ZESTAW: B **I Kolokwium Algebra** GRUPA: piątek 17.00
2 listopada 2022

Zadanie 1

Znaleźć rozwiązania poniższego równania i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$z_{k+1} = z_k \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$(z+2i)^3 = 8i. \qquad z_{k+1} = z_k\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z+2i = \sqrt[3]{8i} = \left\{-2i,\ \underbrace{-2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sqrt{3}+i},\ \underbrace{(\sqrt{3}+i)\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{-\sqrt{3}+i}\right\}$$

(4+1 pkt)

① $z+2i=-2i$ ② $z+2i=\sqrt{3}+i$ ③ $z+2i=-\sqrt{3}+i$

Zadanie 2

a) Znaleźć część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej $z=\frac{-2+2i}{\sqrt{12}-2i} \cdot \frac{\sqrt{12}+2i}{\sqrt{12}+2i}$.

$$= \frac{-2\sqrt{12}-4i+2i\sqrt{12}-4}{16} = -\frac{1+\sqrt{3}}{4} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}i$$

(2 pkt)

$\mathrm{Re}\,z = -\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ $\quad \mathrm{Im}\,z = -\frac{1-\sqrt{3}}{4}$

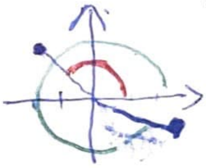
b) Obliczyć $\left|\frac{-2+2i}{\sqrt{12}-2i}\right|$.

$$\frac{|-2+2i|}{|\sqrt{12}-2i|} \overset{!!!}{=} \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{12+4}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ //$$

(1.5 pkt)

c) Obliczyć $\mathrm{Arg}\left(\frac{-2+2i}{\sqrt{12}-2i}\right)$. $= \underbrace{\mathrm{Arg}(-2+2i)}_{\frac{3\pi}{4}} - \underbrace{\mathrm{Arg}(\sqrt{12}-2i)}_{\frac{11\pi}{6}} + 2k\pi =$

(1.5 pkt)



$\cos\varphi = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow^{IV} \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \underset{k=1}{=} \frac{9\pi}{12} - \frac{22\pi}{12} + 2k\pi = \frac{-13\pi}{12} + \frac{24\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \ //$$

Zadanie 3

Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej zbiory spełniające poniższe warunki

a) $|\overline{z}+1-2i| \geqslant 2$.

(2.5 pkt)

b) $\frac{3\pi}{2} < \mathrm{Arg}\,(-z) \leqslant 2\pi$.

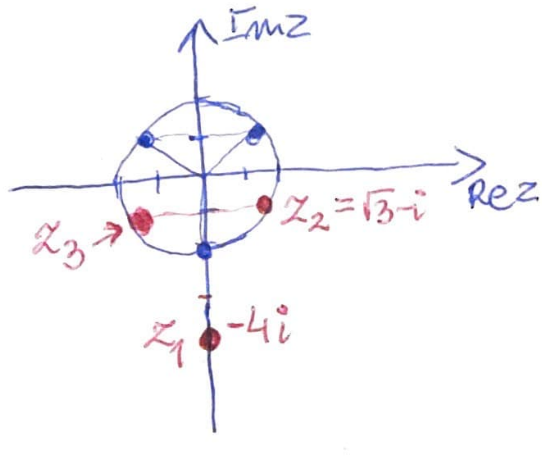
(2.5 pkt)

zad. 1 cd.

① $z_1 = -4i$

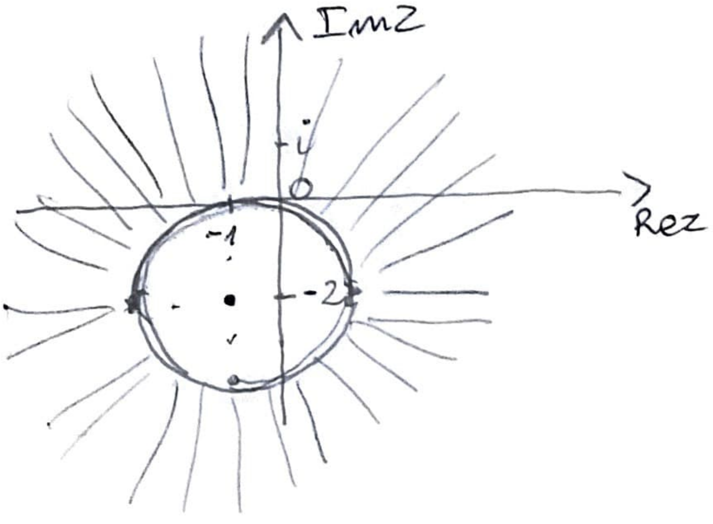
② $z_2 = \sqrt{3} - i$

③ $z_3 = -\sqrt{3} - i$



a)
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$$
$$|\overline{z_3}| = |z_3|$$

$$|\overline{z} + 1 - 2i| = |\overline{z} + \overline{1+2i}| = |\overline{z+1+2i}| = |z+1+2i| =$$
$$= |z - (-1-2i)| \geq 2$$



б)
$$\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Arg}(-z) \leq 2\pi$$
$$\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \leq 2\pi$$
$$\frac{3\pi}{2} < \pi + \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \leq 2\pi \quad \Big| -\pi - 2k\pi$$
$$\frac{\pi}{2} - 2k\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi - 2k\pi \quad \Leftarrow k = 0$$
$$\pi/2 < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$