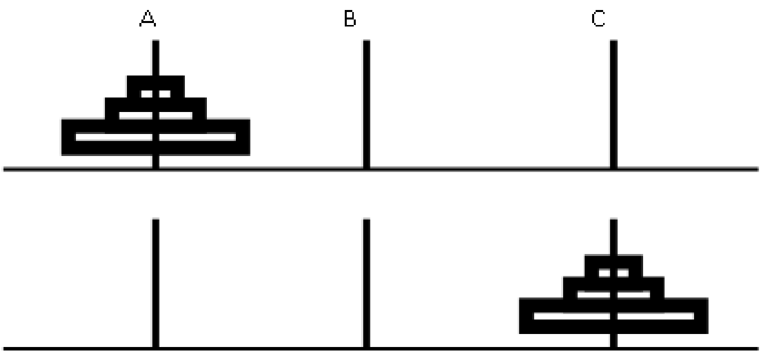
REKURENCJA

Algorytmy i zależności rekurencyjne

Rekurencja jest jedną z najważniejszych metod konstruowania algorytmów. Polega na tym, że rozwiązanie badanego problemu wyraża się za pomocą tego samego problemu dla danych o mniejszych rozmiarach.

Przykład - problem wież Hanoi

Problem polega na przekładaniu krążków z patyczka A na patyczek C w taki sposób, że pojedynczo przekładane krążki mogą być odkładane bądź to bezpośrednio na podłożu, bądź też na krążek o średnicy większej. Pytanie dotyczy liczby niezbędnych ruchów (przestawień) dla piramidy o n krążkach.



Oznaczmy

ALG(n) - optymalny algorytm w problemie wież Hanoi dla n krążków,
lr(n) - liczba ruchów w ALG(n).

Wówczas

k	ALG (k)	lr(k)
0		0
1	K1: przełożyć krążek na C.	1
2	K1: mały na B; K2: duży na C; K3: mały na C.	3
3	K1: mały na C; K2: średni na B; K3: mały na B; K4: duży na C; K5: mały na A; K6: średni na C; K7: mały na C.	7

k	ALG (k)	lr(k)
4	K1: 3 górne krążki z A na B za pomocą ALG(3); K2: największy na C; K3: 3 górne krążki z B na C za pomocą ALG(3).	lr(3)+ +1+ +lr(3)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	K1: $n-1$ górnych krążków z A na B za pomocą ALG($n-1$); K2: największy na C; K3: $n-1$ górnych krążków z B na C za pomocą ALG($n-1$).	lr($n-1$)+ +1+ +lr($n-1$)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ogólnie mamy zatem

$$\mathrm{lr}(n) = 2\mathrm{lr}(n-1) + 1 \text{ z warunkiem początkowym } \mathrm{lr}(0) = 0.$$

Początkowe wyrazy ciągu $\mathrm{lr}(n)$ przedstawiają się następująco

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{lr}(n)$	0	1	3	7	15	31	63	127	255

Nietrudno odgadnąć jawną postać ciągu: $\mathrm{lr}(n) = 2^n - 1$. Uzyskamy ją jednak w dalszej częsci wykładu, rozwiązując rekurencję opisującą ciąg $\mathrm{lr}(n)$.

Przykład - ciąg Fibonacciego

Liczby Fibonacciego:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Definicja rekurencyjna: $\begin{cases} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n \geqslant 3. \end{cases}$

Postać jawną ciągu Fibonacciego wyprowadzimy później na wykładzie.

Przykład

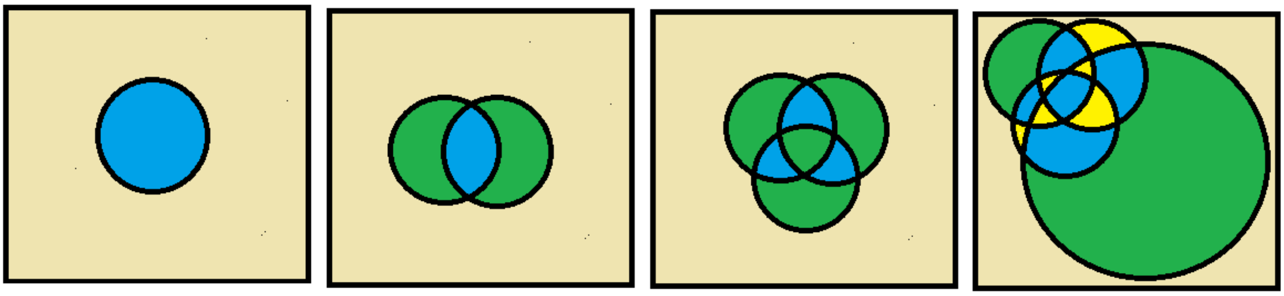
Na płaszczyźnie jest danych n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów ($\mathrm{lo}(n)$), na które dzielą one płaszczyznę? Napisać rozwiązanie w postaci zależności rekurencyjnej i w postaci jawnej.

Rozwiązanie:

Dla początkowych wyrazów ciągu $\mathrm{lo}(n)$ mamy

$\mathrm{lo}(0) = 1$, $\mathrm{lo}(1) = 2$, $\mathrm{lo}(2) = 1 + 2 + 1 = 4$ i $\mathrm{lo}(3) = 1 + 3 + 4 = 8$.

Jednakże $\mathrm{lo}(4) = 1 + 2 + 5 + 6 = 14 \neq 16$!



Pokażemy, że ciąg lo(n) spełnia rekurencję

$$\mathrm{lo(n)} = \mathrm{lo(n-1)} + \mathrm{2n} - 2.$$

Załóżmy, że danych jest $n-1$ okręgów dzielących płaszczyznę na maksymalnie lo(n − 1) obszarów. Niech n-ty okrąg C będzie położony tak, aby wszystkie n okręgów dzieliły płaszczyznę na maksymalną liczbę obszarów, tj. na lo(n) obszarów. Wtedy wszystkie okręgi przecinają się parami, w szczególności okrąg C przecina każdy z wcześniejszych $n-1$ okręgów w dwóch punktach. Wszystkie te $2(n-1) = 2n-2$ punkty dzielą C na $2n-2$ łuków. Każdy taki łuk rozcina dokładnie jeden z lo(n − 1) uprzednio wyznaczonych obszarów. Innymi słowy liczba obszarów zwiększa się o $2n-2$, c.b.d.o.

Zauważmy, że powyższy argument działa, gdy dodajemy okrąg C do przynajmniej jednego okręgu, czyli gdy $n-1 \geqslant 1$. Zatem ciąg lo(n) spełnia rekurencję

$$\begin{cases} \mathrm{lo(1)} & = & 2, \\ \mathrm{lo(n)} & = & \mathrm{lo(n-1)} + \mathrm{2n} - 2 \text{ dla } \mathrm{n} \geqslant 2. \end{cases}$$

Aby znaleźć jawną postać ciągu lo(n), wystarczy przypomnieć sobie wzór na sumę postępu arytmetycznego, wykonując poniższe rachunki:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{lo(n)} - \mathrm{lo(1)} & = & (\mathrm{lo(n)} - \mathrm{lo(n-1)}) + \cdots + (\mathrm{lo(2)} - \mathrm{lo(1)}) \;=\; \\ & = & 2((n-1) + \cdots + 2 + 1) \;=\; 2 \cdot \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}. \end{array}$$

Zatem dla n okręgów maksymalna liczba obszarów jest równa

$$\mathrm{lo(n)} \;=\; \mathrm{lo(1)} + (\mathrm{n}-1)\mathrm{n} \;=\; \mathrm{n}^2 - \mathrm{n} + 2.$$

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych

Ciągi spotykane w matematyce są często definiowane w sposób rekurencyjny (zależność rekurencyjna), a nie za pomocą wzoru algebraicznego np. (ciąg Fibonacciego). Istnieje wiele metod wyznaczania jawnych wzorów algebraicznych na wyrazy takich ciągów, tj. rozwiązywania równań rekurencyjnych.

Metoda podstawiania

Przykład - problem wież Hanoi c.d.

Należy znaleźć postać jawną ciągu lr(n) zdefiniowanego rekurencją

$$\begin{cases} \mathrm{lr}(0) &= 0, \\ \mathrm{lr}(\mathrm{n}) &= 2\mathrm{lr}(n-1)+1 \text{ dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Metoda podstawiania polega ona na tym, że wielkość stojącą po prawej stronie zależności rekurencyjnej wyrażamy przez tę samą zależność. Zatem dla $n-1$ otrzymujemy:

$$\mathrm{lr}(n-1) = 2\mathrm{lr}(n-2)+1,$$

co podstawiamy do wzoru opisującego zależność rekurencyjną.

Takie podstawianie kontynuujemy aż do otrzymania lr(0):

$$\begin{aligned} \mathrm{lr}(\mathrm{n}) &= 2\mathrm{lr}(\mathrm{n}-1)+1 \;=\; 2(2\mathrm{lr}(\mathrm{n}-2)+1)+1 \;= \\ &= 2^2\mathrm{lr}(\mathrm{n}-2)+2+1 \;=\; 2^2(2\mathrm{lr}(\mathrm{n}-3)+1)+2+1 \;= \\ &= 2^3\mathrm{lr}(\mathrm{n}-3)+2^2+2^1+2^0 \;=\; \ldots \\ &= 2^k\mathrm{lr}(\mathrm{n}-\mathrm{k})+2^{\mathrm{k}-1}+2^{\mathrm{k}-2}+\cdots+2^2+2^1+2^0 \;=\; \ldots \\ &= 2^n\mathrm{lr}(0)+2^{\mathrm{n}-1}+2^{\mathrm{n}-2}+\cdots+2^2+2^1+2^0 \;= \\ &= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^1+2^0 \;=\; 2^n-1, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości korzystamy ze wzoru $a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ na sumę postępu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = 2$.

Dla pewności jawną postać ciągu lr(n) sprawdzamy dla kilku wyrazów:

n	lr(n)	$2^n - 1$
0	0	$2^0 - 1 = 0$
1	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	$2^1 - 1 = 1$
2	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2^2 - 1 = 3$
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$2^3 - 1 = 7$
4	$2 \cdot 7 + 1 = 15$	$2^4 - 1 = 15$
5	$2 \cdot 15 + 1 = 31$	$2^5 - 1 = 31$

Równanie $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$

Dane jest równanie rekurencyjne

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$$

z wartościami początkowymi s_0 i s_1 oraz ustalonymi liczbami a i b.

Przypadek $a = 0$ lub $b = 0$

- Jeśli $b = 0$, to $s_n = as_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas

$$s_1 = as_0,\ \ s_2 = as_1 = a^2 s_0,\ \ \ldots,\ \ s_n = a^n s_0.$$

- Jeśli $a = 0$, to $s_n = bs_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Wówczas

$$s_2 = bs_0,\ \ s_4 = bs_2 = b^2 s_0,\ \ \ldots,\ \ s_{2n} = b^n s_0;$$

$$s_3 = bs_1,\ \ s_5 = bs_3 = b^2 s_1,\ \ \ldots,\ \ s_{2n+1} = b^n s_1.$$

Przykład (i) $s_n = 3s_{n-1}$ z $s_0 = 5$.

Mamy $a = 3$ i $b = 0$, więc $s_n = 5 \cdot 3^n$ dla $n \geqslant 0$.

Przykład (ii) $s_n = 3s_{n-2}$ z $s_0 = 5$ i $s_1 = 2$.

Mamy $a = 0$ i $b = 3$, więc $\begin{cases} s_{2n} & = & 5 \cdot 3^n \text{ dla } n \geqslant 0, \\ s_{2n+1} & = & 2 \cdot 3^n \text{ dla } n \geqslant 0. \end{cases}$

Przypadek $a \neq 0$ i $b \neq 0$

W tym przypadku zależność rekurencyjna $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ ma równanie charakterystyczne postaci

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Wynika to z przypuszczenia, że $s_n = c \cdot r^n$ dla pewnej stałej c.
Stąd $r^n = ar^{n-1} + br^{n-2}$. Dzieląc przez r^{n-2}, otrzymujemy

$$r^2 = ar + b = 0,$$

czyli r jest pierwiastkiem równania $x^2 - ax - b = 0$.

- Jeśli równanie $x^2 - ax - b = 0$ ma dwa różne pierwiastki r_1 i r_2, to $s_n = Ar_1^n + Br_2^n$ dla pewnych stałych A i B, które można wyznaczyć z warunków brzegowych

$$\begin{cases} Ar_1^0 + Br_2^0 &= s_0 \\ Ar_1^1 + Br_2^1 &= s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B &= s_0 \\ Ar_1 + Br_2 &= s_1. \end{cases}$$

- Jeśli równanie $x^2 - ax - b = 0$ ma dwa jedno rozwiązanie $r = r_1 = r_2$, to $s_n = (A + Bn)r^n$ dla pewnych stałych A i B, które można wyznaczyć z warunków brzegowych

$$\begin{cases} (A + B \cdot 0)r^0 &= s_0 \\ (A + B \cdot 1)r^1 &= s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= s_0 \\ (A + B)r &= s_1. \end{cases}$$

Przykład (i) $\begin{cases} a_0 = a_1 = 3, \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ dla } n \geqslant 2. \end{cases}$

Mamy $a = 1$ i $b = 2$. Równanie charakterystyczne ma postać

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 1 - 4 \cdot (-2) = 9$, $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$, to

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n = 2 \cdot 2^n + (-1)^n = 2^{n+1} + (-1)^n,$$

gdyż

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B \cdot (-1)^0 &= 3 \\ A \cdot 2^1 + B \cdot (-1)^1 &= 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B &= 3 \\ 2A - B &= 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 2 \\ B &= 1. \end{cases}$$

Weryfikacja numeryczna:

n	a_n	$2^{n+1} + (-1)^n$
0	3	$2^1 + (-1)^0 = 3$
1	3	$2^2 + (-1)^1 = 3$
2	$3 + 2 \cdot 3 = 9$	$2^3 + (-1)^2 = 9$
3	$9 + 2 \cdot 3 = 15$	$2^4 + (-1)^3 = 15$

.

Przykład (ii) $\begin{cases} s_0 &= 1, \\ s_1 &= 8, \\ s_n &= 4s_{n-1} - 4s_{n-2} \text{ dla } n \geqslant 2. \end{cases}$

Mamy $a = 4$ i $b = -4$. Równanie charakterystyczne ma postać

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$, $r_1 = r_2 = \frac{4}{2} = 2$, to

$$s_n = (A + Bn) \cdot 2^n = (1 + 3n) \cdot 2^n = (3n + 1)2^n,$$

gdyż

$$\begin{cases} (A + B \cdot 0)2^0 &= 1 \\ (A + B \cdot 1)2^1 &= 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ 2(A + B) &= 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 3. \end{cases}$$

Weryfikacja numeryczna:

n	s_n	$(3n+1)2^n$
0	1	$(3 \cdot 0 + 1)2^0 = 1$
1	8	$(3 \cdot 1 + 1)2^1 = 8$
2	$4 \cdot 8 - 4 \cdot 1 = 28$	$(3 \cdot 2 + 1)2^2 = 28$
3	$4 \cdot 28 - 4 \cdot 8 = 80$	$(3 \cdot 3 + 1)2^3 = 80$

.

Postać jawna ciągu Fibonacciego

$$\begin{cases} F_0 &= 0, \ F_1 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Mamy $a = b = 1$. Równanie charakterystyczne o postaci

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

posiada dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązanie rekurencji ma postać $F_n = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n$ dla stałych A i B wyznaczanych następująco:

$$\begin{cases} A \cdot x_1^0 + B \cdot x_2^0 &= 0 \\ A \cdot x_1^1 + B \cdot x_2^1 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B &= 0 \\ A(1 + \sqrt{5}) + B(1 - \sqrt{5}) &= 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B & = 0 \\ (A+B)+(A-B)\sqrt{5} & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B & = 0 \\ A-B & = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B & = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Ostatecznie

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Liczby Catalana

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
c_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

Definicja rekurencyjna:

$$\begin{cases} c_0 & = 1, \\ c_n & = c_0 \cdot c_{n-1} + c_1 \cdot c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_0 \text{ dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Postać jawna

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$