Całka oznaczona

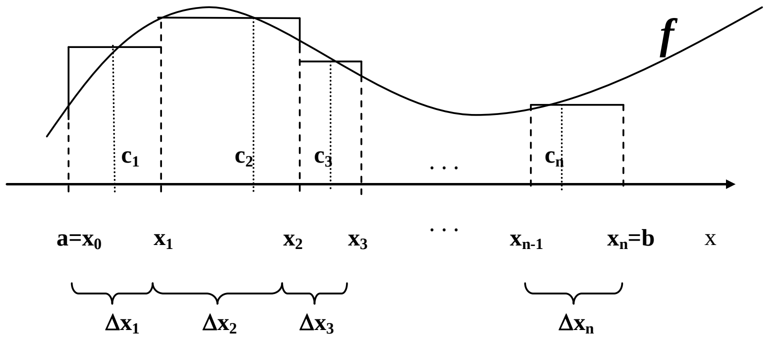
(Analiza Matematyczna 1, wykład 12)

f - funkcja nieujemna ograniczona w przedziale domkniętym $[a,b]$.

Przedział $[a,b]$ dzielimy na n podprzedziałów, w taki sposób, że:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \qquad (1)$$

gdzie $x_0 = a$ i $x_n = b$.



Średnica podziału (1)

$$\delta_n = max\{\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n\}, \text{ gdzie } \triangle_i = x_i - x_{i-1}.$$

Ciąg podziałów $P_1, P_2, \ldots.$ nazywamy <u>normalnym</u>, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Wybieramy ciąg $c_1, c_2, \ldots, c_n$ taki, że

$$x_{i-1} \le c_i \le x_i .$$

Suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

jest pewnym przybliżeniem pola powierzchni pomiędzy *f*(x) i osią *X*.

<u>Definicja</u>.

Jeżeli granica

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

istnieje i jest właściwa oraz nie zależy od wyboru punktów x_i i c_i, to granicę taką nazywamy całką oznaczoną Riemanna i oznaczamy oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,, \ \ gdy \ \ \lim_{n\to\infty} \Delta x_i = 0 \,,$$

Twierdzenie ***(Newton - Leibnitz)***

Niech $f(x)$ będzie funkcją nieujemną, ciągłą na przedziale $[a;b]$, $F(x)$ jej funkcją pierwotną.

Całka oznaczona ***(Newton - Leibnitz)*** **z funkcji $f(x)$ na przedziale $[a;b]$ jest definiowana następująco:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

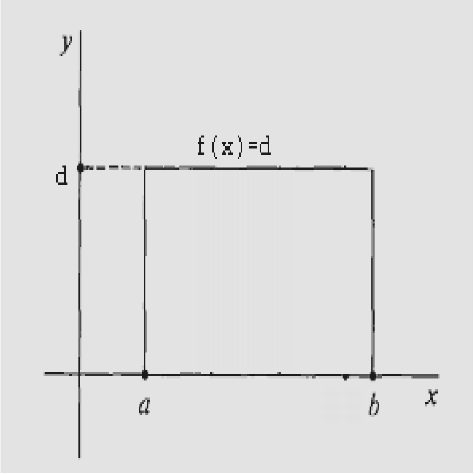
Elementarne własności:

a. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

b. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Przykład 1.

Obliczymy całkę z funkcji stałej, $f(x)=d$.



Funkcja pierwotna to $F(x)=dx+C$. Z definicji:

$$\int_a^b d\,dx = F(b)-F(a)=(db+C)-(da+C)=db-da=d(b-a).$$

Zamiast $F(b)-F(a)$ będziemy używać symbolu $F(x)\Big|_a^b$ lub $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Obliczenia mają teraz postać:

$$\int_a^b d\,dx = F(x)\Big|_a^b=(db+C)-(da+C)=d(b-a)$$

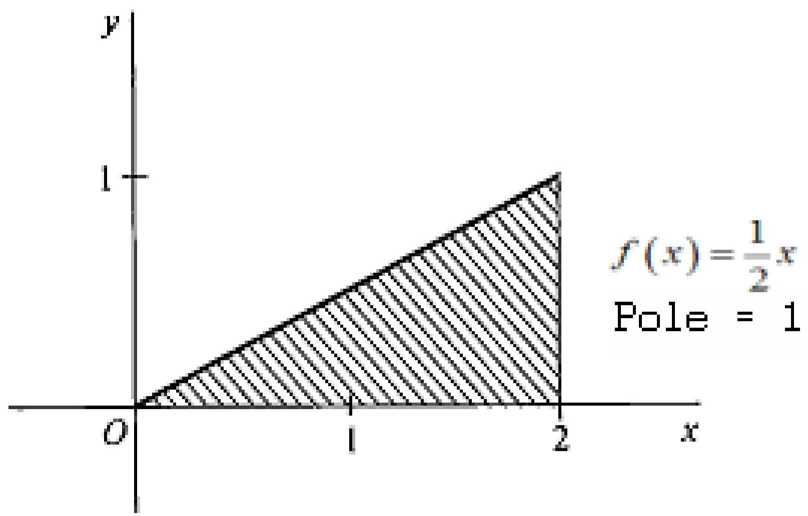
Zauważmy, że *d* to wysokość prostokąta, a $b-a$ to długość. Obliczyliśmy pole prostokąta lub inaczej, pole obszaru pod funkcją (na podanym odcinku). Jest to ważna własność całki oznaczonej.

Przykład 2.

Obliczymy pole obszaru pod funkcją $f(x)=\frac{1}{2}x$ **na przedziale** $[0;2]$.

Funkcja pierwotna to $F(x)=\frac{1}{4}x^2+C$.

Dalej: $\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2=\frac{1}{4}\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot 0=1$.



Twierdzenie

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $h(x)$ są całkowalne w przedziale $[a,b]$, to:

1. **funkcja $f(x)+h(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, przy czym**

$$\int_a^b [f(x)+h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

2. **funkcja $A\,f(x)$, gdzie A – dowolna stała, jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, przy czym**

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

3. **funkcja $f(x)h(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$.**

Uwaga

$$\int_a^b \left[A_1 f(x) + A_2 h(x)\right] dx = A_1 \int_a^b f(x)\,dx + A_2 \int_a^b h(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left[f(x) - h(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx$$

Przykład

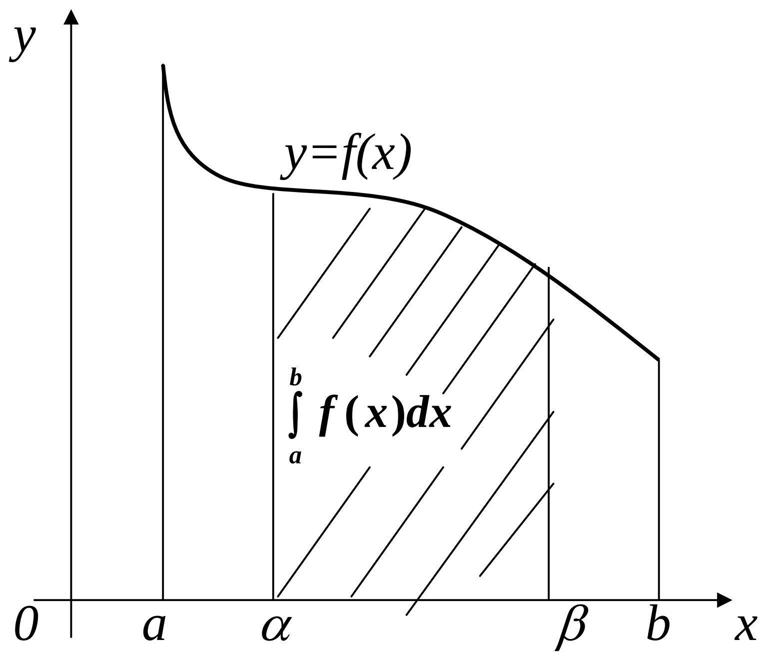
$$\int_2^3 2x^2 + 5x^3 + e^x - 3\sin x\,dx = 2\int_2^3 x^2 dx + 5\int_2^3 x^3 dx + \int_2^3 e^x +$$
$$-3\int_2^3 \sin x\,dx$$

Twierdzenie

Jeżeli:

- **funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$,**
- **α i β $(\alpha<\beta)$ są dowolnymi punktami tego przedziału,**

to funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[\alpha,\beta]$.



Przykład

Ponieważ istnieje $\int_0^1 x^2dx$*, więc istnieje* $\int_0^{1/2} x^2dx$*.*

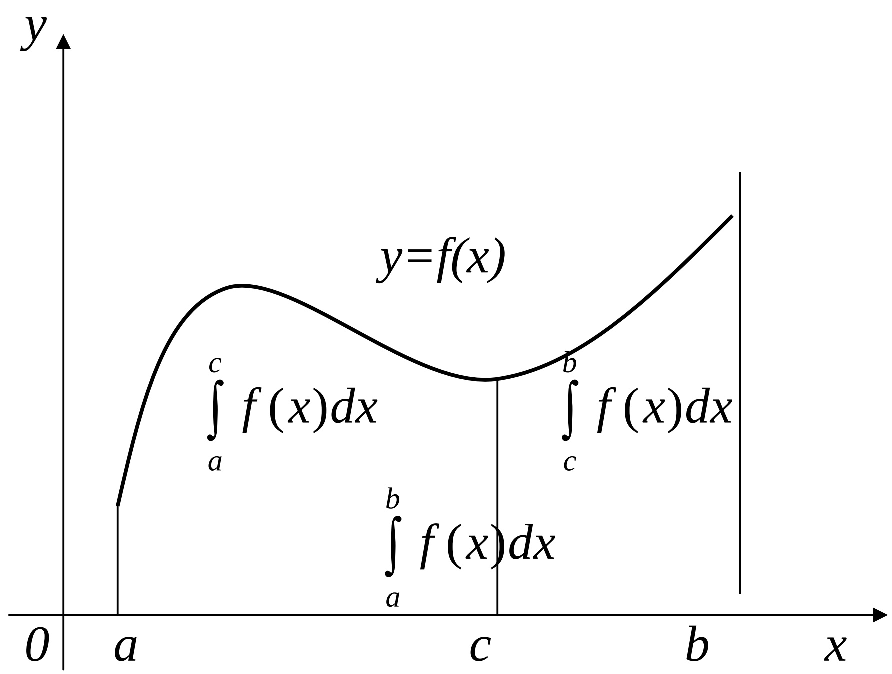
Twierdzenie

Jeżeli:

- **funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$,**
- $c \in (a,b)$**,**

to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Przykład

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

Rozszerzenie znaczenia symbolu całki.

Określając całkę oznaczoną

$$\int_a^b f(x)dx$$

przyjęliśmy, że spełniony jest warunek $a < b$**.**

Wprowadzamy następujące określenia:

$$\int_a^b f(x)dx \underset{df}{=} -\int_b^a f(x)dx, \quad \text{jeżeli} \quad b < a$$

oraz

$$\int_a^a f(x)dx \underset{df}{=} 0 \quad \text{dla każdego } a$$

<u>Przykład</u>

$$\int_1^0 x^2 dx = -\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3},$$

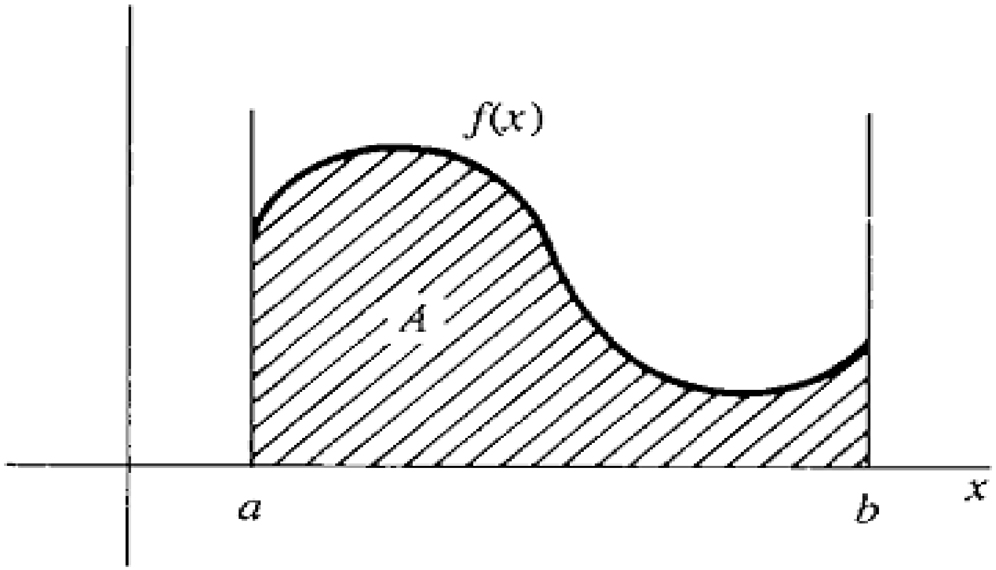
$$\int_\pi^0 \sin x dx = -\int_0^\pi \sin x dx = -2$$

Definicja.

Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła i nieujemna na przedziale $[a;b]$.

Powierzchnia obszaru pod krzywą $y=f(x)$ jest całkę oznaczoną

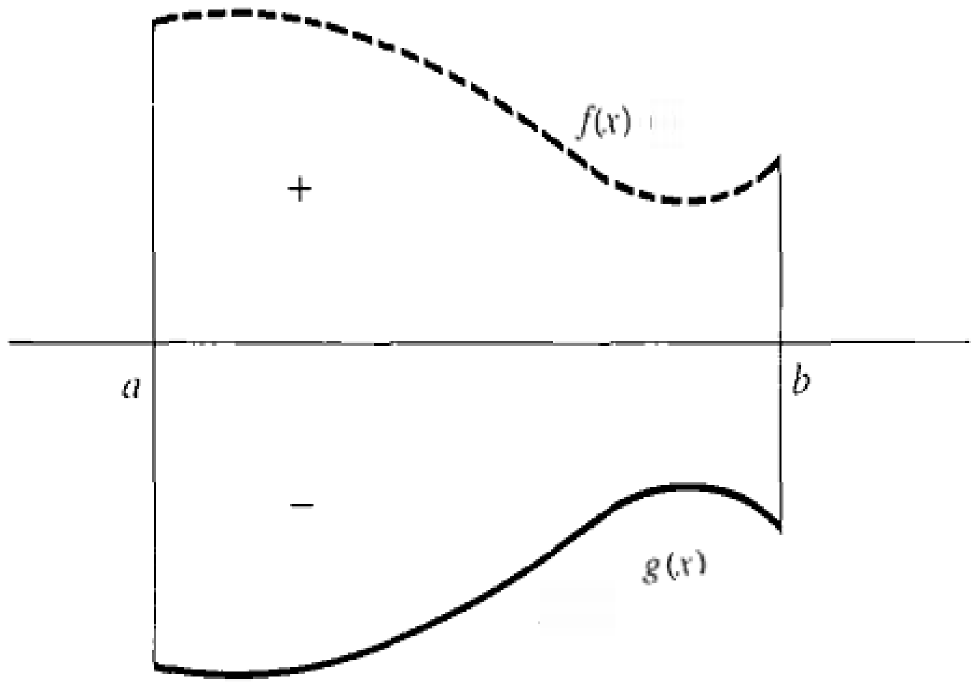
$$A=\int_a^b f(x)dx$$



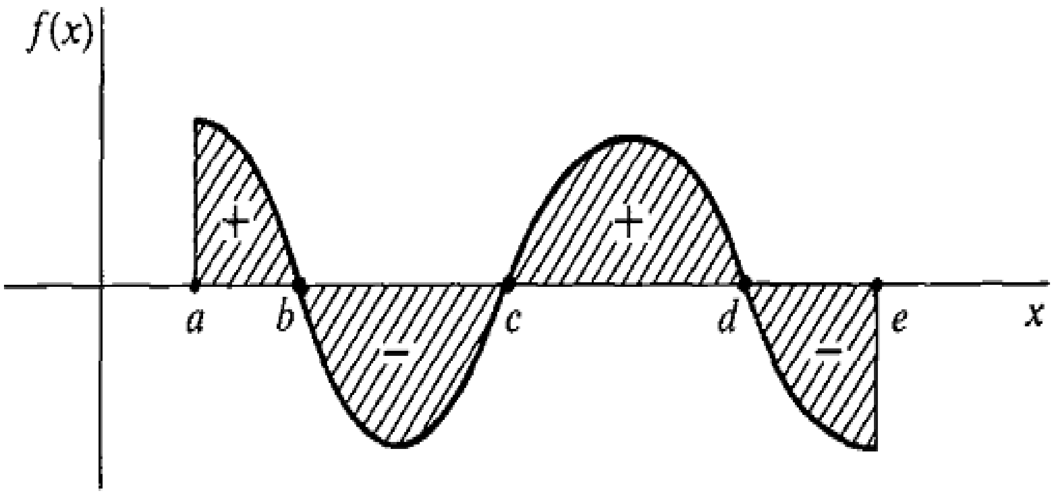
Jeśli $g(x) = -f(x)$, **to** $g(x) \le 0$ **na przedziale** $[a; b]$**.**

Wówczas

$$\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$



W wypadku, jeśli funkcja $f(x)$ zmienia znak na przedziale całkowania pole obszaru między krzywą a osią współrzędnych obliczamy jak następuje:

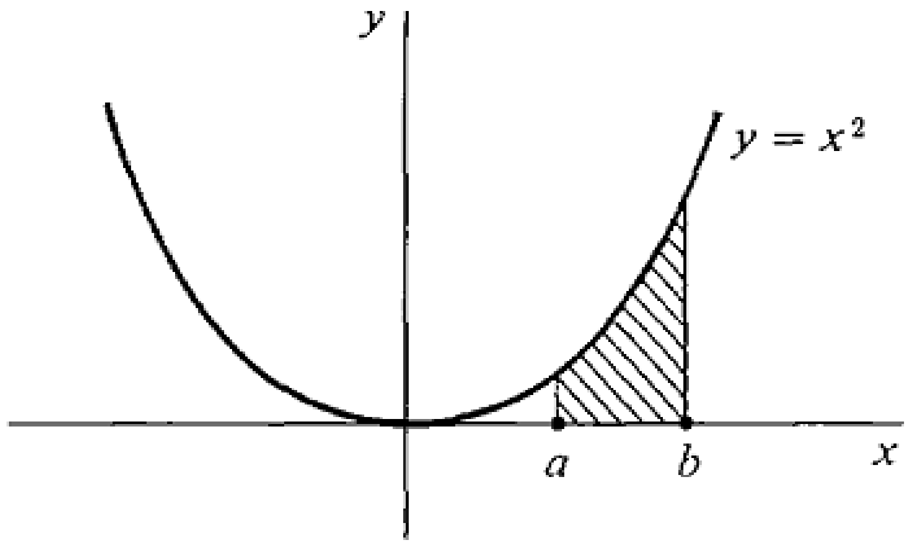


$$\int_a^e f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^e f(x)dx$$

Uwaga: $\int_a^e f(x)dx = F(x)\Big|_a^e$. Ta całka na ogół <u>nie jest</u> polem obszaru.

<u>Przykład 3</u>.
Policzymy pole obszaru pod krzywą $y = x^2$ na przedziale $[a; b]$.

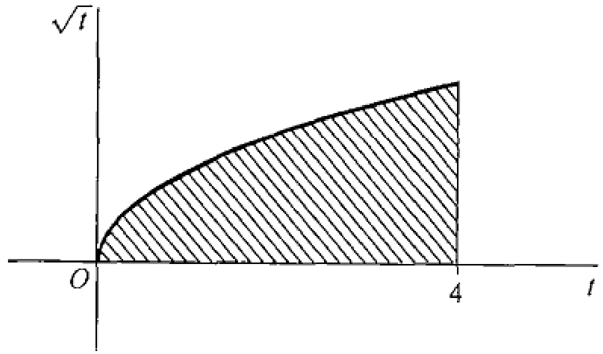
$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$



<u>Przykład 4</u>.
Cząsteczka porusza się wzdłuż prostej z prędkością $v(t) = 8t^3 \, {}^{m}\!/_{s}$.
Jaką drogę przemierzy między chwilami $t = 2s$ oraz $t = 5s$.

$$s = \int_2^5 v(t)dt = \int_2^5 8t^3 dt = \left[2t^4\right]_2^5 = 1250 - 32 = 1218\,m.$$

Przykład 5.



Obliczymy pole pod krzywą $y=\sqrt{x}$ na przedziale $[0;4]$.

$$\sqrt{x}=x^{1/2},\ \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{(1)}=x^{1/2}\text{, zatem } \int_0^4 \sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4=\frac{16}{3}m.$$

Przykład 6.

Obliczymy całkę oznaczoną $\int_0^1 \left(x^2+5\right)^3 xdx$.

Podstawiamy $u=x^2+5$, czyli $du=2xdx$.

Granice całkowania zmieniają się zgodnie z obliczeniami: $u(0)=0^2+5$, $u(1)=1^2+5=6$. Stąd wynika, że:

$$\int_0^1 (x^2+5)^3 xdx=\int_5^6 \frac{u^3}{2}du=\left[\frac{u^4}{8}\right]_5^6=\frac{6^4}{8}-\frac{5^4}{8}.$$

Jeżeli $v(x)=F'(x)$, to $\int_a^b v(x)dx=F(b)-F(a)$.

Przykład 7.

Obliczymy pole powierzchni pod funkcją $f(x)=\sin x$ na $[0,\pi]$.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=2$$

Obliczmy teraz pole powierzchni pod funkcją $f(x)=\sin^2 x$.

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi \sin x\sin x\,dx=\begin{vmatrix} u=\sin x & u'=\cos x \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{vmatrix}= \text{(całkujemy przez części)}$$

$$=uv\Big|_0^\pi-\int_0^\pi u'v\,dx=-\sin x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=(*)$$

Skorzystamy teraz ze wzoru $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

$$(*)=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi 1\,dx-\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\,.$$

Stąd wynika, że $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\dfrac{\pi}{2}$.

Przykład 8.

Obliczymy pole koła o promieniu R.

Równanie okręgu to $x^2 + y^2 = R^2$, stąd półokrąg nad osią OX ma równanie:

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$.

Pole półkola to obszar pod funkcją. Stąd $P_O = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.

Obliczymy tę całkę przez podstawienie:

$$x = R\cos\alpha, \text{ czyli } dx = -R\sin\alpha\, d\alpha.$$

Jeśli *x* zmienia się od $-R$ do R, to α zmienia się od π do 0.

$$2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -2\int_{\pi}^{0} R^2 \sin^2\alpha\, d\alpha,$$

Korzystając z wyniku Przykładu 7 otrzymujemy znany wzór na pole koła:

$P_O = \pi R^2$

ZASTOSOWANIA

Długość krzywej:

Dana jest krzywa o równaniu $y = f(x)$. Długością krzywej od punktu a do punktu b jest całka $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Przykład 9.

Policzmy długość krzywej $y = x\sqrt{x}$ na przedziale $[0, 4]$.

Jest $y = x^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, oraz $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$.

Funkcja pierwotna dla $f(x) = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$, to $F(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}$.

Zatem długość fragmentu krzywej to:

$$s = \int_0^4 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx =$$

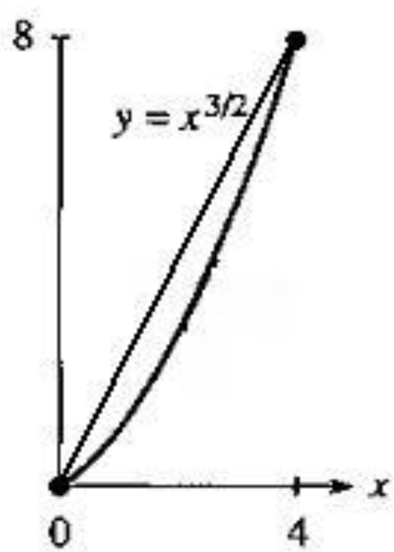
$$= \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(10^{3/2}-1^{3/2}\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) \approx 9.07$$

Policzymy teraz długość odcinka prostej, od punktu $(0;0)$ do punktu $(4;8)$. Jest teraz $y=2x$, $y'=2$, oraz $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{5}$.

Długość odcinka to $s=\int_0^4\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+2^2}\,dx=$

$$\sqrt{5}\left[x\right]_0^4=4\sqrt{5}\approx 8.94$$

Jak widać, krzywa ma prawie taką samą długość jak prosta.



W podobny sposób obliczamy długość łuku w wypadku, gdy krzywa podana jest w postaci parametrycznej.

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [a; b],$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

Przykład 10.

Jeśli $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0; \pi]$**, to otrzymujemy półokrąg o promieniu** r **i środku w początku układu współrzędnych.**

$$x'(t) = -r\sin t, \qquad y'(t) = r\cos t, \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = r\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = r$$

Stąd długość półokręgu to $s = \int_0^\pi r\,dt = \pi r$ **.**

Całka $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ **zwana jest <u>wartością średnią</u> funkcji na przedziale** $[a,b]$**.**

Niech $\boldsymbol{f}:[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \to \boldsymbol{R}$. Obracając wykres *f* wokół *x*-ów otrzymujemy powierzchnię obrotową.

Ograniczamy ją dwoma płaszczyznami:

$$\boldsymbol{x = a \text{ i } y = b}.$$

Objętość takiej bryły

$$\boldsymbol{V = \int_a^b f^2(x)dx},$$

a *pole powierzchni bocznej*

$$\boldsymbol{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx}.$$

Przykład 11. $$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$ w granicach $0 \le x \le 3$ dookoła osi *OX*.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \textbf{stąd} \quad \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

Pole

$$S = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = 4\pi\,\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{56}{3}\pi.$$

<u>Przykład</u> 12.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dokoła osi OX obszaru ograniczonego krzywą $xy = 4$ prostymi $x = 1$ i $x = 4$ i osią OX .

$$y = f(x) = \frac{4}{x}$$

$$V = \pi \int_1^4 (\frac{4}{x})^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_1^4 x^{-2} dx = 16\pi \left[-x^{-1} \right]_1^4 = \left[-16\pi x^{-1} \right]_1^4 = \left[\frac{-16\pi}{x} \right]_1^4 =$$

$$\frac{-16\pi}{4} - \frac{-16\pi}{1} = \pi(16 - 4) = 12\pi \ j^3$$