Przykład 1 Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu

a) $f(x) = x^2 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[X]$

(R) $f(0) = 0^2 + 1 \neq 0$ czyli 0 nie jest pierwiastkiem f w $\mathbb{Z}_2[X]$

$f(1) = 1^2 + 1 = 0$ czyli 1 jest pierwiastkiem f w $\mathbb{Z}_2[X]$

Wtedy f jest rozkładalny w $\mathbb{Z}_2[X]$, bo $f(x) = x^2 + 1 = (x+1)\cdot(x+1)$

b) $f(x) = x^2 + 1$ w $\mathbb{Z}_3[X]$

(R) $f(0) = 0^2 + 1 \neq 0$ 0 nie jest pierwiastkiem f w $\mathbb{Z}_3[X]$

$f(1) = 1^2 + 1 \neq 0$ 1 — || — || — || — || —

$f(2) = 2^2 + 1 \neq 0$ 2 — || — || — || — || —

f jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}_3[X]$

Wskazówka do 5.1, 5.2

Przykład 2 Znaleźć wielomian minimalny danej liczby algebraicznej nad $\mathbb{Q}$.

Wsk do 5.3, 5.4

a) $\sqrt{5}$

R $f(x) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = x^2 - 5$

b) $\sqrt[3]{7}$

R $f(x) = (x-\sqrt[3]{7})\left(x^2 + \sqrt[3]{7}x + (\sqrt[3]{7})^2\right) = x^3 - 7$

c) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

R $f_1(x) = (x-(\sqrt{2}+\sqrt{5}))(x+(\sqrt{2}+\sqrt{5})) = x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 = x^2 - 2 - 2\sqrt{10} - 5 = x^2 - 7 - 2\sqrt{10}$

$f(x) = ((x^2-7) - 2\sqrt{10})((x^2-7)+2\sqrt{10}) = (x^2-7)^2 - (2\sqrt{10})^2 = x^4 - 7x^2 + 49 - 40 = x^4 - 7x^2 + 9$

Przykład 3 Wielomian $f(x) = x^2+x+1$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}_2[x]$, bo

$f(0) = 0^2+0+1 \neq 0$

$f(1) = 1^2+1+1 \neq 0$

Klasami reszt $\mathbb{Z}_2[x]$ modulo f są

$CG(4) = CG(2^2) = \{0, 1, x, x+1\}$

	a_0 a_1
0	$0\ 0$
1	$1\ 0$
x	$0\ 1$
$x+1$	$1\ 1$

Wsk do 5.5-5.7
ale bez tabelek działań

$x = x+0$

$1 = 0 \cdot x + 1$

Przykład 4 Wielomian $f(x) = x^2+1$ nie nierozkładalny w $\mathbb{Z}_3[x]$ (Przykład 1b)

Klasami reszt $\mathbb{Z}_3[x]$ modulo f są

$CG(9) = CG(3^2) = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$

	a_0 a_1
0	$0\ 0$
1	$1\ 0$
2	$2\ 0$
x	$0\ 1$
$x+1$	$1\ 1$
$x+2$	$2\ 1$
$2x$	$0\ 2$
$2x+1$	$1\ 2$
$2x+2$	$2\ 2$