Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 12
Płaszczyzna, prosta, rzut prostokątny
Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

12.1. Napisać równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny, która spełnia warunki
a) przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $n = (0, -3, 2)$,
b) przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (1, 2, 3), P_3 = (-1, -3, 5)$,
c) przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4), P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny XOZ,
d) przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $u = (1, 1, 0), v = (0, 1, 1)$,
e) przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $Q : 3x-y+2 = 0$,
f) przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $Q_1 : x + y = 0, Q_2 : y - z = 0$.

12.2. Określić wzajemne położenie płaszczyzn Q_1, Q_2, Q_3
a) $Q_1 : 5x - z + 3 = 0, Q_2 : 2x - y - 4z + 5 = 0, Q_3 : 3y + 2z - 1 = 0$,
b) $Q_1 : -4x - 3y + 9z - 27 = 0, Q_2 : 3x - 4y - 3z - 5 = 0, Q_3 : x + 7y - 6z + 3 = 0$,
c) $Q_1 : 2x - y - 1 = 0, Q_2 : 3x - y + z - 3 = 0, Q_3 : y + 2z - 3 = 0$.

12.3. Omówić w zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ wzajemne położenie płaszczyzn
a) $Q_1 : kx + y - z - 1 = 0, Q_2 : x + ky + 3z - k = 0, Q_3 : 3x - 5z = 0$,
b) $Q_1 : 3x + 2y + kz - 2 = 0, Q_2 : x - 6y + 2z + 1 = 0, Q_3 : 2x + z - k = 0$.

12.4. a) Napisać równania prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 1), B = (-3, 2, 0)$.
b) Podać równanie kierunkowe i parametryczne prostej l opisanej równaniami krawędziowymi $l : \begin{cases} x + 4y + 5z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

12.5. Napisać równania parametryczne i krawędziowe prostej, która spełnia warunki
a) przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $v = (2, -1, 3)$,
b) przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $Q : 3x - y + 2z - 6 = 0$,
c) przechodzi przez punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła do wektorów $u = (2, 0, -3)$, $v = (-1, 2, 0)$.

12.6. Określić wzajemne położenie prostych
a) $l_1 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}, l_2 : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$,
b) $l_1 : \begin{cases} x - 5y + 6z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}, l_2 : \begin{cases} 13x + y + 1 = 0 \\ 11x + z - 1 = 0 \end{cases}$,
c) $l_1 : \begin{cases} 3x + 4y + z - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

12.7. W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ określić możliwe wzajemne położenie prostych
a) $l_1 : \frac{x-4}{-5} = \frac{y+1}{5k-3} = \frac{z-3}{3}, l_2 : \frac{x-4}{k-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1-k}$
b) $l_1 : \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - k = 0 \end{cases} l_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ x + 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$

12.8. Napisać równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez prostą $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}$ i spełniającej warunek
a) punkt $M = (1, -2, 1)$ należy do płaszczyzny Q,
b) płaszczyzna $\Pi : 4x + y + z + 1 = 0$ tworzy z płaszczyzną Q kąt $\pi/2$,
c) płaszczyzna $\Pi : x - y = 0$ tworzy z płaszczyzną Q kąt $\pi/4$,
d) oś OZ jest równoległa do płaszczyzny Q.

12.9. Znaleźć punkty przecięcia
a) prostych $l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}, l_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases},$
b) prostej $l : x = 1, y = -2 + 2u, z = 4 - u; u \in \mathbb{R}$ i płaszczyzny $Q : x = s + t, y = 1 + s + 2t, z = 3 + 2s + 4t; s, t, \in \mathbb{R}$,
c) płaszczyzn $Q_1 : 3x + y + z + 1 = 0, Q_2 : x + 2z + 6 = 0, Q_3 : 3y + 2z = 0$.

12.10. Wyznaczyć równanie płaszczyzny, która zawiera
a) przecinające się proste $l_1 : x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3 + 2t, l_2 : x = 3 - s, y = 3s, z = 5 - 2s; s, t \in \mathbb{R}$,
b) prostą $l : \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ oraz prostopadła do płaszczyzny $Q : x = 3 - 2s + t, y = 2 + 2s + t, z = 1 - s + t; s, t \in \mathbb{R}$,
c) punkt $P = (1, 3, 5)$ i jest prostopadła do prostej $l : x = 2+t, y = 3-t, z = 4+3t; t \in \mathbb{R}$,
d) punkty $A = (0, 1, -2), B = (3, 2, 1)$ i jest równoległa do prostej $l : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases},$

12.11. Znaleźć rzut
a) prostokątny punktu $P = (3, -2, 1)$ na płaszczyznę $Q : 2x - y + 3z = 0$,
b) prostokątny punktu $P = (2, -1, 4)$ na prostą $l : x = t, y = -t, z = -3t; t \in \mathbb{R}$,
c) prostej $l : \frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ l na płaszczyznę $Q : x - 2y + z - 5 = 0$.

12.12. Znaleźć odległość między płaszczyznami
a) $Q_1 : 11x - 2y - 10z + 30 = 0, Q_2 : 11x - 2y - 10z - 90 = 0$,
b) $Q_1 : 4x - 3y - 12z + 6 = 0, Q_2 : 4x - 3y - 12z + 11 = 0$.

12.13. Obliczyć kąt między płaszczyznami
a) $Q_1 : 2x + y - 9z + 5 = 0, Q_2 : 16x - 5y + 3z - 8 = 0$,
b) $Q_1 : 2x - y - 2z + 7 = 0, Q_2 : 7x - y + 5 = 0$.

12.14. Znaleźć odległość prostych
a) $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{6}, l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-5}{9}$,
b) $l_1 : \begin{cases} 3x + 4y + z - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, l_2 : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

12.15. Wyznaczyć kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny Q

a) $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}, Q : 4x + y + 5z + 7 = 0,$

b) $l : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - t \\ z = 10 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, Q : y + z - 4 = 0.$

12.16* Znaleźć rzut

a) ukośny w kierunku wektora $v = (-1, 3, 0)$ punktu $P = (1, 2, -2)$ na płaszczyznę $Q : x + y - 4z - 6 = 0,$

b) ukośny w kierunku wektora $v = (2, -3, 1)$ punktu $P = (3, 1, 0)$ na prostą $l : (x, y, z) = (-3 - s, 5 - s, 2 + 2s), s \in \mathbb{R}.$

12.17.* a) Znaleźć punkt N symetryczny do punktu $M = (3, -1, -11)$ względem prostej $l : \begin{cases} x - 3y - 3z - 5 = 0 \\ x + 3z - 2 = 0 \end{cases}.$

b) Znaleźć punkt N symetryczny do punktu $M = (2, 7, 1)$ względem płaszczyzny $Q : x - 4y + z + 7 = 0.$

12.18.* Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych płaszczyznami:

a) $x = 1, y = -1, z = 3, x + y + z = 5,$

b) $x - y = 1, x - y = 5, x + 2z = 0, x + 2z = 3, z = -1, z = 4.$

12.19.* Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste $l_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 \\ z = 4t \end{cases}, l_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 3s \\ -4s \end{cases}, l_3 : \begin{cases} x = -2p \\ y = 3 - 3p \\ z = 0 \end{cases}, t, s, p \in \mathbb{R}.$

ODPOWIEDZI

12.1. a) $3y - 2z + 6 = 0$, $(x, y, z) = (1, -2, 0) + s(1, 0, 0) + t(0, 2, 3)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$, b) $19x - 8y - z = 0, (x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 2, 3) + t(-1, -3, 5)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$, c) $5x + z - 9 = 0, (x, y, z) = (1, -3, 4) + s(0, 1, 0) + t(1, 3, -5)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$,
d) $x - y + z = 0, (x, y, z) = (1, -1, 3) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$,
e) $3x - y + 3 = 0, (x, y, z) = (0, 3, 0) + s(0, 0, 1) + t(1, 3, 0)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$,
f) $-x + y + z + 4 = 0, (x, y, z) = (2, 1, -3) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, -1)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$.
12.2. a) płaszczyzny przecinają się, b) płaszczyzny nie przecinają się i nie są równoległe, c) płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej.
12.3. a) dla $k = -7/5$ lub $k = 2$ płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, dla pozostałych k płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, b) dla $k = 1$ płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, dla $k \neq 1$ mają jeden punkt wspólny.
12.4. a) $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$, b) $\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-1}{-13}$. Postać parametryczna jako odpowiednie przekształcenie.
12.5. a) $(x, y, z) = (-3 + 2t, 5 - t, 2 + 3t), t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ 3y + z - 17 = 0 \end{cases},$
b) $(x, y, z) = (3t, -2 - t, 3 + 2t), t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 3y + 6 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases},$
c) $(x, y, z) = (7 + 6t, 2 + 3t, 4t), t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 4y - 3z - 8 = 0 \end{cases}.$
12.6. a) przecinające się, b) równoległe, c) skośne.
12.7. a) dla $k = -2$ proste przecinające się, dla $k \neq -2$ proste skośne, dla $k = -6$ proste skośne prostopadłe, b) dla $k = 5$ proste przecinające się, dla $k \neq 5$ proste skośne.
12.8. a) $3x+2y+1 = 0$, b) $x-2y-2z-5 = 0$, c) $x-2y-2z-5 = 0$, d) $3x+2y+1 = 0$.
12.9. a) $(-1, 0, 3)$, b) $(1; 0,8; 2,6)$, c) $(0, 2, -3)$.
12.10. a) $2x-z-1 = 0$, b) $3x+y-4z+1 = 0$, c) $6x+2y-8z-11 = 0$, d) $x-y+1 = 0$,
12.11. a) $(10/7, -17/14, -19/14)$, b) $(-9/11, 9/11, 27/11)$, c) $\frac{x}{-7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{11}$.
12.12. a) 8, b) $\frac{5}{13}$.
12.13. a) $\pi/2$, b) $\pi/4$.
12.14. a) $\frac{4}{7}\sqrt{42}$, b) $\frac{207}{130}\sqrt{26}$.
12.15. a) $\pi/3$, b) $\pi/6$.
12.16. a) $(7/2, -11/2, -2)$, b) $(-1, 7, -2)$.
12.17. a) $(7, 3, 9)$, b) $(4, -1, 3)$.
12.18. a) $V = 4/3, A = 9$, b) $V = 60, A = 2(15\sqrt{2} + 20\sqrt{5} + \sqrt{4154})$.
12.19. $\sqrt{61}$.