Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 7
Wyznacznik macierzy
Macierz odwrotna
Równania macierzowe

7.1. Dla których z poniższych macierzy można obliczyć wyznacznik? W przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć go.

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&2\\-3&7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-2&1&8\\1&-5&13\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}7&-1&-8\\0&-4&0\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}3&0\\2&1\\4&0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4&0\\3&-8\\2&-11\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-6&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}3&4&1\\1&6&5\\3&1&0\end{bmatrix},I=\begin{bmatrix}1+i&4-i&i\\2+i&4-3i&3-i\\i&2-2i&1-i\end{bmatrix}.$$

7.2. Dla których z poniższych macierzy można obliczyć wyznacznik? W przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć go.

$$A=\begin{bmatrix}0&2\\-3&7\\2&3\\1&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}7&-1&-8&0\\0&-4&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}4&0&9&1&2\\3&-8&-8&0&7\\2&-11&5&-5&13\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}3&4&1\\1&6&5\\3&1&0\\2&0&-2\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}3&0&7&-1\\2&1&13&11\\4&0&2&9\\2&5&1&2\end{bmatrix},\ F\ =\begin{bmatrix}0&1&-6&2\\1&3&1&-3\\3&0&0&1\\6&2&5&0\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\2&1&1&-1\\0&1&-1&1\\2&0&3&2\end{bmatrix}H=\begin{bmatrix}3&0&1&0&3\\2&1&3&6&7\\4&0&2&4&6\\0&1&0&2&1\\8&2&1&0&0\end{bmatrix},I=\begin{bmatrix}1&w&w^2\\w&w^2&1\\w^2&1&w\end{bmatrix},\text{ gdzie } w=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

7.3.* Wykazać, że wyznacznik $\begin{bmatrix}z_1&\bar{z}_1&a\\z_2&\bar{z}_2&b\\z_3&\bar{z}_3&c\end{bmatrix}$, gdzie liczby $a,b,c\in\mathbb{R}$, a $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$, jest liczbą czysto urojoną.

7.4.* Udowodnić, że dla dowolnej liczby $n\in\mathbb{N}$ zachodzą wzory

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

7.5.* Wykazać, że wyznacznik macierzy antysymetrycznej nieparzystego stopnia jest równy zeru.

7.6. Sprawdzić, które z macierzy z zadania 7.1. mają macierz odwrotną. W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznaczyć tę macierz.

7.7. Dane są macierze:

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 1-i \\ i & i & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć

a) $A^{-1} \cdot B$; b) $B^{-1} \cdot C^T$; c) $A \cdot C^{-1} + 2B^T$; d) $D^T \cdot E^{-1}$;
e) $E \cdot F^{-1}$; f) $D^{-1} \cdot F^T - 5E$ g) G^{-1}.

7.8. Rozwiązać następujące równania macierzowe:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 32 & 7 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$;

e) $X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 9 & 5 \\ -5 & 6 & -13 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & -13 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$;

i) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 10 & -4 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$;

k) $X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^T$; l) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 12 & 11 \end{bmatrix}^T$.

7.9. a) Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia 3 spełniającymi warunki $\det A = 2, \det B = 3$. Obliczyć $\det[(0,5 \cdot A)^2]$ oraz $\det[A^4(-B)]$.
b) Wiadomo, że $\det(2A) = 16$ oraz $\det(3A) = 54$. Obliczyć $\det(5A)$.
c) Obliczyć $\det(AB)$, jeżeli $\det(A^2B) = 12$ oraz $\det(AB^3) = 54$.
d) Wiadomo, że $\det(-2A) = 32$ oraz $\det(A^{-1}) = 1/2$. Obliczyć $\det(4A^{-1})$.
e) Macierze kwadratowe mają stopień 2. Ponadto $\det A = 3, \det B = 2$. Obliczyć $\det((-A)^2B^3)$.

ODPOWIEDZI

7.1. $\det A = 1$; $\det B = 6$; $\det G = 0$; $\det H = 28$; $\det I = -2 + 19i$; dla pozostałych działanie jest niewykonalne.

7.2. $\det E = 2630$; $\det F = 134$; $\det G = -4$; $\det H = -136$; $\det I = 0$; dla pozostałych działanie jest niewykonalne.

7.6. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$; $H^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{28} & \frac{1}{28} & \frac{1}{2} \\ \frac{15}{28} & -\frac{3}{28} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{17}{28} & \frac{9}{28} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; dla pozostałych działanie jest niewykonalne.

7.7. a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ \frac{16}{3} & \frac{43}{3} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{15}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{8} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} -14 & -7 & -8 \\ -10 & 0 & -13 \\ -23 & 17 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\frac{1}{-5-i} \begin{bmatrix} 4i & 4 & -1-i \\ -4i & 3+5i & 1+i \\ -i & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

7.8. a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 4 & 19 \\ -\frac{1}{2} & -9 \\ -\frac{1}{2} & -7 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 3 \\ 28 \\ 19 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; k) $\begin{bmatrix} 19 & 9 & 7 \\ 11 & 7 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$; l) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$.

7.9. a) $1/16, -48$; b) 250; c) 6; d) 128; e) 72!.