ALGEBRA LINIOWA 2

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w Karcie Przedmiotu.

WYKŁAD 6

Przestrzenie liniowe
Baza przestrzeni liniowej

Niech V będzie zbiorem, $\mathbb{K}$ ciałem, $+$ działaniem wewnętrznym w zbiorze V oraz niech $\cdot$ będzie mnożeniem elementów zbioru V przez elementy ciała $\mathbb{K}$. $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ nazywamy **przestrzenią liniową**, (lub też przestrzenią wektorową) nad ciałem $\mathbb{K}$, jeśli spełnione są warunki

- $\forall_{v,w \in V} \ \ v + w = w + v$
- $\forall_{v,u,w \in V} \ \ (v + u) + w = v + (u + w)$
- $\forall_{v \in V} \exists_{w \in V} \ \ v + w = \mathbb{O}$
- $\forall_{a \in \mathbb{K}} \forall_{v,w \in V} \ \ a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
- $\forall_{a,b \in \mathbb{K}} \forall_{v \in V} \ \ (a + b) \cdot v = a \cdot v + a \cdot v$
- $\forall_{a,b \in \mathbb{K}} \forall_{v \in V} \ \ a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$
- $\forall_{v \in V} \ \ 1 \cdot v = v$

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, a elementy ciała $\mathbb{K}$ nazywamy **skalarami**. Element $\mathbb{O}$ nazywamy **wektorem zerowym**. Element $-v$ nazywamy **wektorem przeciwnym** do elementu $v \in V$.
Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ i każdego ciała $\mathbb{K}$ zbiór $\mathbb{K}^n$ wszystkich n-wymiarowych ciągów $[a_1, a_2, ..., a_n]$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ względem działań $+$ oraz $\cdot$ określonych wzorami

$$[a_1, a_2, ..., a_n] + [b_1, b_2, ..., a_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n]$$

$$a \cdot [a_1, a_2, ..., a_n] = [a \cdot a_1, a \cdot a_2, ..., a \cdot a_n]$$

Przykłady przestrzeni liniowych

1. $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie n jest liczbą naturalną
2. $CG(p^m)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $CG(p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a m liczbą naturalną.

Niepusty zbiór $W \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią liniową**, jeżeli spełnione są warunki
1) jeżeli $v_1, v_2 \in W$, to $v_1 + v_2 \in W$,
2) jeżeli $v \in W$ oraz $a \in \mathbb{K}$, to $av \in W$.

Warunki 1) i 2) równoważne są warunkowi
3) jeżeli $v_1, v_2 \in W$ oraz $a, b \in \mathbb{K}$, to $av_1 + bv_2 \in W$.

Uwaga: $\{0\}$ oraz V są przestrzeniami liniowymi. Jeżeli $W \neq V$, to taką podprzestrzeń nazywamy **właściwą.**

Kombinacja liniowa

Niech $(v_1, ..., v_n)$ będzie dowolnym skończonym układem wektorów przestrzeni liniowej V. Mówimy, że wektor v jest **kombinacją liniową** układu $(v_1, ..., v_n)$ lub też kombinacją liniową wektorów $v_1, ..., v_n$, jeśli istnieje układ $(a_1, ..., a_n)$ elementów z ciała $\mathbb{K}$, (tzw. skalarów) taki, że

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Skalary $a_1, ..., a_n$ nazywamy **współczynnikami kombinacji liniowej**.

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów niepustego układu A wektorów przestrzeni liniowej V jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V. Podprzestrzeń tę nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez zbiór** A lub też **powłoką liniową układu** A i oznaczamy przez $lin(A)$.

Jeśli $A = \{v_1, ..., v_n\}$, to wtedy piszemy $lin(v_1, ..., v_n)$ i taką podprzestrzeń nazywamy **podprzestrzenią rozpiętą na wektorach (lub też generowana przez wektory)** $v_1, ..., v_n$. Przestrzeń ta jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą wszystkie wektory układu A.

Mówimy, że wektory $v_1, ..., v_n$ **rozpinają (generują)** przestrzeń V, jeśli $V = lin(v_1, ..., v_n)$.

Liniowa niezależność wektorów

Mówimy, że wektory $v_1, ..., v_n \in V$ są **liniowo niezależne**, jeśli dla dowolnych skalarów $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ zachodzi

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbb{O} \Rightarrow a_1 = 0, ..., a_n = 0$$

Układ wektorów nazywamy **układem liniowo zależnym**, jeśli nie jest on liniowo niezależny.

Baza przestrzeni liniowej

Liniowo niezależny układ $\mathscr{B}$ wektorów przestrzeni liniowej V nazywamy **maksymalnym układem liniowo niezależnym**, jeśli każdy układ wektorów przestrzeni V zawierający $\mathscr{B}$ i różny od $\mathscr{B}$ jest liniowo zależny.

Bazą przestrzeni liniowej V nazywamy każdy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów tej przestrzeni.

Fakt. Niech $\mathscr{B}$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne

1) układ $\mathscr{B}$ jest bazą przestrzeni V

2) układ $\mathscr{B}$ jest liniowo niezależny i generuje przestrzeń V

3) każdy wektor przestrzeni V przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów układu $\mathscr{B}$.

Twierdzenie 6.1 [Steinitz]. *Niech wektory* $v_1, .., v_m \in V$ *będą liniowo niezależne, a wektory* $w_1, ..., w_r \in V$ *niech rozpinają przestrzeń liniową* V*. Wtedy* $m \leqslant r$ *oraz wektory* $v_1, ..., v_m$ *można dopełnić* $r - m$ *wektorami spośród wektorów* $w_1, ..., w_r$ *do układu generatorów przestrzeni* V*.*

Ernst Steinitz (1871 (Siemianowice Śląskie)–1928) niemiecki matematyk, Studiował w Berlinie i **we Wrocławiu, gdzie pracował od 1910 roku.** 10 lat później przeniósł się do Kilonii, gdzie zmarł w 1928 roku. Najbardziej znana jest jego praca z 1910 roku zatytułowana Algebraische Theorie der Körper (Algebraiczna teoria ciał), w której **podał pierwszą abstrakcyjną definicję ciała.** Steinitz był też autorem stosowanej do dziś **konstrukcji liczb wymiernych** jako klasy równoważności względem odpowiedniej relacji określonej w zbiorze par liczb całkowitych. Sformułował twierdzenie, zwane dziś od jego nazwiska **twierdzeniem Steinitza o wymiarze.** Został pochowany na Nowym Cmentarzu Żydowskim we Wrocławiu, w kwaterze kremacyjnej.

Przestrzenie liniowe skończenie wymiarowe

Jeśli przestrzeń liniowa V ma bazę skończoną, to mówimy, że V jest **przestrzenią skończenie wymiarową**, a liczbę wektorów tworząccyh dowolną bazę tej przestrzeni nazywamy **wymiarem przestrzeni** V i oznaczamy przez $dimV$.
Jeśli przestrzeń V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że V ma wymiar nieskończony i piszemy $dimV = \infty$.

Niech $v_1, ..., v_k \in V$ oraz $W = lin(v_1, ..., v_k)$. Wtedy każdy maksymalny liniowo niezależny podukład układu $(v_1, ..., v_k)$ jest bazą podprzestrzeni W.

Jeśli podprzestrzeń W skończenie wymiarowej przestrzeni V spełnia warunek $dimW = dimV$, to $W = V$.

Baza kanoniczna

Bazą kanoniczną (lub też standardową, zero-jedynkową) przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^n$ nazywamy układ

$$([1, 0, ..., 0], [0, 1, 0, ..., 0], ..., [0, 0, 0, ..., 1]).$$