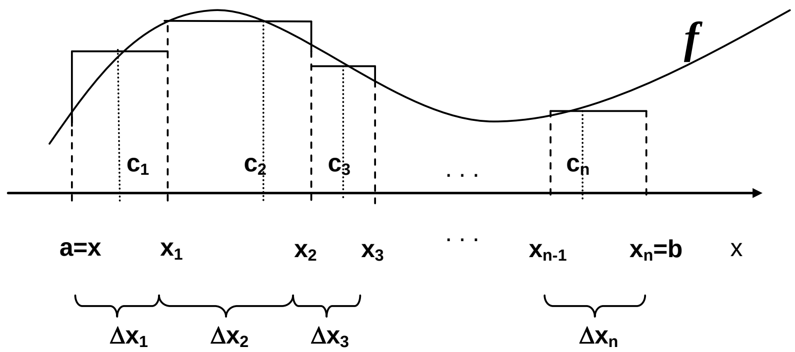
CAŁKA PODWÓJNA

(Analiza Matematyczna 1, wykład 13)

$f > 0$ - funkcja ograniczona w przedziale domkniętym $[a,b]$.
Przedział $[a,b]$ dzielimy na n podprzedziałów, w taki sposób, że:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, gdzie $x_0 = a$ i $x_n = b$.



<u>Średnica</u> $\delta_n = max\{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\}$, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Ciąg podziałów $P_1, P_2, ...$ jest <u>normalny</u>, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Wybieramy ciąg $c_1, c_2, ..., c_n$ taki, że $x_{i-1} \le c_i \le x_i$. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ - przybliżenie pola.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_i = 0$ *to granica (właściwa)*

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

jest całką Riemanna i oznaczamy oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Podobnie określamy całkę podwójną funkcji dwóch zmiennych.

Niech dziedziną $f(x, y)>0$ będzie prostokąt P o bokach $[a,b]$ i $[c,d]$.

Dzielimy odcinek $[a,b]$ punktami x_i :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \text{ a}$$

$[c,d]$ tą samą liczbą n punktów y_i:

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Niech

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

Dokonaliśmy podziału P_n prostokąta P na prostokąty o bokach Δx_i i Δy_i.

W każdym z prostokątów wybieramy punkt (α_i, β_i).

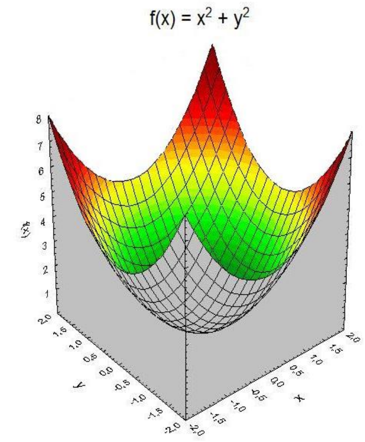
Wówczas $f(\alpha_i, \beta_i)\Delta x_i \Delta y_i$ jest objętością i-tego prostopadłościanu.

Suma Riemanna

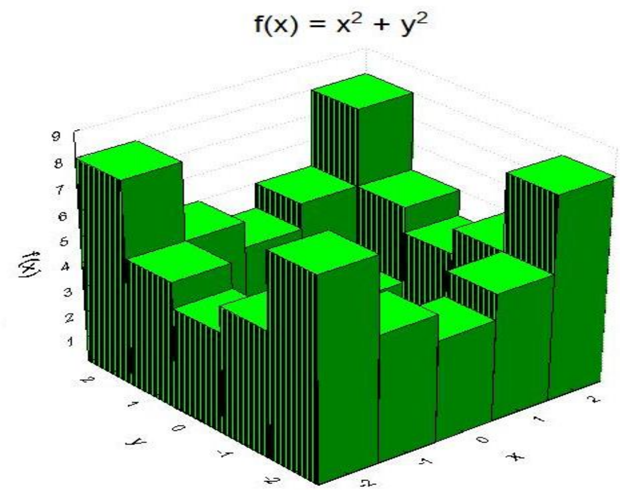
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

jest przybliżenie objętości bryły ograniczonej wykresem funkcji $f(x, y)$, płaszczyzną OXY i płaszczyznami

$$x = a,\ x = b,\ y = c \text{ oraz } y = d$$



Rys. 10.2
Wykres funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$



Suma Riemanna. Przybliżenie objętości bryły

δ_n **- będzie długość największej z przekątnych prostokątów podziału P_n.**

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, **to ciąg podziałów P_n nazywamy <u>normalnym.</u>.**

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\Delta x_i \Delta y$$

niezależna od podziału i od wyboru punktów α_i, β_i, **to nazywamy ją całką podwójną funkcji *f*(*x*,*y*) w prostokącie *P* i oznaczamy** $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$, **tzn.**

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy \overset{df}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\Delta x_i \Delta y.$$

<u>**Tw.**</u>

Jeżeli funkcja *f*(*x*,*y*) jest ciągła w prostokącie *P* opisanym nierównościami:

$a \le x \le b$, $c \le y \le d$, **to**

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad \text{oraz} \quad \iint\limits_P f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Przykład:

Obliczyć całkę $\iint\limits_P x^2(2+4y)dxdy$, gdy prostokąt *P* opisany jest nierównościami:

$0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2$.

***Rozwiązanie*:**

Mamy w tym przypadku

$$\iint\limits_P x^2(2+4y)dxdy = \int_0^3 dx\int_1^2 x^2(2+4y)dy$$

Obliczamy najpierw całkę wewnętrzną, a następnie całkę zewnętrzną:

$$\int_0^3 dx\int_1^2 x^2(2+4y)dy = \int_0^3 x^2\left[2y+2y^2\right]_1^2 dx = 8\int_0^3 x^2dx = 8\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 72$$

<u>Tw</u>.

Jeżeli dana jest funkcja $f(x,y)=h(x)\cdot g(y)$ w prostokącie *P* opisanym nierównościami

$a \le x \le b,\ c \le y \le d$, to

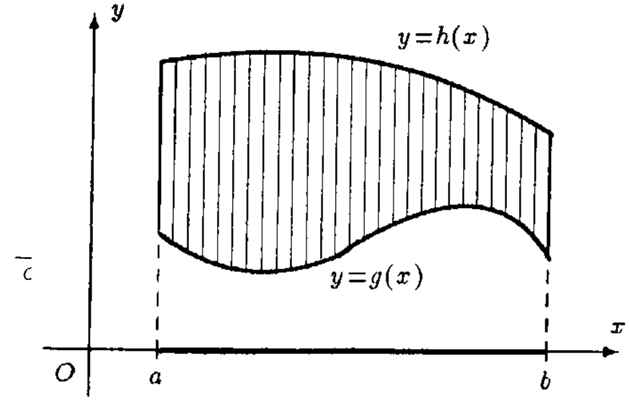
$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b h(x)dx\cdot\int_c^d g(y)dy.$$

Całka podwójna w obszarze normalnym
(zamiana całki podwójnej na iterowaną)

Obszar domknięty *D* $\begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{cases},$

gdzie *g*(*x*) i *h*(*x*) są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a;b]$, nazywamy

obszarem normalnym względem osi *OX*.



<u>Tw</u>.

Jeżeli funkcja *f*(*x*,*y*) jest ciągła w obszarze *D* $\begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{cases},$ **to**

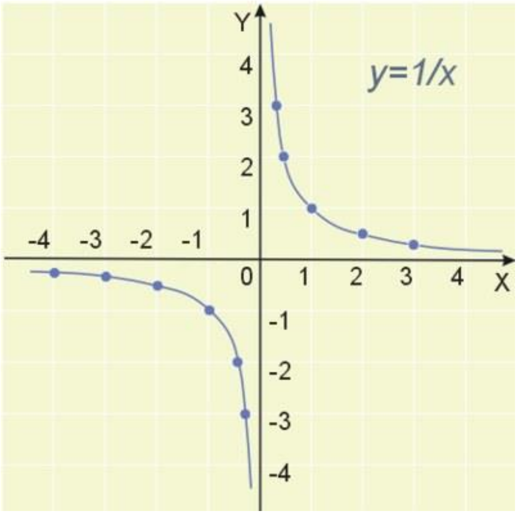
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy.$$

(*Całka iterowana*)

Przykład.

Obliczyć całkę $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, gdzie *D* jest obszarem ograniczonym krzywymi:

$x = 2,\ y = x,\ xy = 1.$



Rozwiązanie.

D to obszar normalny względem osi OX: $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x} \le y \le x \end{cases}$

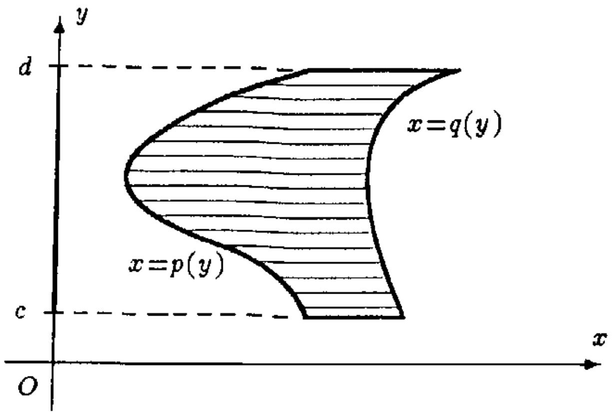
Stąd $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy.$

Ponieważ $\int \frac{x^2}{y^2}\,dy = -\frac{x^2}{y} + C$, to

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 \left(x^3 - x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{9}{4}$$

Obszar domknięty *D* określony

nierównościami $\begin{cases} c \le y \le d \\ p(y) \le x \le q(y) \end{cases}$,



gdzie *p*(*y*) i *q*(*y*) są funkcjami ciągłymi

w przedziale $[c; d]$, nazywamy

obszarem normalnym względem osi *OY*.

<u>Tw</u>.

Jeżeli funkcja *f*(*x*,*y*) jest ciągła w obszarze *D* opisanym

nierównościami

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ p(y) \le x \le q(y) \end{cases}, \text{ to } \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx\,.$$

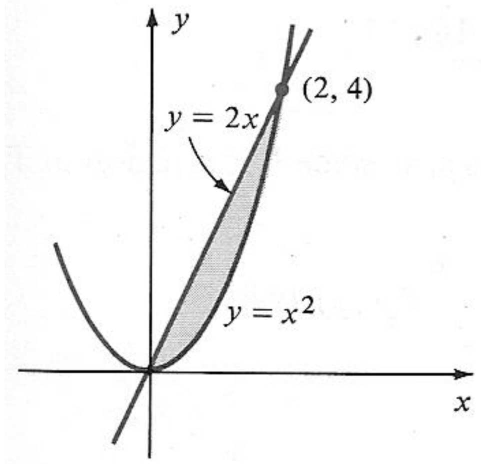
(Powyższe całki nazywamy iterowanymi).

Przykład. Obliczyć $\iint\limits_D \left(x^3+4y\right)dxdy$ **jeśli obszar D jest figurą ograniczoną wykresami równań $y = x^2$ oraz $y = 2x$.**

$$\begin{cases} 0 \le y \le 4, \\ y/2 \le x \le \sqrt{y}. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \left(x^3+4y\right)dxdy = \int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^3+4y) \quad dx =$$

$$\int_0^4 dy \left[\frac{x^4}{4}+4xy\right]_{y/2}^{\sqrt{y}} = \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}+4y^{3/2}\right) dy =$$



Rys. 10.8

Jeżeli $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$ oraz

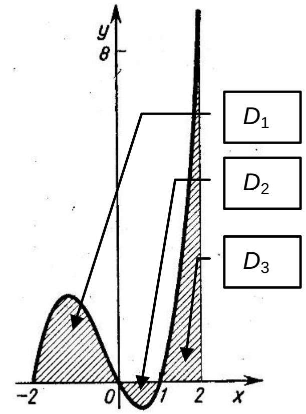
1. D_i jest obszarem normalnym względem osi *OX* lub *OY*
2. D_i mają parami rozłączne wnętrza, to

D nazywamy obszarem regularnym na płaszczyźnie.

Wówczas

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + ... + \iint_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

Przykład. Obliczyć pole figury ograniczonej łukiem krzywej $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, odcinkiem osi OX oraz prostymi $x = -2$ i $x = 2$.



Rys. 10.10

$P_1 = \iint\limits_{D_1} dxdy$, $P_2 = \iint\limits_{D_2} dxdy$ oraz $P_3 = \iint\limits_{D_3} dxdy$

$$P_1 = \iint\limits_{D_1} dxdy = \int\limits_{-2}^{0}\left(\int\limits_{0}^{x^3+x^2-2x} dy\right)dx = \int\limits_{-2}^{0}[y]_0^{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$P_2 = \iint\limits_{D_2} dxdy = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{x^3+x^2-2x}^{0} dy\right)dx = \int\limits_{0}^{1}[y]_{x^3+x^2-2x}^{0}\,dx = \int\limits_{0}^{1}\left(-x^3-x^2+2x\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$P_3 = \iint\limits_{D_3} dxdy = \int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{0}^{x^3+x^2-2x} dy\right)dx = \int\limits_{1}^{2}[y]_0^{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\limits_{1}^{2}\left(x^3+x^2-2x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{1}^{2}$$

$$P = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12}$$

Własności całki podwójnej

Niech *f*(*x*,*y*), *g*(*x*,*y*) będą funkcjami całkowalnymi w obszarze *D*.

1. $$\iint_D \left(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\right)dxdy = \alpha\iint_D f(x,y)dxdy+\beta\iint_D g(x,y)dxdy$$ dla α, $\beta \in R$.

2. Jeżeli *f*(*x*,*y*) ≤ *g*(*x*,*y*) dla (*x*,*y*) $\in$ *D* , to

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy.$$

***Przykład*:**

Zmienić kolejność całkowania w całce $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

Rozwiązanie

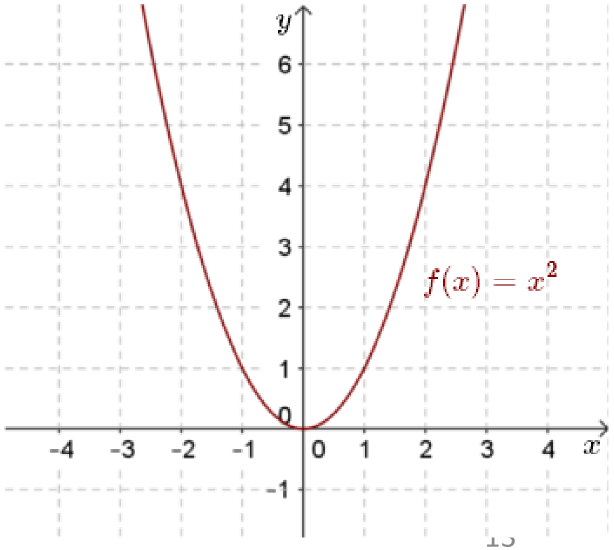
Obszar *D* $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2-x \end{cases}$ **jest obszarem normalnym względem osi *OX*.**

Można go przedstawić w postaci sumy dwóch obszarów rozłącznych, normalnych względem osi *OY*:

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \sqrt{y} \end{cases} \quad \text{i} \quad D_2 : \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 2-y \end{cases}.$$

Wtedy

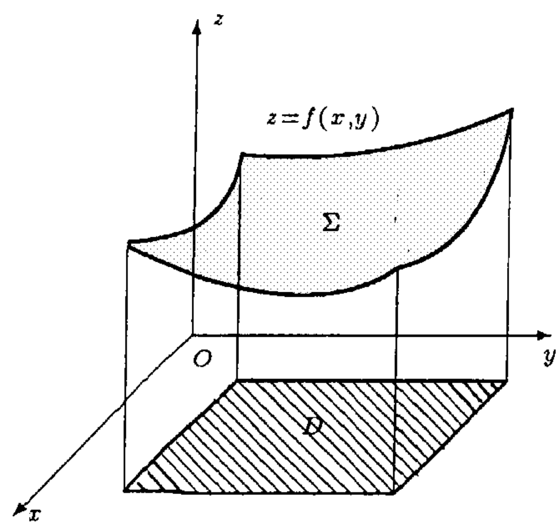
$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$$



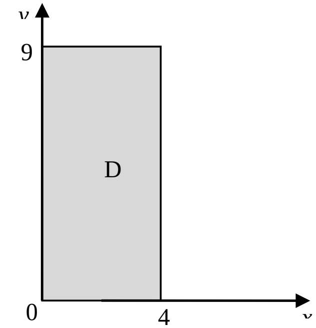
Interpretacja geometryczna całki podwójnej

1. $|D| = \iint\limits_D dxdy$ **- pole obszaru *D*.**

2. $|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\, dxdy$ **- pole płata** Σ **danego równaniem *z* = *f*(*x*,*y*) dla (*x*,*y*)** $\in$ ***D* (ciągłe pochodne cząstkowe)**



<u>Przykład</u>. Obliczyć pole części powierzchni $2xy - z^2 = 0$ wyciętej przez prostopadłościan, którego podstawa znajduje się w płaszczyźnie OXY, a wierzchołkami są punkty A(0, 0), B(4, 0), C(4, 9) i D(0, 9).



Rys. 10.11

Obszar D dany jest nierównościami $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 9$.

Równanie powierzchni $z = \sqrt{2xy}$

Stąd $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2y}{2\sqrt{2xy}} = \sqrt{\dfrac{y}{2x}}$ **oraz** $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{2\sqrt{2xy}} = \sqrt{\dfrac{x}{2y}}$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2} = \int_0^4 \left(\int_0^9 \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^9 \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}} dy \right) dx$$

$$S = \int_0^4 \left(\int_0^9 \sqrt{\frac{(y+x)^2}{2xy}} dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^9 \frac{y+x}{\sqrt{2xy}} dy \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^9 \frac{y}{\sqrt{y}} dy + \frac{x}{\sqrt{2x}} \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{y}} dy \right) dx$$

$$S = \int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^9 y^{\frac{1}{2}} dy + \frac{x}{\sqrt{2x}} \int_0^9 y^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^9 + \frac{x}{\sqrt{2x}} \left[\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1} \right]_0^9 \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{2(\sqrt{9})^3}{3} + \frac{x}{\sqrt{2x}} 2\sqrt{9} \right) dx$$

$$S = \int_0^4 \left(\frac{54}{3\sqrt{2x}} + \frac{6x}{\sqrt{2x}} \right) dx = \frac{18}{\sqrt{2}} \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{18}{\sqrt{2}} \left[2\sqrt{x} \right]_0^4 + \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^4 = \frac{18 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{2}} + \frac{6 \cdot 2 \cdot 8}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{72 + 32}{\sqrt{2}}$$

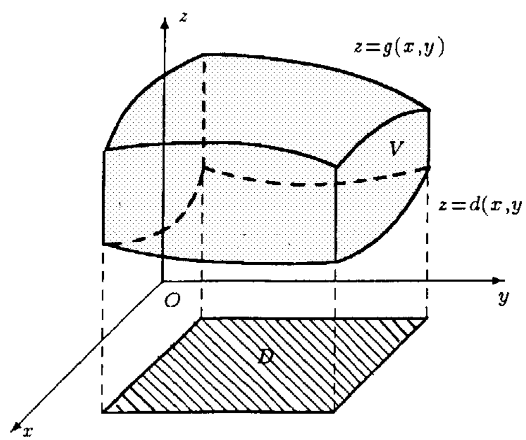
$$S = \int_0^4 \left(\frac{54}{\sqrt{2x}} + \frac{6x}{\sqrt{2x}} \right) dx = \frac{104}{\sqrt{2}} = 52\sqrt{2}$$

3. Objętość bryły *V* opisanej zależnościami

$$\begin{cases} (x, y) \in D \\ g(x, y) \leq z \leq \boldsymbol{d}(x, y) \end{cases}$$

jest równa (f,g – ciągłe)

$$|\boldsymbol{V}| = \iint\limits_{\boldsymbol{D}} \left(\boldsymbol{g(x,y) - d(x,y)} \right) \boldsymbol{dxdy}.$$



Przykład

Obliczyć objętość bryły *V* ograniczonej płaszczyznami:

$$z = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 2,\ x + y + z = 4.$$

Rozwiązanie.

Bryłę *V* opisuje układ nierówności

$$V : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 4 - y \\ 0 \le z \le 4 - x - y \end{cases}$$ **Wtedy**

$$|V| = \int_0^2 dy \int_0^{4-y} (4 - x - y)dx = \int_0^2 \left[4x - \frac{1}{2}x^2 - yx \right]_0^{4-y} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(8 - 4y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[8y - 2y + \frac{1}{6}y^3 \right]_0^2 = \frac{28}{3}$$

Zmiana zmiennych w całce podwójnej – współrzędne biegunowe

Czasami wygodniej jest w całce $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ **zamiast współrzędnych kartezjańskich (*x*,*y*)∈*D* stosować współrzędne biegunowe (*r*,*φ*)∈*Δ*, przy czym związek pomiędzy nimi jest następujący:**

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Jakobian przekształcenia $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$**, związany ze zmianą układu współrzędnych, jest równy**

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\,.$$

Wtedy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot|J|\,drd\varphi = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,drd\varphi\,.$$

Δ **- obszar regularny we współrzędnych biegunowych.**

$$\iint_{\Delta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r dr d\varphi.$$

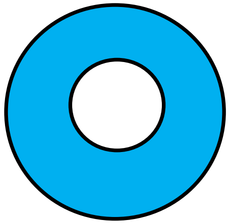
Przykład

Obliczyć $\iint_D x^2 y dx dy$, gdzie *D* – obszar leżący w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ograniczony okręgami $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=4$.

Rozwiązanie

Przechodząc do współrzędnych biegunowych *r*, φ, tzn. podstawiając $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, obszar całkowania możemy zapisać jako

$$\Delta : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$



Rys. 10.5
Przykład obszaru domkniętego

Wtedy

$$\iint_D x^2 y dx dy = = \iint_{\Delta} r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi dr d\varphi = \int_1^2 r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{5} r^5\right]_1^2 \cdot \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{31}{15}.$$

Interpretacja fizyczna całki podwójnej

Jeżeli funkcja $\rho(x,y)$ jest gęstością powierzchniową masy obszaru D, to masa obszaru

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy$$

1. Momenty statyczne oraz bezwładności obszaru D względem odpowiednich osi:

wzglę-dem	Momenty	
	statyczne obszaru *D*	**bezwładności obszaru *D***
osi *OX*	$M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dxdy$	$B_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dxdy$
osi *OY*	$M_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy$	$B_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dxdy$
osi *OZ*	$M_0 = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\rho(x,y)\,dxdy$	$B_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dxdy$

2. Współrzędne środka ciężkości:

$$x_0 = \frac{1}{m}M_y, \quad y_0 = \frac{1}{m}M_x.$$

3. Jeżeli funkcja $\delta(x,y)$ jest gęstością powierzchniową ładunku rozłożonego w obszarze D, to całkowity ładunek elektryczny tego obszaru:

$$L = \iint_D \delta(x,y)\,dxdy.$$