

# W6 – Systemy naprawialne

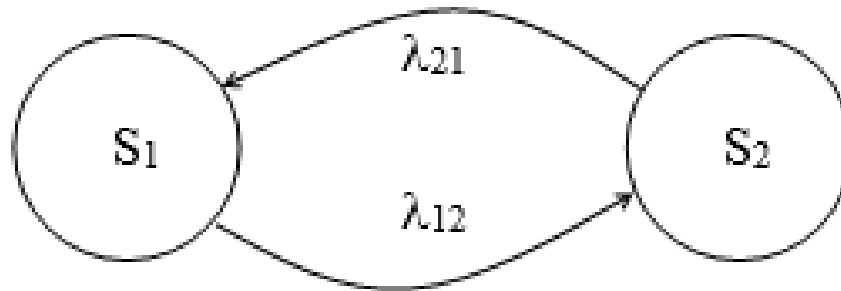
Henryk Maciejewski

Marek Woda

# Plan wykładu

1. Graf stanów elementu naprawialnego / systemu
2. Analiza niezawodnościowa systemu – model Markowa
3. Naprawy prewencyjne – analiza (*preventive maintenance*)

# Graf stanów elementu naprawialnego



$S_1$  – stan sprawności

$S_2$  – stan niesprawności (element uszkodzony – w trakcie naprawy)

$\lambda_{12}$  – intensywność przejść (intensywność uszkodzeń)

$\lambda_{21}$  – intensywność przejść (intensywność napraw)

Opis i modelowanie takich systemów – za pomocą procesów stochastycznych

# Procesy stochastyczne - przypomnienie

Przestrzeń probabilistyczna:

$$[\Omega, \mathcal{B}, P]$$

$\Omega$  – zbiór zdarzeń elementarnych,  $\omega \in \Omega$

$\mathcal{B}$  – zbiór zdarzeń losowych

$P$  – prawdopodobieństwo zdarzeń ze zbioru  $\mathcal{B}$

**Proces stochastyczny** – rodzina zmiennych losowych:

$$\{X(t): t \in T\}$$

$t$  – parametr (indeks) procesu

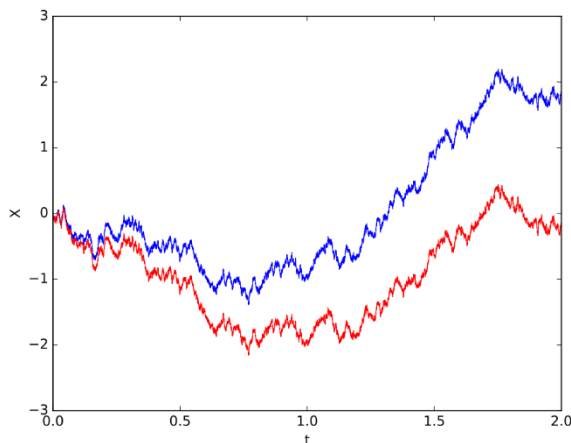
np. interpretowany jako czas (np.  $T=[0, \infty)$ )

Wartości zmiennych losowych  $X$  – **stany** procesu

# Procesy stochastyczne - przypomnienie

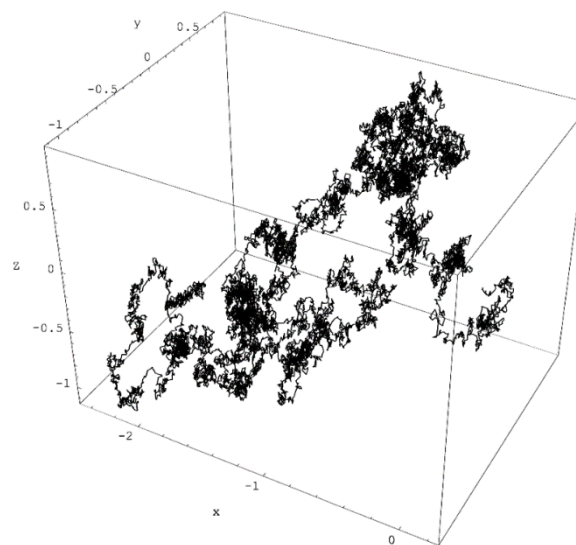
## Przykład – ruchy Browna (proces Wienera)

(przyrosty procesu  $X(t_2) - X(t_1)$  niezależne i mają rozkład normalny)



Stany procesu w  $\mathbb{R}$

$X(t)$  dla ustalonego  $t$  –  
zmienna losowa



Stany procesu w  $\mathbb{R}^3$

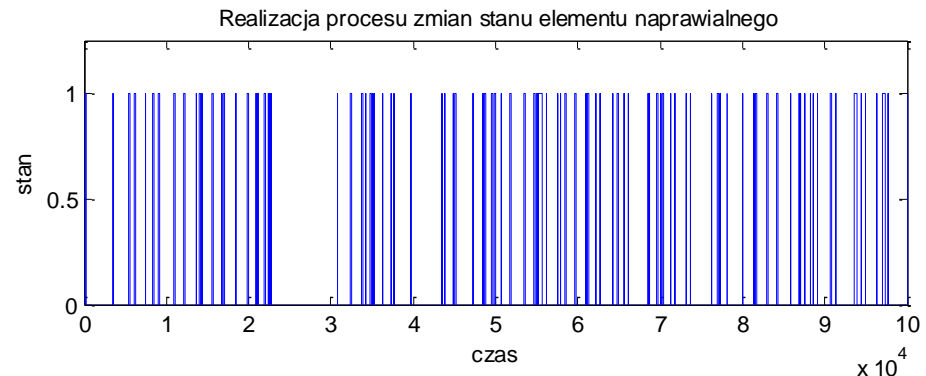
# Procesy Markowa, łańcuchy Markowa

Proces Markowa - proces bez pamięci: kolejny stan zależy tylko od stanu bieżącego

Łańcuch Markowa (Markov chain) – proces Markowa z dyskretną przestrzenią stanów



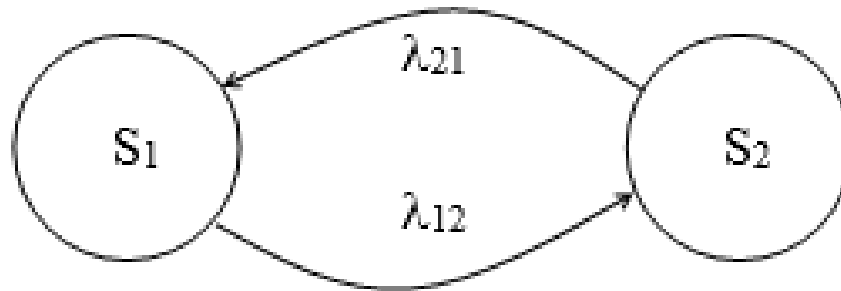
Stany procesu  $\{S_1, S_2\}$ , czas ciągły



Czas ciągły – określamy **intensywności przejść** (*transition rates*)

Czas dyskretny – określamy **prawdopodobieństwa przejść**

# Graf stanów elementu naprawialnego

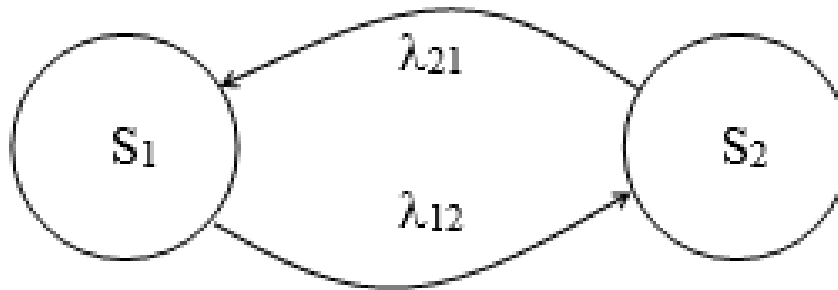


$S_1$  – stan sprawności

$S_2$  – stan niesprawności (element uszkodzony – w trakcie naprawy)

$\lambda_{12}$  – intensywność przejść (intensywność uszkodzeń)

$\lambda_{21}$  – intensywność przejść (intensywność napraw)



Analiza niezawodności elementu naprawialnego w oparciu o:

**F(t)** – rozkład czasu pracy

**G(t)** – rozkład czasu naprawy

Przyjmujemy  $F(t)$ ,  $G(t)$  – rozkłady wykładnicze, ze średnimi czasami:

$T_1$  – średni czas pracy,

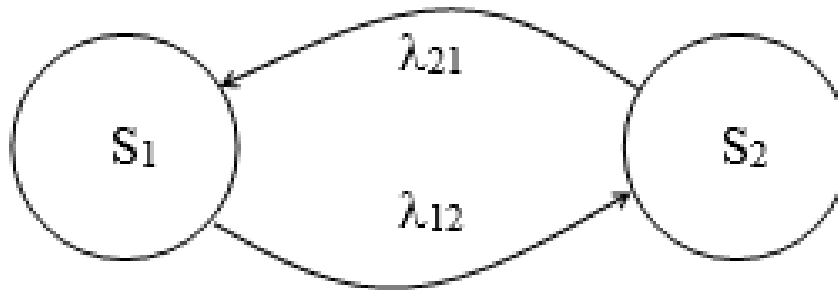
$T_2$  – średni czas naprawy,

wówczas

$\lambda_{12} = 1/T_1$       intensywność uszkodzeń

$\lambda_{21} = 1/T_2$       intensywność napraw





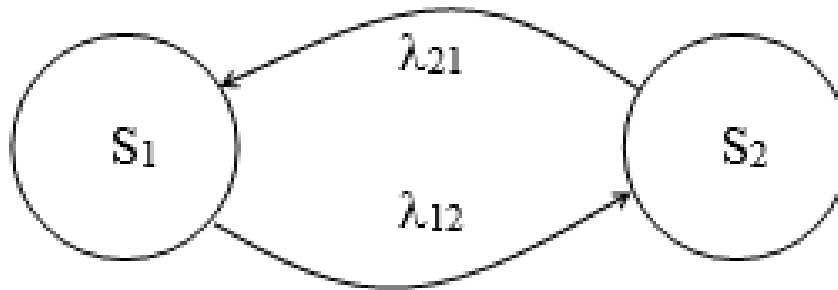
Analizujemy prawdopodobieństwo przebywania systemu w stanach  $S_1$ ,  $S_2$ :  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$

Użyteczną miarą w analizie systemów naprawialnych są **prawdopodobieństwa stacjonarne**:

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$$

Na mocy twierdzenia ergodycznego Markowa,  $p_1$ ,  $p_2$ :

- istnieją
- są skończone
- nie zależą od  $P_1(0)$  i  $P_2(0)$ , tj. od stanu początkowego



$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$$

Zachodzą zależności:

$$p_1 = \lambda_{21} / (\lambda_{12} + \lambda_{21}) = T_1 / (T_1 + T_2)$$

$$p_2 = \lambda_{12} / (\lambda_{12} + \lambda_{21}) = T_2 / (T_1 + T_2)$$

**A – współczynnik gotowości** (prawdopodobieństwo przebywania systemu w stanie sprawności)

$$A = p_1$$

# Graf stanów **systemu** naprawialnego

Przykład: Rozważamy system złożony z dwóch elementów, gdzie drugi element jest elementem rezerwowym

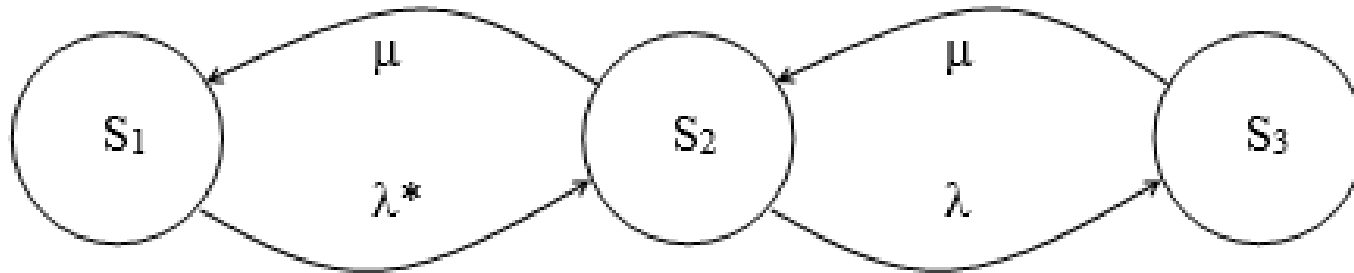
- rezerwa gorąca (oba elementy pracują), lub
- rezerwa zimna (drugi włączany w zerowym czasie po awarii pierwszego)

Stany systemu:

S1 – oba elementy sprawne – stan sprawności

S2 – jeden element sprawny, drugi uszkodzony – stan sprawności

S3 – oba uszkodzone – stan niesprawności



S1 – oba elementy sprawne – stan sprawności

S2 – jeden element sprawny, drugi uszkodzony – stan sprawności

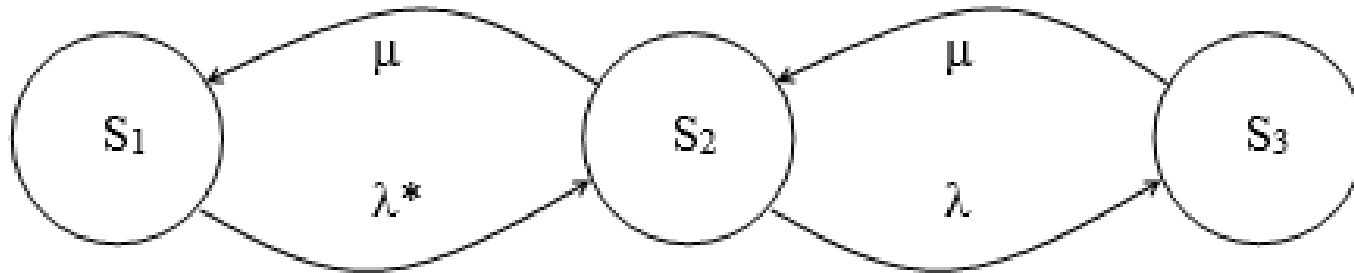
S3 – oba uszkodzone – stan niesprawności

$\lambda$  - intensywność uszkodzeń

$\mu$  - intensywność napraw

$\lambda^* = 2 \lambda$  dla rezerwy gorącej (oba pracują)

$\lambda^* = \lambda$  dla rezerwy zimnej (tylko jeden pracuje)



S1 – oba elementy sprawne – stan sprawności

S2 – jeden element sprawny, drugi uszkodzony – stan sprawności

S3 – oba uszkodzone – stan niesprawności

$A = p_1 + p_2$  – współczynnik gotowości tego systemu

Pokażemy teraz ogólną procedurę wyznaczania  
**prawdopodobieństw stacjonarnych** oraz  
**oczekiwanych czasów przejścia do stanu niesprawności**  
dla systemu opisanego modelem Markowa

# Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

1. Zdefiniować stany niezawodnościowe systemu  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (przyjmujemy, że stany zostały ponumerowane w taki sposób, że indeksy  $1, \dots, m$  odpowiadają stanom sprawności systemu, zaś  $m+1, \dots, n$  – stanom niesprawności systemu)
2. Określić intensywności przejść pomiędzy stanami.  
Dla rozkładu wykładniczego czasu przejścia  $S_i \rightarrow S_j$  o dystrybuancie  $F(t) = 1 - \exp(-\lambda_{ij}t)$ , intensywność przejścia  $S_i \rightarrow S_j$  jest równa  $\lambda_{ij}$ .

3. Zbudować macierz intensywności przejść  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{dla } i \neq j \\ -\sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_{ik} & \text{dla } i = j \end{cases}$$

# Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

4. Wyznaczyć wektor  $\mathbf{p}=[p_1, p_2, \dots, p_n]$  prawdopodobieństw stacjonarnych przebywania systemu w stanach  $1, 2, \dots, n$ :

$$\mathbf{p} = [0, 0, \dots, 0, 1]_{1 \times n} \cdot \mathbf{A}_{\text{prob}}^{-1}$$

gdzie  $\mathbf{A}_{\text{prob}}$  powstaje z macierzy  $\mathbf{A}$  po zastąpieniu ostatniej kolumny  $\mathbf{A}$  wektorem złożonym z 1

# Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

5. Wyznaczyć średni czas  $t_1 = \mathbf{t}(1)$  przejścia systemu ze stanu  $S_1$  (sprawności) do stanu niesprawności, gdzie wektor  $\mathbf{t}$  otrzymuje się z zależności:

$$\mathbf{t} = -\mathbf{B}_{m \times m}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

gdzie macierz  $\mathbf{B}$  powstaje z macierzy  $\mathbf{A}$  po usunięciu wierszy i kolumn odpowiadających stanom niesprawności.

Element  $\mathbf{t}(i)$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) wektora  $\mathbf{t}$  jest **średnim czasem przejścia** ze stanu sprawności  $i$  **do stanu niesprawności**.



# Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

6. Na podstawie wektora  $p$ , wyznaczyć współczynnik gotowości systemu, jako sumę elementów wektora  $p$  odpowiadających stanom sprawności:

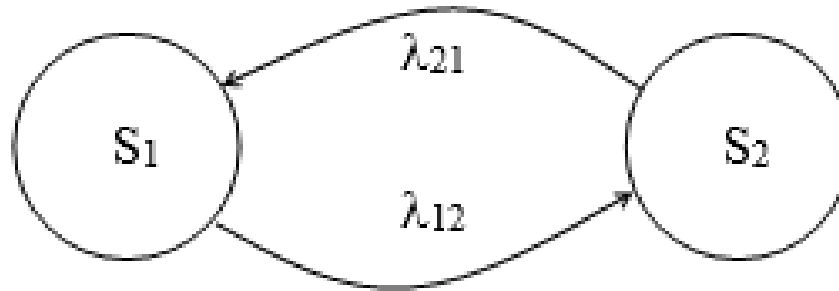
$$A = \sum_{i: S_i - \text{stan sprawności}} p_i$$

średni czas pracy systemu (czas do awarii):

$$t_1 = \mathbf{t}(1)$$

## Przykład 1

System składa się z 55 węzłów o modelu:  
(system bez rezerwy:  $S_1$  – stan sprawności,  $S_2$  – niesprawności)



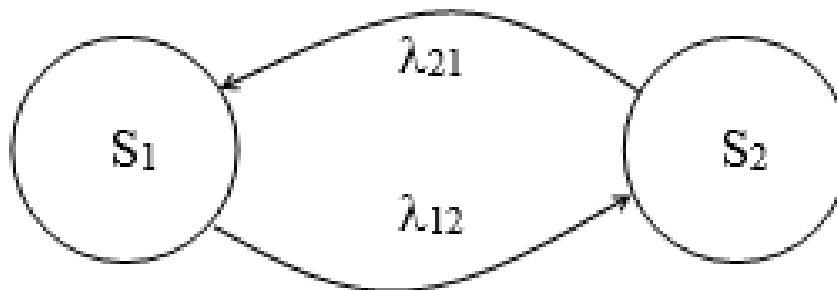
Przyjmujemy parametry:

$1/\lambda_{12} = 20000$  h -- średni czas pracy (MTBF)

$1/\lambda_{21} = 24$  h -- średni czas naprawy

## Przykład 1

System składa się z 55 węzłów o modelu:  
(system bez rezerwy:  $S_1$  – stan sprawności,  $S_2$  – niesprawności)

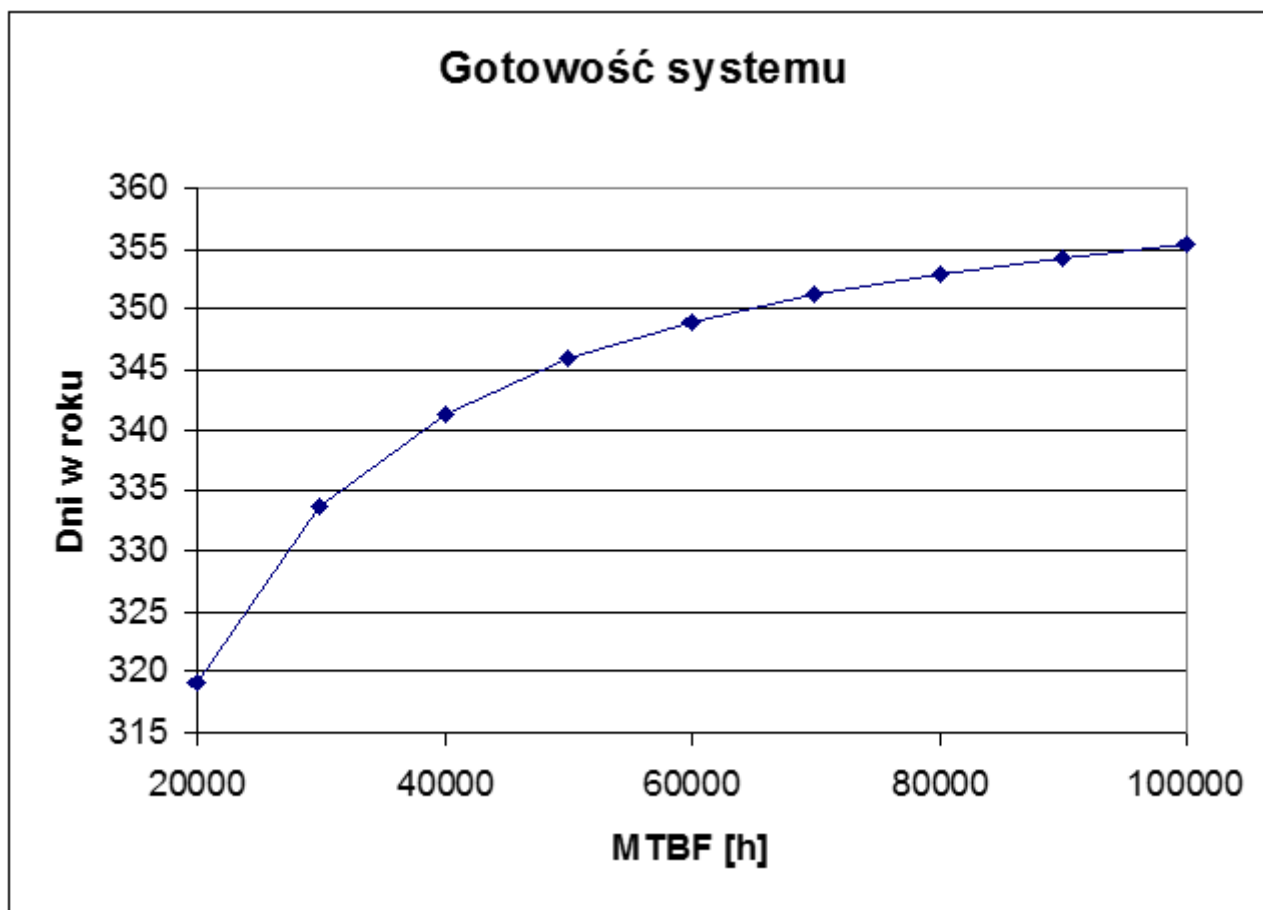


## Wyniki analizy:

a (gotowość)	a [dni] (gotowość – dni w roku)	1-a [h] (niegotowość – godziny w roku)	t [y] (średni czas do awarii systemu)	t [w] (średni czas do awarii systemu – tygodnie)
0.8743	319.1	1101	0.02038	1.06

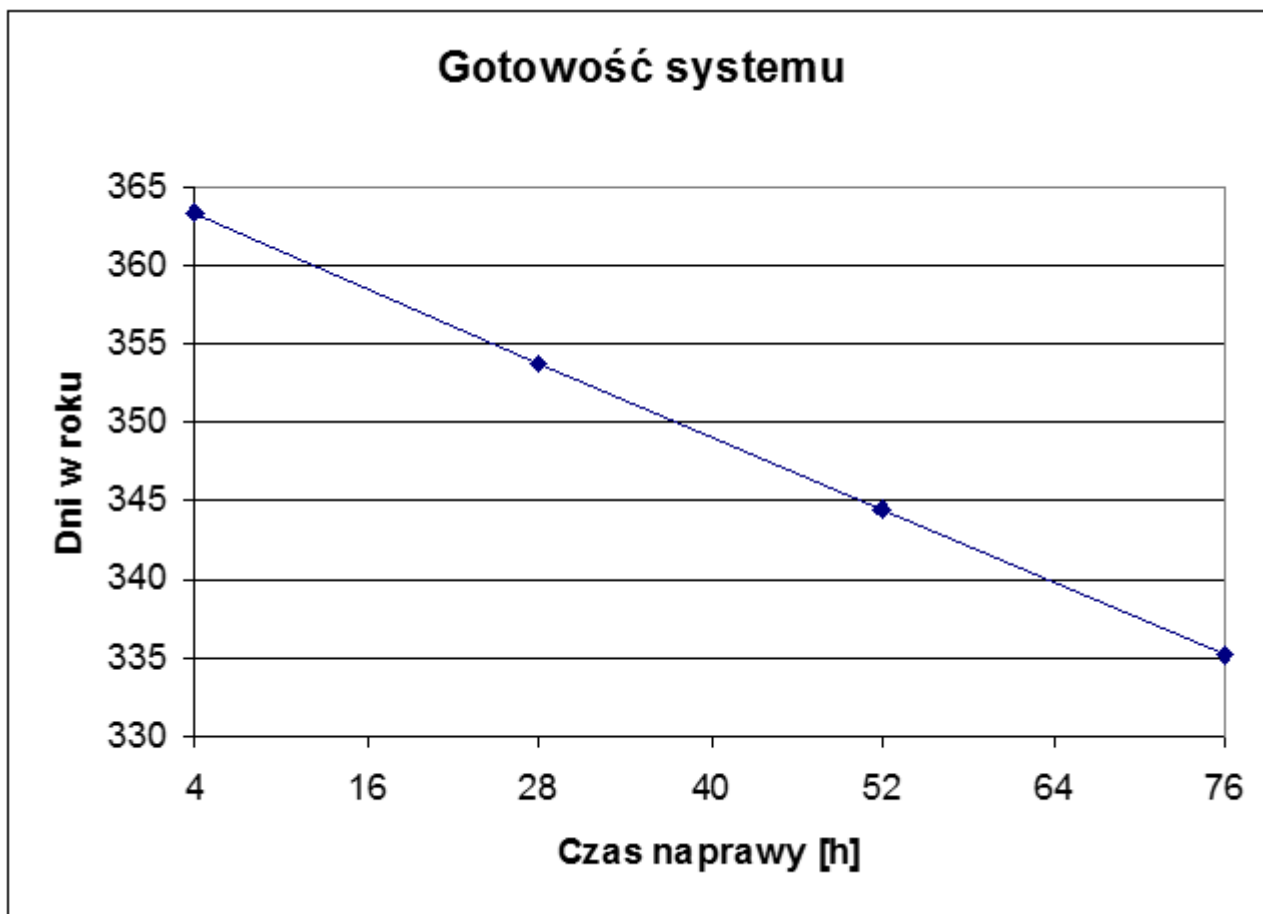
## Przykład 1

Gotowość w zależności od parametru MTBF urządzenia  
(system bez rezerwowania)



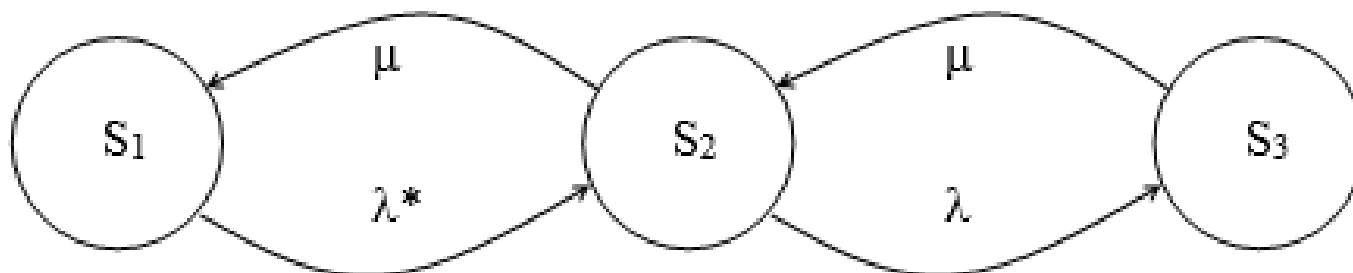
## Przykład 1

Gotowość w zależności od średniego czasu naprawy  
(system bez rezerwowania)



## Przykład 2

System składa się z 55 węzłów o modelu:  
(system z rezerwą)

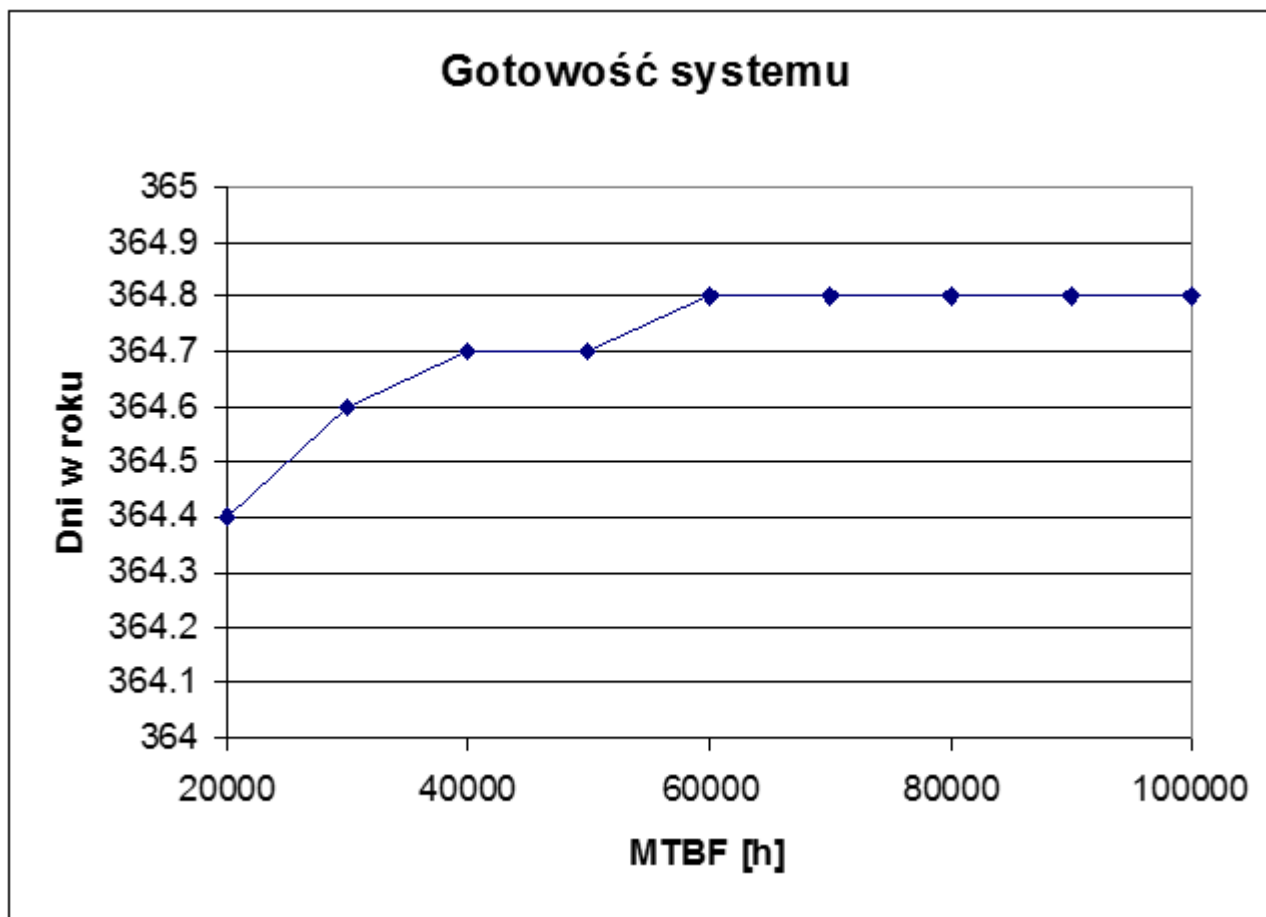


Wyniki analizy:

a (gotowość)	a [dni] (gotowość – dni w roku)	1-a [h] (niegotowość – godziny w roku)	t [y] (średni czas do awarii systemu)	t [w] (średni czas do awarii systemu – tygodnie)
0.9984	364.4	14.35	0.04	2.12

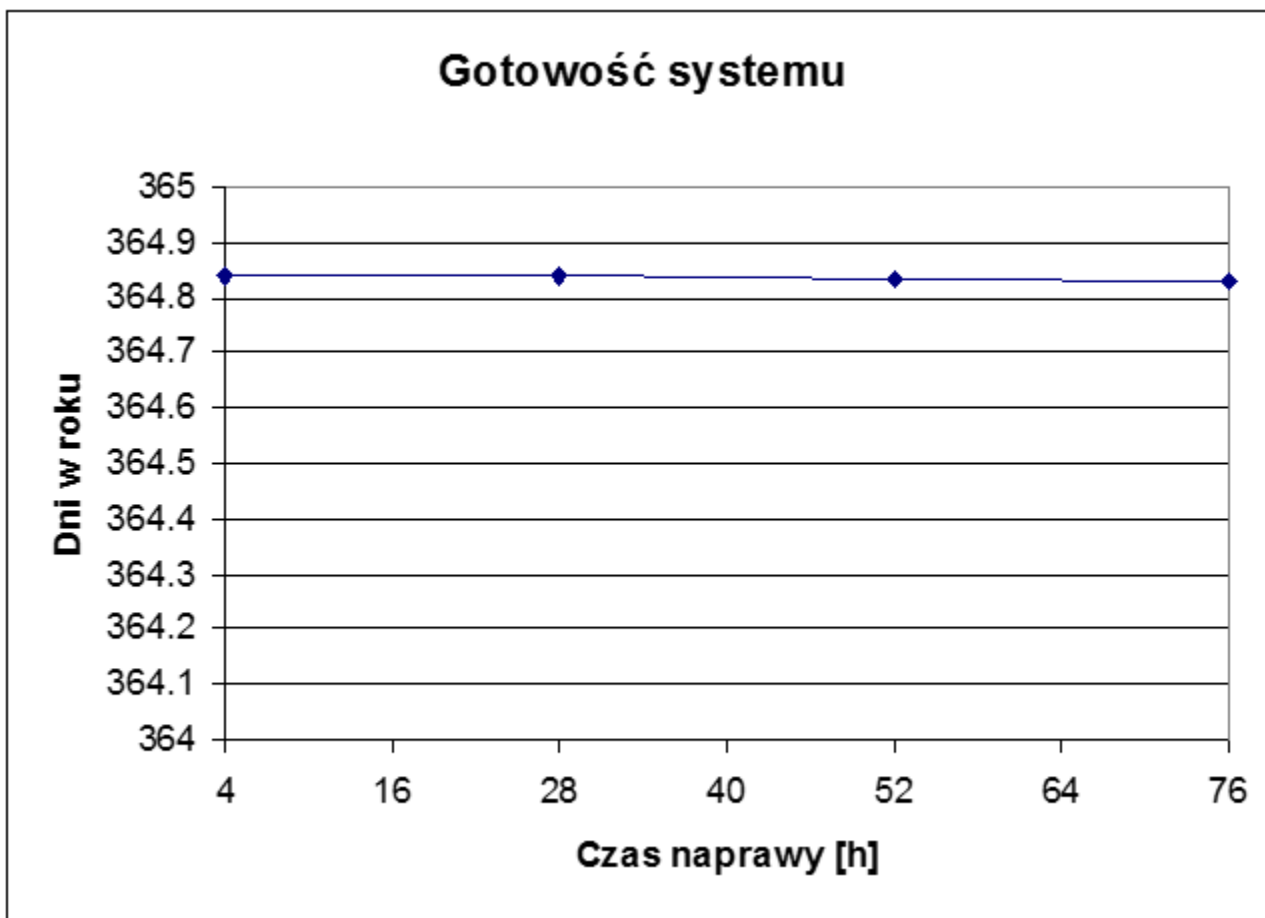
## Przykład 1

Gotowość w zależności od parametru MTBF urządzenia  
(system z rezerwowaniem)



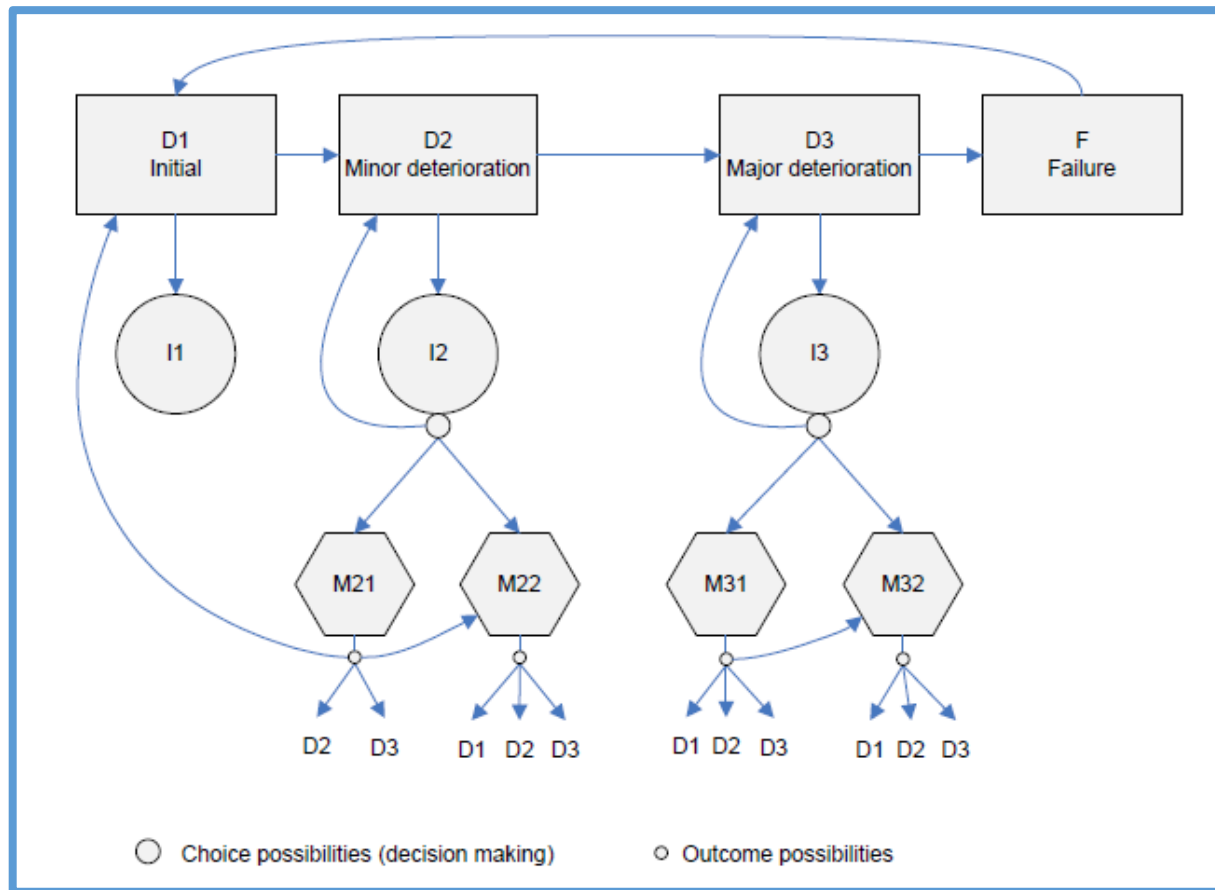
## Przykład 1

Gotowość w zależności od średniego czasu naprawy  
(system z rezerwowaniem)





# Modelowanie wpływu napraw prewencyjnych



Stany:

- zużycia (D, deterioration)
- przeglądów (I, inspection)
- napraw (M, maintenance)

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

**Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.**

# Planowanie napraw prewencyjnych

Proponujemy model systemu uwzględniający stany:

- zużycia (D, *deterioration*)
- przeglądów (I, *inspection*)
- napraw (M, *maintenance*)

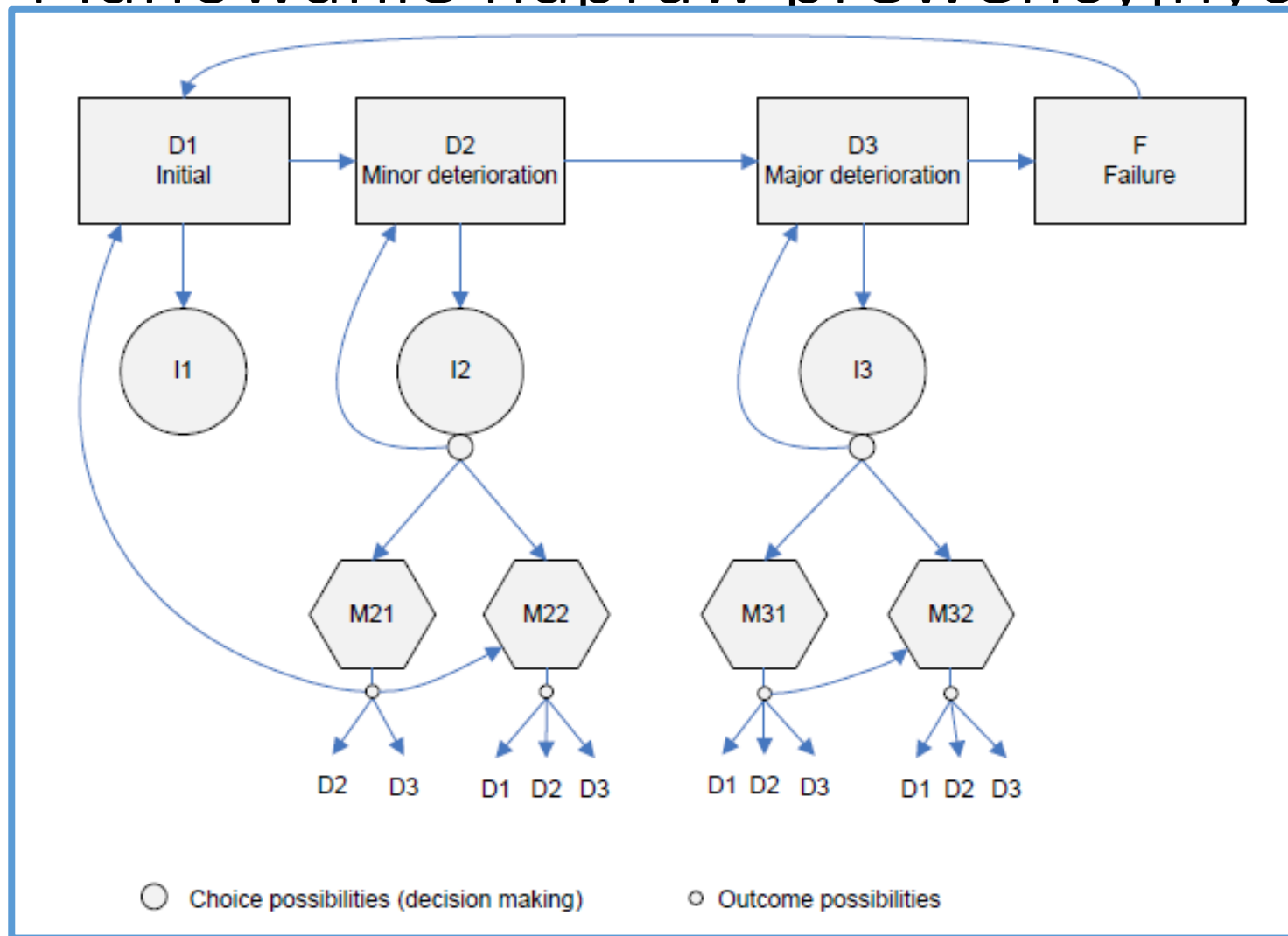
Parametry systemu:

- intensywności przejść (zał.:  $D1 \rightarrow D2 \rightarrow D3 \rightarrow F$ : 6, 10, 2 y)
- prawdopodobieństwa decyzji w stanach I
- prawdopodobieństwa ścieżek  $M \rightarrow D$  (wynik napraw)
- koszty stanów

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

**Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.**

# Planowanie napraw prewencyjnych



w)

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

**Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.**

## Przykład: Analiza następującej *maintenance policy*:

	M21	M22	M32	M33
Cost of state	3.5	10	10	75
Duration	8 h	32 h	32 h	5 d
Prob M→D1	0	0	0	0.99
Prob M→D2	0.99	0.98	0.8	0.01
Prob M→D3	0.01	0.02	0.2	0
Prob M→next M	0	N/A	0	N/A

## Wyniki:

Cost 4.0

Unavailability 0.001

Time to failure 27.8 years

(bez napraw prewencyjnych  $T_F=18$  lat)

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

**Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.**

# Przykład – analiza wpływu przeglądów / napraw prewencyjnych na niezawodność

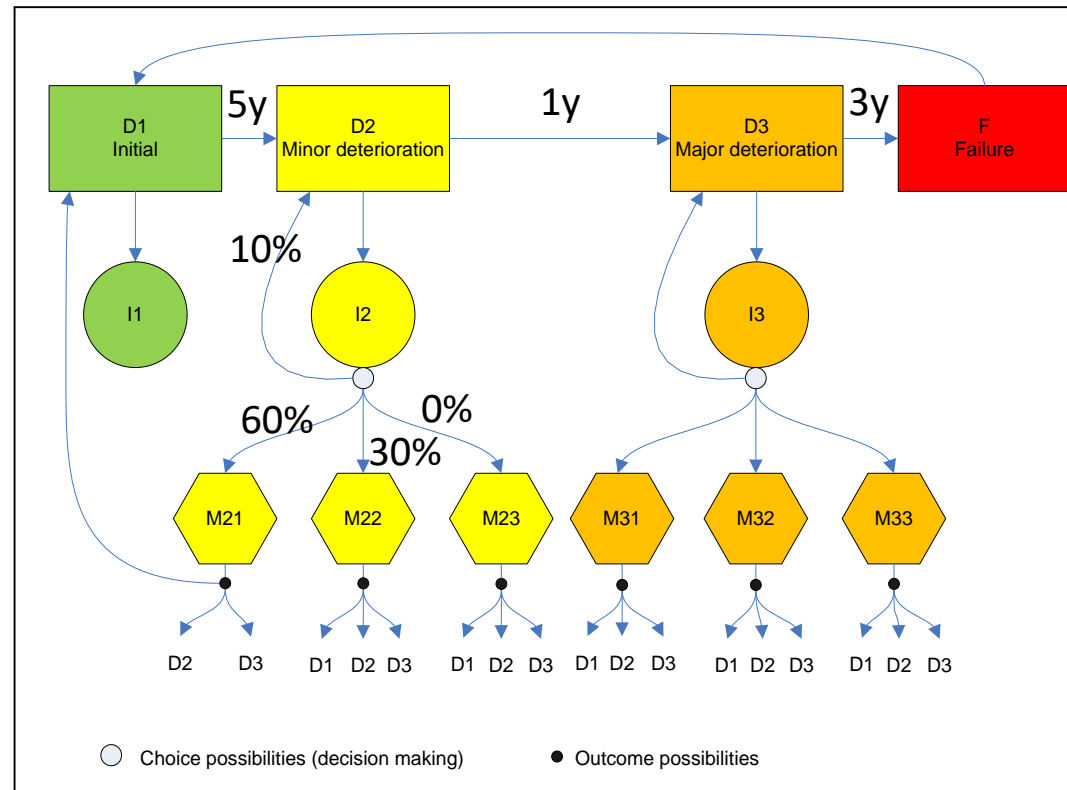
- Budujemy probabilistyczny model procesu życia/inspekcji/napraw (proces Markowa)

D – stany sprawności systemu

I – stany inspekcji

M – stany napraw

Określamy czasy przejść między stanami, czas realizacji inspekcji i napraw oraz prawdopodobieństwa decyzji



# Przykład – analiza wpływu przeglądów / napraw prewencyjnych na niezawodność

- Rozwiązanie:

czasy przejścia (do awarii)

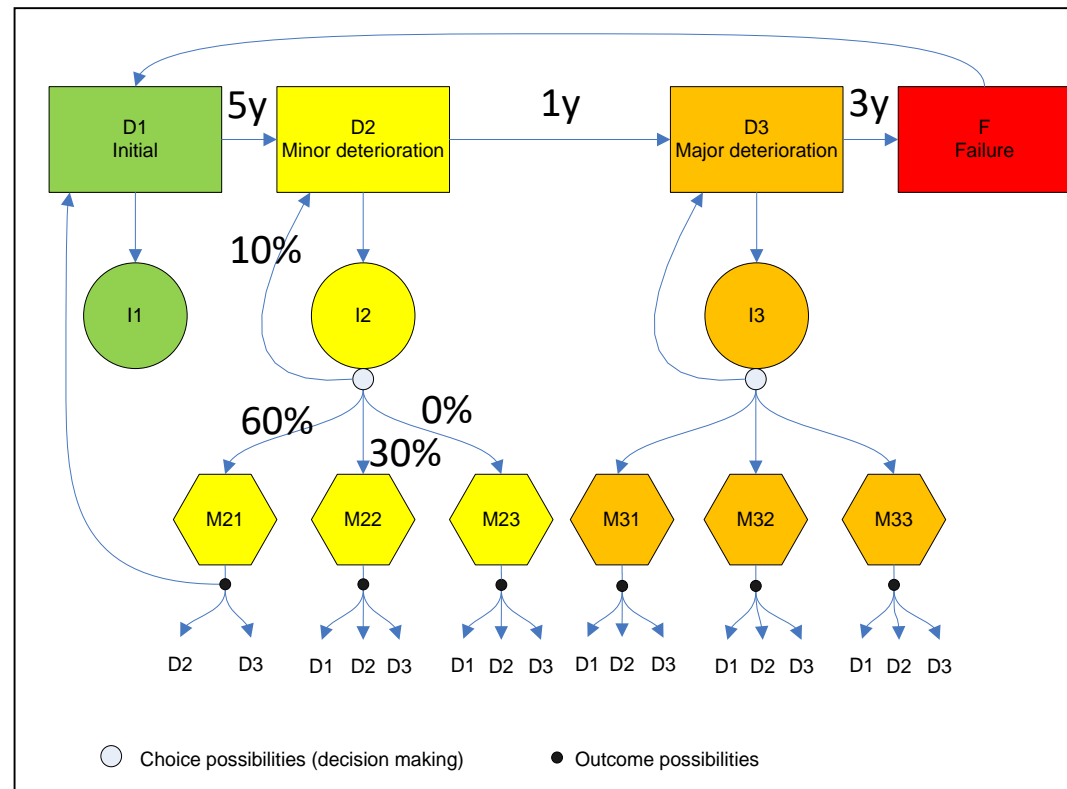
$D1 \rightarrow F$

$D2 \rightarrow F$

$D3 \rightarrow F$

prawdopodobieństwa  
przebywania w systemu w  
stanach

- Rozwiązanie analityczne  
procesu Markowa  
(rozwiązanie symulacyjne  
jeśli chcemy znać rozkłady  
czasów przejść)



System in initial state of deterioration (D1)		
D1	D1-->D2	5 Transition time to next deterioration state [year]
	D1-->I1	1 Transition time to inspection [year]
I1	ul1	7,0192308 Inspection duration [days]
	cl1	1 Cost of state

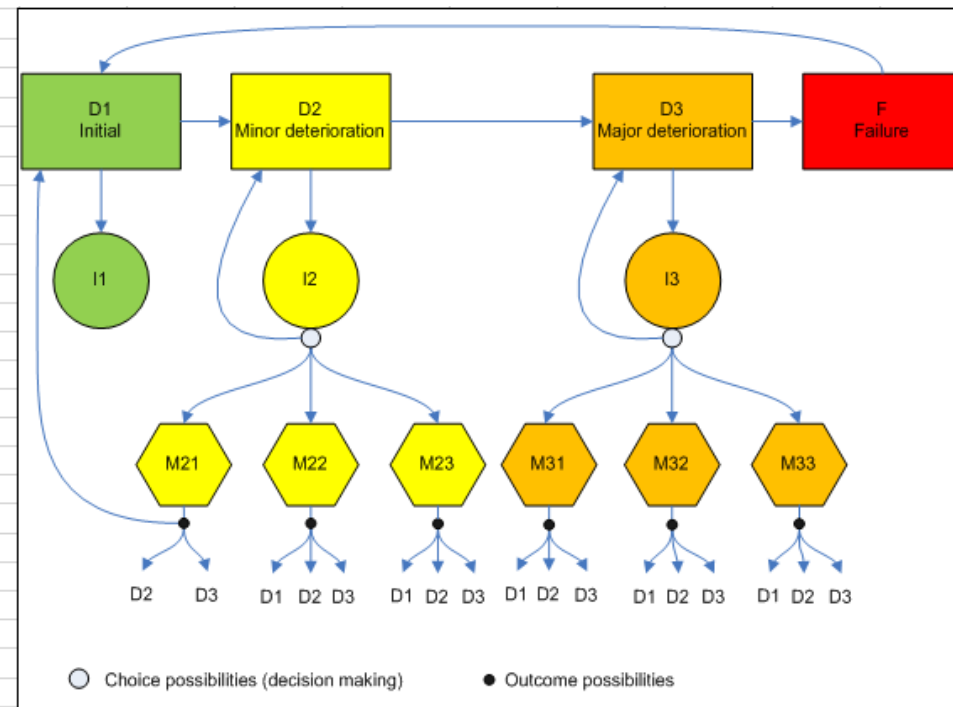
System in minor state of deterioration (D2)		
D2	D2-->D3	1 Transition time to next deterioration state [year]
	D2-->I2	10 Transition time to inspection [year]
I2	ul2	7,0192308 Inspection duration [days]
	I2-->M21	182,5 Time to minor maintenance [days]
	I2-->M22	182,5 Time to medium maintenance [days]
	I2-->M23	182,5 Time to major maintenance [days]
	pl2-->M21	60 Probability: do minor maintenance
	pl2-->M22	30 Probability: do medium maintenance
	pl2-->M23	0 Probability: do major maintenance
	pl2-->D2	10 Probability: do nothing
cl2		5 Cost of state

M21	uM21	14,038462 Minor maintenance duration [days]
	pM21-->D1	20 Probability: after maintenance system as new (D1)
	pM21-->D2	75 Probability: after maintenance system in state D2
	pM21-->D3	5 Probability: after maintenance system in state D3
	cM21	50 Cost of state

M22	uM22	14,038462 Medium maintenance duration [days]
	pM22-->D1	25 Probability: after maintenance system as new (D1)
	pM22-->D2	70 Probability: after maintenance system in state D2
	pM22-->D3	5 Probability: after maintenance system in state D3
	cM22	50 Cost of state

M23	uM23	30,416667 Major maintenance duration [days]
	pM23-->D1	30 Probability: after maintenance system as new (D1)
	pM23-->D2	65 Probability: after maintenance system in state D2
	pM23-->D3	5 Probability: after maintenance system in state D3
	cM23	50 Cost of state

System in major state of deterioration (D3)		
D3	D3-->F	3 Transition time to failure state [year]
	D3-->I3	10 Transition time to inspection [year]
I3	ul3	7,0192308 Inspection duration [days]



Results: times to failure

from D1	9,649513
from D2	4,553362
from D3	3,488037

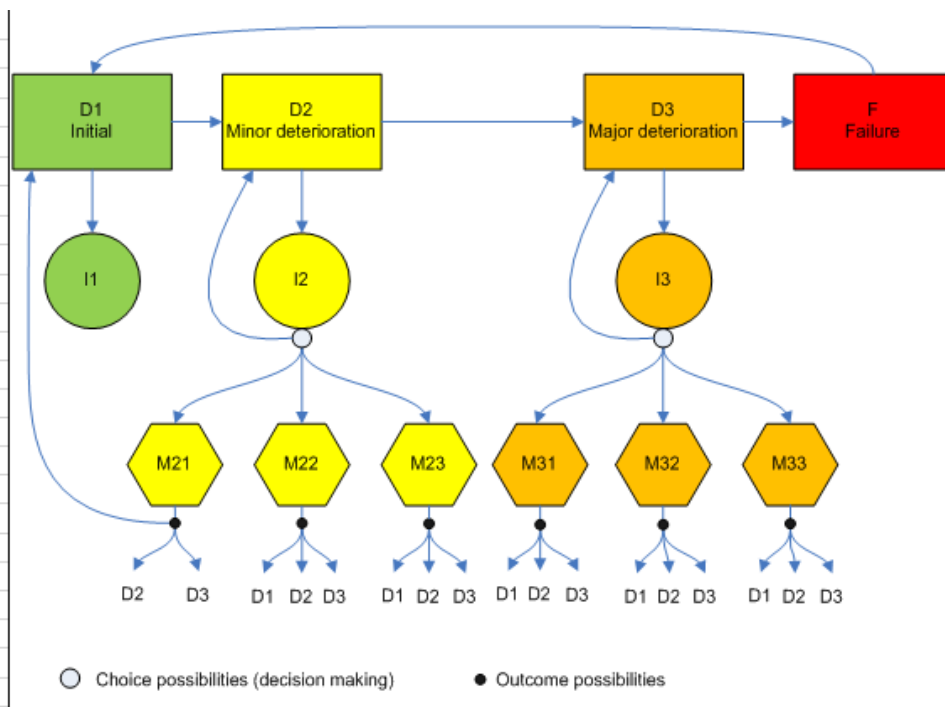
Czas do awarii 9,6 lat

Results: steady state probabilities

D1	0,505278
D2	0,104103
D3	0,279936
F	0,093901

Inspekcje co 10 lat

System in initial state of deterioration (D1)			
D1	D1-->D2	5	Transition time to next deterioration state [year]
	D1-->I1	1	Transition time to inspection [year]
I1	ul1	7,0192308	Inspection duration [days]
	cl1	1	Cost of state
System in minor state of deterioration (D2)			
D2	D2-->D3	1	Transition time to next deterioration state [year]
	D2-->I2	1	Transition time to inspection [year]
I2	ul2	7,0192308	Inspection duration [days]
	I2-->M21	182,5	Time to minor maintenance [days]
	I2-->M22	182,5	Time to medium maintenance [days]
	I2-->M23	182,5	Time to major maintenance [days]
	pl2-->M21	60	Probability: do minor maintenance
	pl2-->M22	30	Probability: do medium maintenance
	pl2-->M23	0	Probability: do major maintenance
	pl2-->D2	10	Probability: do nothing
	cl2	5	Cost of state
M21	uM21	14,038462	Minor maintenance duration [days]
	pM21-->D1	20	Probability: after maintenance system as new (D1)
	pM21-->D2	75	Probability: after maintenance system in state D2
	pM21-->D3	5	Probability: after maintenance system in state D3
	cM21	50	Cost of state
M22	uM22	14,038462	Medium maintenance duration [days]
	pM22-->D1	25	Probability: after maintenance system as new (D1)
	pM22-->D2	70	Probability: after maintenance system in state D2
	pM22-->D3	5	Probability: after maintenance system in state D3
	cM22	50	Cost of state
M23	uM23	30,416667	Major maintenance duration [days]
	pM23-->D1	30	Probability: after maintenance system as new (D1)
	pM23-->D2	65	Probability: after maintenance system in state D2
	pM23-->D3	5	Probability: after maintenance system in state D3
	cM23	50	Cost of state
System in major state of deterioration (D3)			
D3	D3-->F	3	Transition time to failure state [year]
	D3-->I3	1	Transition time to inspection [year]
I3	ul3	7,0192308	Inspection duration [days]



Results: times to failure

from D1 14,83071  
from D2 9,734563  
from D3 8,227189

Czas do awarii 14,8 lat

Results: steady state probabilities

D1 0,573854  
D2 0,112784  
D3 0,178251  
F 0,063168

Inspekcje co 1 rok