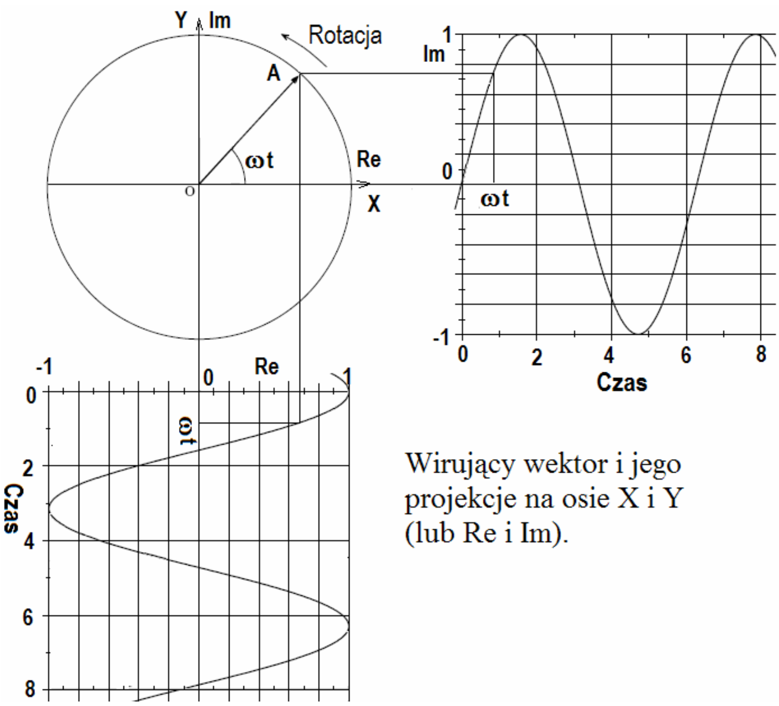
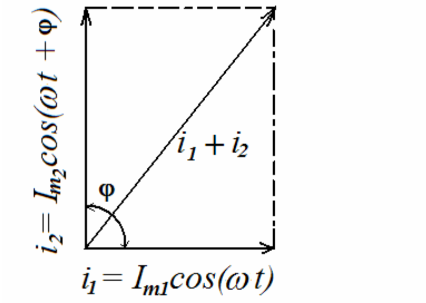
Sygnały zmienne, impedancja, moc – z wykładów z miernictwa miernictwa (przypomnienie)

1. Obwody prądu sinusoidalnego
2. Elementy R, L, C
3. Dwójnik szeregowy RL i RC
4. Impedancja i admitancja
5. Moc w obwodach prądu sinusoidalnego

Obwody prądu sinusoidalnego

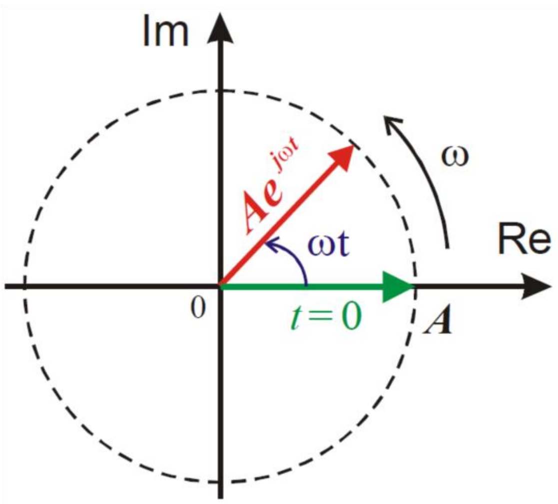


Wirujący wektor i jego projekcje na osie X i Y (lub Re i Im).



Reprezentację wektorową przebiegów sinusoidalnych nazywamy wykresem wskazowym lub wykresem wektorowym. Użyte wektory nazywamy fazorami lub wskazami.

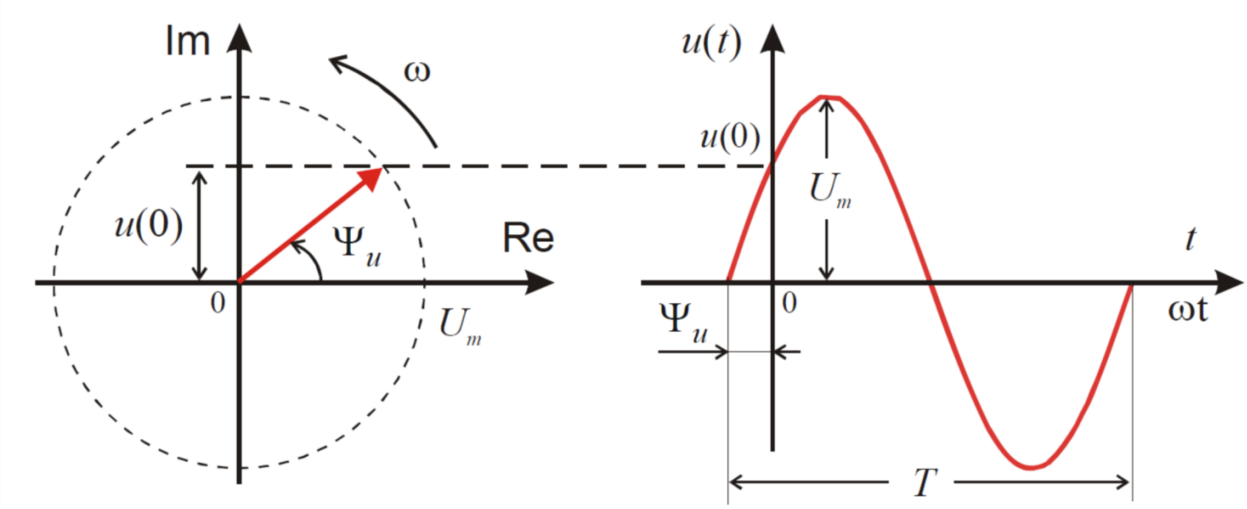
Dla obwodów z prądami zmiennymi prawa Kirchhoffa i Ohma obowiązują w pełni dopiero w zapisie zespolonym!



Sygnał może być interpretowany na płaszczyźnie zmiennej zespolonej za pomocą wektora wirującego.

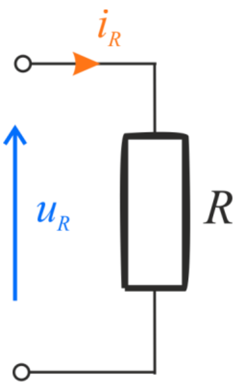
$e^{j\omega t}$ - spełnia rolę obrotu
A – moduł wektora

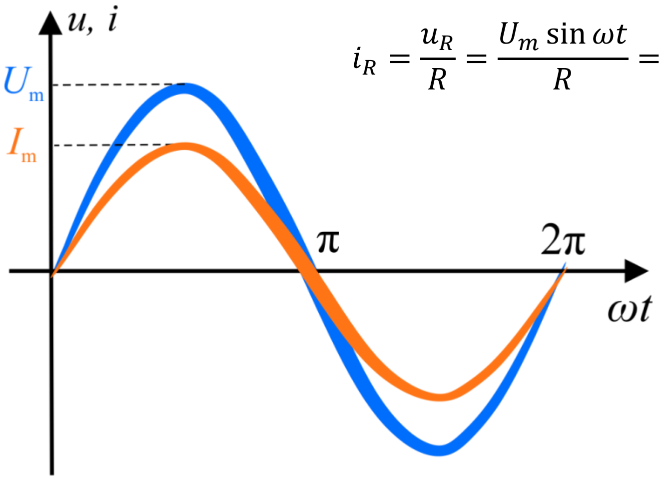
Związek między wektorem wirującym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej a rozpatrywanym sygnałem sinusoidalnym.



Idealny rezystor

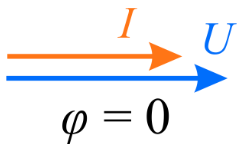
Napięcie w obwodzie opisuje zależność: $u_R = U_m \sin \omega t$





$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t$$

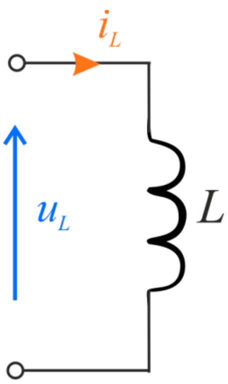
Wykres czasowy



Wykres wektorowy

W obwodzie z idealnym rezystorem napięcie i prąd są w fazie.

Idealna indukcyjność



Przez cewkę płynie prąd $i_L = I_m \sin \omega t$

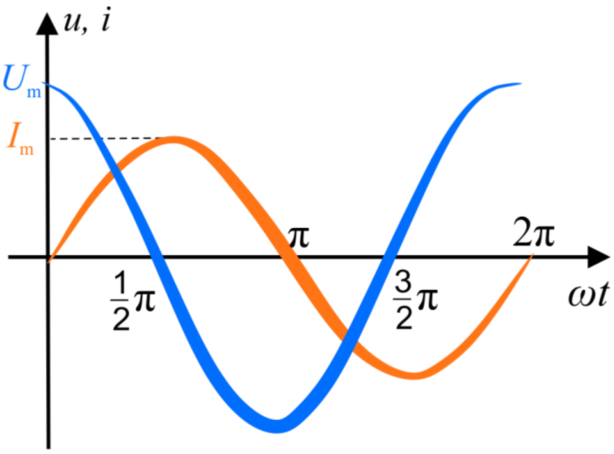
Na skutek zmienności w czasie prądu w cewce indukuje się elektromotoryczna. Napięcie na cewce jest proporcjonalne do prędkości zmiany prądu.

Napięcie wymusza stały wzrost prądu $U = L\frac{dI}{dt}$ $I = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} U d\tau$

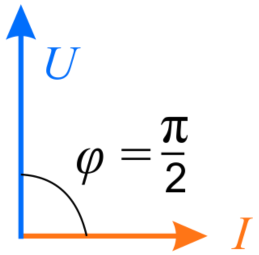
$$u_L = L\frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{X_L} = \omega L = 2\pi f L$$ Reaktancja indukcyjna

$$\boldsymbol{B_L} = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$$ Susceptancja indukcyjna



Wykres czasowy



Wykres wektorowy

W obwodzie z idealną rezystorem napięcie wyprzedza prąd o kąt fazowy $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Zapis zespolony

W modelu liczb zespolonych jest spełnione prawo Ohma!

$$I = Re\,(I_m e^{j(\omega t+\varphi)})$$

$$U = L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t+\varphi)}) = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

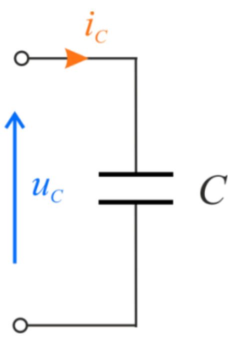
$$U = j\omega L\,\mathrm{I} = X_L I \qquad I = \frac{1}{j\omega L}\mathrm{U} = B_L U$$

Reaktancja indukcyjna $\boldsymbol{X_L} = j\omega L$ $\qquad X_L = \omega L \quad e^{j\frac{\pi}{2}}$

Susceptancja indukcyjna $\boldsymbol{B_L} = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{j\omega L}$

$$U = IX_L = I_m e^{j(\omega t+\varphi)} \cdot \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = I_m \omega L e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

Idealna pojemność



Kondensator zastał podłączony do napięcia $u_C = U_m \sin \omega t$

Każdej zmianie napięcia towarzyszy zmiana ładunku na okładkach kondensatora

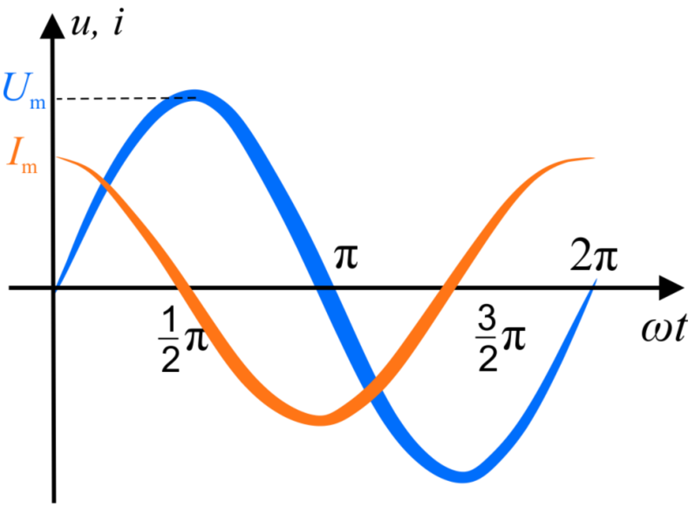
$$U = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I d\tau \qquad I = C\frac{dU}{dt}$$

Stały prąd (ładowania) oznacza stałe tempo zmian napięcia na kondensatorze. Prąd jest wprost proporcjonalny nie do napięcia, jak dla opornika, lecz do szybkości zmian napięcia!

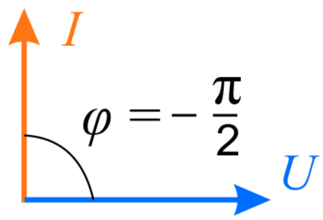
$$i_C = C\frac{d}{dt}(U_m \sin\omega t) = \omega C U_m \cos\omega t = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\boldsymbol{X_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$ Reaktancja pojemnościowa

$\boldsymbol{B_C} = \frac{1}{X_C} = \omega C$ Susceptancja pojemnościowa



Wykres czasowy



Wykres wektorowy

W obwodzie z idealną rezystorem napięcie opóźnia się względem prądu o kąt fazowy $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Zapis zespolony

$$U = Re\,(U_m e^{j(\omega t+\varphi)})$$

$$I = C\frac{d}{dt}(U_m e^{j(\omega t+\varphi)}) = j\omega C U_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$U = \frac{I}{j\omega C} = X_C I$$

$$I = j\omega C\, \mathrm{U} = B_C U$$

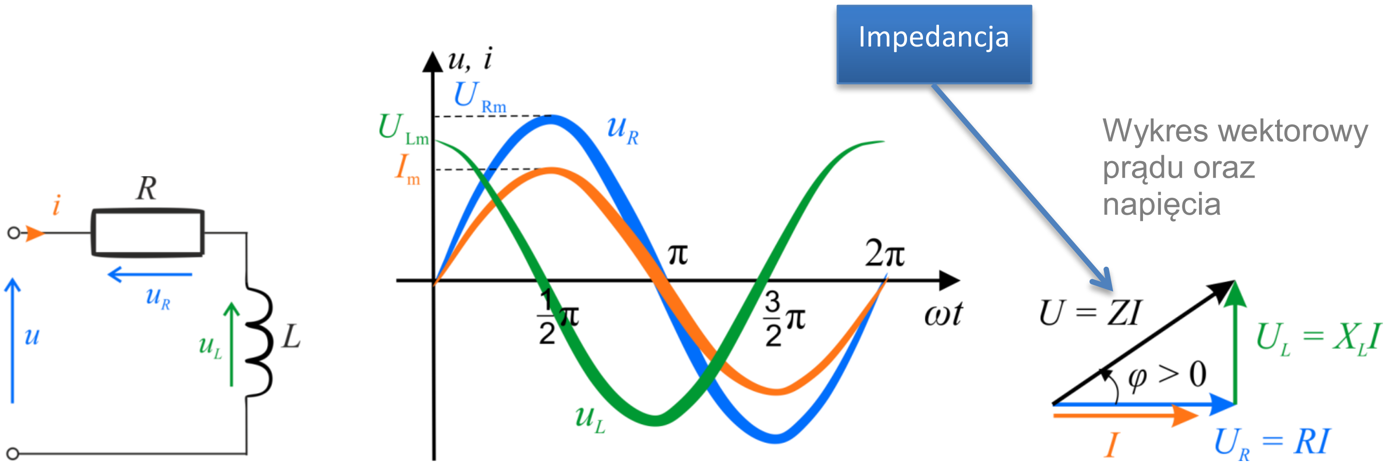
Reaktancja pojemnościowa $\boldsymbol{X_C} = \frac{1}{j\omega C}$

Susceptancja pojemnościowa $\boldsymbol{B_C} = \frac{1}{X_C} = j\omega C$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$U = IX_C = I_m e^{j(\omega t+\varphi)} \cdot \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})}$$

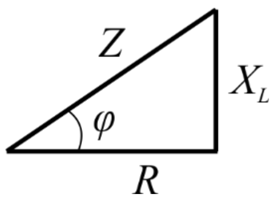
Dwójnik szeregowy R, L



Wykres czasowy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{Lm}}{U_{Rm}} = \frac{\omega L I_m}{R I_m} = \frac{\omega L}{R}$$

Trójkąt impedancji (połączenie szeregowe R, L)



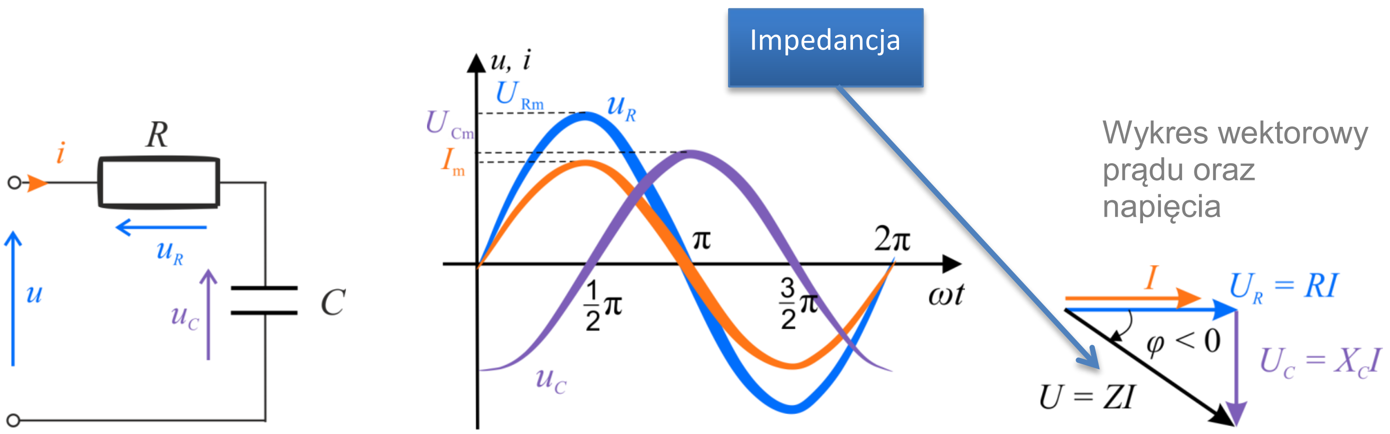
$$R = Z\cos\varphi$$

$$X_L = Z\sin\varphi$$

Kąt φ jest dodatni

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L}{R}$$

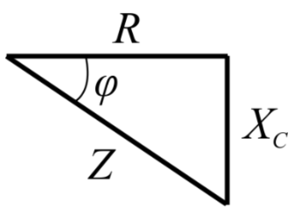
Dwójnik szeregowy R, C



Wykres czasowy

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{U_{Cm}}{U_{Rm}} = \frac{\frac{1}{\omega C} I_m}{R I_m} = -\frac{1}{\omega CR}$$

Trójkąt impedancji (połączenie szeregowe R, C)



$$R = Z\cos\varphi$$

$$X_C = -Z\sin\varphi$$

Kąt φ jest ujemny

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{X_C}{R}$$

Impedancja (admitancja)

Impedancja $$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Re(\underline{Z}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(\underline{Z}) = \mathrm{R} + \mathrm{jX}$$

Admitancja $$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = Re(\underline{Y}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(\underline{Y}) = \mathrm{G} + \mathrm{jB}$$

(G – konduktywność lub przewodność właściwa)

Impedancja jest wielkością zespoloną i może być przedstawiona w postaci wykładniczej $\underline{Z} = |Z|e^{j\varphi}$

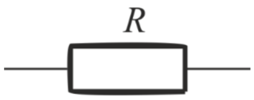
gdzie |Z| jest modułem równym stosunkowi amplitudy U_m napięcia (lub wartości skutecznej) do amplitudy I_m prądu (lub wartości skutecznej) w dwójniku; kąt φ zwany jest argumentem (głównym) impedancji i jest równy różnicy pomiędzy początkowym kątem fazowym napięcia i prądu.

$$\underline{Z} = \mathrm{R} + \mathrm{jX} = \mathrm{R} + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \underline{Y} = \mathrm{G} + \mathrm{jB} = \mathrm{G} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\omega = 2\pi f$$

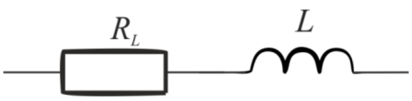
Z powyższych zależności wynika, że zarówno wartość reaktancji (X), jak i susceptancji (B) zależna jest od częstotliwości przebiegu. Rezystancja (R) oraz konduktancja (G) formalnie nie wykazują takiej zależności.

Idealne elementy R, L, C samoistnie nie występują w obwodach prądu przemiennego. W zależności od częstotliwości występują w zestawach podwójnych lub potrójnych. W zakresie częstotliwości niskich (do około 10 kHz) stosuje się najczęściej następujące schematy zastępcze elementów R, L, C:



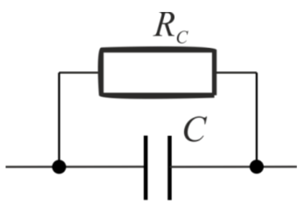
Rezystor jako element idealny

$$\underline{Z} = R + j0$$



Cewka indukcyjna jako gałąź szeregowa

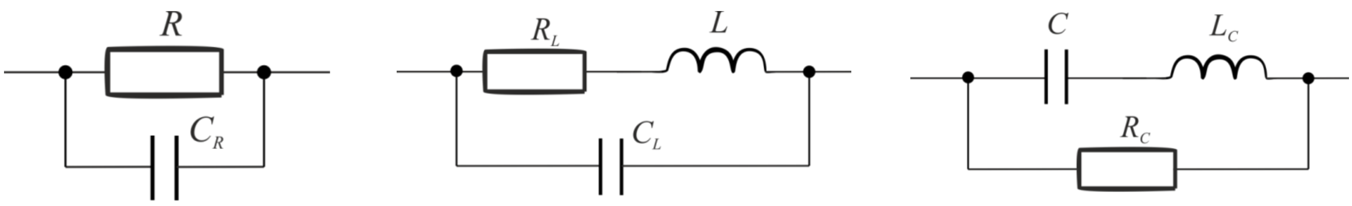
$$\underline{Z_L} = R_L + jX_L$$



Kondensator jako gałąź równoległa:

$$\underline{Y_C} = G_C + jB_C$$

Przykładowo: dla f ~ 10 MHz



Moc w obwodach prądu sinusoidalnego

Należy rozróżnić pomiary mocy dla:

- Prądów i napięć stałych
- Prądów i napięć przemiennych sinusoidalnych
- Prądów i napięć przemiennych odkształconych

Dla prądów i napięć przemiennych mierzymy:

- moc czynną P
- moc bierną Q
- moc pozorną S

Dodatkowo dla prądów i napięć odkształconych mierzymy:

- moc odkształconą D

Moc – trochę teorii

Przy prądach i napięciach przemiennych definiuje się moc chwilową p(t), która jest również zmienna w czasie:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

Dla przebiegów sinusoidalnych: $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ $\quad$ $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

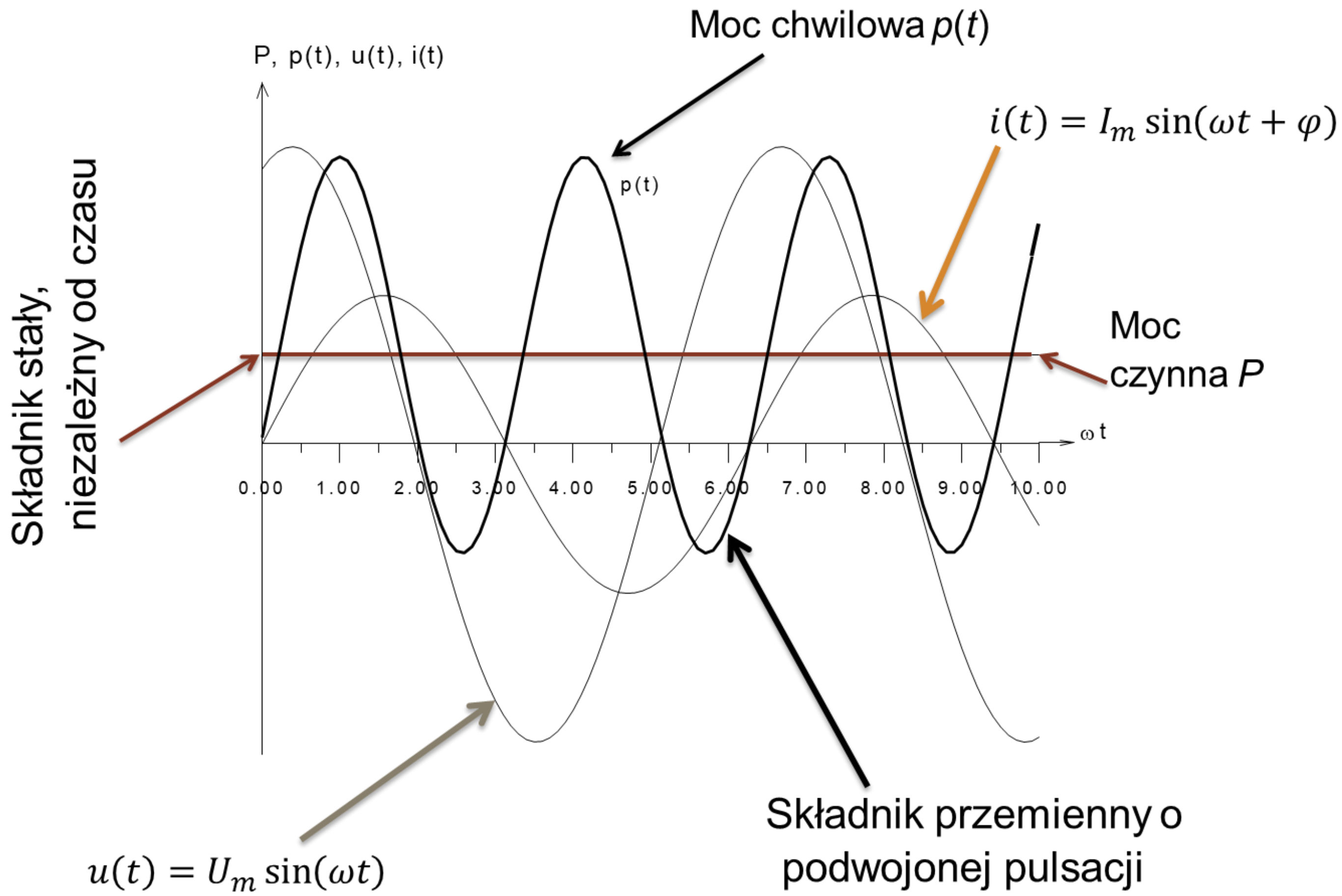
$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

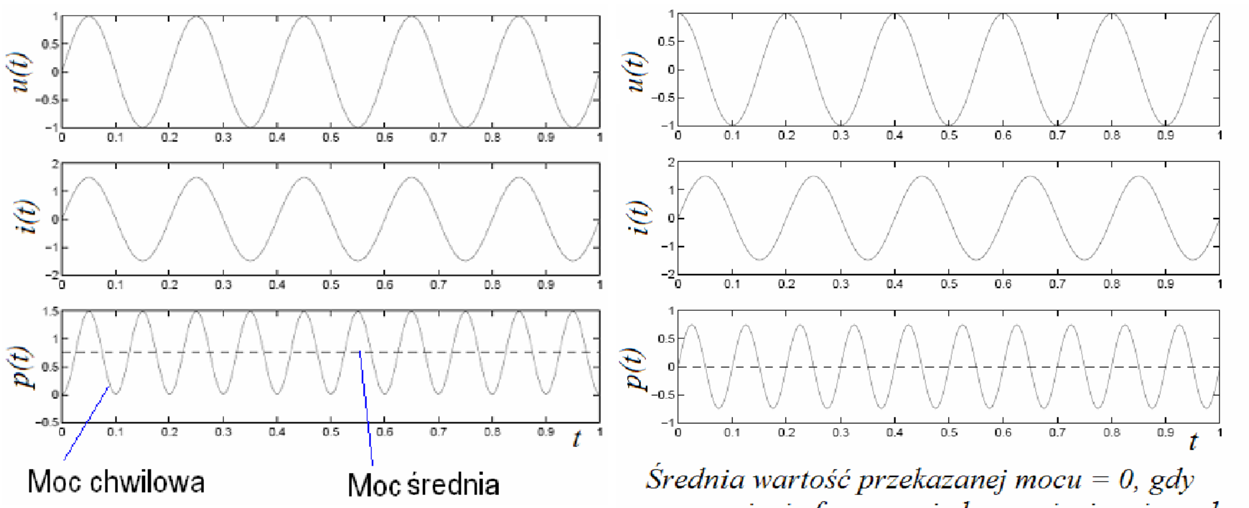
Można skorzystać ze wzoru: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)]}$$

Składnik stały, nie zależny od czasu

Składnik przemienny o podwojonej pulsacji





Średnia wartość przekazanej mocu = 0, gdy przesunięcie fazowe między napięciem i prądem wynosi 90°.

Gdy odbiorniki mocy czyli obciążenia źródeł napięcia sinusoidalnego mają częściowo charakter indukcyjny lub pojemnościowy to między napięciem i prądem może występować znaczna różnica faz. To przesunięcie fazowe decyduje o ilości przekazywanej mocy do obciążenia.

Gdy $\cos(\varphi) < 1$ średnia moc: $p < UI$, a chwilowa wartość mocy bywa momentami ujemna, czyli momentami moc wraca do źródła.

Moc czynna

Moc czynna *P* jest to uśredniona za okres *T* moc chwilowa *p*(*t*):

$$P = \overline{p}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

Dla przebiegów sinusoidalnych postać tego wzoru ulega uproszczeniu

$$P = \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T (U_m I_m[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)])dt$$

$$P = \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T U_m I_m \cos(\varphi)\, dt - \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi)\, dt$$

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos(\varphi) = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\varphi)$$

Składnik przemienny o podwojonej pulsacji, wartość średnia równa zero.

$$\boxed{P = U_s I_s \cos(\varphi)}$$ [W] (wat)

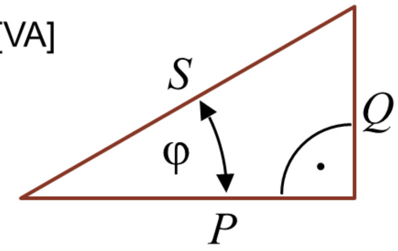
- Ten wzór jest słuszny tylko dla przebiegów sinusoidalnych.
- Dla przebiegów odkształconych obowiązuje podstawowy wzór definicyjny (uśredniona za okres moc chwilowa).
- Pomiar mocy wymaga wymnożenia wartości chwilowych prądu i napięcia, a następnie uśrednieniu wyniku mnożenia.
- Uśrednianie można zastąpić odfiltrowaniem składnika o podwojonej częstotliwości 2ωt.

Moc bierna $$\boxed{Q = U_s I_s \sin(\varphi)}$$ [War]

Moc pozorna $$\boxed{S = U_s I_s}$$ [VA]

Trójkąt mocy $$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{Q}$$



Przebiegi odkształcone napięcia i prądu

W przypadku przebiegów odkształconych, czyli niesinusoidalnych mamy

Odkształcone napięcie $$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega t + \varphi)$$

Odkształcony prąd $$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t + \varphi)$$

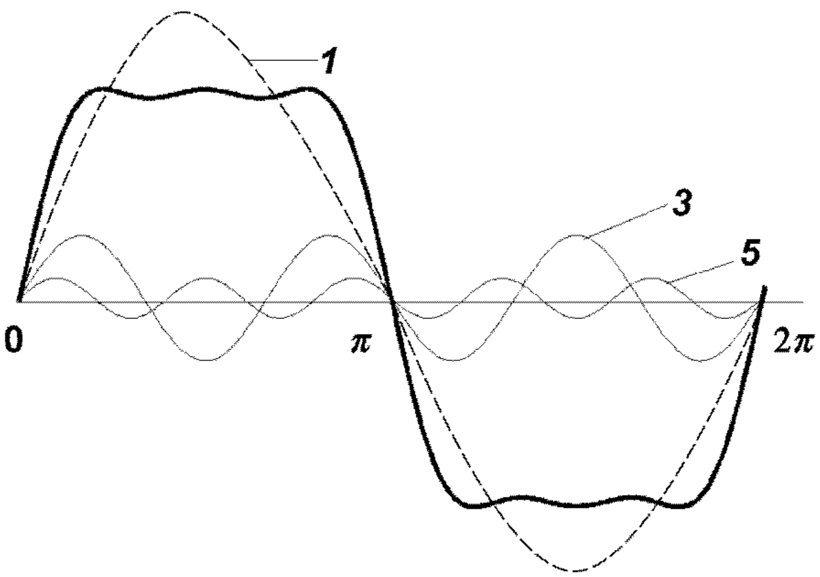
Moc czynna $$P = U_0 I_0 + \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos(\varphi_k)$$

Moc bierna $$Q = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin(\varphi_k)$$

Moc pozorna $$S = I_{sk} U_{sk} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}$$

Trójkąt mocy nie obowiązuje $$S^2 \neq P^2 + Q^2$$

Przebieg odkształcony - przykład



Przebieg okresowy odkształcony i jego rozkład na składowe harmoniczne: *1* – podstawową (pierwszego rzędu), *3* i *5* - wyższych rzędów

Moc zespolona S = UI - przykład*

Prąd i napięcie są w tej samej fazie: $u(t) = 50e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}\ [V]$ $i(t) = 2e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}\ [A]$

$$\boldsymbol{S} = u(t)i^*(t) = 50e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)} 2e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)} = 100e^{j(\omega t)} = 100W + 0j\ VAR$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \cos\varphi = 1$$

Wyrażenie: **S** =**UI** daje poprawny wynik gdy albo U albo I wyrażone jest z fazą początkową „0".

Zatem moc zespolona to iloczyn skutecznego zespolonego napięcia i skutecznej zespolonej sprzężonej wartości prądu **S = UI***. Część rzeczywista mocy zespolonej to moc czynna P, a część urojona to moc bierna Q.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{100^2 + 0^2} = 100 \quad [VA]$$

Moc w „ujęciu zespolonym"

Przebiegi sinusoidalne

$$\boldsymbol{Z} = \frac{Ue^{j(\omega t+\alpha)}}{Ie^{j(\omega t+\beta)}} = |\boldsymbol{Z}|e^{j(\alpha-\beta)} = |\boldsymbol{Z}|e^{j(\varphi)}$$

$$R = |\boldsymbol{Z}|\cos\varphi \qquad\qquad X = |\boldsymbol{Z}|\sin\varphi$$

Moc czynna

Dla wartości maksymalnych $$P = \frac{1}{2}U_m I_m\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{U_m^2}{|\boldsymbol{Z}|}\cos\varphi = \frac{1}{2}I_m^2|\boldsymbol{Z}|\cos\varphi$$

Dla wartości skutecznych $$P = U_{sk}I_{sk}\cos(\varphi) = \frac{U^2}{|\boldsymbol{Z}|}\cos\varphi = I_{sk}^2|\boldsymbol{Z}|\cos\varphi = I_{sk}^2 R$$

φ mieści się w przedziale -90° do +90° gdzie cos φ jest dodatnie, co zgadza się z zawsze dodatnią wartością R

Moc bierna

$$Q = U_{sk}I_{sk}\sin(\varphi) = \frac{U_{sk}^2}{|\boldsymbol{Z}|}\sin\varphi = I_{sk}^2|\boldsymbol{Z}|\sin\varphi = I_{sk}^2 X$$

φ zmienia znak, co zgadza się ze zmianą znaku X przy zmianie przewagi X_L nad X_C, gdy X_L przeważa X i sin φ są dodatnie, a gdy przeważa X_C: X i sin φ są ujemne.

Moc zespolona

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^* = P + jQ = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = I^2\mathrm{R} + \mathrm{j}I^2X = \boldsymbol{I}^2\frac{Z^2}{\boldsymbol{Z}^*} = \frac{\boldsymbol{U}^2}{\boldsymbol{Z}^*}$$

Moc pozorna

$$|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*|$$

Ponieważ Q - część reaktywna mocy jest związana z reaktywną częścią obciążenia, jej znak zależy od znaku tej urojonej (reaktywnej) części obciążenia, czyli od tego czy reaktancja obciążenia jest indukcyjna, czy pojemnościowa.

To prowadzi do ważnego stwierdzenia: Jeżeli obciążenie zawiera reaktancję indukcyjną, wtedy kąt między napięciem a prądem jest dodatni – prąd opóźnia się względem napięcia. W związku z tym, gdy φ (i Q) są dodatnie mówi się, że „współczynnik mocy jest opóźniony" (w literaturze angielskiej: „lagging power factor").

Przy obciążeniu typu pojemnościowego, Q i φ będą ujemne a współczynnik mocy nazwiemy wyprzedzającym (w literaturze angielskiej: „leading power factor"), bo wtedy prąd w obciążeniu będzie wyprzedzał napięcie.

Współczynnik mocy

Współczynnik mocy: cos ϕ (jest idealny gdy cos ϕ = 1)

Współczynnik mocy to stosunek mocy czynnej do mocy pozornej. W przypadku sinusoidalnych przebiegów napięcia i prądu zwykle jako cosinus kąta przesunięcia fazowego między nimi.

$$\cos\phi = \text{współczynnik mocy} = \text{power factor} = \text{pf}$$

Niestety w elektronice mamy do czynienia z bardziej złożoną sytuacją. W szczególności zasilacze pracujące w impulsowym modzie, jak przykładowo w zasilaczach z prostownikami gdzie następuje impulsowe doładowywanie dużych pojemności C.