

Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 5

Wielomian, pierwiastki wielomianów
Rozkład wielomianów na czynniki nierozkładalne
Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

5.1. Obliczyć sumy i różnice wielomianów:

- a) $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -1 + 5x + x^2$;
- b) $P(x) = 2x^5 - 5x^2 + x$, $Q(x) = 2x^2 - 2x + 3$;
- c) $W(z) = (1 + i)z^2 - 2z$, $V(z) = iz^3 - z^2 - 1 + 5i$.

5.2. Obliczyć iloczyny wielomianów:

- a) $P(x) = 4 - x^2$, $Q(x) = 1 + 2x^2$;
- b) $P(x) = 1 - x$, $Q(x) = x^5 + x^3 + x + 1$;
- c) $W(z) = z^2 + i$, $V(z) = (1 - i)z^3 + iz + 3 - 2i$.

5.3. Obliczyć ilorazy i reszty powstałe z dzielenia wielomianów:

- a) $P(x) = 8x^4 + 3x^2 + 5x - 6$, $Q(x) = x + 1$;
- b) $P(x) = x^3 + 27$, $Q(x) = x^2 - 3x + 9$;
- c) $W(z) = iz^3 + 2z - 1 + 3i$, $V(z) = z - 2i$;
- d) $W(z) = z^4 + 1$, $V(z) = z^2 - i$.

5.4. Nie wykonując działań obliczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q :

- a) $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x - 2$;
- b) $P(x) = x^{100} + 4x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;
- c) $P(x) = x^{99} + 5x$, $Q(x) = x^2 + 1$;

5.5. Znając jeden z pierwiastków podanych wielomianów znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

- a) $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $x_1 = -1$;
- b) $W(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, $x_1 = 2$;
- c) $W(z) = z^3 + 5iz^2 - 7z - 3i$, $z_1 = -3i$.

5.6. Znaleźć krotności pierwiastków wielomianów:

- a) $z_0 = 2$, $W(z) = z^2 - 3z + 2$,
- b) $z_0 = 0$, $W(z) = z^5 - 4z^3$,
- c) $z_0 = \sqrt{2}$, $W(z) = z^4 - 4z^2 + 4$,
- d) $z_0 = -i$, $W(z) = (z^2 + 1)^4$.

5.7. Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

- a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$,
- b) $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$,
- c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$,
- d) $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

5.8. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

- a) $x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$,
- b) $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$,
- c) $4x^3 + x - 1$,
- d) $x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

5.9. Znając niektóre pierwiastki wielomianów rzeczywistych, znaleźć pozostałe:

- a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$,
- b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$,
- c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$, $x_1 = 2 + i$.

5.10.* Obliczyć sumę kwadratów i iloczyn wszystkich pierwoastków zespolonych wielomianu

- a) $3z^5 - z^3 + z + 2$, b) $z^n + az^{n-1} + b, n \geq 3$.

5.11.* Obliczyć sumę odwrotności pierwoastków zespolonych wielomianu

- a) $3z^2 + 2z^2 - 1$, b) $z^4 - z^2 - z - 1$.

5.12. Wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

- a) $z^2 - 2iz - 10$, b) $z^4 + 5z^2 + 6$, c) $z^3 - 6z - 9$.

5.13. Podane wielomiany przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych nierozkładalnych:

- a) $W(x) = x^3 - 8$, b) $W(x) = x^4 + 16$,
- c) $W(x) = x^4 - 3x^2 + 2$, d) $W(x) = x^4 + 4$,
- e) $W(x) = x^4 + x^2 + 1$, f) $W(x) = x^6 + 27$.

5.14.* Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę zespolonych ułamków prostych:

- a) $\frac{2z}{z^2+9}$, b) $\frac{z+4}{(z+i)^2}$, c) $\frac{1}{z^2+2iz-4}$, d) $\frac{z^3-2z^2-4z-8}{z^4-16}$.

5.15. Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju:

- a) $\frac{1}{x^2(x-1)^2}$, b) $\frac{x^2}{x^3+2x^2+2x+1}$, c) $\frac{2x^2+3x-1}{x^3-x}$, d) $\frac{2x^2-6x+9}{x^4+6x^3+9x^2}$,
- e) $\frac{10x+3}{x^3+27}$, f) $\frac{x}{(x^2+1)^2}$, g) $\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$, h) $\frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}$.

5.16.* Funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

- a) $\frac{z^5-3z^2+z}{z^3+4z^2+1}$, b) $\frac{x^5+3}{x^4+4}$, c) $\frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{x^3+2x^2+3x+4}$.

ODPOWIEDZI

- 5.1.** a) suma $5x$, różnica $-2x^2 - 5x + 2$; b) suma $2x^5 - 3x^2 - x + 3$, różnica $2x^5 - 7x^2 + 3x - 3$; c) suma $iz^3 + iz^2 - 2z - 1 + 5i$, różnica $-iz^3 + (2 + i)z^2 - 2z + 1 - 5i$.
- 5.2.** a) $-2x^4 + 7x^2 + 4$, b) $-x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$, c) $(1 - i)z^5 + (1 + 2i)z^3 + (3 - 2i)z^2 - z + 2 + 3i$.
- 5.3.** a) iloraz $8x^3 - 8x^2 + 11x - 6$, reszta 0, b) iloraz $x + 3$, reszta 0, c) iloraz $iz^2 - 2z + 2 - 4i$, reszta $7 + 7i$, d) iloraz $z^2 + i$, reszta 0.
- 5.4.** a) 15, b) 6, c) $4x$.
- 5.5.** a) $x_2 = 2, x_3 = 3$, b) $x_2 = x_3 = x_4 = -1$, c) $z_2 = z_3 = -i$.
- 5.6.** a) 1, b) 3, c) 2, d) 4.
- 5.7.** a) $-1, 2, -2$, b) 2, c) 1, $-2, 3$, d) wielomian nie ma pierwiastków całkowitych.
- 5.8.** a) $2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) wielomian nie ma pierwiastków wymiernych,
- 5.9.** a) $\sqrt{2} - i, \sqrt{2}$, b) $1 + 3i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$, c) $2 - i, 1 - 2i, 1 + 2i$.
- 5.10.** a) $\frac{2}{3}$ i $-\frac{2}{3}$, b) a^2 i $(-1)^nb$.
- 5.11.** a) 2, b) -1 .
- 5.12.** a) $(z - (3 + i))(z + (3 - i))$, b) $(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i)(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i)$, c) $(z - 3)(z + (\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))(z + (\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))$.
- 5.13.** a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, b) $(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$, c) $(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, d) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, e) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, f) $(x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3)$.
- 5.14.** a) $\frac{1}{z+3i} + \frac{1}{z-3i}$, b) $\frac{1}{z+i} + \frac{4-i}{(z+i)^2}$, c) $\frac{1}{2\sqrt{3}(z-\sqrt{3}+i)} - \frac{1}{2\sqrt{3}(z+\sqrt{3}+i)}$, d) $-\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \frac{1-i}{2z-4i} + \frac{1+i}{2z+4i}$.
- 5.15.** a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$, b) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$, c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$, d) $\frac{5}{(x+3)^2} + \frac{4}{3(x+3)} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{3x}$, e) $-\frac{1}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-3x+9}$, f) to jest ułamek prosty, g) $\frac{-1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}$, h) $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$.
- 5.16.** a) $z^2 - 4z + 16 + \frac{-68z^2+5z-16}{z^3+4z^2+1}$, b) $x + \frac{-4x+3}{x^4+4}$, c) $x + \frac{5}{x^3+2x^2+3x+4}$.