Algebra liniowa 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw zadań nr 4

Pierścień wielomianów

4.1. Dany wielomian z pierścienia $\mathbb{Z}[x]$ zapisać w postaci sumy jednomianów (tj. w tradycyjnej postaci)

a) $(5, 1, -4, 8, 0, 0, ...)$,

b) $(1, 0, 6, -3, 0, ...)$,

c) $(0, 0, 1, 7, 0, ...)$.

4.2. Dany wielomian z pierściania $\mathbb{Z}[x]$ zapisać w postaci ciągu

a) $-9x^3 + x^2 - 7x + 6$,

b) $x^4 + 8$,

c) $x^4 + 2x^2 + 4x - 5$.

4.3. Niech $f(x) = 2x^2+6x+5$ oraz $g = x^3+7x^2+4x+3$ będą wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}_8[x]$. Obliczyć a) $f + g$, b) $f - g$, c) fg.

4.4. W pierścieniu $\mathbb{Z}_8[x]$ wykonać działania

a) $(x^3 + 2x^2 + 2x + 3) + (x^4 + 2x^2 + 1)$,

b) $(2x^2 + 3x + 1) - (3x^3 + x^2 + x + 3)$,

c) $(x^2 + 3x + 1)(x^5 + 2x + 3)$.

4.5. W pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$ wykonać dzielenie

a) $(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 4) : (x^3 + x^2 + 2x + 2)$,

b) $(2x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3) : (3x^2 + x + 4)$.

4.6. W pierścieniu $\mathbb{Z}_{11}[x]$ wykonać dzielenie $(2x^5+8x^4+7x^3+3x+5) : (3x^3+7x^2+5x+1)$.

4.7. Korzystając ze schematu Hornera w pierścieniu $\mathbb{Z}_6[x]$ wykonać wskazane dzielenie z resztą

a) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ przez $x + 2$,

b) $4x^6 + x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 4x + 2$ przez $x + 1$.

4.8. Wyznaczyć ilorazy i reszty z dzielenia

a) $x^7 + x^6 + x^4 + x + 1$ przez $x^3 + x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$,

b) $2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$ przez $x^3 + 2x + 2$ w $\mathbb{Z}_3[x]$.

4.9. Dobrać takie liczby $a, b \in \mathbb{Z}_6[x]$, aby przy dzieleniu wielomianu $2x^4+5x^3+4x^2+ax+b$ przez $x + 1$ dawał resztę 5, a przy dzieleniu przez $x + 3$ dawał resztę 1.

4.10. Korzystając z algortymu Euklidesa znaleźć największy wspólny dzielnik elementów f i g we wskazanym pierścieniu

a) $f(x) = x^4 + x + 1, g(x) = x^3 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$,

b) $f(x) = x^4 + 2, g(x) = x^3 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$,

c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2, g(x) = x^3 + 5x + 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$.

4.11. Rozłożyć wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanym pierścieniu:

a) $x^5 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$,

b) $x^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[x]$,

c) $x^8 - 16$ w $\mathbb{Z}_{17}[x]$.

4.12. Wykorzystując schemat Hornera przedstawić dany wielomian $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ w postaci $f = (x - x_0)^k g$, gdzie $g \in \mathbb{Z}_5[x]$ i k jest wielokrotnością danego pierwiastka x_0 wielomianu f:

a) $f = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2, x_0 = 1$,

b) $f = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1, x_0 = 2$

c) $f = x^6 + x^5 + x + 1, x_0 = 4$.

Odpowiedzi:

4.1. a) $f(x) = 5 + x - 4x^2 + 8x^3$, b) $f(x) = 1 + 6x^2 - 3x^3$, c) $f(x) = x^2 + 7x^3$.

4.2. a) (6, -7, 1, -9, 0, 0, ...), b) (8, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...), c) (-5, 4, 2, 0, 1, 0, 0, ...).

4.3. a) $f(x) + g(x) = 2x + x^2 + x^3$, b) $f(x) - g(x) 2 + 2x + 3x^2 + 7x^3$, c) $f(x) \cdot g(x) = 7 + 6x + x^2 + 7x^3 + 4x^4 + 2x^5$.

4.4. $x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4$, b) $5x^3 + x^2 + 2x + 6$, c) $x^7 + 3x^6 + x^5 + 2x^3 + x^2 + 3x + 3$.

4.5. a) $(x^3 + x^2 + 2x + 2) \cdot (x + 3) + \frac{2x^2+3}{x^3+x^2+2x+2}$, b) $(3x^2 + x + 4) \cdot (4x^2 + 4x + 2)$.

4.6. $(3x^3 + 7x^2 + 5x + 1) \cdot (8x^2 + 6x + 8) + \frac{8x^2+x+8}{3x^3+7x^2+5x+1}$.

4.7. a)

	1	5	2	4	3
4		4	0	2	0
	1	3	2	0	3

b)

	4	1	3	5	0	4	2
5		2	3	0	1	5	3
	4	3	0	5	1	3	5

4.8. a) $x^4 + x^3 + x^2 + x$ oraz 1, b) $2x^2 + 2$ oraz $2x + 1$.

4.9. a = b = 0, wskazówka $f(5) = 5, f(3) = 1$.

4.10. a) $2x + 1$, b) $x + 2, c)(3x + 1)$.

4.11. a) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x + 1)$, b) $(x^2 + 2)(x^2 + 3)$, c) $(x + 1)(x + 16)(x + 2)(x + 15)(x + 4)(x + 13)(x + 8)(x + 9)$.

4.12. a) $(x + 4)(x^3 + 4x + 3)$, b) $(x + 3)(2x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2)$, c) $(x + 1)^4(x + 1)^2$.