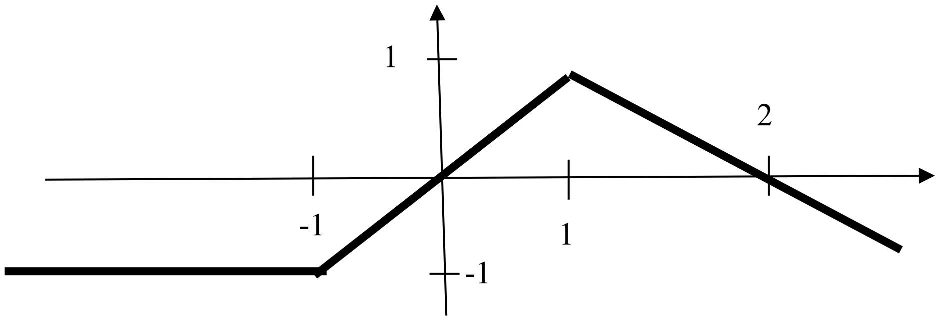
0 1 2

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 2, 10.10.2022)

Funkcja: różnowartościowa, „na”, parzysta i nieparzysta, monotoniczna, ograniczona, odwrotna, okresowa, trygonometryczna i cyklometryczna. Funkcje sufit i podłoga.

Zad. 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y=f(x)$. Narysować wykresy następujących funkcji:

(a) $y=f(x)+3$, (b) $y=f(x+1)$, (c) $y=-f(x)$, (d) $y=f(-x)$, (e) $y=f(x)/2$,
(f) $y=f(3x)$, (g) $y=|f(x)|$ (h) $y=f(|x|)$.



Zad. 2. Narysować wykresy funkcji:

a) $\lceil x \rceil$, b) $\lfloor x \rfloor$, c) $\lceil x+1 \rceil$, d) $\lfloor x+1 \rfloor$, e) $x-\lceil x \rceil$, f) $x-\lfloor x \rfloor$, g) $\frac{x}{\lceil x \rceil}$, h) $\frac{x}{\lfloor x \rfloor}$.

Zad. 3. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$, (b) $f(x)=\log_3|\cos x|$, (c) $f(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$.

Zad. 4. Wykazać, że zbiorem wartości funkcji $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ jest suma przedziałów $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

Zad. 5. Zbadać, czy funkcje są ograniczone z dołu lub z góry:

(a) $f(x)=2^x$, (b) $f(x)=x^3$, (c) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, (d) $f(x)=1-x^4$,

(e) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, (f) $f(x)=3-2\sin^2 x$.

Zad. 6. Korzystając z definicji zbadać monotoniczność oraz parzystość/nieparzystość funkcji:

(a) $f(x)=x+1$, (b) $f(x)=\sqrt{x}$, (c) $f(x)=-2x^3+3x$, (d) $f(x)=x^4-2x^2+1$,

(e) $f(x)=\dfrac{x}{5}-3$, R, (f) $g(x)=x^3$, R, (g) $h(x)=\dfrac{1}{x}$, $(0,\infty)$.

Zad. 7. Podać wzory funkcji złożonych $f\circ f, f\circ g, g\circ f, g\circ g$ oraz określić ich dziedziny:

(a) $f(x)=x-1,\ g(x)=3x+2$, (b) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x^2$,

(c) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2$.

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L. , Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

Zad. 8. Mając daną funkcję złożoną, określić jej dziedzinę oraz napisać wzory funkcji wewnętrznej i zewnętrznej:

(a) $f(x)=\sqrt{2x-1}$, (b) $f(x)=(x^2-2x+5)^3$, (c) $f(x)=3^{x^2+1}$.

Czy funkcje wewnętrzna i zewnętrzna są określone jednoznacznie?

Zad. 9. Sprawdzić, czy dane dwie funkcje są wzajemnie odwrotnymi:

(a) $f(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$, $g(x)=\dfrac{x}{3x-2}$ (b) $f(x)=-x^2$, $g(x)=\sqrt{-x}$.

Zad. 10. Czy istnieje funkcja określona na zbiorze liczb rzeczywistych będąca jednocześnie funkcją parzystą i nieparzystą?

Zad. 11. Określić zbiory, na których funkcja f jest różnowartościowa, a następnie określić funkcję odwrotną:

(a) $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$, (b) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$, (c) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

Zad. 12 Korzystając z definicji funkcji cyklometrycznych obliczyć:

(a) $arctg(-\sqrt{3})$, (b) $\arcsin(-1)$, (c) $\arccos(1/2)$, (d) $arctg 1$ (e) $artctg\sqrt{3}$,

(f) $\sin(arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3})$,

Zad. 13. Wykazać, że jeśli funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nieparzystą i malejącą na przedziale $(-\infty,0)$, to f jest również funkcją malejącą w przedziale $(0,+\infty)$.

Zad. 14. Wyznaczyć okres podstawowy funkcji (jeżeli funkcja jest okresowa):

a) $f(x) = 3sin\frac{3}{4}x$, b) $f(x) = sinx + cos\sqrt{3}x$

c) $f(x) = 2sin3x + 3cos2x$, d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.