ALGA

P1) Wykonaj działania gdy $W(z) = (1+i)z^3 - 2z^2 + 3iz - 7$

$P(z) = 2z^3 + iz^2 - 5i$

$$W(z) + P(z) = ((1+i)z^3 - 2z^2 + 3iz - 7) + (2z^3 + iz^2 - 5i) = (1+i+2)z^3 + (-2+i)z^2 + 3iz - 7 - 5i$$

$$W(z) - P(z) = ((1+i)z^3 - 2z^2 + 3iz - 7) - (2z^3 + iz^2 - 5i) =$$

$$= (1+i-2)z^3 + (-2-i)z^2 + 3iz - 7 + 5i$$

$R(z) = 2iz^2 + 7$ $\qquad$ $Q(z) = (1+i)z^3 + 2z$

$$R(z) \cdot Q(z) = (2iz^2+7)((1+i)z^3 + 2z) = 2i(1+i)z^5 + 4iz^3 + 7(1+i)z^3 + 14z$$

$$(-2+2i)z^5 + (4i + 7 + 7i)z^3 + 14z$$

$V(z) = z - i$

$\frac{Q(z)}{V(z)}$

$$((1+i)z^3 + 2z) : (z-1) = (1+i)z^2 + (-1+i)z + 2+i$$

$$(1+i)z^3 - i(1+i)z^2$$

$$= (-1+i)z^2 + 2z$$

$$(-1+i)z^2 - iz$$

$$= (2+i)z$$

$$(2+i)z - i(2+i)$$

$$= \underbrace{1+2i}_{\text{reszta}}$$

Twierdzenie Bézout ← konsekwencje

$$W(x) = (x-x_0) P(x)$$

$$W(x) = (x-x_0)^k P(x) \qquad P(x_0) \neq 0$$

więc

$$W(x) = (x-1)^5 (x^2+1) \quad \leftarrow \text{dla } \mathbb{R}$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian stopnia dodatniego ma conajmniej jeden pierwiastek zespolony

Każdy wielomian stopnia $n \in N$ ma n pierwiastków zespolonych

$$W(z) = c_n (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \dots (z-z_n)^{k_m}$$

wszystkie współczynniki rzeczywiste

$(z-z_0)^k$ to $(z-\bar{z}_0)^k$ też jest rozwiązaniem

$$z (z-1)(z+1)^2$$

Przykład 2) Znając jeden z pierwiastków wielomianu $W(z) = z^3 + 5iz^2 - 7z - 3i$, wyznacz pozostałe pierwiastki

$z_1 = -3i$

I sposób $(z^3 + 5iz^2 - 7z - 3i) \backslash (z+3i)$

	1	5i	-7	-3i
-3i		-3i	6	3i
	1	2i	-1	0, r

$(z+3i)(z^2+2iz-1)$

$$W(z) = (z+3i)(z^2+2iz-1) = (z+3i)(z^2+2iz+i^2) = (z+3i)(z+i)^2$$

b) $W(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$ $\qquad z_1 = 1 + 2i$

$z_1 = 1 + 2i$
$z_2 = 1 - 2i$

$P(z)\ (z-(1+2i))(z-(1-2i)) = ((z-i)-2i)((z-1)+2i) = (z-1)^2 - (2i)^2 = z^2 - 2z + 1 + 4$

$1 \qquad -1 \qquad 1$

$= z^2 - 2z + 5$

$W(z) : P(z)$

$(z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10) : (z^2 - 2z + 5) = z^2 + z - 2$

$\underline{z^4 - 2z^3 + 5z^2}$

$= z^3 - 4z^2$

$\underline{z^3 - 2z^2 + 5z}$

$= -2z^2 + 4z - 10$

$\underline{-2z^2 + 4z - 10}$

$= \ = \ =$

$W(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + z - 2) = 4($

$z_1 = 1 + 2i \qquad z_3 = -2$

$z_2 = 1 - 2i \qquad z_4 = 1$

$f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$

$Q(x) \neq 0$

Przykład 3 Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę ułamków prostych najprostszych

$f(x) = \frac{W}{[illegible]}$ [illegible]

$\frac{A}{(x+a)^n}$

a) $\frac{3x+2}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+x+1)}$

$\Delta < 0$

$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}$

$\frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C}{(x+3)(x^2+x+1)}$

$= \frac{(A+B)x^2 + (A+3B+C)x + (A+3C)}{(x+3)(x^2+x+1)} = \begin{cases} A + B = 0 \\ A + 3B + C = 3 \\ A + 3C = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} A = -B \\ -B + 3B + C = 3 \\ -B \qquad + 3C = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ 2B + C = 3 \\ -B + 3C = 2 \;/ \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ 2B + C = 3 \\ 7C = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Odp $\frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$

14 listopada wolne ?!

b) $$\frac{1}{x^2-x^3} = \frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(1-x)} =$$

$$\frac{Ax(1-x) + B(1-x) + Cx^2}{x^2(1-x)} = \frac{Ax - Ax^2 + B - Bx + Cx^2}{x^2(1-x)}$$

$$\frac{(-A+C)x^2 + (A-B)x + B}{x^2(1-x)}$$

$$\begin{cases} -A \qquad + C = 0 \\ A - B \qquad = 0 \\ \qquad B \quad = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 1 \\ A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

odp $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$

c) $$\frac{4}{x^5-x^3} = \frac{4}{x^3(x^2-1)} = \frac{4}{x^3(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}$$

odp : $\frac{-4}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{-4}{x^3} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$

d) $$\underset{\Delta < 0}{\frac{x^3}{(x^2+1)^2}} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \ldots = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}$$

e) $$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \underset{\Delta < 0}{\frac{Cx+D}{x^2+2}} = \ldots = \frac{\frac{1}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}}{(x^2+2)}$$