Analiza Matematyczna 1

w.30, ćw. 30)

Wykład 1.

Niniejsze pliki stanowią jedynie konspekt wykładu. Zakres obowiązującego materiału jest zamieszczony w Sylabusie.

Program*

1. Elementy logiki, algebra zbiorów, kresy zbiorów, symbole Newtona, trójkąt Pascala.
   Funkcje, różnowartościowość, „na”. Funkcje parzyste i nieparzyste.
2. Monotoniczność, okresowość funkcji. Funkcja złożona, ograniczona i odwrotna. Przegląd funkcji elementarnych.
3. Ciągi i granice ciągów. Twierdzenia o granicach ciągów. Wyrażenia nieoznaczone. Liczba e.
4. Szeregi liczbowe, rodzaje i własności. Zbieżność szeregu, kryteria.
5. Granica funkcji. Asymptoty. Ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych.
6. Pochodnej funkcji. Obliczanie pochodnej, pochodna funkcji złożonej. Różniczka.
7. Monotoniczność, wypukłość, punkty przegięcia, ekstrema funkcji. Zastosowania rachunku różniczkowego. Badanie przebiegu zmienności funkcji.
8. Funkcja dwu i trzech zmiennych. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Pochodne cząstkowe funkcji dwu i trzy zmiennych.
9. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Ekstrema lokalne i globalne funkcji dwu i trzy zmiennych.
10. Całka nieoznaczonej i jej własności. Całkowanie przez podstawienie i przez części.
11. Całkowanie funkcji wymiernych i trygonometrycznych.
12. Całka oznaczona i jej własności. Twierdzenie Newtona-Leibniza. Zastosowania całki oznaczonej (np. średnia wartość funkcji na przedziale, pole obszaru, objętość bryły, etc).
13. Całki podwójne. Interpretacja geometryczna. Własności całek podwójnych. Zamiana całek podwójnych na iterowane, Zamiana zmiennych.
14. Całki potrójne. Zamiana całki potrójnej na iterowaną Zamiana współrzędnych prostokątnych na współrzędne biegunowego, sferyczne i walcowe. Obliczanie całki potrójnej.
15. Powtórzenie, zadania przygotowujące do egzaminu.

***Obowiązujący (dokładny) program jest w Sylabusie*.**

Literatura:

1. **M. Bryński, N. Dróbka, K. Szymański, Matematyka dla zerowego roku studiów wyższych, elementy analizy matematycznej, WNT, 2007.**
2. **A.Birkholc, Analiza matematyczna dla nauczycieli, PWN, Warszawa, 1977.**
3. **M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna wydawnicza GiS, Wrocław, 2003.**
4. **G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy T. 1-3, PWN, Warszawa, 2007.**
5. **L.Janicka, Wstęp do analizy matematycznej, Oficyna Wydawnicza GiS, 2004.**

Zbiory zadań:

1. **M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania., Oficyna wydawnicza GiS, Wrocław, 2003.**
2. **W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, T. I-II, PWN, Warszawa, 2011.**
3. **W. Stankiewicz, Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, cz.I, PWN, Warszawa, 2006.**

Materiały:

1. **listy zadań,**
2. **wykłady.**

Zasady zaliczeń (obowiązkowa obecność na zajęciach):

Kolokwia (ćwiczenia), w tygodniu bezpośrednio po:

Analiza:

(1) 5. ćwiczeniach,

(2) 9. ćwiczeniach,

(3) 13 ćwiczeniach.

Dodatkowy termin kolokwium, dla osób które mają usprawiedliwioną nieobecność, ustala prowadzący zajęcia. Nie ma poprawiania ocen z kolokwium!

Zaliczenie ćwiczeń- średnia z kolokwiów. Prowadzący może podwyższyć ocenę za aktywność.

Osoby, które z różnych powodów nie otrzymały zaliczenia – dodatkowy termin zaliczenia ćwiczeń 09.02.2023, godz. 9-11 sala 205, po pierwszym terminie egzaminu.

Terminy egzaminów - sesja zimowa 2022/23

Egzaminy I termin. Analiza: 06.02.2023 godz. 9-15 sala 205, 23, 41

Egzaminy II termin. Analiza: 13.02.2023 godz. 9-11 sala 205

Zaliczenie kursu:

0.4(ocena z ćwiczeń)+0.6(ocena z egzaminu)

Obie oceny pozytywne!

Elementy Logiki Matematycznej

Rozważamy zdania (proste), o których możemy zawsze stwierdzić, czy są prawdziwe, czy fałszywe (tj. można im przypisać wartość logiczną: *prawdę* lub *fałsz*).

<u>Przykład</u> 1<2, 3 jest liczbą parzystą, pada deszcz,
czy jest pogoda? – *nie jest zdaniem w sensie logiki*.

- **przez 1 oznaczamy *prawdę*, a przez 0 – *fałsz*,**
- ***p* - zmienna logiczna, tj. możemy pod nią podstawić dowolne zdanie,**
- **jeżeli *p* jest prawdziwe, to *p* = 1, a gdy jest fałszywe, to *p* = 0.**

Stosując funktory (znaki działań logicznych) oraz nawiasy tworzymy wyrażenia logiczne (zdania złożone).

Znaki działań logicznych.

symbol	spójnik	nazwa symbolu
$\wedge$	**... i ...**	***koniunkcja (iloczyn logiczny)***
$\vee$	**lub ...**	***alternatywa (suma logiczna)***
$\Rightarrow$	**jeżeli .... , to ...**	***implikacja (wynikanie)***
$\Leftrightarrow$	**wtedy i tylko wtedy, gdy ....**	***równoważność (iff)***
$\neg$ (~)	**nieprawda, że ....**	***negacja (zaprzeczenie)***

Przykład użycia implikacji. a>5 $\Rightarrow$ a>0 (jeżeli a>5, to a>0)

Wyniki działań logicznych.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Uwagi:

- **w wyrażeniach logicznych występują zmienne logiczne, znaki działań oraz nawiasy,**
- **podobnie jak w przypadku wyrażeń arytmetycznych, istnieje kolejność wykonywania działań logicznych, są prawa łączności, przemienności, rozdzielczości, itp.**
- **wartością wyrażenia jest *prawda* albo *fałsz*.**

Przykład. Kiedy (tj. dla jakich wartości *p* i *q*) jest prawdziwe wyrażenie:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

p	q	$(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Kwantyfikatory

Ważną rolę w matematyce odgrywają słowa „*istnieje*” oraz „*każdy*”.

Wyraża się je za pomocą *kwantyfikatorów* :

„istnieje” $\exists x \in A \quad (\bigvee_{x \in A})$ **tzw. *kwantyfikator szczegółowy*.**

„dla każdego” $\forall x \in A \ (\bigwedge_{x \in A})$ **tzw. *kwantyfikator ogólny*;**

<u>Przykład</u>

Czy prawdziwe są wyrażenia logiczne:

a) $\forall x \in \boldsymbol{R} \ \ x = 2x$ **b)** $\exists x \in \boldsymbol{R} \ \ x = 2x$

Elementy teorii zbiorów

Pojęcie *zbioru* należy do tzw. *pojęć pierwotnych* (niedefiniowalnych).

„element *a* należy do zbioru *A*” $a \in A$ $(a \notin A)$.

$\varnothing$ **- zbiór pusty.**

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ **- zbiór skończony.**

$A = \{x \in R :\ f(x)\}$ **- *A* zawiera elementy spełniające warunek *f*(*x*).**

Zbiór *A* jest zawarty w *B* ($A \subset B$**) *wtedy i tylko wtedy* (*iff*), gdy**

$$\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Zbiory *A* i *B* są równe iff, gdy $A \subset B \wedge B \subset A$.

Działania na zbiorach (*A,B* są zbiorami w *przestrzeni X*):

- ***suma*** $A \cup B = \{x:\ x \in A \vee x \in B\}$,
- ***iloczyn* (przekrój)** $A \cap B = \{x:\ x \in A \wedge x \in B\}$,
- ***różnica*** $\boldsymbol{A \setminus B = \{x:\ x \in A \wedge x \notin B\}}$,
- ***dopełnienie*** $\boldsymbol{A' = \{x \in X:\ x \notin A\}}$.

W rachunku zbiorów używa się także nawiasów (występuje kolejność działań, zachodzi: łączność, rozdzielczość, itd).

Przykład. $A \cup B = B \cup A,\qquad A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

Pojęcie sumy i iloczynu można uogólnić.

Niech $A_1, A_2, ..., A_n$ **będzie ciągiem zbiorów.**

- **suma** $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, **przy czym** $x \in K \Leftrightarrow \exists i\ (1 \le i \le n),\ x \in A_i$
- **iloczyn** $T = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, **przy czym** $x \in T \Leftrightarrow \forall i\ (1 \le i \le n),\ x \in A_i$.

Iloczyn (produkt) kartezjański

Iloczyn kartezjański zbiorów *A,B* jest zbiorem par uporządkowanych:

$$A\times B=\{(x,y):x\in A\wedge y\in B\}.$$

<u>Przykład</u> 5.

$A=\{\alpha,\beta,\delta\}, \qquad B=\{a,h\}$

$$A\times B=\{(\alpha,a),(\alpha,h),(\beta,a),(\beta,h),(\delta,a),(\delta,h)\},$$

$$(\alpha,\delta)\notin A\times B, \qquad (a,\alpha)\notin A\times B$$

Każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego nazywamy *relacją*.

Liczby

- **naturalne** – ***N***, ***1, 2,...*** $N_+ = N \cup \{0\}$
- **całkowite** – $\boldsymbol{Z = N_+ \cup \{-1, -2, \dots\}}$
- **wymierne** – $Q = \{\frac{n}{m} : n \in Z, m \in N\}$

  Liczba wymierna zapisana w postaci ułamka dziesiętnego jest skończona albo okresowa.
- **niewymierne** – NW

  Liczby, których nie można zapisać w postaci ilorazu: liczby całkowitej przez liczbę naturalną.
- **rzeczywiste** – $R = Q \cup NW$

Każda liczba rzeczywista jest reprezentowana jako punkt na osi liczbowej.

Wyrażenia arytmetyczne, działania na liczbach, prawa.

Podsumowanie:

liczby, zmienne logiczne, zbiory – działania, wyrażenia (nawiasy), prawa.

Twierdzenie. Liczba $\sqrt{2}$ nie jest wymierną.

Dowód. Załóżmy (nie wprost), że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, tj.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ oraz $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, $p, q \in Q$.

Wówczas $2q^2 = p^2$. Ponieważ 2 dzieli p^2, więc i 2 dzieli także p.

Zatem 4 dzieli p^2. Wobec tego 4 dzieli $2q^2$, a więc 2 dzieli q^2.

Otrzymaliśmy więc, że 2 dzieli zarówno p jak i q co jest sprzeczne z założeniem, że $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym.

Ograniczenia

$A \subset R$ **jest *ograniczony* <u>*z dołu*</u>, jeżeli**

$$\exists m \in R, \forall x \in A,\ \ m \le x$$

Uwaga. Brak jednoznaczności.

$A \subset R$ **jest *ograniczony* <u>*z góry*</u>, jeżeli**

$$\exists M \in R, \forall x \in A,\ \ M \ge x$$

$A \subset R$ **nazywamy *ograniczonym*, jeśli**

$$\exists m, M \in R, \forall x \in A,\ \ m \le x \le M.$$

Przykłady:

1. **zbiór *N* liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry, ograniczony z dołu, np. 1,**
2. **zbiór *Z* liczb całkowitych nie jest ograniczony ani od dołu ani od góry,**
3. **zbiór liczb wymiernych *x* spełniających nierówność $x^3 < 10$ jest ograniczony z góry np. przez liczbę 3.**

Kresy

Liczba *r* jest *<u>kresem górnym</u>* zbioru $A \subset R$ ograniczonego z góry, jeśli jest ona najmniejszym ograniczeniem od góry tego zbioru, tj.

(i) $\forall a \in A \quad a \le r$ **(ii)** $\forall s \left(\forall a \in A \quad a \le s \Rightarrow s \ge r \right)$

Kres górny zbioru *A* oznacza się *sup A* (*supremum* zbioru *A*).

Liczba *t* jest *<u>kresem dolnym</u>* zbioru $A \subset R$ ograniczonego z dołu, jeśli jest ona największym ograniczeniem od dołu tego zbioru:

(i) $\forall a \in A \quad a \ge t$ **(ii)** $\forall s \left(\forall a \in A \quad a \ge s \Rightarrow s \le t \right)$

Kres dolny zbioru *A* oznacza się *inf A* (*infimum* zbioru *A*).

***Dla zbioru nieograniczonego – odpowiednio* +,- ∞**

Zasada zupełności.

Każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ograniczony z góry ma kres górny, a każdy podzbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.

Symbol Newtona i trójkąt Pascala

Niech $n \geq k$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi. *Symbolem Newtona* n po k nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

gdzie symbolem $n!$ oznaczamy *silnię* liczby n określoną rekurencyjnie:

$$0! = 1 \text{ oraz } n! = n(n-1)! \text{ dla } n \geq 1.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot, \ldots, \cdot n.$$

- dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzą równości:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

- dla $n > k$ zachodzi równość

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Równość $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pozwala na wyznaczać wartość $\binom{n}{k}$ zgodnie z regułą nazywaną ***trójkątem Pascala***:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

. . . .

Czyli

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

....

Symbole Newtona stanowią współczynniki rozwinięcia wyrażenia $(a+b)^n$ zgodnie ze *wzorem dwumianowym Newtona*.

Dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnych liczb rzeczywistych a,b zachodzi równość

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Wobec tego

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

FUNKCJE

X, Y - niepuste zbiory.

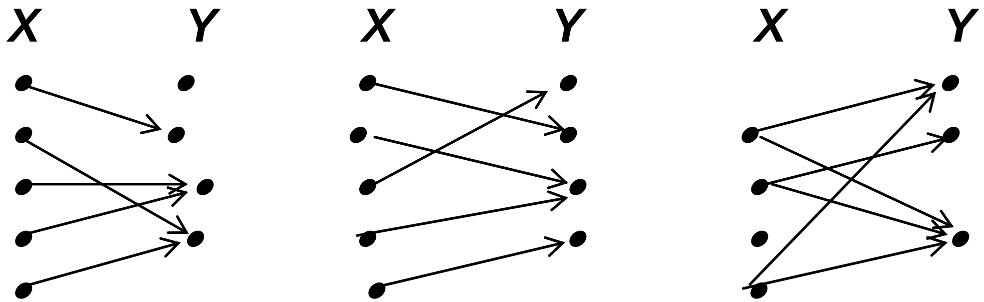
Funkcja (odwzorowanie, przekształcenie)

$$f : X \to Y$$

przyporządkowuje, każdemu elementowi zbioru X dokładnie jeden element zbioru Y.

Zbiór X jest *dziedziną*, a Y *zbiorem wartości* funkcji f.

Jeżeli $y_0 = f(x_0)$, to x_0 jest *argumentem*, a y_0 *wartością* funkcji f w punkcie x_0.



funkcja *funkcja „na”* *nie jest funkcją*

Jeżeli $f(x_0) = 0$, to x_0 jest *miejscem zerowym* funkcji f.

Uwaga. *Wykład jest poświęcony funkcją rzeczywistym zmiennej rzeczywistej,* tj.

$f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subseteq R$.

Wykresem funkcji f jest zbiór punktów płaszczyzny (podzbiór produktu kartezjańskiego $R\times R$)

$$\{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Funkcja f na zbiorze A jest:

1^0 ***rosnąca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

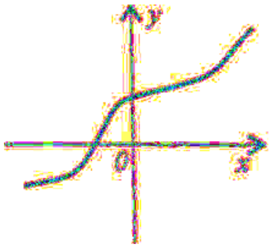
2^0 ***malejąca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

3^0 ***niemalejąca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

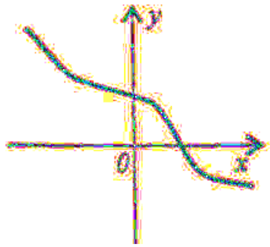
4^0 ***nierosnąca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, (x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$

W szczególności funkcje rosnące albo malejące nazywamy *ściśle monotonicznymi.*

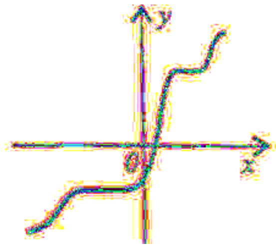
Funkcje monotoniczne (przedziałami monotoniczne)



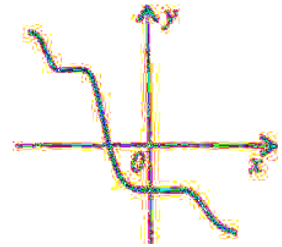
funkcja rosnąca



funkcja malejąca



funkcja niemalejąca



funkcja nierosnąca

Własności:

- **suma funkcji malejących (rosnących) jest funkcją malejącą (rosnącą). A iloczyn?**
- **funkcji malejąca (rosnąca) pomnożona przez liczbę dodatnią jest funkcją malejącą (rosnącą).**
- **funkcja malejąca (rosnąca) pomnożony przez liczbę ujemną jest funkcją rosnącą (malejącą).**

Funkcję $f(x)$ jest *różnowartościową*, iff

$$\forall t,u,\, t\neq u \Rightarrow f(t)\neq f(u)$$

Funkcja rosnąca albo malejąca (ściśle monotoniczna) jest różnowartościowa.

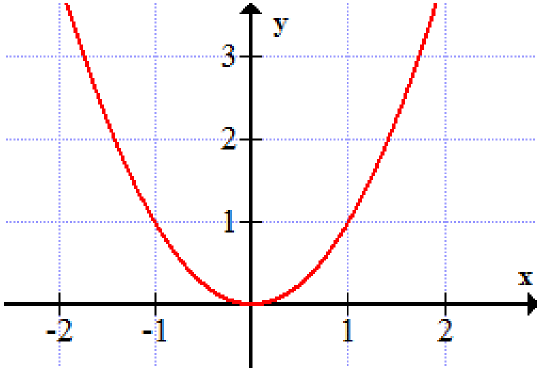
Funkcja f na zbiorze A jest:

1^0 ***parzystą*** $\Leftrightarrow \forall x \in A, (-x \in A \wedge f(-x) = f(x))$

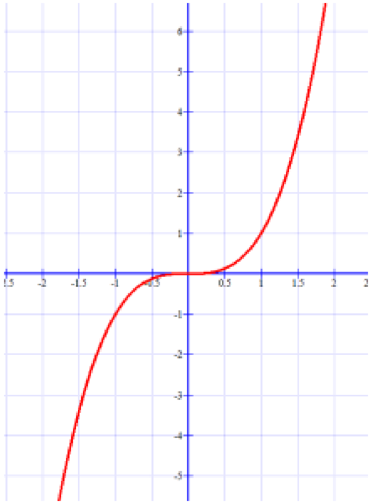
2^0 ***nieparzystą*** $\Leftrightarrow \forall x \in A, (-x \in A \wedge f(-x) = -f(x))$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY, a nieparzystej - względem początku układu współrzędnych.

<u>Przykład</u>. Wykres funkcji



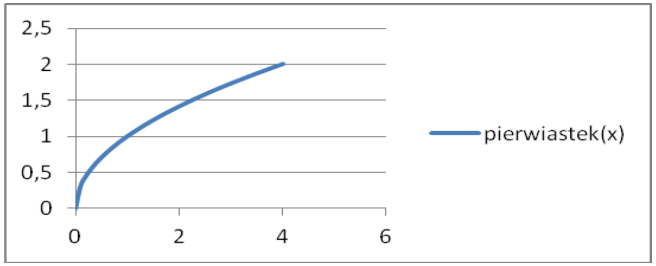
parzystej



nieparzystej

<u>Przykład</u>.

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$



Dziedzina: $X = \{x \in R : x \geq 0\} = [0,+\infty)$**, pierwiastek kwadratowy jest określony <u>tylko</u> dla liczb dodatnich oraz zera.**

Zbiór wartości $Y = [0,+\infty)$**.**

Jest funkcją rosnącą oraz różnowartościową.

Wobec tego $f : X \to Y$ **jest wzajemnie jednoznaczna (tj. różnowartościowa i na), co zapisujemy**

$$f : X \xrightarrow{1-1} Y .$$

Funkcja ta nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.