierdzenie 8.2 [własności macierzy osobliwej].
Dowolna macierz kwadratowa jest osobliwa, gdy zachodzi przynajmniej jeden z następujących przypadków

1. *jeżeli choć jeden wiersz (jedna kolumna) macierzy składa się z samych zer,*
2. *jeżeli macierz ma dwa jednakowe wiersze (dwie jednakowe kolumny),*
3. *jeżeli jeden wiersz (jedna kolumna) jest wielokrotnością drugiego wiersza (drugiej kolumny),*
4. *jeżeli jeden wiersz (jedna kolumna) jest kombinacją pozostałych wierszy (kolumn), tzn. sumą wielokrotności pozostałych wierszy (kolumn).*

TWIERDZENIE CAUCHY’EGO

Twierdzenie 8.3 [Cauchy'ego]. *Jeżeli macierze A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Wniosek 8.1. *Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\det(A^n) = (\det A)^n.$$

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) francuski matematyk, sprecyzował podstawy analizy matematycznej, opierając je na **pojęciach granicy i ciągłości**, jako pierwszy podał precyzyjny dowód twierdzenia Taylora. Prowadził też badania nad **teorią liczb i liczb zespolonych**, **teorią grup**, **teorią funkcji**, **zagadnieniami równań różniczkowych i wyznaczników**. Zawdzięczamy mu również kilka ważnych twierdzeń z analizy zespolonej oraz zapoczątkowanie studiów nad grupami permutacji. Zajmował się też badaniami w dziedzinie mechaniki i optyki.