ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska Wydział Informatyki i Telekomunikacji Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu.

Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody

wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w

Karcie Przedmiotu

WYKŁAD 11

Przekształcenia liniowe Wektory i wartości własne macierzy Diagonalizacja macierzy

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania wektorów i wartości własnych macierzy

- diagonalizacja macierzy,
- znajdowanie macierzy podobnych,
- szybkie potęgowanie macierzy,
- wyznaczanie drgań harmonicznych układów,
- analiza grafów,
- mechanika kwantowa.

PRZEKSZTAŁCENIE LINIOWE

WEKTOR I WARTOŚĆ WŁASNA ENDOMORFIZMU

Niech V, V' będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem \mathbb{K} . Funkcję $\varphi \colon V \to V'$ nazywamy **przekształceniem liniowym**, jeśli spełnione są warunki

- $\bullet \ \forall_{a \in \mathbb{K}} \forall_{v \in V} \ \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v).$

Przekształcenie liniowe jest *homomorfizmem* przestrzeni wektorowych.

Wyróżniamy następujące typy homomorfizmów:

- monomorfizm = homomorfizm różnowartościowy
- epimorfizm = homomorfizm, który jest "na"
- izomorfizm = homomorfizm wzajmenie jednoznaczny
- endomorfizm = homomorfizm w siebie, czyli $\varphi: V \to V$
- automorfizm = endomorfizm wzajemnie jednoznaczny.

Niech dany będzie endomorfizm $\varphi \colon V \to V$ Jeśli niezerowy wektor $v \in V$ spełnia przy pewnym skalarze $\lambda \in \mathbb{K}$ warunek

$$\varphi(v) = \lambda \cdot v$$

to wektor v nazywamy **wektorem własnym endomorfizmu** φ , natomiast skalar λ nazywamy **wartością własną endomorfizmu** φ . Mówimy też, że v jest wektorem własnym endomorfizmu φ o wartości własnej λ . Zbiór wszystkich wartości własnych endomorfizmu φ nazywamy **widmem (spektrum)** endomorfizmu i oznaczamy przez $Sp(\varphi)$.

WEKTOR WŁASNY I WARTOŚĆ WŁASNA MACIERZY

WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY MACIERZY

Jeśli macierz A jest macierzą kwadratową stopnia n, to operacja $A \cdot v = w$ może być traktowana jako przekształcenie wektora v w wektor w, przy czym oba wektory mają wymiar równy stopniowi macierzy A. Zatem przekształcenie liniowe będziemy wyrażać jako macierz, która działa na wektory. Wtedy jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n oraz

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$
.

to v będziemy nazywać **wektorem własnym macierzy** A, natomiast λ będziemy nazywać **wartością własną macierzy** A.

Przekształcając powyższe równanie mamy

$$(A - \lambda I) \cdot v = (\lambda I - A) \cdot v = \mathbb{O}.$$

Równanie to ma trywialne rozwiązanie, gdy $v = \mathbb{O}$, (wtedy v nie jest wektorem własnym), a nietrywialne rozwiązanie, gdy macierz $A - \lambda I$ iest macierzą osobliwą, tzn.

$$det(A - \lambda I) = det \left[egin{array}{ccccc} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{array}
ight] = 0,$$

(wtedy *v* jest wektorem własnym).

Łatwo sprawdzić, że

$$det(A-\lambda I) = \rho(\lambda) = d_n \lambda^n + d_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + d_1 \lambda + d_0.$$

Wielomian ρ nazywamy **wielomianem charakterystycznym macierzy** A.

Pierwiastki takiego wielomianu charakterystycznego są wartościami własnymi tej macierzy.

Wyznacznik macierzy *A* jest równy iloczynowi wszystkich wartości własnych tej macierzy.

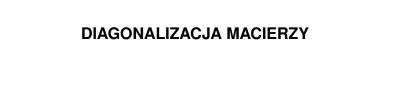
Każda macierz stopnia n ma dokładnie n wartości własnych.



Niech w będzie wektorem postaci w=Cv dla pewnej macierzy nieosobliwej C, gdzie C spełnia równość $Av=\lambda\,v$. Wtedy istnieje macierz B taka, że $Bw=\lambda\,w$. Wartości własne macierzy A i B są jednakowe, (tzn. v jest wektorem własnym macierzy A przynależnym do wartości własnej λ , wektor w=Cv jest wektorem własnym macierzy B przynależnym do tej samej wartości własnej λ). Porównując obydwa wzory otrzymujemy równość

$$A = C^{-1}BC$$
.

Wtedy powiemy, że macierze A i B są podobne, co zapisujemy jako $A \approx B$.



macierz C, taka, że $C^{-1}AC = B$.

Powiemy, że macierz *A* jest *diagonalizowalna*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej *B*, tzn. istnieje nieosobliwa

Twierdzenie 11.1. Niech macierz A bedzie macierza kwadratową stopnia n.

- A jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma n liniowo niezależnych wektorów własnych (tzn. macierz
- utworzona z tych wektorów jest nieosobliwa).
 - Jeśli A jest symetryczna, to jest diagonalizowalna.

Jeśli A ma n różnych wartości własnych to jest

diagonalizowalna.