ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 13

Współrzędne cylindryczne
Współrzędne sferyczne

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania zmiany układu współrzędnych

- obliczanie szczególnego rodzaju całek oznaczonych,
- współrzędne biegunowe służą do opisu ruchu ciał wokół zadanego punktu w przestrzeni dwuwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w płaszczyźnie mają symetrię obrotową,
- współrzędne cylindryczne (walcowe) służą do opisu ruchu ciał wokół zadanej osi w przestrzeni trójwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w przestrzeni mają symetrię walcową,
- współrzędne sferyczne służą do opisu ruchu ciał wokół zadanego punktu w przestrzeni trójwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w przestrzeni mają symetrię sferyczną.

WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE

Położenie punktu $P = (x, y)$ w układzie współrzędnych biegunowych wyrażone jest przez $P = (r, \varphi)$, gdzie r jest długością promienia wodzącego, a φ jest kątem obrotu liczonym względem osi OX. Wersor promienia wodzącego skierowany jest wzdłuż jego kierunku, a wersor kąta φ jest do niego prostopadły. Wtedy zachodzą zależności

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi \in [0, 2\pi)$.

WSPÓŁRZĘDNE CYLINDRYCZNE

Położenie punktu $P = (x, y, z)$ nie leżącego na osi OZ może być jednoznacznie określone przez trójkę $P = (r, \varphi, z)$, którą nazywamy ***współrzędnymi cylindrycznymi*** lub ***współrzędnymi walcowymi*** punktu P, gdzie

$r = |\overline{OP_1}|$, (P_1 oznacza rzut protokątny punktu P na płaszczyznę OX),

$\varphi = \angle(OX, \overline{OP_1})$,

$z \in \mathbb{R}$ jest współrzędną kartezjańską punktu P.

Pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a cylindrycznymi tego samego punktu zachodzą zależności

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$.

Zbiór punktów o współrzędnych (r, φ, z) jest równaniem powierzchni walca obrotowego w $\mathbb{R}^3$, (co uzasadnia nazwę współrzędnych).

WSPÓŁRZĘDNE SFERYCZNE

Promieniem wodzącym punktu $P = (x, y, z)$ będącego punktem układu kartezjańskiego nazywamy wektor $\overline{OP}$.

Modułem punktu P nazywamy długość $\overline{OP}$, tj. $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Długością geograficzną punktu P nazywamy miarę łukową kąta $\varphi \in [0, 2\pi)$ jaki tworzy rzut $\overline{OP_1}$ wektora $\overline{OP}$ na płaszczyznę OXY, a osią OX, tj. $\varphi = \angle(OX, \overline{OP_1})$.

Szerokością geograficzną punktu P nazywamy miarę łukową kąta $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jaki tworzy wektor $\overline{OP}$ z płaszczyzną OXY, tj $\theta = \angle(\overline{OP_1}, \overline{OP})$.

Trójkę (R, θ, φ) nazywamy ***współrzędnymi sferycznymi punktu*** P.

Pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi tego samego punktu zachodzą zależności:

$$(x, y, z) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta),$$

gdzie $\varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ponadto

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \;\; \cos\varphi = \frac{x}{r}, \;\; \sin\theta = \frac{z}{R},$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Punkty o współrzędnych (R, θ, φ) leżą na sferze $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, (co uzasadnia nazwę tych współrzędnych).