Całka nieoznaczona

(Analiza Matematyczna 1, wykład 10)

Zadanie.

Dla danej funkcji $f(x)$ znaleźć taką funkcję $F(x)$, aby

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcję F nazywamy wówczas *funkcją pierwotną* danej funkcji f.

Przykład.

a) funkcją pierwotną dla $f(x) = 2x$ jest $F(x) = x^2$,

b) funkcją pierwotną dla $f(x) = 3x^2$ jest $F(x) = x^3$,

c) funkcją pierwotną dla $f(x) = \cos x$ jest $F(x) = \sin x$,

d) funkcją pierwotną dla $f(x) = e^x$ jest $F(x) = e^x$.

Twierdzenie (*o istnieniu funkcji pierwotnej*)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale *X*, to posiada w tym przedziale funkcje pierwotną.

<u>Uwaga</u>.

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną dla $f(x)$, to $F(x)+C$ (*C* stała) jest także funkcją pierwotną dla $f(x)$, bo

$$(F(x)+C)' = F'(x).$$

Zatem dla dowolnej funkcji istnieje cała rodzina funkcji pierwotnych różniących się o stałe (mówimy, że funkcje pierwotne są określone z dokładnością do stałych).

Funkcję pierwotną dla funkcji $f(x)$, nazywa się *całką nieoznaczoną* i oznacza symbolem

$$\int f(x)dx.$$

Mówimy, że jest to całka z funkcji $f(x)$, po dx. (*Symbol* $\int$ *wprowadził Leibnitz*).

Nieoznaczoność polega na tym, że symbol ten oznacza nieskończenie wiele funkcji różniących się od siebie o stałą.

Znalezienie funkcji pierwotnej, czyli całki nieoznaczonej, jest zadaniem odwrotnym do obliczania pochodnej. Dzięki temu można niejako odwrócić wzory rachunku różniczkowego i tą drogą otrzymać wzory dla całek nieoznaczonych. Sprawdzenie poprawności obliczeń sprowadza się do zróżniczkowania funkcji pierwotnej.

Podstawowe wzory

$\int 1\cdot dx = x + C$	
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$
$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$	$\int e^{x} dx = e^{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\sin^{2} x} dx = -ctgx + C$	$\int \frac{1}{\cos^{2} x} dx = tgx + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^{2}} dx = arc\,tgx + C$

Całkowanie sumy, różnicy i wyłączanie stałego czynnika

Twierdzenie.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
$$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$$
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 2\int x dx = 1/4x^4 - x^3 + x^2 + C.$

b) $\int (e^x - 1)dx = \int e^x dx - \int 1 dx = e^x - x + C,$

c) $\int (x^2 - x + 1)^2 dx = \int (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)dx =$

$\int x^4 dx - 2\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 2\int x dx + \int 1 dx =$

$1/5x^5 - 1/2x^4 + x^3 - x^2 + x + C.$

d) $\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int (x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{1}{6}})dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx =$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7 + C}.$$

e) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx.$

Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ **otrzymujemy**

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}dx = \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int 1dx - \int \cos xd = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

<u>Zadanie</u>.

Przyśpieszenie w pewnym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem:

$$a = 12t^2 + 18\sin 3t - 2.$$

Wyznaczyć wzór określający prędkość *v* w zależności od czasu *t*, jeżeli dla *t*=0 prędkość *v*=10. Wyznaczyć również wzór na drogę *x*, jeżeli dla *t*=0 droga *x*=5.

Mamy

$$v = \int a dt = \int (12t^2 + 18\sin 3t - 2) dt = 4t^3 - 6\cos 3t - 2t + C.$$

Przyjmując, że w chwili *t*=0 prędkość *v*=10 mamy

$v = -6 + C = 10$, **stąd *C*=16.**

Ostatecznie

$$v = 4t^3 - 6\cos 3t - 2t + 16.$$

Dalej,

$$x = \int v dt = \int (4t^3 - 6\cos 3t - 2t + 16)^2 dt = t^4 - 2\sin 3t - t + 16t + C_1.$$

Dla *t*=0 mamy *x*=5, zatem $C_1 = 5$**, a więc**

$$x = t^4 - 2\sin 3t - t^2 + 16t + 5.$$

METODY OBLICZANIA CAŁEK NIEOZNACZONYCH

A. Całkowanie przez części

<u>Twierdzenie</u> (*o całkowaniu przez części*).

Jeżeli funkcje $f(x), g(x)$ mają na przedziale X ciągłe pochodne $f'(x), g'(x)$, to

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx.$$

<u>Przykład</u>. a) Obliczyć $\int x\cdot \cos x dx$. **Przyjmujemy**

$$f(x) = x,\quad g'(x) = \cos x.$$
$$f'(x) = 1,\quad g(x) = \sin x.$$

Tak więc

$$\int x\cdot\cos x dx = x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

b) Obliczyć $\int \ln x dx$. **Przyjmujemy**

$$f(x) = \ln x,\quad g'(x) = 1.$$
$$f'(x) = \frac{1}{x},\quad g(x) = x.$$

Wówczas

$$\int \ln x dx = x\cdot\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln x - x + C.$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx.$$

c) Obliczyć $\int x^2 \cdot e^x dx$**. Przyjmujemy**

$$f(x) = x^2, \quad g'(x) = e^x.$$
$$f'(x) = 2x, \quad g(x) = e^x.$$

Tak więc

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx.$$

Dla obliczenia całki $\int x \cdot e^x dx$ **przyjmujemy**

$$f(x) = x, \quad g'(x) = e^x.$$
$$f'(x) = 1, \quad g(x) = e^x.$$

Wówczas

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x.$$

Ostatecznie

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx.$$

d) Obliczyć $\int e^{2x}\cos x dx.$

Przyjmując

$$f(x) = e^{2x}, \quad g'(x) = \cos x.$$
$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad g(x) = \sin x.$$

$$= \int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx$$

Po raz drugi przyjmujemy

$$f(x) = e^{2x}, \quad g'(x) = \sin x.$$
$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad g(x) = -\cos x.$$

Stąd

$$= e^{2x}\sin x - 2(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx =$$
$$e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x dx =$$

Całka, którą obliczamy występuje w ostatnim wzorze ze współczynnikiem -4, Więc

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + c_1, \text{ czyli}$$
$$5\int e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + c.$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx.$$

e) Obliczyć $\int x^2 arctgx dx.$

Przyjmując $f(x) = arctgx, \quad g'(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{x^3}{3}.$$

$$\int x^2 arctgx dx = \frac{1}{3}x^3 arctgx - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 arctgx - \frac{1}{3}\int x dx + \frac{1}{6}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{1}{3}x^3 arctgx - \frac{1}{3}\square\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\int (\ln(1+x^2))' dx =$$

$$\frac{1}{3}x^3 arctgx - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

Nie zawsze stosując tą metodę można w prosty sposób obliczyć całkę nieoznaczoną.

B. Całkowanie przez podstawienie

<u>Twierdzenie</u> (*o całkowaniu przez podstawianie*)

Jeżeli dla $a \le x \le b, t = g(x)$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz $A \le g(x) \le B,$ a funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $[A,B]$, to

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt. \qquad (1)$$

przy czym po scałkowaniu lewej strony należy w otrzymanym wyniku należy za *t* podstawić *g*(*x*).

<u>**Przykład**</u>**.**

a) **Obliczyć** $\int \frac{1}{ax+b}dx \quad (a \ne 0).$

Przyjmujemy $ax + b = t$ **Obliczamy** $t' = \frac{dt}{dx} = a \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt \qquad (*)$

Korzystając z (*)

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Zastosowane podstawienie jest jednym z częściej stosowanych.

b) Obliczyć $\int \frac{x}{1+x^2}dx.$

Przyjmujemy $x^2 = t.$ Obliczamy

$$t' = \frac{dt}{dx} = (x^2)' = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}dt \qquad (**)$$

Korzystając z (**)

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot xdx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt =$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

c) Obliczyć $\int 3x^2(x^3+5)^9 dx.$

Przyjmujemy $x^3 + 5 = t.$

$$t' = \frac{dt}{dx} = (x^3+5)' = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2}dt$$

$$\int 3x^2(x^3+5)^9 dx = \int (x^3+5)^9 3x^2 dx =$$

$$\int t^9 dt = \frac{1}{10}t^{10} + c = \frac{(x^3+5)^{10}}{10} + c$$

d) obliczyć: $\int (x^2+a^2)dx$

podstawiając $t = x^2 + a^2$, a następnie różniczkując otrzymujemy $dx = \frac{1}{2x}dt$.

Stąd

$$\int (x^2+a^2)dx = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{4}t^2 + c'$$

ostatecznie

$$\int (x^2+a^2)dx \int (x^2+a^2)dx = \frac{1}{4}(x^2+a^2)^2 + c.$$

e) obliczyć

$$\int \sin x \cos x dx$$

$$t = \sin x, \qquad dx = \frac{1}{\cos x}dt$$

Stąd

$$\int \sin x \cos x dx = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2 x + c.$$

f) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

Podstawiamy $t = 1 + \ln x$ i po zróżniczkowaniu $dx = x dt$. Zatem

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

g) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx$. Podstawiamy $1 + e^x = t$.

Wówczas $dx = dt / e^x$. Ponadto, ponieważ $e^x = t - 1$, więc $e^{2x} = (t-1)^2$.

zatem

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx = \int \frac{(t-1)^2}{\sqrt[4]{t}} dt = \int \frac{t^2 - 2t + 1}{\sqrt[4]{t}} dt = \int \left(t^{7/4} - 2 \cdot t^{3/4} + t^{-1/4} \right) dt =$$

$$= \frac{4}{11} t^{11/4} - \frac{8}{7} t^{7/4} + \frac{4}{3} t^{3/4} + C = \frac{4}{11} \sqrt[4]{(1+e^x)^{11}} - \frac{8}{7} \sqrt[4]{(1+e^x)^7} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{(1+e^x)^3} + C \, .$$