W2 – Podstawy rachunku prawdopodobieństwa (przypomnienie)

Henryk Maciejewski

Marek Woda

Rachunek prawdopodobieństwa - przypomnienie

1. Zdarzenia

2. Prawdopodobieństwo

3. Zmienne losowe, rozkłady

Matematyczny model eksperymentu losowego

Eksperyment losowy opisujemy za pomocą układu zwanego *przestrzenia probabilistyczną*:

$$[\Omega, \mathcal{B}, P]$$

Ω – zbiór *zdarzeń elementarnych* (przestrzeń próbek)

$\mathcal{B}$ – zbiór *zdarzeń losowych*

P – *prawdopodobieństwo* zdarzeń ze zbioru $\mathcal{B}$

Model zaproponowany przez Kołmogorowa (1933)

Zdarzenia elementarne

Ω – jest to zbiór wszystkich możliwych wyników eksperymentu losowego, zbiór <u>zdarzeń elementarnych</u>

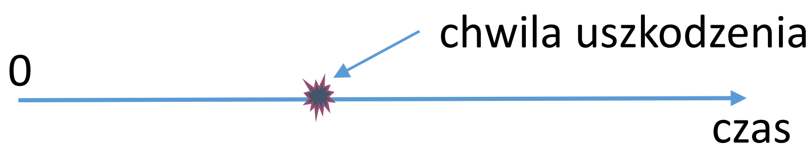
ω - element zbioru Ω, zdarzenie elementarne (pojęcie pierwotne)

<u>Przykład 1</u>: eksperyment – pojedynczy rzut kostką

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, ω_i – wyrzucenie i oczek

<u>Przykład 2</u>: eksperyment – obserwujemy czas życia elementu

$\Omega = [0, \infty)$



Zdarzenia losowe

Zdarzenia losowe będą określane jako podzbiory zbioru Ω.

- Jeśli jest Ω - skończony (lub przeliczalny)

wówczas zbiór zdarzeń losowych $\mathcal{B}$ jest to zbiór wszystkich podzbiorów Ω

<u>Przykład 1</u>: eksperyment – pojedynczy rzut kostką, zdarzenia:

$A_1 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

$A_2 = \{\omega_6\}$

…

Zdarzenia losowe

- Jeśli jest Ω jest nieprzeliczalny - wówczas trzeba nałożyć pewne ograniczenia na rodzinę podzbiorów Ω

$\mathcal{B}$ – zbiór zdarzeń losowych – rodzina podzbiorów spełniająca warunki:

1. Ω jest elementem $\mathcal{B}$
2. Jeśli A jest elementem $\mathcal{B}$, to dopełnienie A jest elementem $\mathcal{B}$
3. Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ (przeliczalny ciąg) należą do $\mathcal{B}$, wówczas $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{B}$

Taka rodzinę zbiorów nazywamy ciałem borelowskim podzbiorów zbioru Ω (lub σ-algebrą)

Zdarzenia losowe - własności

- Zbiór pusty ϕ należy do $\mathcal{B}$
- Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ (przeliczalny ciąg) należą do $\mathcal{B}$, wówczas $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{B}$
- Jeśli A_1, A_2 należą do $\mathcal{B}$, wówczas różnica zdarzeń $A_1 \setminus A_2$ należy do $\mathcal{B}$

- ϕ - zdarzenie niemożliwe
- Ω - zdarzenie pewne

Przykład 2: eksperyment – obserwujemy czas życia elementu, $\Omega = [0, \infty)$

Przykłady zdarzeń losowych:

- Uszkodzenie nastąpi pomiędzy 1000 a 2000 godziną pracy:

$$A_1 = \{\omega: 1000 \leq \omega \leq 2000\}$$

- Uszkodzenie nastąpi po przepracowaniu co najmniej 2000 godzin:

$$A_2 = \{\omega: \omega > 2000\}$$

Prawdopodobieństwo

Zdarzaniom losowym przypisujemy liczby z przedziału [0, 1]
P(A) – prawdopodobieństwo zdarzenia A

Prawdopodobieństwo *P* – funkcja określona na ciele $\mathcal{B}$ spełniająca warunki:

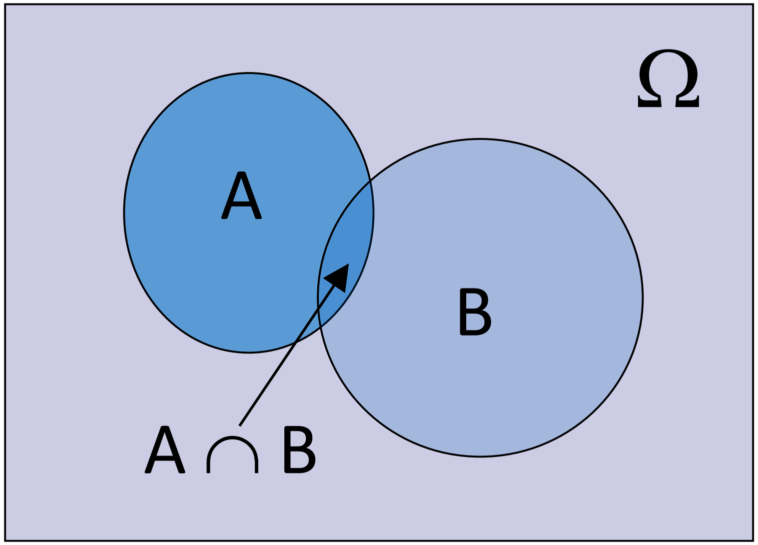
1. Dla każdego A$\in\mathcal{B}$ zachodzi P(A) ≥ 0
2. $P(\Omega) = 1$
3. Jeśli zdarzania losowe $A_1, A_2, \ldots$ (przeliczalny ciąg) są wzajemnie rozłączne (tzn. $A_j \cap A_k = \phi$ dla $j \neq k$), wówczas

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności

- $P(\phi) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\overline{\mathrm{A}}) = P(\Omega \setminus \mathrm{A}) = 1 - P(\mathrm{A})$ - pr. zdarzenia dopełniającego

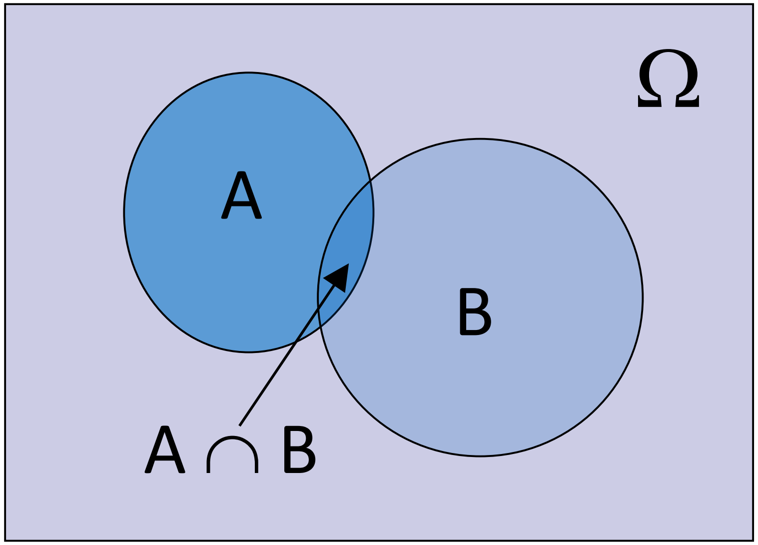
- $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ - pr. sumy zdarzeń



Prawdopodobieństwo warunkowe

- Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



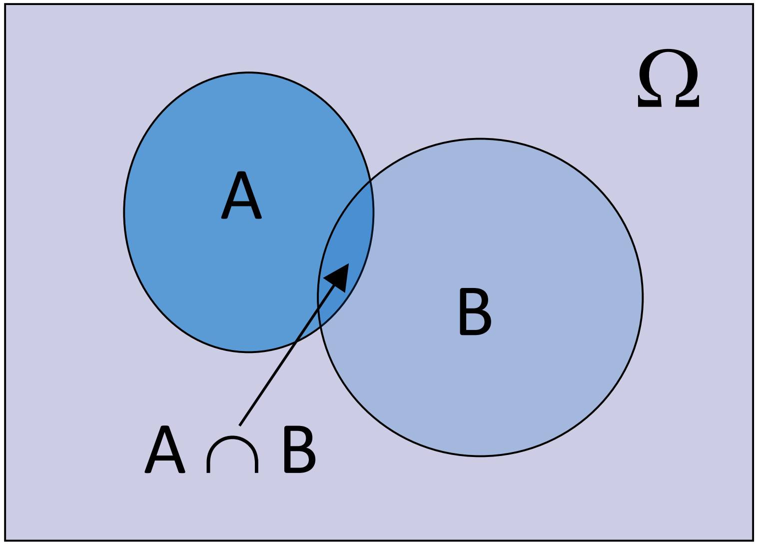
Zdarzenia niezależne

- Zdarzenia A i B są niezależne jeśli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

alternatywna definicja: $P(A|B) = P(A)$

(informacja o tym, że zaszło zdarzenie B nie zmienia prawdopodobieństwa zdarzenia A)



Zmienne losowe

Jeśli zdarzeniom elementarnym przypiszemy liczby, wówczas otrzymaną wielkość nazywamy <u>zmienną losową</u>. Oznaczamy zwykle dużą literą np. X, T.

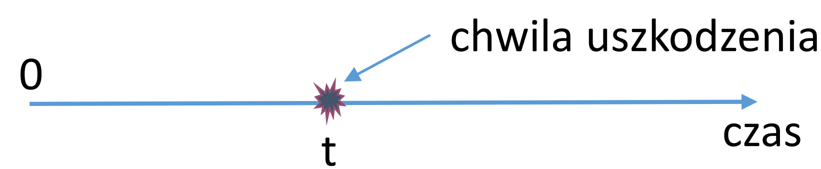
Przykład: rzut kostką:

X – liczba wyrzuconych oczek

Przykład: uszkodzenie elementu:

T – czas który upłynął od chwili 0 do chwili uszkodzenia (zmienna losowa ciągła)

t – wartość, jaką przyjęła zmienna losowa (liczba)



Rozkład zmiennej losowej

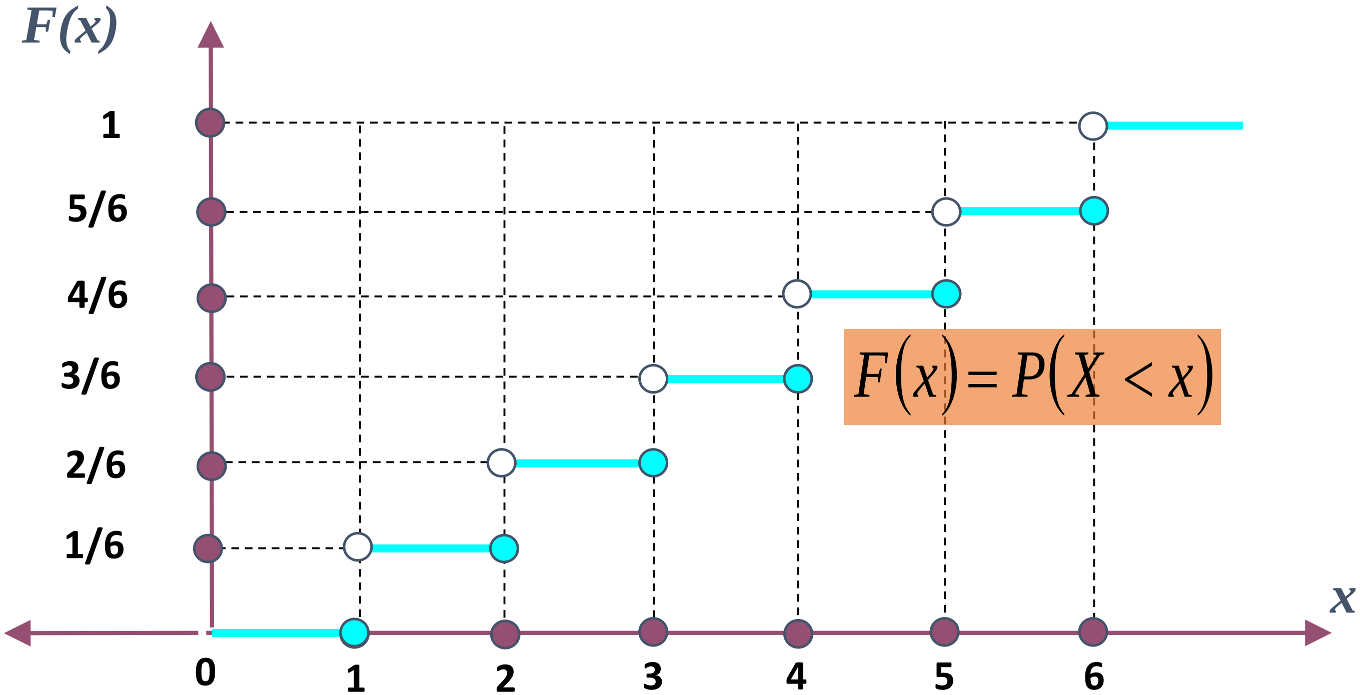
Jak powiązać wartości przyjmowane przez zmienną losową z prawdopodobieństwem?

X – zmienna losowa przyjmująca wartości z przedziału od -∞ do +∞

Dystrybuanta zmiennej losowej X (*cumulative distribution function, cdf*) F(x) – definiujemy jako prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia X < x (x – liczba rzeczywista z przedziału od -∞ do +∞)

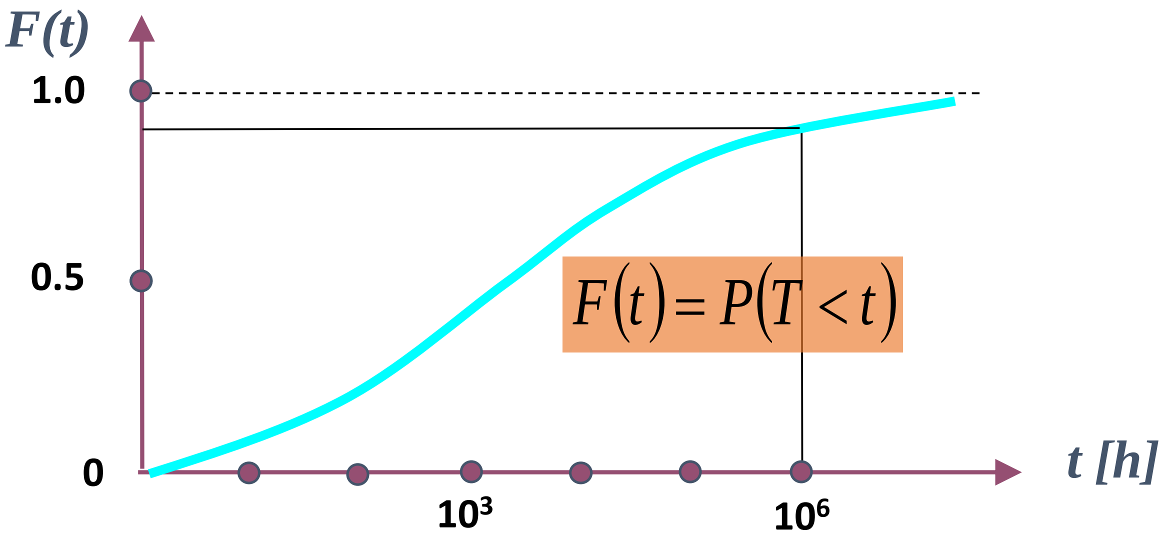
$$F(x) = P(X < x)$$

Przykład – dystrybuanta dla rzutu kostką



$$F(x) = P(X < x)$$

Przykładowa dystrybuanta dla czasu życia elementu



Na podstawie dystrybuanty możemy ocenić prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu przed upływem miliona godzin – wynosi ono około 0.9.

Własności dystrybuanty *F*

1. Jest funkcją niemalejącą, dla a<b:

$$F(a) \leq F(b)$$

2. Jest lewostronnie ciągła:

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a)$$

3. Spełnia warunki dotyczące granic

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Gęstość prawdopodobieństwa

Jeśli dystrybuantę zmiennej losowej X można przestawić w postaci całki

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

to zmienną X nazywamy ciągłą.

Funkcję f() nazywamy gęstością prawdopodobieństwa rozkładu X (*probability density function, pdf*).

Jeśli dla dystrybuanty F(x) suma prawdopodobieństw wartości, w których F jest nieciągła równa się jeden, to zmienną losową X nazywamy dyskretną.

Gęstość prawdopodobieństwa - własności

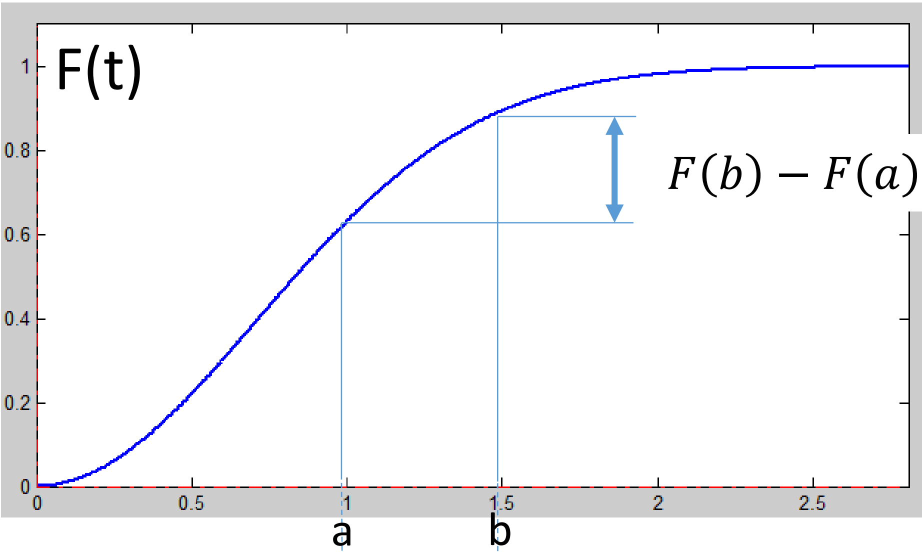
1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$

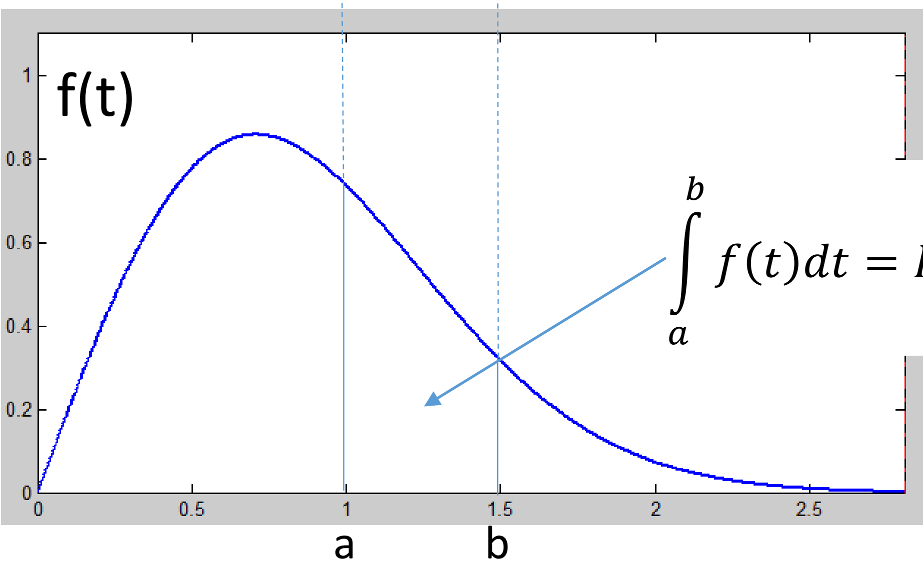
Jeśli dystrybuanta jest funkcję różniczkowalną, to

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Prawdopodobieństwo zdarzeń – wyznaczamy z dystrybuanty lub funkcji gęstości



$$F(b) - F(a) = P(a \leq T < b)$$



$$\int_{a}^{b} f(t)dt = P(a \leq T < b)$$