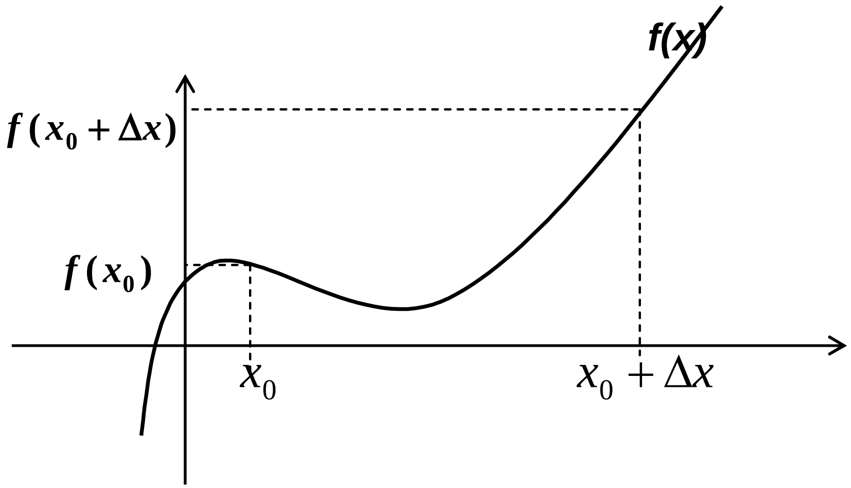
POCHODNE
(Analiza Matematyczna 1, wykład 6)

Pochodne

Funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ **- iloraz różnicowy, w punkcie** x_0

Δx **– przyrost argumentu**



Przykład

Iloraz różnicowy funkcji $f(x)=x^2$ **w punkcie** x_0 **i dla przyrostu** Δx **wynosi**

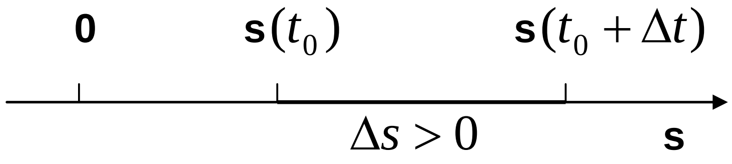
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

Interpretacja fizyczna ilorazu różnicowego

Przykład

Punkt *P* porusza się po osi liczbowej *OS*.

Współrzędna *s* punktu *P* jest funkcją czasu t; $s = s(t)$.



***Iloraz różnicowy* przedstawia średnią prędkość tego ruchu między chwilą t_0 i chwilą $t_0 + \Delta t$**

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Pochodną funkcji $f\left(x\right)$ ***w punkcie*** x_0 **nazywamy granicę**

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

a) jeżeli granica ta istnieje i jest skończona,

b) $\Delta x\to 0$ **oznacza dowolny ciąg zbieżny do zera.**

Podobnie jak granice, również pochodne można liczyć z definicji.

<u>Przykład</u>

Wyznaczyć pochodna funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie x_0?

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x_0+\Delta x\right)^2-x_0^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\left(\Delta x\right)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)}{\Delta x}=2x_0$$

Ile wynosi pochodna tej funkcji w punkcie $x_0 = 2$?

$$f'(2) = 2\cdot 2 = 4.$$

Przykład

Niech $f(x)=\sqrt{x}$. Obliczmy $f'(x)$.

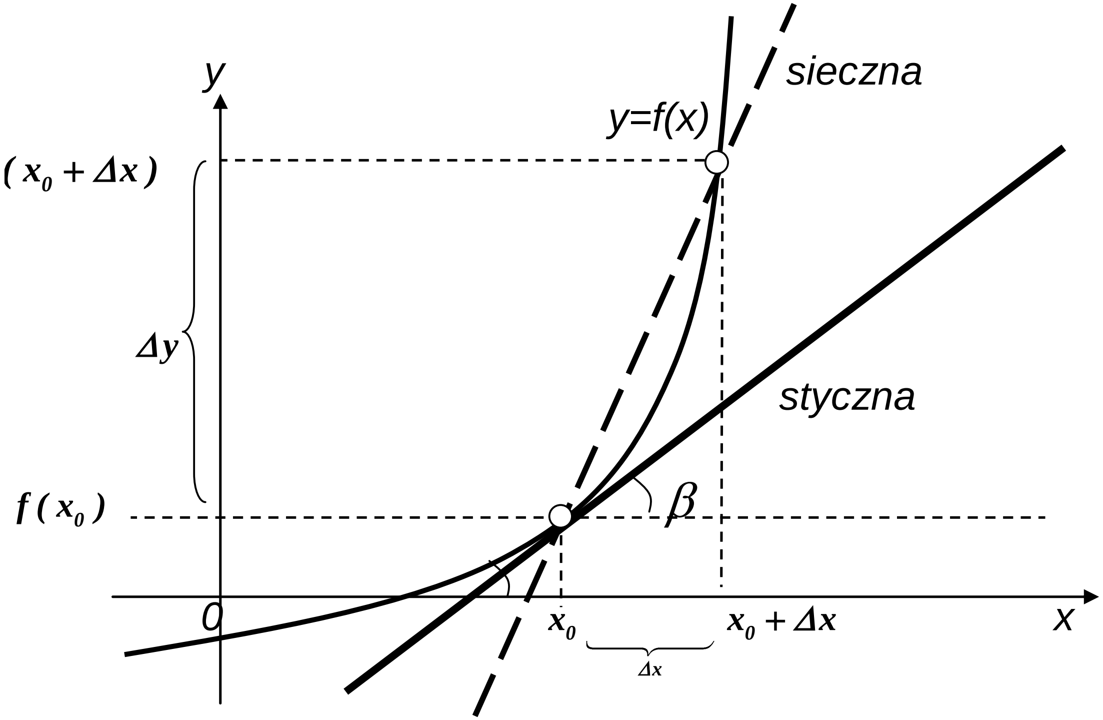
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

(licznik i mianownik mnożymy przez $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$)

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \text{ tj.}$$

$$f(x)=x^{1/2},\; f'(x)=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji



Jeżeli $\Delta x \to 0$**, to geometrycznym odpowiednikiem istnienia granicy**

$$f'(x_0) \underset{df}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

jest istnienie granicznego położenia siecznej do wykresu funkcji $y=f(x)$**, czyli istnienie stycznej do tego wykresu w punkcie (**$x_0, f(x_0)$**). Oczywiście**

$$f'(x_0)=tg\,\beta$$

Jeżeli pochodna funkcji *f*(*x*) istnieje w każdym punkcie pewnego zbioru *X*, to każdej liczbie $x_0 \in X$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $f'(x_0)$, a więc w zbiorze *X* określona jest nowa funkcja, zwana *funkcją pochodną funkcji f*(*x*) i oznaczana symbolem $f'(x)$.

Funkcja stała $f(x)=c$ ma pochodną równa 0.

<u>Przykład</u>

Obliczyć pochodną funkcji $f(x)=x^3$ w punktach –3, 0, 5.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right]=3x_0^2$$

$$f'(-3)=3(-3)^2=27\,,$$

$$f'(0)=3\cdot 0^2=0\,,$$

$$f'(5)=3\cdot 5^2=75\,.$$

Uwaga:

Należy oczywiście rozróżniać <u>funkcję</u> pochodną $f'(x)$ i pochodną w pewnym ustalonym punkcie, która jest liczbą równą wartości funkcji pochodnej w tym punkcie.

Przykład

Funkcja $f(x) = x^3$ posiada funkcję pochodną $f'(x) = 3x^2$, określoną na zbiorze *R*.

Niech

$$y = f(x).$$

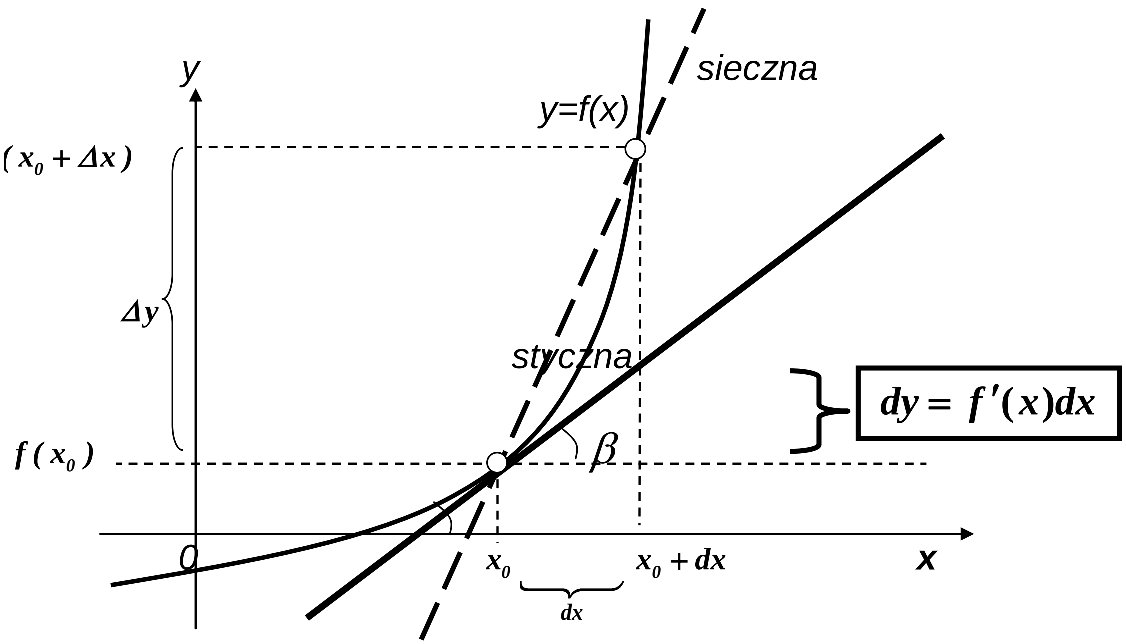
Funkcję $f'(x)$ oznacza się czasami $\frac{dy}{dx}$, a jej wartość w punkcie x_0 jako $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$

Przykład

$$y = f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2, \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = 12$$

Różniczka



Różniczką funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy funkcję

$$dy = f'(x_0)dx,$$

która dowolnej liczbie dx przypisuje pewną liczbę dy.

Rróżniczka jest pewnym przybliżeniem przyrostu wartości funkcji *f*(*x*) spowodowanym przyrostem argumentu o dx, tj.

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Przybliżenie to jest dokładne tylko wtedy, gdy $y = f(x)$ jest funkcją liniową.

Zastosowanie różniczki

Przykład

Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość $2^{2.9999}$

$$f(x) = 2^x, \qquad f'^{(x)} = 2^x \ln x.$$

$$x_0 = 3, \;\; dx = -0.0001.$$

$$2^{2.9999} \approx f(3) + f'(3) \cdot dx = 8 + 8 \cdot ln2 \cdot (-0.0001) = 7.9994 \ldots.$$

Granice jednostronne

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

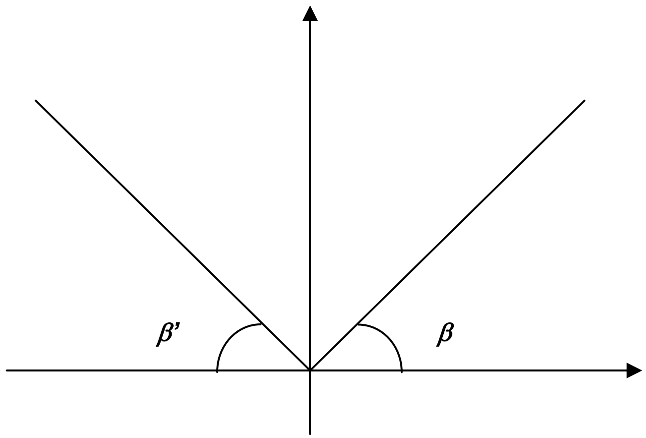
nazywać będziemy odpowiednio *pochodną lewostronną* i *prawostronną funkcji f* w punkcie x_0.

Uwaga.

- **Funkcja *f* posiada pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie obie pochodne jednostronne i są one sobie równe. Samo istnienie granic nie zapewnia jednak istnienia pochodnej $f'(x_0)$.**

Przykład

Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$.



$$f'(0-) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} (-1) = -1$$

$$f'(0+) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} (+1) = +1$$

Pochodne jednostronne funkcji *f(x)* w punkcie $x_0 = 0$
są różne, a zatem $f'(0)$ nie istnieje.

Mówiąc nieformalnie, nie istnieje ona wtedy, gdy w danym punkcie jest tak zwane „ostrze”.

Definicja

Jeżeli funkcja $f(x)$:

- **posiada pochodną w przedziale $(a;b)$,**
- **istnieją pochodne jednostronne $f'(a^+)$ i $f'(b^-)$, to mówimy, że istnieje *pochodna $f'(x)$ w przedziale domkniętym $[a,b]$.***

Twierdzenie

- **Jeżeli istnieje pochodna $f'(x_0)$ to funkcja jest ciągła w x_0.**

Pochodne funkcji oblicza się najczęściej na bazie pochodnych funkcji podstawowych obliczanych bezpośrednio z definicji.

Pochodne funkcji podstawowych

Funkcja	Pochodna
C	0
x^n	nx^{n-1}
X	1
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$ctgx$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Obliczając pochodne, korzystamy także z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie. **Jeżeli funkcje *f* i *g* są różniczkowalne w *x*, to**

1. $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
2. $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
3. $\left(k\cdot f(x)\right)' = k\cdot f'(x),\quad k\in R$
4. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$,
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$,

jeśli dodatkowo $g(x)\neq 0$

Przykład

$f(x)=3x^{13}+4x^7-12x+999$

$f'(x)=(3x^{13}+4x^7-12x+99)'=(3x^{13})'+(4x^7)'-(12x)'+(99)'=$

$3\cdot 13x^{12}+4\cdot 7x^6-12\cdot 1x^0=$

<u>Przykład</u> (*pochodna iloczynu*)

1. $(x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$

2. $(\sin^2 x)' = (\sin x\sin x)' = (\sin x)'\sin x + \sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x$

3. $(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

<u>Przykład</u> (*pochodna ilorazu*):

1. $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$

2. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

Przykładowe pochodne

	Funkcja	Pochodna	Uwagi
1	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$ $0 < x < +\infty$
2	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
3	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < +1$ $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$
4	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < +1$ $0 < y < \pi$
5	$y = arc\,tgx$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\ }{2}$
6	$y = arcctgx$	$y' = \frac{-1}{1 + x^2}$	$0 < y < \pi$
7	$g(x) = x^{\frac{1}{k}}$	$g'(x) = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k} - 1}$	$k \in \{1, 2, ...\}$

<u>Twierdzenie</u> (*o pochodnej funkcji odwrotnej*)

Jeżeli funkcja $y = f(x)$:

- **jest różniczkowalna,**
- **ma funkcję odwrotną $x = g(y)$,**

to pochodna funkcji odwrotnej

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.,$$

Po obliczeniu $f'(x)$ należy podstawić za $f(x)$ zmienną y.

<u>Przykład</u>

$y = tg(x)$**, funkcja odwrotna** $x = g(y) = arctg(y)$**.**

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(tgx)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

Korzystając z tożsamości:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} \text{ otrzymujemy}$$

$$g'(y) = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Przykłady

1) Dla $x = a^y$, $y = \log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

2)) $x = \cos y$, $y = \arccos x$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $x = tgy$, $y = arc\ tgx$, więc

$$(arc\ tgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $x = ctgy$, $y = arcctgx$

$$(arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+ctg^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

Pochodna funkcji złożonej

$$\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right]' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

Przykłady

(u=g(x)),

a). $y=\left(7x+11\right)^{31};\ y=u^{31},\ u=7x+11,$

$$y'=31\cdot u^{30}\cdot 7=217\left(7x+11\right)^{30},$$

b) $y=\sin 10x;\ y=\sin u,\ u=10x,$

$$y'=\cos u\cdot 10=10\cos 10x,$$

c) $y=\arcsin\left(2x-1\right);\quad y=\arcsin u,\quad u=2x-1,$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

d) $y=e^{\sin x};\ y=e^{u},\ u=\sin x,$

$$y'=e^{u}\cdot\cos x=e^{\sin x}\cos x$$

e) $\left(\sin 2x\right)' = \left(\cos 2x\right)\cdot\left(2x\right)' = 2\cos 2x$

f) $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \left[\cos\left(x^2\right)\right]\cdot 2x$

g) $\left(\sin 2x\cdot\cos 4x\right) = 2\cos 2x\cos 4x - 4\sin 2x\sin 4x$

h) $y = \sqrt[3]{x}$; $\quad y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

i) $y = e^x\cdot\cos x$; $\quad y' = e^x\cdot\cos x - e^x\sin x$,

j) $y = e^{\cos x}$; $\quad y' = e^{\cos x}\left(-\sin x\right)$,

k) $y = \ln\dfrac{1}{1+x^2}$; $\quad y' = \left(1+x^2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \left(1+x^2\right)\cdot\dfrac{\left(-2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$

Styczna do krzywej

Styczna do funkcji $f(x)$ **w punkcie** ***a***

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Równanie normalnej (prostopadłej do stycznej)

$$y-f(a)=-1(x-a)/f'(a).$$

Przykład

Wyznaczyć styczną do funkcji $f(x)=x^4-x^2+3$ **w punkcie** $a=1$**.**

Rozpoczynamy od obliczenia $f(1)=1-1+3=3$**. Następnie obliczamy**

$f'(x)=4x^3-2x$ **oraz** $f'(1)=4-2=2$**.**

Styczna ma więc postać:

$$y-3=2(x-1),$$

stąd, równanie stycznej $y=2x+1$.

Reguła de l'Hospitala

Chcemy obliczyć:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie*:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Twierdzenie *(de l'Hospital)*

Załóżmy, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Jeżeli istnieje $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$**, to**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład

Obliczyć $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

Wyrażenie $\frac{x}{e^x}$ jest nieoznaczone dla $x \to \infty$,

Z reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$