# Ciągłe zmienne losowe

***Zmienna losowa ciągła*** **przyjmuje wartości z pewnego przedziału.**

**P(X=a)=0**

**Dla zmiennej losowej ciągłej odpowiednikiem rozkładu prawdopodobieństwa jest *funkcja gęstości*.**

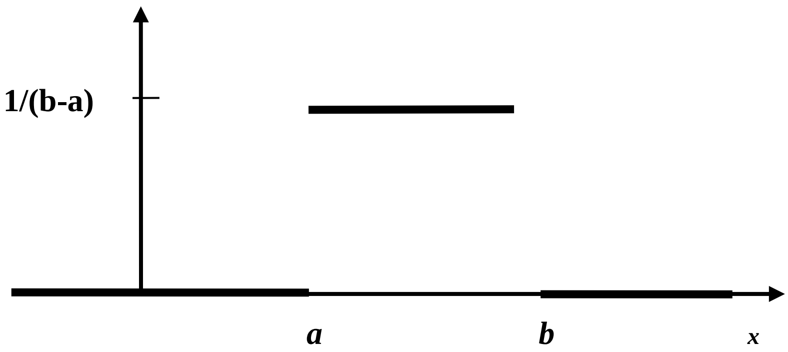
***Funkcja gęstości*** **zmiennej losowej ciągłej *X* określona jest na zbiorze liczb rzeczywistych:**

$$f: R \to R^+, \quad \text{przy czym}$$

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \text{(pole pod krzywą)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & dla\ a \leq x \leq b \\ 0 & dla\ x > b \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x|_a^b = 1$$




***Dystrybuanta*** **zmiennej losowej ciągłej**

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

**Własności dystrybuanty zmiennej losowej ciągłej:**

i. $P(X=a)=0, \qquad a=\text{const.}$

ii. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

iii. $P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a).$

**iv.** $\boldsymbol{P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(x)dx = 1 - F(a)}$.

## Charakterystyki liczbowe rozkładów ciągłych z. l.

***Wartość oczekiwana***

$$\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.}$$

***Wariancja***

$$\boldsymbol{D^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx.}$$

# <u>Przykłady rozkładów zmiennej losowej ciągłej</u>.

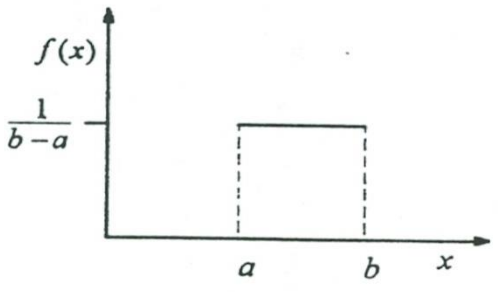
**Zmienna losowa *X* ma *rozkład jednostajny* na odcinku [a, b],**

$$f(x)=\begin{cases}0 & dla\ x<a,\\ \dfrac{1}{(b-a)} & dla\ a\le x\le b\\ 0 & dla\ x>b\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & dla\ x<a,\\ \dfrac{x-a}{(b-a)} & dla\ a\le x\le b\\ 1 & dla\ x>b\end{cases}$$

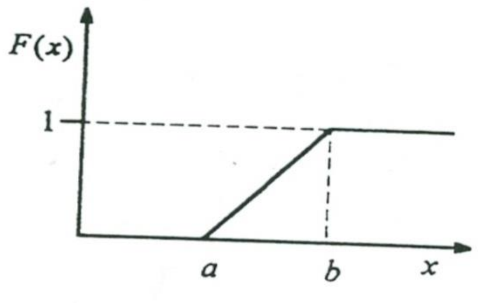
**Bo dla $a\le x\le b$ *mamy***

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{(b-a)}dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{(b-a)}dt=\frac{1}{(b-a)}t|_a^x=\frac{x-a}{(b-a)}$$

**Wykresy obu funkcji b=3, a=1**




Gęstość rozkładu jednostajnego w przedziale $[a, b]$




Dystrybuanta rozkładu jednostajnego w przedziale $[a, b]$

**<u>Przykład</u> 16.**

**Czas oczekiwania na wydrukowanie książki jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale [6 miesięcy, 18 miesięcy].** $a = 6, b = 18$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x < 6, \\ \dfrac{1}{18-6} = \dfrac{1}{12} & dla\ 6 \le x \le 18 \\ 0 & dla\ x > 18 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x \le 6, \\ \dfrac{x-6}{12} & dla\ 6 < x \le 18 \\ 1 & dla\ x > 18 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{6+18}{2} = 12, \quad D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(18-6)^2}{12} = 12, \quad D(X) = 3.46$$

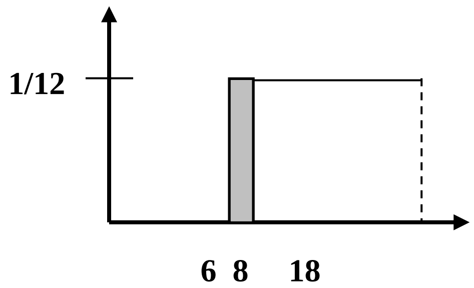
$$E(x) = \int_6^{18} x \frac{1}{12} dx = \left.\frac{x^2}{24}\right|_6^{18} = 12$$

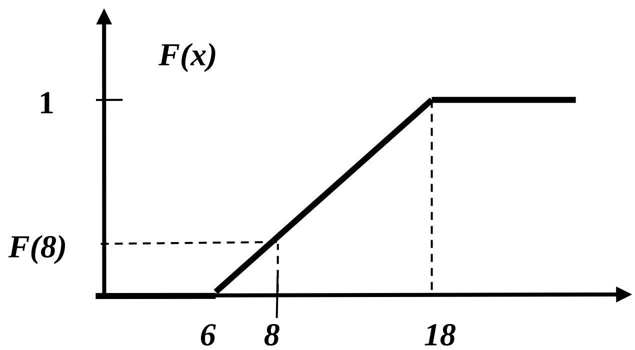
$$D^2(x) = \int_6^{18} (x-12)^2 \frac{1}{12} dx = \left.\frac{(x-12)^3}{36}\right|_6^{18} = 12$$

**średnio na wydrukowanie książki czeka się 12 miesięcy.**

**a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że książka będzie wydrukowane w terminie do 8 miesięcy.**

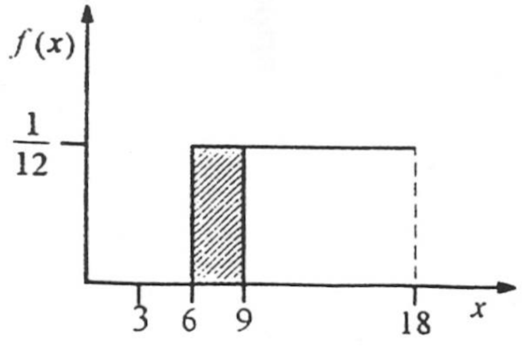
$$P(X < 8) = F(8) = \frac{8-6}{12} = \frac{1}{6}.$$

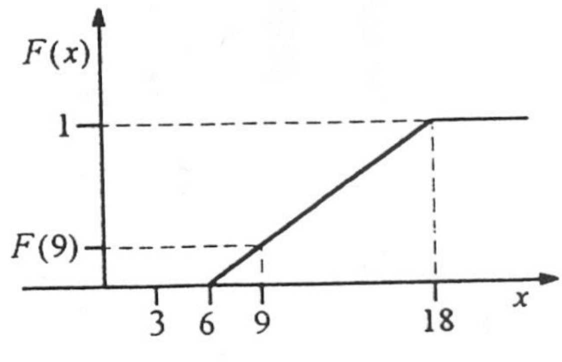



**b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że książka zostanie wydana w przedziale [3 miesiące, 9 miesięcy].**

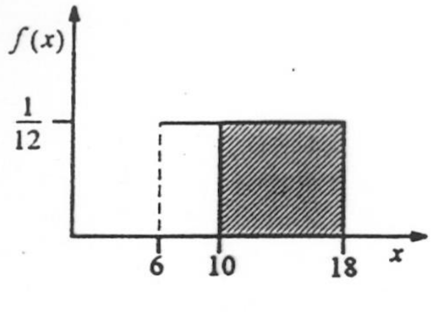
$$P(3 < X < 9) = F(9) - F(3) = \frac{1}{4}, \qquad F(3) = 0.$$


f(x)
1/12
3
6
9
18
x

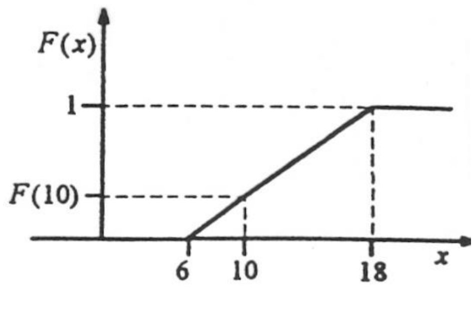

F(x)
1
F(9)
3
6
9
18
x

**c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania jest dłuższy niż 10 miesięcy.**

$$\boldsymbol{P(X > 10) = 1 - P(x < 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{10-6}{12} = \frac{2}{3}}.$$




Wykres dla $P(X \geqslant 10)$




Wykres dla $P(X \geqslant 10)$

■

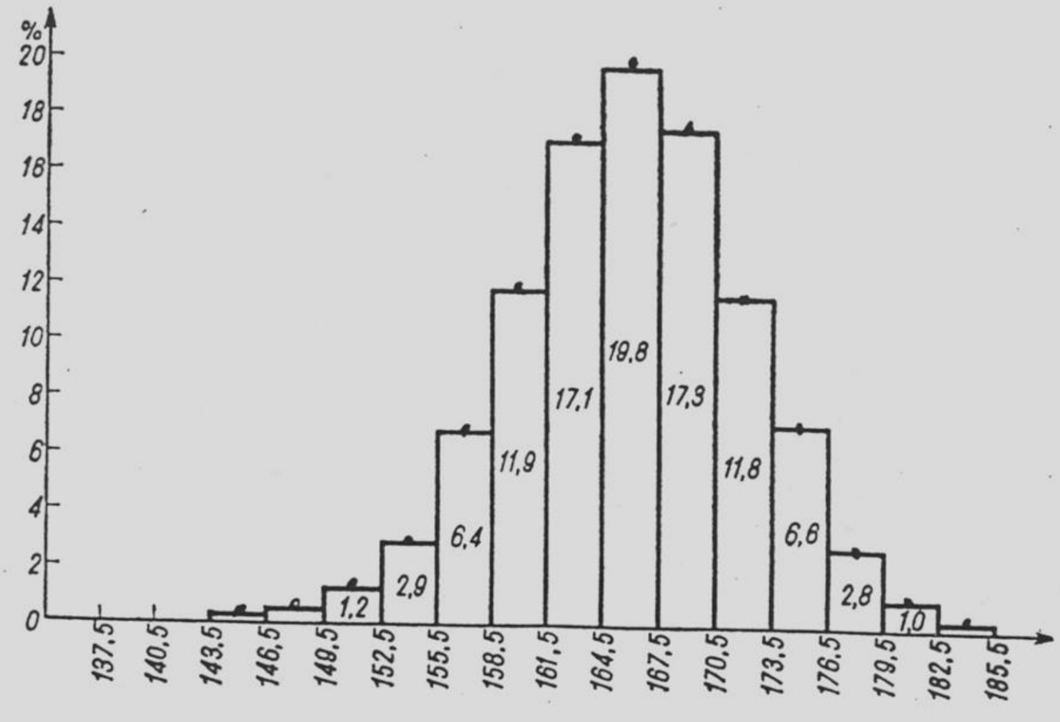
# Rozkład normalny (idea)

**Dany jest szereg rozdzielczy.**

Wzrost poborowych w Polsce z roczników 1906-1909

| Nr porz. | Wzrost w cm | Ilość poborowych w procentach |
|---|---|---|
| 1 | 137,5-140,5 | 0,1 |
| 2 | 140,5-143,5 | 0,1 |
| 3 | 143,5-146,5 | 0,2 |
| 4 | 146,5-149,5 | 0,4 |
| 5 | 149,5-152,5 | 1,2 |
| 6 | 152,5-155,5 | 2,9 |
| 7 | 155,5-158,5 | 6,4 |
| 8 | 158,5-161,5 | 11,9 |
| 9 | 161,5-164,5 | 17,1 |
| 10 | 164,5-167,5 | 19,8 |
| 11 | 167,5-170,5 | 17,3 |
| 12 | 170,5-173,5 | 11,8 |
| 13 | 173,5-176,5 | 6,6 |
| 14 | 176,5-179,5 | 2,8 |
| 15 | 179,5-182,5 | 1,0 |
| 16 | 182,5-185,5 | 0,3 |
| 17 | 185,5-188,5 | 0,1 |

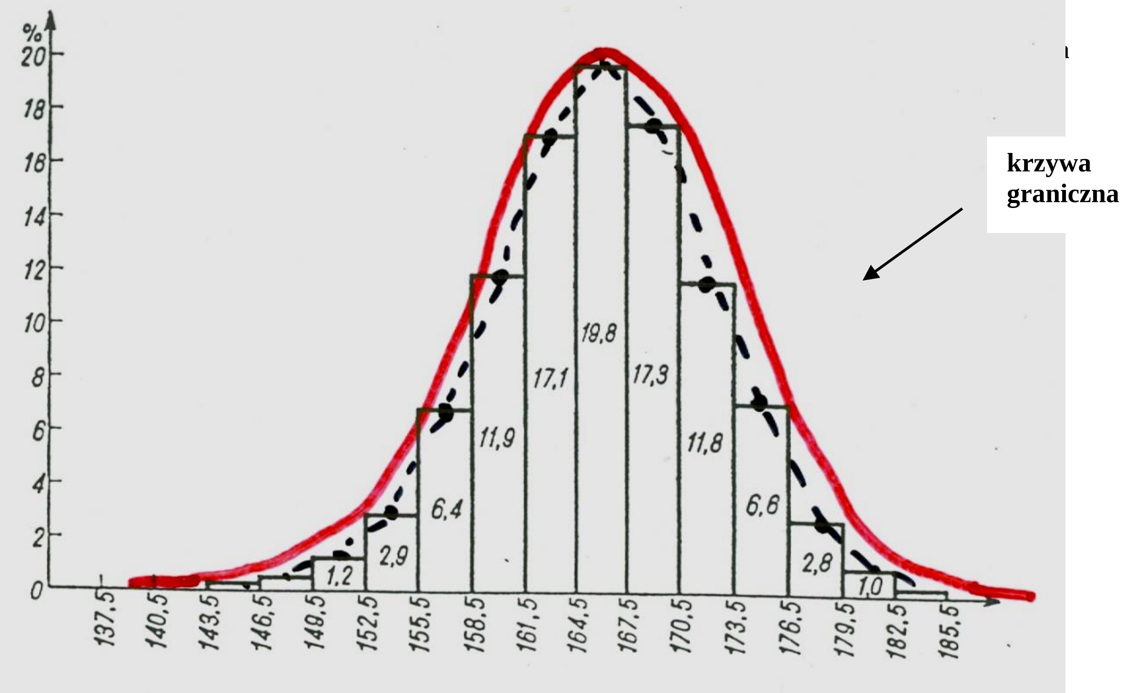
*Populacja*: poborowi z lat 1906-1909.
*Cecha*: wzrost.



Rozpiętość każdej klasy wynosi 3. Gdyby za jednostkę na osi *x* przyjąć 3, to pole każdego prostokąta jest równe częstości odpowiedniej klasy, a suma pól wynosi 1 (100%).
Pytania.

1. Jaka jest częstość występowania poborowych o wzroście od 161.5 do 167.5. (36.9% - to suma powierzchni odpowiednich pól prostokątów).
2. Jaka część poborowych ma wzrost nie przekraczający 161.5 (suma pól od lewej strony do 161.5).

Szereg ten otrzymano z pewnego (*n* elementowego) ciągu statystycznego. Gdyby *n* dążyło do nieskończoności (liczba klas także, a rozpiętość klasy malała do zera), to łamane dążyły by do pewnej granicznej krzywej. Oznaczmy ją przez *f*(*x*) i nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (zmienną losową X jest tu wzrost).

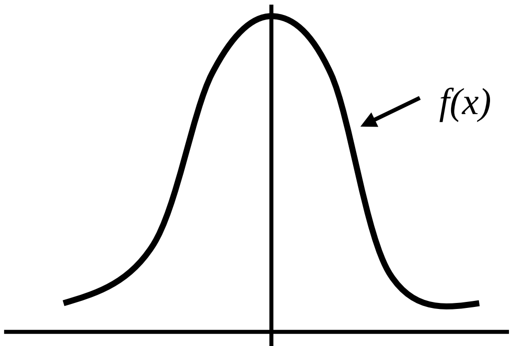



Prawdopodobieństwo, że zmienna *X* przyjmuje wartości mniejsze od pewnej liczby *k* (tj. P(X<k)) jest równe polu pod krzywą od $-\infty$ do *k*, czyli $\int_{-\infty}^{k} f(x)dx$.

## Rozkład normalny (definicja)

**Zmienna losowa *X* ma *rozkład normalny* (ze średnią $m=\mu=0$ i odchyleniem standardowym $\sigma=1$), jeżeli funkcja gęstości**

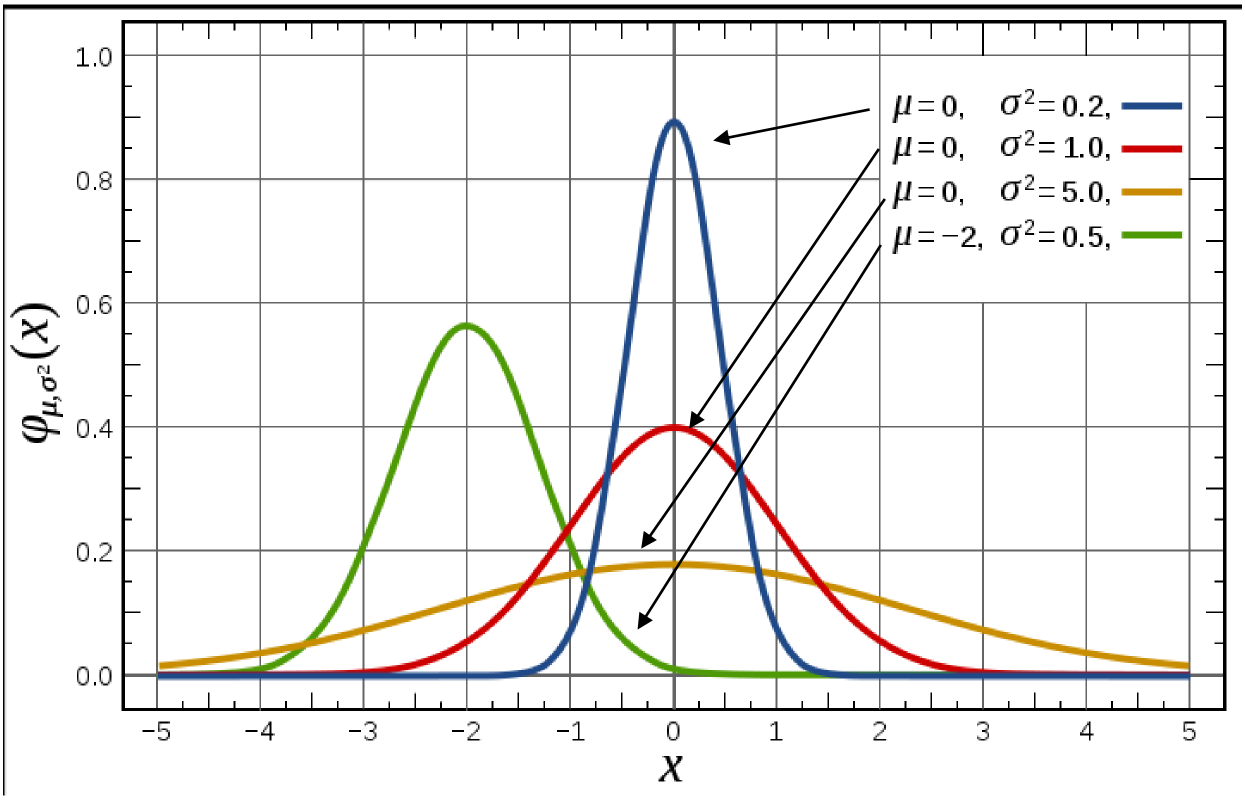
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad - \textit{Krzywa Gaussa N(0,1)}$$




**Rozkład normalny:** $\mu = 0, \sigma^2 = 1.$

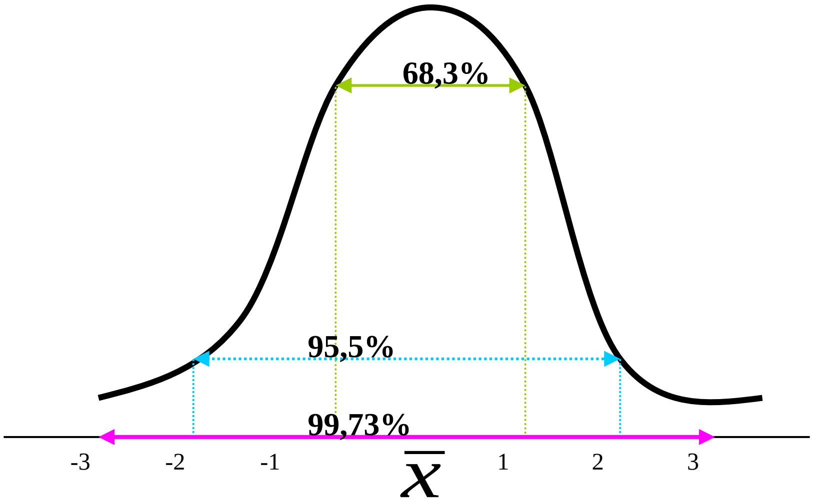
**Gęstość zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią $\mu$ i odchyleniem standardowym $\sigma$:**

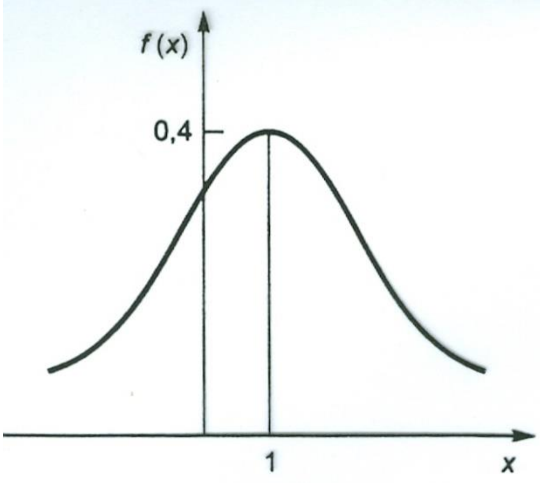
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



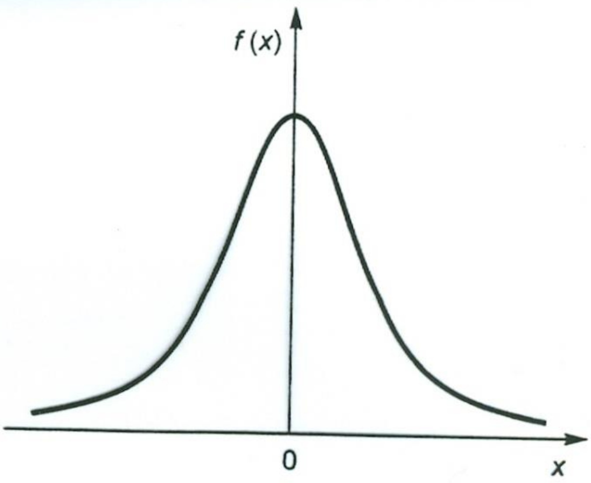

## Własności rozkładu normalnego:

- **Jednomodalny (jeden punkt skupienia)**
- **Symetryczny względem μ (średniej)**
- **Zmiana μ powoduje przesunięcie rozkładu bez zmiany kształtu**
- **Zmiana σ powoduje zmianę skali (rozciągnięcie bądź zwężenie rozkładu)**
  - **Reguła trzech Sigm:** $X \sim N(\mu, \sigma)$
  - $P(|X-\mu| < \sigma) \approx 0,6827$
  - $P(|X-\mu| < 2\sigma) \approx 0,9545$
  - $P(|X-\mu| < 3\sigma) \approx 0,9973$





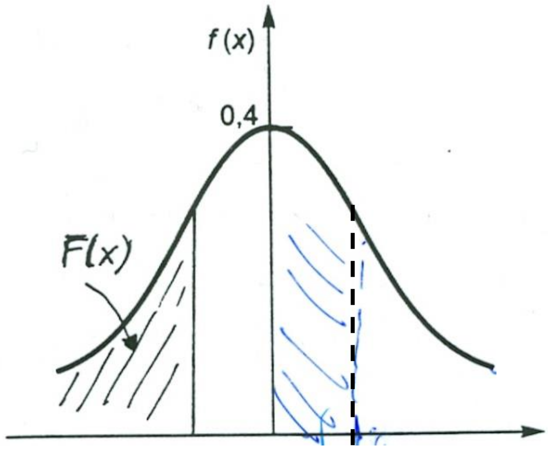

Rozkład normalny: $\mu = 1$, $\sigma = 1$




Rozkład normalny: $\mu = 0$, $\sigma = 2/3$

**Dystrybuanta** zmiennej losowej $X \sim N(0,1)$

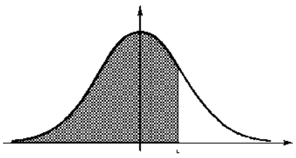
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$




**Wartości dystrybuanty zmiennej losowej $X \sim N(0,1)$ są stablicowane. Zazwyczaj w tablicach występuje funkcja**

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \qquad .$$

**Na jej podstawie obliczamy wartość dystrybuanty.**



**Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)** - $\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

| u | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,10 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54778 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56750 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,20 | 0,57936 | 0,58316 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59484 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,30 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,40 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66258 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67365 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,50 | 0,69156 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72241 |
| 0,60 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,70 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76731 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78231 | 0,78524 |
| 0,80 | 0,78815 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,90 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,00 | 0,84135 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84850 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,10 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,20 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90148 |
| 1,30 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,40 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92786 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,50 | 0,93329 | 0,93448 | 0,93575 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,60 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,70 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95819 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,80 | 0,96417 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,90 | 0,97138 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97671 |
| 2,00 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97933 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,10 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,20 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98746 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,30 | 0,98938 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,40 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,50 | 0,99389 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,60 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99586 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,70 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99737 |
| 2,80 | 0,99745 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,90 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,00 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99897 | 0,99900 |

**Np.** $\boldsymbol{F(-\infty)=0,\qquad F(+\infty)=1,\qquad F(0)=0.5}$

$$\boldsymbol{F(1)=0.84135.}$$

$\boldsymbol{F(-0.5)=1-F(0.5)=1-0.69156=\ldots}$

$$\boldsymbol{F(1.52)=0.93575}$$

$$\boldsymbol{F(2.13)=0.98341}$$

**Każdy rozkład normalny $X \sim N(m, \sigma)$ można transformo-wać do rozkładu normalnego (standaryzowanego), $Z \sim N(0, 1)$**

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}.$$

**Wówczas**

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(\frac{x_1 - m}{\sigma} \le \frac{X - m}{\sigma} \le \frac{x_2 - m}{\sigma}) = P(z_1 \le Z \le z_2),$$

$$z_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma}, \qquad z_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma}.$$

**Ponieważ $Z \sim N(0, 1)$, więc z tablic można obliczyć $P(z_1 \le Z \le z_2)$.**

**Przykład17**

**Wydajność pracy w pewnym zakładzie jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym ze średnią $m = 12$ i odchyleniem standardowym $\sigma = 2$. Tak więc $X \sim N(12, 2)$ Jakie jest prawdopodobieństwo, że**

a. **wydajność jest mniejsza od 15.**

$$P(X < 15) = P(\frac{X - 12}{2} < \frac{15 - 12}{2}) = P(T < 1.5) = \Phi(1.5) = 0,93329.$$

b. **wydajność jest mniejsza od 7.**

$$P(X < 7) = P\left(\frac{X - 12}{2} < \frac{7 - 12}{2}\right) = P(T < -2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0,99389.$$

c. **wydajność jest w przedziale [8, 16].**

$$P(8 < X < 16) = P\left(\frac{8 - 12}{2} < T < \frac{16 - 12}{2}\right) = P(-2 < T < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,97725 - (1 - 0,97725) = -1 + 2 * 0,97725$$

$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

d. **wydajność przekroczy 19.**

$$P(X > 19) = P(\frac{X - 12}{2} > \frac{19 - 12}{2}) = P(T > 3.5) = 1 - P(T < 3.5) =$$

**1**-0.999767=…

**Przykład18.** **Waga soku, w napełnianych przez automat kartonach, ma rozkład normalny $N(1\ kg,\ 0.05\ kg)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że waga losowo wybranego kartonu:**

a) **jest mniejsza niż 0.95,**
b) **przekroczy 1.05.**

*X* – **zmienna losowa określająca wagę kartonu,** $\boldsymbol{X \sim N}(1kg, 0.05kg)$.

a) $\boldsymbol{P(X < 0.95) = P(\frac{X-1}{0.05} < \frac{0.95-1}{0.05}) = P(T < -1) = 0.1587.}$

b) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > 1.05) = P(\frac{\boldsymbol{X-1}}{\boldsymbol{0.05}} > \frac{\boldsymbol{1.05-1}}{\boldsymbol{0.05}}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{T} > 1) = 1 - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{T} < 1) =$ $0.1587.$

c) **Jaka część soków ma wagę większą od 1.0 kg, a mniejsza niż 1.1 kg.**

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{1.0} < X < 1.1) = P\left(\frac{\boldsymbol{1.0-1}}{\boldsymbol{0.05}} < \frac{\boldsymbol{X-1}}{\boldsymbol{0.05}} < \frac{\boldsymbol{1.1-1}}{\boldsymbol{0.05}}\right) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{0} < T < 2)$$
$$= P(X < 2) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < 0) = \boldsymbol{0{,}97725 - 0.5000}$$

d) **Jaka jest waga, poniżej której jest 75% kartonów.**

**Niech** $\boldsymbol{T \sim N(0, 1)}$ **Szukamy** $\boldsymbol{a}$**, dla którego** $\boldsymbol{P(T} < a) = 0.75$. **Z tablic rozkładu normalnego, *a*=0.67.**

**Zmienna** $\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{X-1}}{\boldsymbol{0.05}}$. **Szukamy takiego *x*, aby** $\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{0.05}} = \boldsymbol{a = 0.67.}$ **Stąd** $\frac{\boldsymbol{X-1}}{\boldsymbol{0.05}}$**=0.67 czyli** $\boldsymbol{x = 1 + 0.67 * 0.05 = 1.0335.}$ **Tak więc 75%kartonów ma wagę poniżej 1.0335**

**Przykład19. Z badań wynika, że przebieg opony ma rozkład** $\boldsymbol{N(90\ 000\ km,\ 10\ 000\ km)}$**.**

a) **jakie jest prawdopodobieństwo, że kupiona opona będzie miała przebieg większy niż 95 000 km.**
b) **kupiono 5 opon. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich łączny przebieg przekroczy 40 000 km.**

*X* – **przebieg opony,** $\boldsymbol{X \sim N}(90\ 000, 10\ 000)$

**a)** $\boldsymbol{P(X > 95000) = P(\frac{X-90000}{10000} > \frac{95000-90000}{10000}) = P(T > 0.5) = 0.3085.}$

**b)**

*Y* – **łączny przebieg 5 opon,** $Y \sim \boldsymbol{N}(450\ 000 = 5 * 90\ 000, \boldsymbol{22360.68} = 10000\sqrt{5})$.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} > 400\ \boldsymbol{000}) = \boldsymbol{P}(\frac{\boldsymbol{X - 450000}}{\boldsymbol{22360.68}} > \frac{\boldsymbol{400\ 000 - 450\ 000}}{\boldsymbol{22360.68}}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{T} > \frac{\boldsymbol{50}}{\boldsymbol{22}})$$
$$= \boldsymbol{P(T > -2.236068) = 0.9873263}$$

$$\boldsymbol{22360.68 = \sqrt{5} * 10000}$$

***Na zmiennych losowych możemy wykonywać działania arytmetyczne. W wyniku otrzymujemy także zmienne losowe.***

**<u>Przykład 20</u>. Wzrost mężczyzn w Polsce ma rozkład normalny $N(175\ cm, 8\ cm)$, a kobiet $N(165\ cm, 5\ cm)$.**

**Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym małżeństwie mężczyzna jest mniej niż o 5 cm wyższy od żony.**

**-------------------------**

**<u>Twierdzenie 1</u>. Jeżeli $X_1, X_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz**

$X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$, ***i*=1,2, to zmienna losowa**

**$Z = X_1 - X_2$ ma rozkład normalny** $Z = N(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$**.**

**-------------------------**

**Cd. Przykład**

$X_1 \sim N(175, 8)$ **- wzrost, mężczyzny**

$X_2 \sim N(165{,}5)$ **- wzrost kobiety,**

**Obie zmienne losowe są niezależne.**

**Ponieważ $m_1 - m_2 = 175 - 165 = 10$ oraz $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} =$**

**$\sqrt{8^2 + 5^2} = 9.4$, więc**

**z Twierdzenie 1., zmienna losowa** $Z = X_1 - X_2 \sim N(10{,}9.4)$**.**

$P(Z < 5) = P(\frac{Z-10}{9.4} < \frac{5-10}{9.4}) = P(T < -0.53) = 0.2912$. **(1-0,70194)**

**--------------------------------**

**Twierdzenie 2. Jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i zmienna** $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$**, to zmienna $Y = X_1 + X_2 +, \ldots, +X_n$ na rozkład**

$\boldsymbol{N(m_1 + m_2 + \dots + m_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 +, \dots, \sigma_n^2})}$.

**<u>Przykład 11</u>. W windach osobowych znajduje się instrukcja: „maksymalne obciążenie 7 osób lub 500 kg.” Zakładając, że waga pasażera ma rozkład normalny ze średnią 70 kg i odchyleniem standardowym 3 kg, obliczyć prawdopodobieństwo, że waga 7 osób przekroczy 500 kg.**

$\boldsymbol{X_i}$ **- waga *i*-tego pasażera,** $X_i \sim N(70,3)$**.**

***Y* – zmienna losowa określająca wagę 7 pasażerów,**

$\boldsymbol{Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n}$**.**

**Z Tw. 2,** $\boldsymbol{Y \sim N(m_1 + m_2 +, \dots, + m_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 +, \dots, \sigma_n^2})}$**, tj.**

$Y \sim \boldsymbol{N(490 = 70 * 7, \sqrt{63} = \sqrt{3^2 * 7})}$**.**

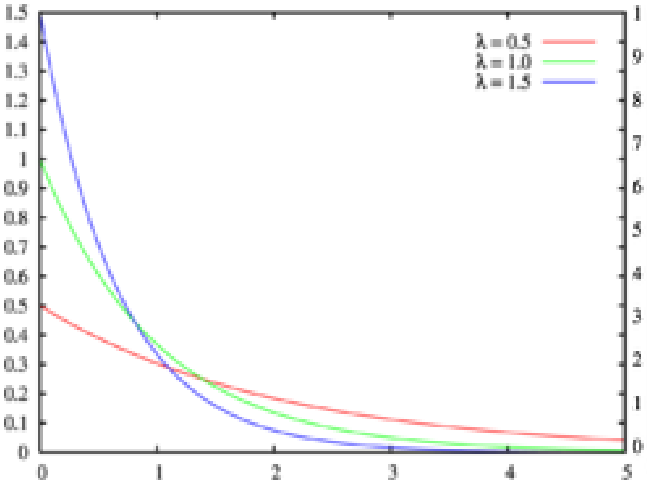
$$\boldsymbol{P(Y} > 500) = P\left(\boldsymbol{\frac{Y - 490}{\sqrt{63}}} > \boldsymbol{\frac{500 - 490}{\sqrt{63}}}\right) = \boldsymbol{P(T} > 1.25) = 1 - {\scriptstyle \mathbf{0,55962}}$$

**Jakie jest prawdopodobieństwo, że waga 7 osób nie przekroczy 480 kg?** $\boldsymbol{P(Y} < 480) = \cdots$.

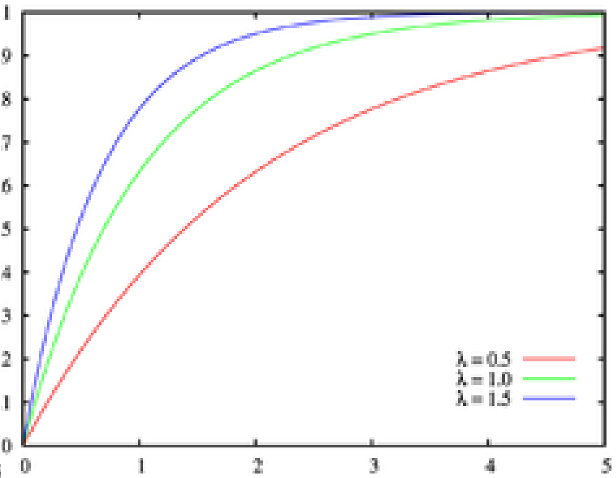
# Rozkład wykładniczy

## Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}.$$




Funkcja gęstości




Dystrybuanta

$$E(X) = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda^2$$

**Rozkładem tym opisuje się, między innymi, czas bezawaryjnej pracy badanego elementu. Jest on jedynym rozkładem ciągłym, który ma właściwość zwaną *brakiem pamięci*. Własność tę można interpretować jako niezależność dalszego czasu pracy elementu od tego co działo się z nim w „przeszłości". Dalszy czas pracy elementu ma taki sam rozkład jak całkowity czas pracy elementu.**

# Rozkład chi-kwadrat (rozkład $\chi^2$)

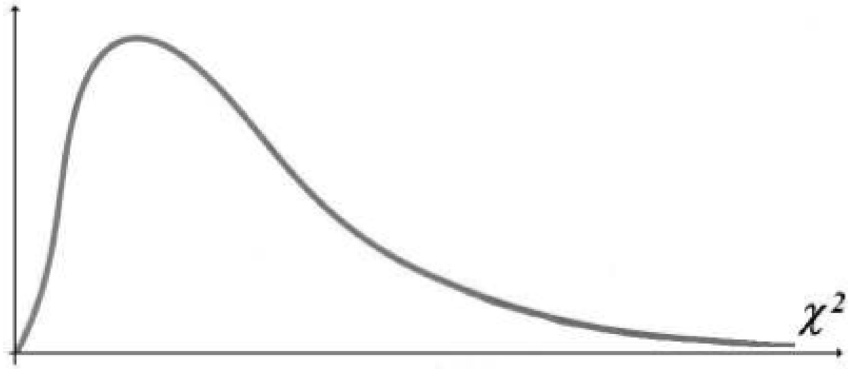
**Danych jest $k$ ciągłych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i odchyleniem standardowym 1, tj. każda zmienna $X_i : N(0;1)$ ($i$=1,2, ... ,$k$).**

**Zdefiniujemy nową zmienną losową o nazwie chi-kwadrat ($\chi^2$) :**

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$$

**Rozkład tak zdefiniowanej zmiennej $\chi^2$ nazywamy rozkładem zmiennej losowej chi-kwadrat o $k$ stopniach swobody.**

**Typowy wykres funkcji gęstości (dla $k$>2) pokazuje rysunek:**




**Rozkład zmiennej losowej $\chi^2$ o $k$ stopniach swobody ma następujące parametry:**

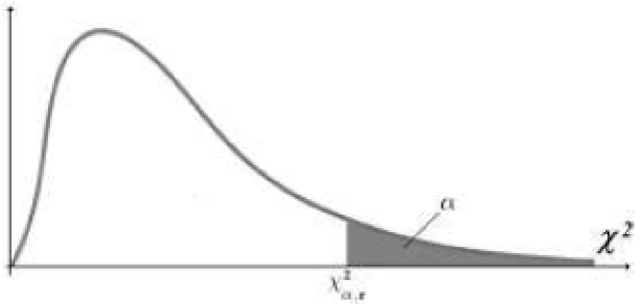
**wartość oczekiwana** $E\left(\chi^2\right) = k$

**odchylenie standardowe** $\sqrt{V\left(\chi^2\right)} = \sqrt{2k}$

**Rozkład zmiennej losowej $\chi^2$ o $k$ stopniach swobody jest rozkładem pomocniczym używanym we wnioskowaniu statystycznym.**

Tablice zmiennej losowej $\chi^2$ o $k$ stopniach swobody zostały opracowane tak, że podają przy założonym prawdopodobieństwie ($\alpha$) taką wartość (oznaczmy ją $\chi^2_{\alpha,k}$) zmiennej losowej $\chi^2$, dla której :

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}\right) = \alpha$$




**UWAGA !!! Stopnie swobody są oznaczone w tablicach przez $r$.**

## PRZYKŁAD 4

Jaka jest wartość zmiennej losowej $\chi^2$ o $5$ stopniach swobody, która spełnia warunek $P\left(\chi^2 > \chi^2_{0,05;5}\right) = 0,05$ ?

| r | $\alpha$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *0,99* | ... | *0,10* | *0,05* | *0,02* |
| **1** | $0,0^3157$ | ... | 2,706 | 3,841 | 5,412 |
| **2** | 0,0201 | ... | 4,605 | 5,991 | 7,824 |
| **3** | 0,115 | ... | 6,251 | 7,815 | 9,837 |
| **4** | 0,297 | ... | 7,779 | 9,488 | 11,668 |
| **5** | 0,554 | ... | 9,236 | **11,070** | 13,388 |
| **6** | 0,872 | ... | 10,645 | 12,592 | 15,033 |

Poszukiwaną wartością zmiennej losowej $\chi^2$ o $5$ stopniach swobody jest liczba $\chi^2_{0,05;5} = 11,07$.

Spełnia ona warunek $P\left(\chi^2 > 11,07\right) = 0,05$

# Rozkład t - Studenta

Dana są dwie zmienne losowe:

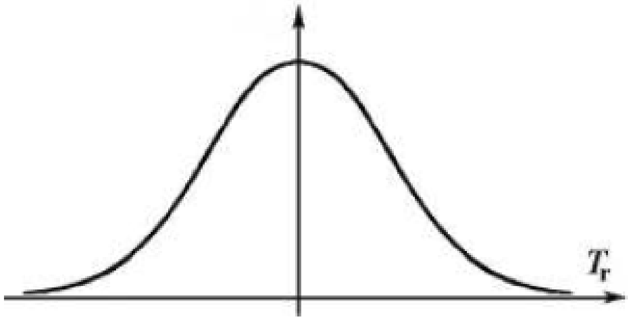
1. zmienna losowa $U:N(0;1)$ oraz
2. zmienna losowa $\chi^2$ o $k$ stopniach swobody

Zdefiniujemy nową zmienną losową postaci :

$$T_k = \frac{U}{\sqrt{\chi^2}}\sqrt{k}$$

Rozkład tak zdefiniowanej zmiennej $T_k$ nazywamy rozkładem zmiennej losowej t-Studenta o $k$ stopniach swobody.

Wykres funkcji gęstości pokazuje rysunek:




Rozkład zmiennej losowa t-Studenta o $k$ stopniach swobody ma następujące parametry:

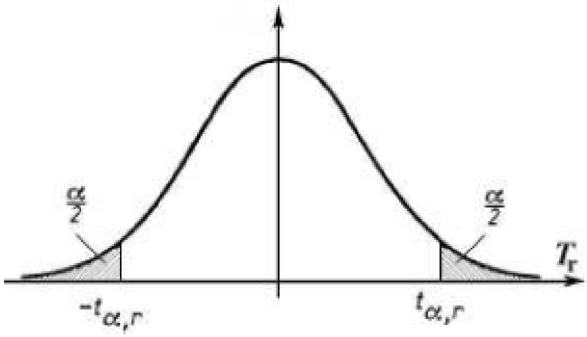
wartość oczekiwana
$$E(T_k) = 0$$

odchylenie standardowe
$$\sqrt{V(T_k)} = \sqrt{\frac{k}{k-2}}$$

Rozkład zmiennej losowej t-Studenta $T_k$ o $k$ stopniach swobody jest rozkładem pomocniczym używanym we wnioskowaniu statystycznym.

Tablice zmiennej losowej t-Studenta $T_k$ o $k$ stopniach swobody zostały opracowane tak, że podają przy założonym prawdopodobieństwie ($\alpha$) taką wartość (oznaczmy ją $t_{\alpha,k}$) zmiennej losowej $T_k$, dla której :

$$P\left(\left|T_k\right| \geq t_{\alpha,k}\right) = \alpha$$




UWAGA !!! Stopnie swobody są oznaczone w tablicach przez $r$.

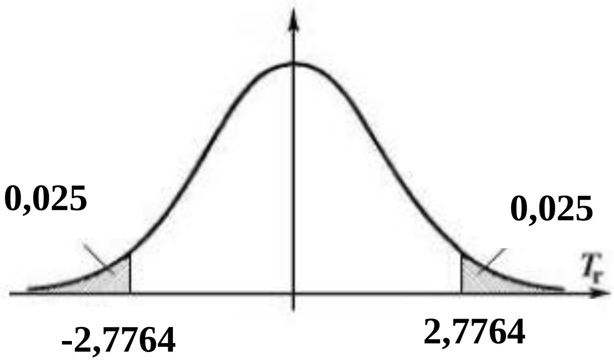
## PRZYKŁAD 5

Jaka jest wartość zmiennej losowej t-Studenta o $4$ stopniach swobody, która spełnia warunek $P\left(\left|T_k\right| \geq t_{0,05;4}\right) = 0{,}05$ ?

| α / r | 0,5 | . . . | 0,1 | 0,05 | 0,02 | . . . | α / r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 1,0000 | | 6,3138 | 12,7062 | 31,8205 | | *1* |
| *2* | 0,8165 | | 2,9200 | 4,3027 | 6,9646 | | *2* |
| *3* | 0,7649 | | 2,3534 | 3,1824 | 4,5407 | | *3* |
| *4* | 0,7407 | . . . | 2,1318 | **2,7764** | 3,7469 | . . . | *4* |
| *5* | 0,7267 | | 2,0150 | 2,5706 | 3,3649 | | *5* |
| *6* | 0,7176 | | 1,9432 | 2,4469 | 3,1427 | | *6* |

Jest to liczba $t_{0,05;4} = 2{,}7764$ . Spełnia ona warunek

$P\left(\left|T_4\right| \geq 2{,}7764\right) = 0{,}05$ Ilustruje to rysunek:




## PRZYKŁAD 6

Jaka jest wartość zmiennej losowej t-Studenta o **4** stopniach swobody, która spełnia warunek $P\left(T_k \geq t_{0,05;4}\right) = 0{,}05$ ?

Aby poprawnie odczytać musimy <u>podwoić</u> prawdopodobieństwo $\alpha$.

| α / r | 0,5 | . . . | 0,1 | 0,05 | 0,02 | . . . | α / r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 1,0000 | | 6,3138 | 12,7062 | 31,8205 | | *1* |
| *2* | 0,8165 | | 2,9200 | 4,3027 | 6,9646 | | *2* |
| *3* | 0,7649 | | 2,3534 | 3,1824 | 4,5407 | | *3* |
| *4* | 0,7407 | . . . | **2,1318** | 2,7764 | 3,7469 | . . . | *4* |
| *5* | 0,7267 | | 2,0150 | 2,5706 | 3,3649 | | *5* |
| *6* | 0,7176 | | 1,9432 | 2,4469 | 3,1427 | | *6* |

Poszukiwana liczba to $t_{0,05;4} = 2{,}1318$ .

Spełnia ona warunek $P\left(T_4 \geq 2{,}1318\right) = 0{,}05$.