Pochodne cząstkowe

(Analiza Matematyczna 1, wykład 9)

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Pochodną cząstkową funkcji *f* w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej *x* jest granica (jeżeli istnieje):

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Pochodna cząstkową względem zmiennej *x* obliczamy jak zwykłą pochodną zmiennej *x* traktując *y* jako (znany) parametr.

Analogicznie definiujemy pochodną cząstkową względem *y.*

Oznaczenie $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 y_0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 y_0)$ **lub** $f_x'(x_0, y_0)\quad f_y'(x_0, y_0)$

lub krótko $\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}$**.**

Przykłady: Wyznaczyć pochodne ($\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$)

1. $z = f(x,y) = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1. \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y + 2.$$

2. $u = f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}.$$

3. $z = f(x,y) = \frac{2x-3y}{x+4y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x+4y)-(2x-3y)\cdot 1}{(x+4y)^2} = \frac{2x+8y-2x+3y}{(x+4y)^2} = \frac{11y}{(x+4y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3(x+4y)-(2x-3y)\cdot 4}{(x+4y)^2} = \frac{-3x-12y-8x+12y}{(x+4y)^2} = \frac{-11x}{(x+4y)^2}.$$

Podobnie oblicza się pochodne funkcji trzech zmiennych.

GRADIENT

Gradientem funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie $M = (x, y)$ jest wektor mający początek w punkcie *M* i współrzędne równe odpowiednio pochodnym cząstkowym w tym punkcie:

$$\nabla f = grad\ f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right].$$

Dla funkcji trzech zmiennych $u = f(x,y,z)$ i dla punktu $M = (x, y,z)$

$$grad\ u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Przykłady:

a) Niech $z = f(x,y) = xy - y^3$;

$$\text{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = [y,\ x - 3y^2].$$

Jeżeli $M = (1,1)$, to $grad\ f(1,1) = [1, -2]$.

b) Niech $u = f(x,y,z) = xe^{yz} + xz^2$;

$$grad\ f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = [e^{yz} + z^2,\ xze^{yz},\ xye^{yz} + 2xz].$$

Jeżeli $M = (1,0,2)$, to $grad\ f(1,0,2) = [5, 2, 4]$.

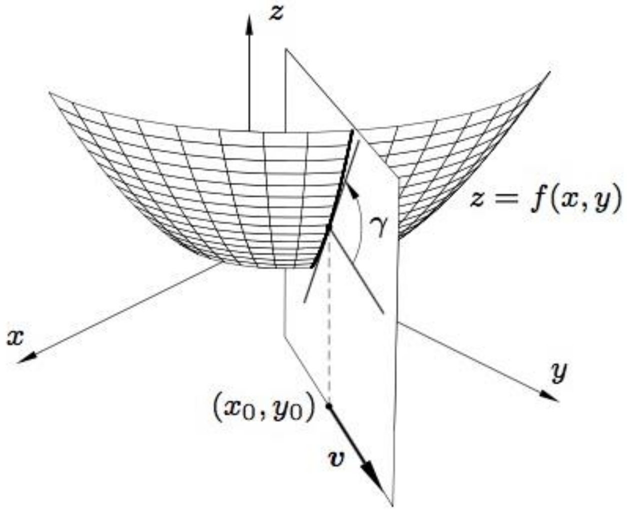
Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie.

POCHODNA KIERUNKOWA

Pochodna kierunkowa funkcji *f*(*x*,*y*) w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora jednostkowego $\vec{l} = (l_x, l_y)$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(x_0 + t l_x, y_0 + t l_y\right) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Jest to *tg* pewnego konta i określa szybkość zmiany wartości funkcji *f* w kierunku wektora $\vec{l}$.



Przykład.

$f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (1,1)$, $\vec{l} = \left[\frac{3}{5}, .\frac{4}{5}\right]$.

$$\frac{f\left(1+t\frac{3}{5}, 1+t\frac{4}{5}\right)-f(1,1)}{t} = \frac{(1+t\frac{3}{5})^2-\left(1+t\frac{4}{5}\right)^2-(1^2-1^2)}{t} =$$

$$\frac{-t\frac{2}{5} \quad -t^2\frac{7}{5}}{t} = -\frac{2}{5} - t\frac{7}{5} \to -\frac{2}{5}$$

Pochodna kierunkowa funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie $M = (x, y)$ w kierunku wektora $\vec{l}$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

gdzie $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ są cosinusami kierunkowymi wektora $\vec{l}$ w przestrzeni R^2.

<u>Twierdzenie</u>

Jeżeli pochodne funkcji *z=f*(*x,y*) są ciągłe w punkcie (*x,y*), to

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = grad(z)\circ\vec{l}$$

(*iloczyn skalarny*)

W przypadku wektora nie jednostkowego, unormowany wektor $\vec{l}$, tj. $\vec{l}_1 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = grad\ z \circ \vec{l}_1$$

<u>Przykład</u>: Znaleźć pochodną kierunkową funkcji $z = x^2 - y^2$ w punkcie $M = (1,1)$

a) w kierunku wektora $\vec{l} = [3, 4]$,

b) w kierunku gradientu tej funkcji w punkcie $M = (1,1)$.

Ad a) Mamy tutaj $grad\, z = \left[2x, -2y\right]$, $grad\, z(M) = \left[2, -2\right]$, $\vec{l}_1 = \frac{1}{\sqrt{9+16}}[3,4] = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$.

Stąd $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M) = \left[2, -2\right]\circ[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] = \frac{6}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{2}{5}$.

Ad b) Niech $\vec{s} = grad\, z(M) = \left[2, -2\right]$. **Wtedy** $\vec{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{4+4}}[2, -2] = [\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}]$.

Stąd $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(M) = \left[2, -2\right]\circ[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}] = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

RÓŻNICZKA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Niech funkcja $z = f(x,y)$ ma pochodne cząstkowe 1-go rzędu w punkcie (x_0, y_0). Różniczką funkcji dwóch zmiennych *f* w punkcie (x_0, y_0) jest funkcja $df(x_0, y_0)$ zmiennych $\Delta\mathrm{x}, \Delta\mathrm{y}$ określoną wzorem

$$\boxed{df(x_0, y_0)(\Delta\mathrm{x}, \Delta\mathrm{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta\mathrm{x} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y}$$

(oznaczamy ją krótko symbolem *df*).

Przy dostatecznie małym $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ dla różniczkowalnej funkcji $z = f(x,y)$ możemy przyjąć, że $\Delta f \approx df$, czyli że

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx df$$

albo zapisując w innej formie

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df}$$

i ten wzór możemy wykorzystywać do obliczania przybliżonych wartości.

Przykłady.

a) Wyznaczyć różniczkę funkcji $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Mamy tu $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{2x}{x^2+y^2}\Delta x + \frac{2y}{x^2+y^2}\Delta y$.

b) Wyznaczyć różniczkę funkcji $u = f(x,y,z) = e^{xyz}$.

Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych możemy zapisać, że

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z = yze^{xyz}\Delta x + xze^{xyz}\Delta y + xye^{xyz}\Delta z.$$

c) Obliczyć przybliżoną wartość $(1{,}02)^{4{,}05}$.

Rozważymy tu funkcję $z = f(x,y) = x^y$, punkt $M = (1,4)$ i przyrosty argumentów $[\Delta x, \Delta y] = [0{,}02, 0{,}05]$.

Pochodne cząstkowe danej funkcji: $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$.

Jeżeli $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot \Delta y$,

to mamy, że

$$1{,}02^{4{,}05} \approx 1^4 + 4\cdot 1^3 \cdot 0{,}02 + 1\cdot \ln 1 \cdot 0{,}05 = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$$

<u>Zadanie</u>. Dla funkcji

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

wyznaczyć gradient i różniczkę oraz oszacować maksymalny błąd bezwzględny

przyjmując, że $\left(x_0, y_0\right) = (2, 4)$, $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = -0{,}02$.

Rozwiązanie:

$$grad\, z = [\frac{2x}{y}, \frac{-x^2}{y^2}]$$, **czyli** $$grad\, z(2,4) = [1, \frac{-1}{4}];$$

$$dz = \frac{2x}{y} \cdot \Delta x + (\frac{-x^2}{y^2}) \cdot \Delta y$$, **czyli** $$dz(2,4) = 1 \cdot (-0{,}01) - \frac{1}{4} \cdot (-0{,}02) = -0{,}005;$$

$$\left|\Delta z\right| \le \left|1\right| \cdot \left|-0{,}01\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| \cdot \left|-0{,}02\right| = 0{,}01 + 0{,}005 = 0{,}015.$$

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego

Pochodna cząstkowa funkcji *z = f*(*x, y*) może być w dalszym ciągu funkcją dwóch zmiennych. Zatem, jeśli jest różniczkowalna, można określić jej pochodną cząstkową względem każdej ze zmiennych. Taką pochodną nazywamy *pochodną cząstkową drugiego rzędu*.

Pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu są więc funkcje:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Dwie ostatnie nazywamy *mieszanymi pochodnymi drugiego rzędu* (pochodne są liczone po różnych zmiennych).

Twierdzenie (Schwarza)

Jeżeli pochodne mieszane funkcji *z=f(x,y)* są funkcjami ciągłymi, to są sobie równe, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Przykład 1

Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

$$f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$$

Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^2$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 3y^2$, **więc**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - y^2\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy + 3y^2\right) = -2x + 6y$$

Pochodne drugiego rzędu mieszane

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2xy + 3y^2\right) = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - y^2\right) = -2y$$

Przykład 2. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ **i** $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Zapiszmy je inaczej

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}\ \text{ i }\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{-2xy(x^2+y^2)^2-2(y^3-x^2y)(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-2xy(x^2+y^2)-4x(y^3-x^2y)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{(-2xy)(x^2+y^2)^2-2(x^3-xy^2)(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(-2xy)(x^2+y^2)-4y(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 - xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right) = \frac{\left(3x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^3 - xy^2\right)\left(x^2 + y^2\right)2x}{\left(x^2 + y^2\right)^4} = \frac{\left(3x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - 4x\left(x^3 - xy^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-x^4 + 6x^2y^2 - y^4}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$$

Sprawdzić, czy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

1. OBLICZANIE POCHODNYCH FUNKCJI ZŁOŻONYCH

1) Jeżeli $z = f(x, y)$**, gdzie** $x = x(t)$, $y = y(t)$ **oraz funkcje** $f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ **są różniczkowalne, to pochodna funkcji złożonej** $z = f(x(t), y(t))$ **względem zmiennej** t **wyraża się wzorem**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2) Jeżeli $z = f(x, y)$**, gdzie** $y = y(x)$**, to**

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

3) Jeżeli $z = f(s, t)$**, gdzie** $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$**, to**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Przykłady.

a) Niech $z = s^2 + t^2$, gdzie $s = x + 2y$, $t = 3x - y$ skąd

$\frac{\partial s}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial s}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial t}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial t}{\partial y} = -1$. Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2s \cdot 1 + 2t \cdot 3 = 2(x + 2y) + 6(3x - y) = 2x + 4y + 18x - 6y = 20x - 2y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2s \cdot 2 + 2t \cdot (-1) = 4(x + 2y) - 2(3x - y) = 4x + 8y - 6x + 2y = -2x + 10y.$$

b) Niech $z = f(\frac{x}{y}, 2xy) = f(u, v)$, gdzie $u = \frac{x}{y}$, $v = 2xy$. Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(korzystaliśmy ze wzorów: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$)

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Jeżeli funkcja *f* ma pochodne cząstkowe rzędu *n* w każdym punkcie obszaru *D*, to mówimy, że na obszarze *D* są określone pochodne cząstkowe rzędu *n* funkcji *f*.

Pochodną cząstkową *n*-tego rzędu funkcji *f* w punkcie (x_0,y_0), powstałą w wyniku *k*-krotnego różniczkowania względem zmiennej *x* i następnie *l*-krotnego różniczkowania względem zmiennej *y*, gdzie $k + l = n$, oznaczamy przez

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^l \partial x^k}(x_0, y_0).$$

Analogicznie określa się i oznacza pochodne cząstkowe rzędu $n \geq 3$ funkcji trzech zmiennych. Funkcja dwóch zmiennych ma 2^n pochodnych cząstkowych rzędu *n*, a funkcje trzech zmiennych 3^n pochodnych cząstkowych rzędu *n*. Pochodne cząstkowe, w których występuje różniczkowanie względem dwóch różnych zmiennych, *nazywamy pochodnymi cząstkowymi mieszanymi.*

Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

Niech funkcja *f* będzie różniczkowalna w punkcie (x_0,y_0). Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie (x_0,y_0,z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, ma postać:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych określoną w obszarze $D \subset R^2$.

Funkcja f ma w punkcie $(x_0, y_0) \in D$ *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie punktu (x_0, y_0), w którym

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Gdy w otoczeniu punktu (x_0, y_0) spełniony jest warunek

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne*.

Maksimum i minimum nazywa się *ekstremami*.

***Warunek konieczny istnienia ekstremum*:**

Funkcja *f* mająca pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(x_0, y_0) \in D$, gdzie $D \subset R^2$, może mieć ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Punkt, w którym jest spełniony warunek konieczny nazywamy *punktem stacjonarnym*.

Zerowanie się pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w pewnym punkcie *nie gwarantuje* istnienia ekstremum w tym punkcie.

Warunek ten wykorzystuje się do wyznaczenia punktów, w których funkcja *f* może mieć ekstremum.

Zakładamy, że funkcja *f*, ma w otoczeniu punktu <u>stacjonarnego</u> (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.

Niech

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} =$$

$$W(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) -$$

$$- f_{xy}(x_0, y_0) f_{yx}(x_0, y_0),$$

wówczas:

1) **jeżeli $W(x_0, y_0)<0$, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja *nie ma ekstremum* - (x_0, y_0) jest tzw. *punktem siodłowym*,**

2) **jeżeli $W(x_0, y_0) > 0$ oraz**

   a) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$**, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja ma *minimum lokalne*,**

   b) $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$**, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja ma maksimum lokalne.**

W przypadkach, gdy *W(x_0, y_0) = 0* lub $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ powyższe kryterium nie rozstrzyga istnienia ekstremum. Wtedy należy przeprowadzić dodatkowe badania.

Schemat wyznaczania ekstremów funkcji $f(x, y)$:

1. Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego $f_x'(x,y)$ i $f_y'(x,y)$ oraz przyrównujemy je do zera, znajdując w ten sposób punkty stacjonarne.

2. Znajdujemy pochodne cząstkowe rzędu drugiego i tworzymy wyznacznik $W(x, y)$.

3. Obliczamy kolejno znak wyznacznika $W(x, y)$ w punktach stacjonarnych, a w przypadku gdy jest on większy od zera, badamy także znak pochodnej $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ lub $f_{yy}(x_0, y_0)$ w tych punktach.

Przykład

Wyznaczyć ekstrema funkcji:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5\,.$$

Rozwiązanie

Pochodne cząstkowe funkcji są następujące

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x\,,$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3\,,$$

$$f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y\,.$$

Przyrównując pochodne cząstkowe funkcji do zera otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu są punkty *P*$_1$(0, 0), *P*$_2$(1, 1). W punktach tych funkcja może mieć ekstrema.

Następnie obliczamy *W(x,y)*:

$$W(x,y) = 6x \cdot 6y - (-3)(-3).$$

Dla punktu $P_1(0, 0)$ otrzymujemy

$$W(0,0) = -9 < 0,$$

zatem w punkcie $P_1(0, 0)$ funkcja nie ma ekstremum.

Dla punktu $P_2(1, 1)$ otrzymujemy

$$W(1,1) = 27 > 0$$

oraz

$$f_{xx}(x_0, y_0) = 6 > 0$$

zatem w punkcie $P_2(1, 1)$ funkcje ma minimum lokalne.

Wartość funkcji w punkcie $P_2(1, 1)$ wynosi $f(1, 1) = 4$.

EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI WIELU ZMIENNCH

Przypomnienie.

W macierzy kwadratowej *n*-tego stopnia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

możemy wyróżnić tak zwane minory główne:

$$d_1 = |a_{11}|, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots \quad d_n = \det A \; .$$

Def. a) Macierz *A* nazywamy dodatnio określoną, jeżeli wszystkie jej minory główne są dodatnie;

b) macierz *A* nazywamy ujemnie określoną, jeżeli wszystkie jej minory główne stopnia *nieparzystego są ujemne*, a minory główne stopnia *parzystego są dodatnie.*

Jeżeli różniczkowalna funkcja

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

ma ekstremum (maksimum lub minimum) w punkcie p_0, to jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są w tym punkcie równe zero (jest to warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej).

Punkty, w których pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są równe zero, nazywamy punktami *stacjonarnymi* danej funkcji. W punktach tych poszukujemy ekstremów lokalnych danej funkcji.

Oznaczmy symbolem f'' macierz pochodnych cząstkowych rzędu drugiego danej funkcji $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (macierz taką nazywamy też <u>hesjanem</u> (macierzą Hessego) funkcji *f*):

$$f'' = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

<u>Tw</u>. (*warunek wystarczający istnienia* ekstremum)

Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu p_0 funkcja *f* ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu oraz p_0 jest punktem stacjonarnym, to w punkcie p_0 jest *minimum* lokalne właściwe w przypadku, gdy $f''(p_0)$ jest macierzą *dodatnio określoną*, natomiast jest *maksimum* lokalne właściwe w przypadku, gdy $f''(p_0)$ jest macierzą *ujemnie określoną*.

<u>Przykład 1</u>. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$u = f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 .$$

Dla tej funkcji mamy:

$$f'_x = 4x - y + 2z, \quad f'_y = -x - 1 + 3y^2, \quad f'_z = 2x + 2z .$$

Przyrównując pochodne 1-go rzędu do zera, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ -x + 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} .$$

Z trzeciego równania $z = -x$. Podstawiając do pierwszego otrzymamy, że $y = 2x$. Po podstawieniu do drugiego równania dostaniemy: $12x^2 - x - 1 = 0$.

Równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{3} .$$

Wobec tego

$$y_1 = \frac{-1}{2}, \quad y_2 = \frac{2}{3}, \quad z_1 = \frac{1}{4}, \quad z_2 = \frac{-1}{3} .$$

Mamy zatem dwa punkty stacjonarne:

$$p_1 = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad p_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right).$$

Macierz pochodnych cząstkowych drugiego rzędu .

$f'_x = 4x - y + 2z$, $f'_y = -x - 1 + 3y^2$, $f'_z = 2x + 2z$.

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dalej otrzymujemy, że

$$f''(p_1) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że

$$d_1(p_1) = 4 > 0,\quad d_2(p_1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0.$$

Ponieważ d_2 ma ujemną wartość dla punktu p_1, a więc w punkcie p_1 nie ma ekstremum

$$f''(p_2)=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $d_1(p_2)=4>0$,

$$d_2(p_2)=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=15>0,$$

$$d_3(p_2)=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0.$$

Wszystkie minory główne w macierzy f'' dla punktu p_2 są dodatnie, macierz jest więc dodatnio określona, zatem w punkcie p_2 jest minimum lokalne o wartości:

$$\frac{2}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\frac{1}{9}=-\frac{13}{27}.$$