Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 10
Działania na wektorach
Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany wektorów

10.1. Obliczyć długości wektorów:
a) $u = (-3, 0, 4)$,
b) $v = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31})$,
c) $\overline{AB}$, gdzie $A = (2, 1, -3), B = (-1, 1, 4)$.

10.2. a) Niech $A = (-1, 2, 5), B = (1, 6, -3)$. Obliczyć współrzędne środka odcinka AB.
b) Punkt $P = (0, 0, 0)$ dzieli odcinek w stosunku $1 : 3$. Znaleźć współrzędne punktu B, jeżeli $A = (-1, 2, 3)$.
c) Znane sa współrzędne wierzchołków $A = (1, -1, 0), B = (5, 7, 3)$ trójkąta ABC oraz punktu $S = (2, 4, 0)$ przecięcia jego środkowych. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C.

10.3. Obliczyć iloczyny skalarne par wektorów
a) $u = (-1, 2, -3), v = (2, 0, 1)$,
b) $u = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}), v = (\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0)$,
c) $u = 2i - 3k, v = i + j - 4k$,
d) $x = 2p + q + r, y = p + 3q + 4r$, gdzie p, q, r są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

10.4. Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:
a) wektorami $u = (3, -1, 2), v = (4, 2, -5)$,
b) wektorami $u = (3, -1, 2), v = (1, 2, 3)$.
c) wektorami $u = (-3, 0, 4), v = (0, 1, -2)$,
d) dwusiecznymi kątów utworzonych przez osie OX, OY oraz osie OY, OZ układu $OXYZ$.

10.5.* W $\mathbb{R}^3$ dane są punkty $A = (3, 0, 0), B = (0, 5, 0), C = (0, 0, 2)$. Znaleźć wszystkie punkty S takie, że kąty ASB, BSC, CSA są proste.

10.6.* Znaleźć wektor w, który
a) jest prostopadły do wektorów $u = (1, -2, 0), v = (0, 3, -2)$,
b) z wektorami $u = (1, 0, 0), v = (1, \sqrt{3}, 0)$ tworzy kąt $\pi/3$.

10.7. Obliczyć iloczyn wektorowy par wektorów
a) $u = (-1, 2, 5), v = (2, 0, -3)$,
b) $u = (-1, -3, 4), v = (5, 6, -2)$,
c) $u = 3i + 2j - k, v = -4i + j + 5k$,
d) $u = 4i - 3k, v = -2j + 5k$.

10.8. Obliczyć
a) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $u = (1, 2, 3), v = (0, -2, 5)$,
b) pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1, 3), B = (0, 2, -3), C = (2, 2, 1)$,
c) wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 1, 1), B = (2, 6, -2), C = (0, 1, 5)$ opusz-

czoną z wierzchołka C,
d) pole powierzchni czworościanu rozpiętego na wektorach $u = (2, -1, 1), v = (0, 3, 1)$, $w = (1, 1, 0)$.
e)* pole powierzchni czworościanu rozpiętego na wektorach u, v, w.

10.9. Obliczyć iloczyny mieszane uporządkowanych trójek wektorów
a) $u = (1, 1, 0), v = (0, 1, 1), w = (1, 0, 1)$,
b) $u = (-2, 1, 3), v = (4, 3, -1), w = (1, 0, -2)$.
c) $u = (0, 1, -1), v = (1, -2, -3), w = (1, 5, 0)$,
d) $u = i + j, v = 2i - 3j + k, w = -i + 2j - 5k$.

10.10. Obliczyć
a) objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $u = (1, -1, 2), v = (0, 3, -2)$, $w = (-1, 5, 0)$,
b) objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 1, 1), B = (1, 2, 3), C = (-1, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$,
c) wysokość czworościanu $ABCD$ o wierzchołkach $A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3), D = (3, 4, 5)$, z wierzchołka D na płaszczyznę ABC.

10.11. Sprawdzić, czy wektory u, v, w są komplanarne
a) $u = (1, -2, 4), v = (3, 1, 2), w = (-3, 8, 8)$,
b) $u = (-4, 2, 0), v = (3, 0, 1), w = (2, 5, -4)$,
c) $u = (0, 1, 2), v = (1, 2, 0), w = (-1, 4, 0)$.

10.12. Dane są cztery punkty A, B, C, D. Sprawdzić, czy można przez nie poprowadzić płaszczyznę
a) $A = (1, 2, 0), B = (3, 3, 1), C = (5, 4, 2), D = (1, 0, -1)$,
b) $A = (1, 2, -1), B = (13, 1, 0), C = (5, -2, 3), D = (1, 4, -1)$.

10.13. Dane są trzy punkty A, B, C. Sprawdzić, czy można przez nie poprowadzić prostą
a) $A = (-3, 0, 1), B = (4, 2, -4), C = (0, 9, 5)$,
b) $A = (7, -1, 2), B = (3, 15, -4), C = (9, -9, 5)$.

10.14. Wyznaczyć wektor jednostkowy kolinearny z danym wektorem
a) $u = (1, -2, 2)$, b) $u = (-3, -5, \sqrt{2})$.

10.15. Sprawdzić czy dany trójkąt ABC jest prostokątny. Jeżeli tak, wyznaczyć jego kąty a) $A = (2, -1, 3), B = (1, 1, 1), C = (0, 0, 5)$,
b) $A = (2, -1, 0), B = (0, 1, 1), C = (2, 2, 3)$,
c)* $A = (1, -1, 2), B = (3, 2, 1), C = (0, 1, 6)$.

10.16.* Dane są trzy punkty $A = (1, 0, -1), B = (5, 3, 1), C = (0, 2, -6)$.
a) Na płaszczyźnie OXY znaleźć punkt D, aby wektor $\overline{CD}$ był kolinearny z wektorem $\overline{AB}$,
b) Na osi OZ znaleźć punkt D, aby wektor $\overline{CA}$ był prostopadły do wektora $\overline{DB}$,
c) Na osi OX znaleźć punkt D, by wektor $\overline{CD}$ był prostopadły do wektora $\overline{AB}$,
d) Znaleźć punkt D taki, że $\overline{AB} = 3\overline{DC}$.

ODPOWIEDZI

10.1. a) 5, b) 6, c) $\sqrt{58}$.
10.2. a) $(0,4,1)$, b) $(3,-6,-9)$, c) $(0,6,-3)$.
10.3. a) -5, b) -5, c) 14, d) 9.
10.4. a) $\pi/2$, b) $\pi/3$, c) $\arccos\frac{-8\sqrt{5}}{25}$, d) $\pi/3$.
10.5. $S=(0,0,0), S=(600/361,360/361,900,361)$.
10.6. a) $w_1=(4/\sqrt{29},2/\sqrt{29},3/\sqrt{29}), w_2=-w_1$,
b) $w_1=(1/2,1/(2\sqrt{3}),\sqrt{2/3})$, $w_2=(1/2,1/(2\sqrt{3}),-\sqrt{2/3})$.
10.7. a) $(-6,7,-4)$, b) $(-18,18,9)$, c) $(11,-11,11)$, d) $(-6,-20,-8)$.
10.8. a) $\sqrt{285}$, b) $\sqrt{61}$, c) $\frac{\sqrt{14910}}{35}$, d) $\sqrt{14}+\sqrt{11}+\sqrt{5}$,
e) $S=\frac{1}{2}(|u\times v|+|v\times w|+|w\times u|+|(u-v)\times(w-v)|)$.
10.9. a) 2, b) 10, c) -10, d) 22.
10.10. a) 14, b) 5/6. Wskazówka: objętosc czworościanu rozpiętego na trzech wektorach jest równa 1/6 objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach, c) $2/\sqrt{13}$.
10.11. a) nie są, b) są, c) nie są.
10.12. a) można, b) nie można.
10.13. a) nie można, b) można.
10.14. a) $\frac{1}{3}u$, b) $\frac{1}{6}v$.
10.15. a) jest prostokątny, $\pi/2,\pi/4,\pi/4$, b) jest prostokątny, c) jest prostokątny $\pi/2, \arcsin(\sqrt{10}/5)$, arc
10.16. a) $(12,11,0)$, b)$(0,0,4/5)$, c) $(-3/2,0,0)$, d) $(-4/3,1,-20/3)$.