ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 7

Macierz
Działania na macierzach
Macierz transponowana

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania macierzy

- rozwiązanie układów równań liniowych,
- cyfrowa reprezentacja i przetwarzanie obrazów (3D), (rozdzielczość monitora odpowiada zagęszczeniu siatki punktów reprezentujących obraz), kompresja obrazu, grafika (3D) w grach komputerowych, animacjach, programowanie gier,
- algorytm Page Rank utworzony przez Google, wyszukiwanie internetowe, reprezentacja dużych zbiorów danych,
- teoria kodowania,
- teoria sygnałów,

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania macierzy (cd)

- zagadnienia optymalizacyjne, (np. w programowaniu liniowym),
- wyrażanie zależności między natężeniem i napięciem prądu w obwodach prądu przemiennego, (np. opór elektryczny),
- opisywanie zjawiska pizoelektrycznego (odkształcania kryształów poprzyłożeniu prądu),
- opisywanie różnych zjawisk elektromagnetycznych,
- opisywanie zjawisk immitancji i transmitancji,
- ogólna teoria względności.

MACIERZ

Macierzą wymiaru $m \times n$, $(m, n \in \mathbb{N})$ nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]$$

Macierze oznaczamy wielkimi literami $A, B, C, ...$ a ich elementy leżące w i-tym wierszu i j-tej kolumnie symbolem a_{ij}. Zatem możemy dla macierzy zastosować zapis skrócony $A = [a_{ij}]$, gdzie $i = 1, \dots m$ oraz $j = 1, \dots n$.

Macierze $A = [a_{ij}]$ ***i*** $B = [b_{ij}]$ ***są równe*** wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar oraz gdy elementy mające to samo położenie w obydwu macierzach są równe, tzn. gdy $a_{ij} = b_{ij}$ dla wszelkich $i = 1, \dots m, j = 1, \dots n$.

Macierz, której wszystkie elementy sa zerami nazywamy ***macierzą zerową*** i oznaczamy $\mathbb{O}$.

Macierz, której liczba wierszy równa się liczbie kolumn nazywamy ***macierzą kwadratową***. Jeżeli liczba wierszy (kolumn) takiej macierzy jest równa n, $(n \in \mathbb{N})$, to wtedy mówimy, że jest to ***macierz kwadratowa stopnia*** n.

Macierz kwadratową stopnia n, ($n \geqslant 2$), w której wszystkie elementy znajdujące się nad (pod) główną przekątną są równe 0 nazywamy ***macierzą trójkątną dolną*** L ***(górną*** U***)***,

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratową stopnia n, w której wszystkie elementy nie znajdujące się na głównej przekątnej są równe 0 nazywamy ***macierzą diagonalną*** $diag(a_1, a_2, ..., a_n)$,

$$diag(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalną, w której wszystkie elementy znajdujące się na głównej przekątnej są równe 1 nazywamy ***macierzą jednostkową*** I, (lub I_n podkreślając jej stopień).

$$I = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Dodawanie macierzy jest wykonalne tylko dla macierzy o tym samym wymiarze, mówimy wówczas, że macierze mają ***w*ymiar zgodny**. Sumę macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ definiujemy w następujący sposób

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}],$$

tzn. dodajemy elementy położone na tych samych miejscach w obydwu macierzach.
Macierz $A + B$ będąca sumą macierzy A i B ma ten sam wymiar co macierze A i B.

Elementami macierzy przez nas rozważanych są liczby, więc dodawanie takich macierzy jest łączne i przemienne, tzn. dla danych macierzy A, B i C wymiaru zgodnego prawdziwe są następujące równości

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $A+\mathbb{O}=A=\mathbb{O}+A$

Mnożenie macierzy przez liczbę jest wykonalne dla macierzy o dowolnym wymiarze. Aby pomnożyć macierz $A = [a_{ij}]$ przez liczbę $k \in \mathbb{R}$, mnożymy każdy element tej macierzy przez k, tzn.

$$k \cdot A = [ka_{ij}].$$

W wyniku tego działania otrzymujemy macierz tego samego wymiaru co macierz wyjściowa.

Macierzą przeciwną do macierzy A jest

$$-A = [-a_{ij}].$$

Zatem mówiąc, że odejmujemy daną macierz A od danej macierzy B, tak naprawdę do macierzy A dodajemy macierz $-B$, tzn. $A - B = A + (-B)$.

Dla dowolnej macierzy A prawdziwe są równości

- $A + (-A) = \mathbb{O}$
- $1 \cdot A = A$

Ponadto dla dowolnych liczb $k, l \in \mathbb{R}$ prawdziwe są równości

- $(k + l)A = kA + lA$
- $(kl)A = k(lA)$

Ponadto dla dowolnej macierzy B wymiaru zgodnego z A prawdziwe jest

- $k(A + B) = kA + kB$

Mnożenie macierzy $A = [a_{ij}]$ o wymiarze $m \times n$ i $B = [b_{ij}]$ o wymiarze $k \times l$ jest wykonalne tylko w sytuacji, gdy $n = k$. Wtedy iloczynem macierzy $A \cdot B$ jest macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times l$ powstała w następujący sposób: i-ty wiersz macierzy A mnożymy skalarnie przez j-tą kolumnę macierzy B i uzyskany wynik

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

wpisujemy w miejsce c_{ij} macierzy C. Czynność tę powtarzamy dla wszystkich $i = 1, 2, ..., m$ oraz $j = 1, 2, ..., n$.

Mnożenie macierzy jest

- łączne, tzn.
$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C),$$
- rozdzielne względem dodawania, tzn.
$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C, \quad A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$
- ale na ogół nie jest przemienne, tzn. $A\cdot B \neq B\cdot A$. Łatwe do zweryfikowania wyjątki od tej reguły to np. $A = B$ albo gdy jedna z macierzy jest macierzą zerową lub macierzą jednostkową I. Wtedy mamy odpowiednio
$$\mathbb{O}\cdot A = \mathbb{O} = A\cdot\mathbb{O}, \quad I\cdot A = A = A\cdot I.$$

  Zauważmy, że I jest elementem neutralnym mnożenia macierzy.

MACIERZ TRANSPONOWANA

Transponowanie macierzy jest wykonalne dla macierzy o dowolnym wymiarze. Macierz transponowana A^T powstaje z macierzy A przez utworzenie wierszy z kolumn, tzn. jeżeli $A = [a_{ij}]$, to

$$A^T = [b_{ji}],$$

gdzie $b_{ji} = a_{ij}, i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots n$.

Poprzez operację transponowania macierzy o wymiarze $m \times n$ otrzymujemy macierz o wymiarze $n \times m$.

Niech dane będą macierze A i B. Operacja transponowania ma następujące własności

- $(A^T)^T = A, \quad (kA)^T = kA^T, (k \in \mathbb{R}),$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, jeżeli obydwa działania są wykonalne.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, jeżeli obydwa działania są wykonalne.

Macierz kwadratową A nazywamy ***symetryczną***, jeżeli

$$A^T = A.$$

Macierz kwadratową A nazywamy ***antysymetryczną***, jeżeli

$$A^T = -A.$$