0 1 2

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 1, 03.10.2022)

Elementy logiki, teorii zbiorów, kresy, symbole Newtona.

Zad. 1. Niech p,q,r będą zdaniami:

p="pada deszcz" q="świeci słońce" r="na niebie są chmury".

Zapisać poniższe zdania za pomocą symboli logicznych, używając zmiennych p,q,r oraz spójników logicznych.

a) Pada deszcz i świeci słońce.
b) Jeśli pada deszcz, to na niebie są chmury.
c) Jeśli nie pada deszcz, to nie świeci słońce i na niebie są chmury.
d) Słońce świeci wtedy i tylko wtedy, gdy nie pada deszcz.
e) Jeśli nie ma chmur na niebie, to świeci słońce.

Zad. 2. Tak, jak w poniższym schemacie dokończyć zdania:

$$(a \le b) \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b), \quad a, b \in R$$

a) $(a \ge b) \Leftrightarrow$ ... b) $(a \cdot b = 0) \Leftrightarrow$ ... c) $(a \cdot b \ge 0) \Leftrightarrow$ ... d) $(a \cdot b > 0) \Leftrightarrow$ ...
e) $(a \cdot b < 0) \Leftrightarrow$ ... f) $(a/b = 0) \Leftrightarrow$ ... g) $(a/b < 0) \Leftrightarrow$ ... h) $(a/b > 0) \Leftrightarrow$ ...

Zad. 3. Dla jakich wartości logicznych prawdziwe jest wyrażenie:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$. b) $(p \wedge q) \vee \sim (p \Rightarrow q)$. c) $r \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$.

Zad. 4. Zbadać, czy prawdziwe są formuły zdaniowe:

(a) $\exists x \in \boldsymbol{R}\ x^x = 27$; (b) $\forall x \in \boldsymbol{R}\ x^2 + 4x + 1 > 0$; (c) $\forall x \in \boldsymbol{R}\ \exists y \in \boldsymbol{R}\ x^2 + y^3 = 0$;
(d) $\exists y \in \boldsymbol{R}\ \forall x \in \boldsymbol{R}\ xy = 0$; (e) $\forall x \in \boldsymbol{R}\ \forall y \in \boldsymbol{R}\ (x \le y) \vee (y > x)$;

Zad. 5. Czy może się zdarzyć, że:

a) zdanie $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe, a zdanie $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ jest fałszywe,
b) zdanie $q \Rightarrow p$ jest prawdziwe, a zdanie $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ jest fałszywe.

Zad. 6. Podane stwierdzenia zapisać za pomocą kwantyfikatorów i funkcji zdaniowych:

a) każda liczba rzeczywista jest dodatnia;
b) równanie f(x)= 1 ma rozwiązanie rzeczywiste;
c) zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry;
d) zbiór $A \subset R$ ma element największy;
e) w zbiorze $B \subset R$ nie ma elementu najmniejszego;
f) każda liczba rzeczywista jest parzysta;
g) równanie $x^2 + x + 1 = 0$ nie ma rozwiązania rzeczywistego;
h) równanie $x^5 + x = 3$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Zad. 7. Zapisać korzystając z kwantyfikatorów:

a) dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej *a* istnieje liczba rzeczywista *b* taka, że $a = b^2$,
b) dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych *a,b* istnieje dodatnia liczba rzeczywista *x* taka, że $a < b + x$ lub $a > b + x$,
c) dany jest ciąg nieskończony liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots$. Zapisać:
dla każdej liczby rzeczywistej *A* istnieje indeks n_0 taki, że dla każdej liczby naturalnej *n* większej od n_0 zachodzi $\sum_{i=1}^{n} a_i > A$.

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L. , Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

Zad. 8. Dla pary liczb całkowitych x,y (x≠0), symbol $x \mid y$ oznacza, że x jest dzielnikiem y.
Twierdzenie. $(2 \mid a \wedge 2 \mid b) \Rightarrow 2 \mid (a+b)$.
Napisać twierdzenie:
a) odwrotne,
b) przeciwne,
c) przeciwstawne,
Zbadać, które z tych twierdzeń są prawdziwe, a które fałszywe?

Zad. 9. Niech przestrzeń $X = \{1,2,3,...,12\}$, zbiór $A = \{1,3,5,7,11\}$, $B = \{2,3,5,7,11\}$, $C = \{2,3,6,12\}$ oraz $D = \{2,4,8\}$. Wyznaczyć następujące zbiory:
a) $A \cup B$, $A \cap C$, $(A \cup B) \cap C'$, $A \setminus B$, $C \setminus D$, $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.
b) $A \times D$, $D \times C$.

Zad. 10. Pokazać, że dla dowolnych zbiorów *A,B*, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

Zad. 11. Podać przykłady zbiorów, dla których zachodzi inkluzja: $A \cup B \subset A$, $B \subset A \cap B$ oraz takich, dla których to nie zachodzi.

Zad. 12. Wyznaczyć, jeżeli istnieją, kresy zbiorów:
a) $A = \left\{x:\ x = \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n \in N\right\}$, b) $B = \{x:\ x = t^2 - t,\ t \in R\}$,
c) $C = \left\{x:\ x = \frac{t}{t^2 - t},\ t \in R\right\}$, d) $D = \left\{x:\ x = 1 + \frac{1}{n^2},\ n \in N\right\}$,
e) $E = \left\{x:\ |x| > 1,\ x \in R\right\}$, f) $F = \left\{x:\ x \in [-1,3),\ x \in R\right\}$.

Zad. 13. Obliczyć:
(a) $\frac{3!5!}{8!}$, (b) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$, (c) $\binom{14}{12}$, (d) $\binom{9}{7}$.

Zad. 14. Korzystając ze wzoru Newtona wykonać potęgowania:
(a) $(x+y)^7$, (b) $(x-y)^7$, (c) $(x+1/x)^5$, (d) $(1-\sqrt{x})^6$.