

**ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 6, 07.11.2022)**  
*Pochodne jednej zmiennej, różniczka. Twierdzenie, de l'Hospitala.*

**Zad. 1.** Obliczyć z definicji pochodną funkcji w punkcie  $x_0$ :

a)  $f(x) = 5x - 4$ ,  $x_0 = 1$ , b)  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 3$ , c)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $x_0 = -3$ ,  
 d)  $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$   $x_0 = 0$ , e)  $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$   $x_0 = 0$ ,  
 f)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x_0 = 2$ , g)  $f(x) = x|x|$ ,  $x_0 = 0$ , h)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ,  $x_0 = 5$ .

**Zad. 2.** Obliczyć pochodne funkcji:

a)  $f(x) = 2x^5 + 3x + 5$ , b)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , c)  $f(x) = (x+1)(1-x)$ , d)  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ,  
 e)  $f(x) = (x^2 + 2x + 4)^7$ , f)  $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x - 4}$ , g)  $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$ , h)  $f(x) = \frac{x \sin x}{x + \cos x}$ ,  
 i)  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 2x^3 - 4x}$ , j)  $f(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$ , k)  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ , l)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \lg^3 x \ln^2 x$ ,  
 m)  $f(x) = \frac{3 \cos^2 x}{\sin^3 x}$ , n)  $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} + 2 \sin x$ , o)  $f(x) = 3 \cos(x^2 + 4)$ , p)  $f(x) = (\sin x)^x$ ,  
 q)  $f(x) = 3^x x^3$ , r)  $f(x) = 3e^{\sin^2 x}$ , s)  $f(x) = x^x$ , t)  $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$ ,  
 u)  $f(x) = \ln \frac{3}{x+2}$ , v)  $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$ , w)  $f(x) = 10x^{3x}$ .

**Zad. 3.** Badając pochodne jednostronne sprawdzić, czy istnieje pochodna funkcji w punkcie:

a)  $f(x) = |x - 3|$ ,  $x_0 = 3$ , b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 1, \\ 3x^3, & x < 1, \end{cases}$   $x_0 = 1$ ,  
 c)  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$   $x_0 = 0$ .

**Zad. 4.** Dla jakich parametrów  $a, b$ , funkcja ma pochodną w punkcie  $x_0 = 2$  (Uwaga. Funkcja musi być obustronnie ciągła oraz obie pochodne jednostronne muszą być sobie równe).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2, \\ ax + b, & x > 2. \end{cases}$$

**Zad. 5.** Sprawdzić z definicji, czy funkcja ma pochodną niewłaściwą w punkcie  $x_0 = 0$ .

a)  $f(x) = \sin^3 \sqrt{x}$ , b)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ .

**Zad. 6.** Wskazać punkty, w których funkcja nie jest różniczkowalna (jeżeli takie istnieją).

W punktach nieróżniczkowalności obliczyć wartości pochodnych jednostronnych:

a)  $f(x) = |x + 2|$ , b)  $f(x) = |x^2 + x|$ , c)  $f(x) = |x^3 + x^2|$ , d)  $f(x) = x|x|$ .

**Zad. 7.** Styczna do krzywej  $f(x)$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  ma równanie

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \text{ Równanie normalnej (prostopadłej do stycznej)}$$

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Wyznaczyć równania stycznej i normalnej do funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_0$ :

a)  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $x_0 = 7$ , b)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $x_0 = \sqrt{2}$ , c)  $f(x) = x^x$ ,  $x_0 = 2$ ,

d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ .

**Zad. 8.** Znaleźć trzecią pochodną funkcji  $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$ .

**Zad. 9.** Korzystając z twierdzenia de l'Hospitala obliczyć granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + e^{-x} - e^x}{x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \ln(1 - x)$ ,

e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2)^{x-2}$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x-2} \right)^{x-2}$ , g)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left( \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} 2x} \right)$ , h)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$ .

**Zad. 10.** Korzystając z różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażeń:

a)  $\sqrt[4]{16,04}$ , b)  $\sqrt{8,96}$ , c)  $(2,01)^2$ , d)  $\arctg(0,98)$ , e)  $\sin 29^\circ$ , f)  $\ln 1,02$ .

**Zad. 9.i)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

**Zad. 9.j)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

**Zad. 9.k)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$

**Zad. 9.l)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.