Algebra liniowa 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw zadań nr 6

Przestrzenie liniowe
Baza przestrzeni liniowej

6.1. Sprawdzić, czy w przestrzeni $\mathbb{K}^4$ prawdziwa jest dana przynależność

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, [4, 6, 4, 5] \in lin([1, 4, 6, 5], [5, 6, 2, 4])$,

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, [4, 9, 9, 1] \in lin([1, 2, 3, 5], [3, 7, 9, 8], [1, 3, 4, 7])$,

c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7, [1, 5, 1, 1] \in lin([1, 3, 4, 5], [1, 4, 6, 3])$.

d) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7, [4, 5, 3, 6] \in lin([1, 3, 4, 6], [1, 5, 1, 5], [1, 4, 3, 0])$.

6.2. Zbadać, czy dane wektory generują przestrzeń liniową $\mathbb{R}^3$

a) $[1, 3, 5], [1, 4, 7], [3, 8, 17]$,

b) $[1, 2, 4], [7, 6, 4], [9, 7, 3]$.

6.3. Znaleźć układ równań liniowych określający daną podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^3$

a) $lin([1, 2, 1], [6, 7, 3])$,

b) $lin([1, 7, -1])$.

6.4. Znaleźć układ równań liniowych określający daną podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$

a) $lin([5, -1, 3, 1], [3, 1, 1, 1])$,

b) $lin([0, 1, 2, 1], [1, 3, 4, 1], [4, 7, 6, -1])$,

6.5. Wektory przestrzeni $\mathbb{K}^n$, których współrzędnymi są kolejne elementy niezerowych wierszy postaci schodkowej macierzy A, rozpinają podrzestrzeń $lin(v_1, ..., v_n)$. Korzystając z tej własności znaleźć możliwie najprostszy układ generatorów danej podprzestrzeni przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$

a) $lin([1, 2, 3, 5], [2, 1, 3, 4], [4, 1, 5, 6])$,

b) $lin([1, 6, 7, 8], [2, 1, 3, 5], [2, 3, 5, 7], [3, 1, 4, 7])$.

6.6. Sprawdzić, czy dane wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ są liniowo zależne

a) $[3, -1, 2], [-9, 3, -6]$,

b) $[3, 5, 1], [4, -1, 2], [8, 9, 4]$.

6.7. Sprawdzić, czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$

a) $[1, 0, -1], [1, 1, 3], [4, 1, 1]$,

b) $[4, 1, 8], [7, 3, 4], [8, 3, 8]$.

6.8. Znaleźć współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^n$ w podanej bazie $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$

a) $n = 2, v = [a, b], \mathcal{B} = \{[4, 5], [1, 3]\}$,

b) $n = 4, v = [3, 4, 8, 1], \mathcal{B} = \{[1, 5, 1, 4], [1, 0, 6, 7], [1, 3, 4, 8], [1, 5, 2, 6]\}$.

6.9. Wyznaczyć jedną z baz podprzestrzeni W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ utworzonej przez te wektory $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{K}^4$, których współrzędne spełniają dany układ równań

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5, \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$

d) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5, \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$

Odpowiedzi:

6.1. a) tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) nie.
6.2. a) tak, b) nie.
6.3. a) np. $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$, b) np. $x_1 + x_2 = x_2 + 7x_3 = 0$.
6.4. a) np. $x_1+x_2-4x_4 = 0, x_2+x_3-2x_4 = 0$, b) np. $2x_1-2x_2+x_3 = 0, 2x_1-x_2+x_4 = 0$.
6.5. a) $([1,0,1,1],[0,1,1,2])$, b) $([1,0,1,2],[0,1,1,1])$.
6.6 a) tak, b) nie.
6.7. a) tak, b) nie.
6.8. a) $\frac{3a-b}{7}[4,5] + \frac{-5a+4b}{7}[1,3]$, b) $[3,4,8,1] = 4[1,5,1,4] + 5[1,0,6,7] - 7[1,3,4,8] + [1,5,2,6]$.
6.9. a) np. $([11,2,1,0],[1,1,0,1])$, b) np. $([1,0,2,2],[0,1,1,3])$, c) np. $([3,1,4,7])$, d) np. $([1,4,2,3])$.