

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 3, 17.10.2022)

Ciągi i granice, wyrażenia nieoznaczone.

Zad. 1. Określić typ monotoniczności ciągu:

a) $a_n = -2n + 7$; b) $a_n = (-1)^n n$; c) $a_n = 1 - \frac{2}{n}$; d) $a_n = n - 3^n$;

Zad. 2. Zbadać, czy ciągi są, od pewnego wyrazu, monotoniczne:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, b) $b_n = \frac{9^n}{n!}$.

Zad. 3. Korzystając z definicji granicy pokazać, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

Zad. 4. Granicą różnicy ciągów a_n i b_n jest 0. Stąd wynika, że ciągi te:

a) są równe, b) mają taką samą granicę, c) mogą być rozbieżne do nieskończoności?

Zad. 5. Granica ilorazu dwóch ciągów $\frac{a_n}{b_n}$ jest 0. Stąd wynika, że

a) ciągi a_n i b_n są zbieżne, b) ciąg a_n musi być zbieżny, c) oba ciągi muszą posiadać granicę?

Zad. 6. Obliczyć granicę ciągów:

a) $\frac{4n-3}{6-5n}$, b) $\frac{n^2-1}{3-n^3}$, c) $\frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$, d) $\frac{(n-1)(n+2)}{3n^2+5}$, e) $\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$,
 f) $\sqrt{4n^2+5n-7}-2n$, g) $\frac{(-1)^n}{2n-1}$, h) $\frac{2n+(-1)^n}{n}$, i) $\left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3$, n) $\frac{2n+\sqrt{n+n^2}}{3n+\sqrt{n-n^3}}$,
 j) $\frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$, k) $\sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$, l) $\frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$, m) $\frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$, o) $\sqrt{9^n+3^{n+1}}-\sqrt{9^n-3^n}$

Zad. 7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$, b) $\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$, c) $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}}$

Zad. 8. Obliczyć granicę ciągu:

a) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, b) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, c) $\left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, d) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^n$, e) $\left(\frac{2^n+1}{2^n-1}\right)^{2^n+1}$

Zad. 9. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej wykazać, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} = \infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^6 + n^2) = \infty$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 2^n) = -\infty$,
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n} = \infty$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - n^2) = -\infty$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-25n^2}{5n+3} = -\infty$.

Korzystając z arytmetyki granic niewłaściwych, wyznaczyć granice ciągów:

g) $\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^n$
 h) $\frac{\ln n}{\operatorname{arctg} n}$

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

Zad. 10. Zbadać, które z ciągów są zbieżne/rozbieżne, lub nie mają granicy.

(a) $n \sin \frac{n\pi}{3}$ (b) $n^2 - 2^n$, (c) $3^n + (-1)^n \cdot n$, d) $\frac{2}{n+3} \sin \frac{n\pi}{2}$.

Zad. 11. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągów:

(a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ (b) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$

Zad. 12. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach obliczyć granice niewłaściwą ciągu:

(a) $a_n = n^4 + (-1)^n n$, (b) $a_n = \frac{1-n^2}{n-\sin n}$.

Zad. 13. Młot pneumatyczny wbija słup za pierwszym razem na głębokość 30 cm, a następnie, za każdym razem przyrost głębokości wynosi $\frac{2}{3}$ przyrostu głębokości przy poprzednim uderzeniu. Obliczyć o ile wbije się słup oraz na jaką w sumie głębokość przy 1,2,3,4,5 uderzeniach. Przy ilu uderzeniach słup wbije się na głębokość 1 m?

Zad. 14. Miesięczna inflacja wynosi 0.5%. Ile wynosi inflacja roczna?

Zad. 15. Załóżmy, że tempo wzrostu gospodarczego będzie w najbliższych latach stałe. Jaki powinien być roczny wzrost dochodu narodowego, aby jego podwojenie nastąpiło po 10 latach? A po pięciu lub trzech latach?