Matematyka Dyskretna Lista 4 21-27.03.2023r.

1. Dla zbioru $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ tablice działań są następujące:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

   Sporządzić tabliczki dodawania i tabliczkę mnożenia w zbiorze $\mathbb{Z}_n$ dla:
   (a) $n = 5$; (b) $n = 6$; (c) $n = 7$; (d) $n = 8$.

2. Korzystając z tabliczek z zadania 1 rozwiązać w $\mathbb{Z}_n$, dla $n \in \{5, 6, 7, 8\}$, równania:
   (a) $x + 2 = 0$, (b) $2x = 0$, (c) $3x = 0$, (d) $5x = 0$, (e) $3x = 1$, (f) $2x + 4 = 0$,
   (g) $3x + 2 = 4$, (h) $4x + 3 = 1$, (i) $x^2 = 1$, (j) $x^2 + 1 = 0$, (k) $x^2 + x = 2$.

3. Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne względem mnożenia w $\mathbb{Z}_n$, dla:
   (a) $n = 6$; (b) $n = 11$; (c) $n = 12$; (d) $n = 20$.
   Ile jest takich elementów w $\mathbb{Z}_n$, dla:
   (e) $n = 96$; (f) $n = 120$; (g) $n = 324$; (h) $n = 555$?

4. Znaleźć element odwrotny (względem dodawania oraz mnożenia) do elementu:
   (a) 4 w $\mathbb{Z}_{13}$; (b) 7 w $\mathbb{Z}_{15}$; (c) 16 w $\mathbb{Z}_{35}$; (d) 15 w $\mathbb{Z}_{128}$; (e) 32 w $\mathbb{Z}_{333}$; (f) 111 w $\mathbb{Z}_{512}$.

5. Wyznaczyć, jeżeli to możliwe, wszystkie rozwiązania równania:
   (a) $5x = 2$ w $\mathbb{Z}_6$; (b) $4x = 6$ w $\mathbb{Z}_8$; (c) $6x = 4$ w $\mathbb{Z}_8$; (d) $7x = 8$ w $\mathbb{Z}_{11}$; (e) $6x = 7$ w $\mathbb{Z}_{319}$;
   (f) $9x = 6$ w $\mathbb{Z}_{151}$; (g) $3x + 13 = 20x + 7$ w $\mathbb{Z}_{125}$; (h) $4x + 17 = 32x + 10$ w $\mathbb{Z}_{777}$.

6. Rozwiązać układy równań w podanych zbiorach:
   (a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x + 5y = 5 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{11}$; (b) $\begin{cases} 5x + 8y = 3 \\ 7x + 4y = 2 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{13}$; (c) $\begin{cases} 10x + 7y = 6 \\ 13x + 12y = 7 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{17}$.

7. Niech $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Sprawdzić prawdziwość zdań:
   (a) $(\exists x \in A)\,(\forall y \in B)\,(x < y)$; (b) $(\forall x \in A)\,(\exists y \in B)\,(x < y)$; (c) $(\exists! x \in A)\,(\exists! y \in B)\,(x|y)$;
   (d) $(\forall n \in B)\,(\exists x \in \mathbb{Z}_n)\,(3x = 2 (\mathrm{mod}\, n))$; (e) $(\exists n \in B)\,(\forall a \in A)\,(\exists! x \in A)\,(ax = 1 (\mathrm{mod}\, n))$.

8. Wykazać, że
   (a) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, (b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, (c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$, (d) $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

9. Dowodząc nie wprost, wykazać, że:
   (a) nie istnieje zbiór, którego elementy nie są swoimi elementami (antynomia Russella),
   (b) dla każdego (ściśle) rosnącego ciągu liczb naturalnych (a_n) zachodzi $a_n \geqslant n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

10. Udowodnić, że
    (a) liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, (b) istnieją liczby niewymierne a i b takie, że liczba a^b jest wymierna.