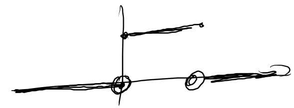
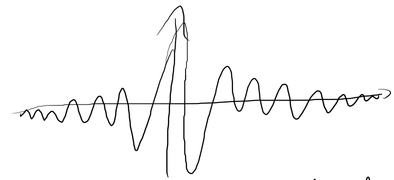
Przykład 1 Korzystając z def wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t)$

a)
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$





R) dla $u = 0$

$$F(u) = \int_0^1 1 \cdot e^0 \, dt = 1$$

dla $u \neq 0$

$$F(u) = \int_0^1 1 \cdot e^{-iut} \, dt = \int_0^1 \cos(ut) - i \sin(ut) \, dt =$$

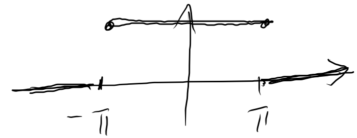
$$= \frac{\sin u}{u} - i \left(\frac{1 - \cos u}{u} \right)$$

widmo amplitudowe ($|F(u)|$)

moduł

widmo fazowe (od argumentu l. zespolonej)

b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| \le \pi \\ 0 & \text{dla } |t| > \pi \end{cases}$

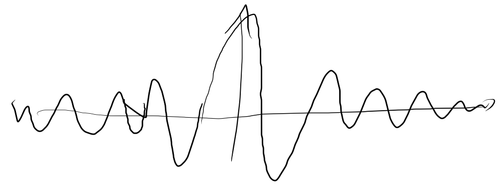


R $u = 0$

$$F(u) = 2\int_0^{\pi} 1 \cdot e^0 \, dt = 2\pi$$

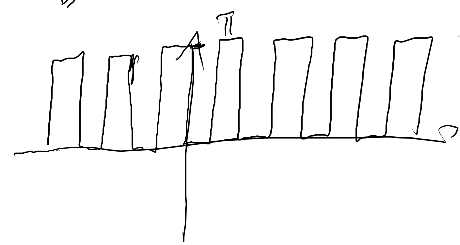
$u \neq 0$

$$F(u) = 2\int_0^{\pi} \cos(ut) \, dt = 2\frac{\sin(u\pi)}{u}$$



Widmo amplitudowe

Widmo fazowe



Przykład 2 Korzystając z własności transformaty Fouriera wyznaczyć $G(u)$ dla podanej funkcji $g(t)$

a) $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t-4| \leq \pi \\ 0 & \text{dla } |t-4| > \pi \end{cases}$

R $g(t) = f(t-4)$ (gdzie $f(t)$ to przykład 1 b))

$$G(u) = e^{i(-4)u} \cdot Fu = \begin{cases} 2\pi \cdot e^{i(-4)u} & u = 0 \\ \frac{2\sin(u\pi)}{u} \cdot e^{i(-4)u} & u \neq 0 \end{cases}$$

b) $g(t) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & \text{dla } t \geq -1 \\ 0 & \text{dla } t < -1 \end{cases}$

(R) Z tablic mamy

dla $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $F(u) = \dfrac{1}{1+iu}$

Mamy $g(t) = h(t+1)$ dla $h(t) = f(2t)$

Zatem

$$G(u) = H(u)e^{i \cdot 1 \cdot u} = \frac{1}{2} F\left(\frac{u}{2}\right) e^{iu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+i\frac{u}{2}} \cdot e^{iu}$$

Przykład 3 Podać $f(t)$, jeśli jej transformata Fouriera ma postać $F(u)$

a) $F(u) = \frac{2}{1+i(2u)}$

R $F(u) = 2G(2u)$ gdzie $G(u) = \frac{1}{1+iu}$ (z tablic $g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$

Z własności transformaty Fouriera

$$f(t) = g\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

b) $F(u) = \begin{cases} \dfrac{8 \sin\left(\frac{u}{4}\right)}{u} & \text{dla } u \neq 0 \\ 2 & \text{dla } u = 0 \end{cases}$

(2) Mamy $F(u) = 4 \cdot \frac{1}{4} G\left(\frac{u}{4}\right)$

Zatem $f(t) = 4 \cdot g(4t) = \begin{cases} 4 \cdot 1 & \text{dla } |t| \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{dla } |t| > \frac{1}{4} \end{cases}$