ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 7

Szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych.
Szeregi funkcyjne.
Podstawowe rodzaje i własności. Zbieżność.
Szeregi potęgowe.
Rozwijanie funkcji w szereg Taylora i Maclaurina.

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania szeregów funkcyjnych

- w fizyce i technice - ruch drgający;
- w analizie numerycznej (badanie możliwości realizacji obliczeń przybliżonych oraz analiza powstałych na skutek zaokrąglenia błędów);
- w biologii;
- w ekonomii.

SZEREGI LICZBOWE O WYRAZACH ZESPOLONYCH

Niech dany będzie ciąg liczb zespolonych $z_1, z_2, ..., z_n, ...$.
Wyrażenie

$$z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$$

lub

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$$

nazywamy *szeregiem nieskończonym*, lub krótko: ***szeregiem o wyrazach*** $z_1, z_2, ..., z_n, ...$.

Czasem, gdy pierwszy element szeregu oznaczymy przez z_0, będziemy pisać $\Sigma_{n=0}^{\infty} z_n$ albo krótko Σz_n.

Niech $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ będzie takim ciągiem, że

$$s_1 = z_1, \quad s_2 = z_1 + z_2, \quad s_3 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \text{itd.}$$

Liczby $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ nazywamy ***sumami częściowymi*** szeregu $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$. W szczególności

$$s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$$

nazywamy ***n-tą sumą częściową szeregu*** $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$.

Gdy ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny do granicy s mówimy, że szereg $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny i ma sumę s, czyli $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n = s$.

Mówimy, że szereg $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$ o wyrazach zespolonych jest ***zbieżny bezwzględnie***, gdy szereg $\Sigma_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny.

KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW O WYRAZACH ZESPOLONYCH

Twierdzenie 7.1 (Kryterium porównawcze). *Jeżeli szereg* $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$ *spełnia następujące warunki*

a) $|z_n| \leqslant a_n$ *dla* $n \geqslant n_0$,

b) szereg $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *(o wyrazach dodatnich) jest zbieżny,*

to szereg $\Sigma_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest bezwzględnie zbieżny.*

Twierdzenie 7.2 (Kryterium Cauchy'ego). *Szereg* Σz_n *o wyrazach zespolonych jest*
a) bezwzględnie zbieżny, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1;$$

b) rozbieżny, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1.$$

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) francuski matematyk, sprecyzował podstawy analizy matematycznej, opierając je na **pojęciach granicy i ciągłości**, jako pierwszy podał precyzyjny dowód twierdzenia Taylora. Prowadził też badania nad **teorią liczb i liczb zespolonych**, **teorią grup**, **teorią funkcji**, **zagadnieniami równań różniczkowych i wyznaczników.** Zawdzięczamy mu również kilka ważnych twierdzeń z analizy zespolonej oraz zapoczątkowanie studiów nad grupami permutacji. Zajmował się też badaniami w dziedzinie mechaniki i optyki.

Twierdzenie 7.3 (Kryterium d'Alemberta). *Szereg* Σz_n *o wyrazach zespolonych, (gdy* $|z_n| \neq 0, n \in \mathbb{N}$*) jest*
a) bezwzględnie zbieżny, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1;$$

b) rozbieżny, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1.$$

Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783)
francuski filozof, fizyk i matematyk.
Zasłużony na polu fizyki i matematyki, zwłaszcza w dziedzinie **mechaniki teoretycznej** (zasada d'Alemberta) i **równań różniczkowych (odkrył rachunek pochodnych cząstkowych).**
Zajmował się też estetyką i teorią muzyki.
Dokonał podziału nauk na historię, filozofię i sztuki piękne, upatrując ich dominant odpowiednio w pamięci, rozumie i wyobraźni.

Twierdzenie 7.4. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *o wyrazach zespolonych* $z_n = a_n + b_n i$ *do sumy* $s = \sigma + \tau i$ *jest jednoczesna zbieżność szeregów* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *odpowiednio do sum* σ *oraz* τ*.*

CIĄG FUNKCYJNY
SZEREG FUNKCYJNY

Szeregiem funkcyjnym nazywamy szereg

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ... = \Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

którego wyrazami są funkcje określone w pewnym wspólnym obszarze D.

Sumy częściowe

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z), \quad n = 1, 2, ...$$

tworzą ***ciąg funkcyjny*** lub *ciąg funkcji* określony w obszarze D.

Jeżeli ciąg $\{s_n(z)\}$ jest zbieżny w każdym punkcie obszaru D, to jego granica $\lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z)$ jest funkcją określoną w obszarze D. Nazywamy ją ***funkcją graniczną*** ciągu $\{s_n\}$. Funkcja $s(z)$ jest również sumą szeregu $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, tzn.

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(z) = s(z) \text{ dla } z \in D.$$

CIĄGŁOŚĆ JEDNOSTAJNA
SZEREG JEDNOSTAJNIE ZBIEŻNY

Mówimy, że ciąg funkcji $\{s_n(z)\}$ jest ***jednostajnie zbieżny*** do funkcji $s(z)$ w obszarze D, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać wskaznik $N(\varepsilon)$ niezależny od z i taki, że

$$|s_n(z) - s(z)| \leqslant \varepsilon \text{ dla wszystkich } z \in D, n \geqslant N(\varepsilon).$$

Ciąg $\{s_n(z)\}$ jednostajnie zbieżny w obszarze D jest zbieżny w każdym punkcie $z \in D$ ale niekoniecznie odwrotnie.

Szereg $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ nazywamy ***jednostajnie zbieżnym*** w obszarze D, jeśli ciąg sum częściowych $\{s_n(z)\}$ jest w D jednostajnie zbieżny.

Twierdzenie 7.5 (Kryterium Weierstrassa). *Jeżeli wyrazy szeregów Σa_n i $\Sigma f_n(z)$ spełniają warunek:*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{z\in D}|f_n(z)| < a_n$$

oraz szereg liczbowy Σa_n jest zbieżny, to szereg $\Sigma f_n(z)$ jest zbieżny w obszarze D jednostajnie i bezwzględnie.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897) niemiecki matematyk, zwolennik arytmetyzacji analizy matematycznej, twórca precyzyjnego **pojęcia granicy funkcji**. Weierstrass był jednym z twórców nowoczesnych ścisłych metod matematycznych. Pracował nad teorią **funkcji analitycznych i teorią szeregów**. Wiele jego prac dotyczy również rachunku wariacyjnego.

SZEREG POTĘGOWY
PROMIEŃ I OBSZAR ZBIEŻNOŚCI

Szereg funkcyjny

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdzie $a_0, a_1 ... \in \mathbb{C}$, nazywamy szeregiem potęgowym o środku w punkcie z_0.

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\Sigma a_n(z-z_0)^n$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą $r>0$, że dla $z\in\mathbb{C}$ takich, że $|z-z_0|<r$ szereg jest zbieżny, a dla $|z-z_0|>r$ szereg jest rozbieżny.
Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej, to przyjmujemy $r=\infty$, a gdy jest on zbieżny tylko w środku z_0, to $r=0$.

Jeżeli $r>0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\Sigma a_n(z-z_0)^n$, to $K(z_0,r)$ jest największym kołem o środku z_0 wewnątrz którego szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli dla szeregu potęgowego $\Sigma a_n(z-z_0)^n$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=g$ lub $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=g$, to promień zbieżności tego szeregu wyraża się wzorem:
$r=\frac{1}{g}$, gdy $0<g<\infty$;
$r=\infty$, gdy $g=0$;
$r=0$, gdy $g=\infty$.

Twierdzenie 7.6. *Szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny w każdym zbiorze domkniętym i ograniczonym, zawartym wewnątrz koła zbieżności.*

Twierdzenie 7.7. *Suma* $s(z)$ *szeregu potęgowego* $\Sigma a_n(z-z_0)^n$ *jest funkcją ciągłą i holomorficzną wewnątrz koła zbieżności. Ponadto*

$$\frac{d}{dz}(\Sigma a_n(z-z_0)^n) = \Sigma n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Jeżeli funkcja zmiennej zespolonej określona w obszarze D, w pewnym otoczeniu każdego punktu tego obszaru jest sumą szeregu potęgowego, to nazywamy ją ***funkcją analityczną*** w obszarze D. Na mocy Twierdzenia 7.7 funkcja analityczna w obszarze D jest holomorficzna w tym obszarze.

SZEREG POTĘGOWY O WYRAZACH RZECZYWISTYCH
PROMIEŃ I PRZEDZIAŁ ZBIEŻNOŚCI

Szereg postaci

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

gdzie $a_o, a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$ są dowolnymi liczbami, nazywamy ***szeregiem potęgowym o środku w punkcie*** x_0.

Dla $x = x_0$ szereg ten jest zawsze zbieżny i ma sumę a_0. Dla $x \neq x_0$ szereg może być zbieżny lub nie.

Twierdzenie 7.8. *Jeśli szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *jest zbieżny w punkcie* $\bar{x} \neq x_0$*, to jest bezwzględnie zbieżny wewnątrz przedziału* $(-a+x_0, a+x_0)$*, gdzie* $a = |\bar{x}|$ *i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale* $[-\alpha(a+x_0), \alpha(a+x_0)]$*, gdzie* $0 < \alpha < 1$*.*

Każdy punkt zbieżności $\bar{x} \neq x_0$ szeregu $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest końcem pewnego przedziału zbieżności $(-a + x_0, a + x_0)$ o środku x_0. Jeżeli szereg nie jest zbieżny dla wszystkich x, to wśród przedziałów $(-a + x_0, a + x_0)$ istnieje przedział największy. Oznaczmy go przez $(-r + x_0, r + x_0)$. Poza tym przedziałem szereg jest wszędzie rozbieżny.
Liczbę r będziemy nazywać ***promieniem zbieżności*** szeregu.

Przyjmujemy $r = 0$, gdy szereg jest zbieżny tylko dla $x = 0$ oraz $r = \infty$, gdy szereg jest zbieżny dla wszystkich x. Jeżeli $r > 0$, przedział $(-r + x_0, r + x_0)$ nazywamy ***przedziałem zbieżności*** szeregu.

Twierdzenie 7.9 (Cauchy'ego-Hadamarda). *Promień zbieżności r szeregu potęgowego $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ wyraża się wzorem*

$$r = \frac{1}{\lambda},\ gdzie\ \lambda = lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Podobnie jak powyżej definiujemy szereg potęgowy o wyrazach zespolonych i jego promień zbieżności.

Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963) matematyk francuski. Zajmował się **teorią liczb, mechaniką teoretyczną, geometrią, teorią poznania, teorią całkowitych funkcji analitycznych (funkcje harmoniczne), równaniami różniczkowymi i równaniami fizyki matematycznej** (mieszane problemy brzegowe). Znany jest zwłaszcza ze swych prac z teorii liczb pierwszych. Idee profesora Hadamarda miały **duży wpływ na powstanie analizy funkcjonalnej.** Jego podręcznik do geometrii dla szkół średnich tłumaczony był na wiele języków, w tym również na polski (1923) i rosyjski (Elementarnaja geometrija, Moskwa 1951). Inne znane publikacje to Psychologia odkryć matematycznych (wydanie polskie, Omega 1964).

SZEREG POCHODNY

Różniczkując szereg $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wyraz po wyrazie otrzymujemy nowy szereg potęgowy

$$a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ... = \Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

zwany ***szeregiem pochodnym*** szeregu $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Twierdzenie 7.10. *Szereg pochodny ma ten sam promień zbieżności* r*, co szereg* $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *i jego suma w przedziale* $(-r, r)$ *jest równa* $f'(x)$*, gdzie* $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Szereg pochodny szeregu $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ma ten sam promień zbieżności r i jego suma równa się $f''(x)$. Postępując tak dalej otrzymujemy

Twierdzenie 7.11. *Suma szeregu potęgowego jest funkcją mającą w przedziale zbieżności wszystkie pochodne.*

SZEREG TAYLORA I MACLAURINA

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu. Szereg potęgowy

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazywamy ***szeregiem Taylora*** funkcji f o środku w punkcie x_0. Jeżeli $x_0=0$, to szereg ten nazywamy ***szeregiem Maclaurina***.

Brook Taylor (1685 – 1731) angielski matematyk, znany jako odkrywca pojęcia zwanego dziś **szeregiem Taylora.** Z rozwinięcia funkcji w szereg nazwany imieniem Taylora matematycy korzystali już wcześniej, znali go na przykład Newton, Leibniz, de Moivre i Johann Bernoulli, jest jednak zasługą Taylora, że podał go w ogólnej postaci. Taylor opublikował kilkanaście artykułów na tak różne tematy jak **działanie kapilar, budowa termometrów i magnetyzm**, podał też **nową metodę obliczania logarytmów.**

Colin Maclaurin (1698 - 1746) szkocki matematyk. Jego prace dotyczyły **geometrii, analizy matematycznej i mechaniki**. Zajmował się **zbieżnością szeregów i teorią potencjału**, podał **rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy**. Tytuł magistra uzyskał wieku czternastu lat. W 1717 Maclaurin został profesorem matematyki na Uniwersytecie w Aberdeen. Od 1725 profesor matematyki na Uniwersytecie Edynburskim

Twierdzenie 7.12. *Jeżeli funkcja* f *ma w otoczeniu* S *punktu* x_0 *pochodne dowolnego rzędu oraz dla każdego* $x \in S$ *spełniony jest warunek* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$*, gdzie*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,\ c \in (0,1)$$

oznacza $n-$*tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji* f*, to*

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla każdego $x \in S$*.*

Szeregi Maclaurina wybranych funkcji

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ dla } |x| < 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ dla } |x| < 1$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$