# ALGEBRA LINIOWA
# Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

# WYKŁAD 11

Przekształcenia liniowe
Wektory i wartości własne macierzy
Diagonalizacja macierzy

## NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

### Przykładowe zastosowania wektorów i wartości własnych macierzy

- diagonalizacja macierzy,
- znajdowanie macierzy podobnych,
- szybkie potęgowanie macierzy,
- wyznaczanie drgań harmonicznych układów,
- analiza grafów,
- mechanika kwantowa.

# PRZEKSZTAŁCENIE LINIOWE

# WEKTOR I WARTOŚĆ WŁASNA ENDOMORFIZMU

Niech $V, V'$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Funkcję $\varphi\colon V \to V'$ nazywamy ***przekształceniem liniowym***, jeśli spełnione są warunki

- $\forall_{v,w\in V}\ \varphi(v+w) = \varphi(v)+\varphi(w)$
- $\forall_{a\in\mathbb{K}}\forall_{v\in V}\ \varphi(a\cdot v) = a\cdot\varphi(v)$.

Przekształcenie liniowe jest ***homomorfizmem*** przestrzeni wektorowych.
Wyróżniamy następujące typy homomorfizmów:

- monomorfizm = homomorfizm różnowartościowy
- epimorfizm = homomorfizm, który jest "na"
- izomorfizm = homomorfizm wzajmenie jednoznaczny
- **endomorfizm = homomorfizm w siebie, czyli** $\varphi\colon V \to V$
- automorfizm = endomorfizm wzajemnie jednoznaczny.

Niech dany będzie endomorfizm $\varphi\colon V \to V$ Jeśli niezerowy wektor $v \in V$ spełnia przy pewnym skalarze $\lambda \in \mathbb{K}$ warunek

$$\varphi(v) = \lambda \cdot v,$$

to wektor $v$ nazywamy ***wektorem własnym endomorfizmu*** $\varphi$, natomiast skalar $\lambda$ nazywamy ***wartością własną endomorfizmu*** $\varphi$. Mówimy też, że $v$ jest wektorem własnym endomorfizmu $\varphi$ o wartości własnej $\lambda$. Zbiór wszystkich wartości własnych endomorfizmu $\varphi$ nazywamy ***widmem (spektrum)*** endomorfizmu i oznaczamy przez $Sp(\varphi)$.

# WEKTOR WŁASNY I WARTOŚĆ WŁASNA MACIERZY

# WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY MACIERZY

Jeśli macierz $A$ jest macierzą kwadratową stopnia $n$, to operacja $A \cdot v = w$ może być traktowana jako przekształcenie wektora $v$ w wektor $w$, przy czym oba wektory mają wymiar równy stopniowi macierzy $A$. Zatem przekształcenie liniowe będziemy wyrażać jako macierz, która działa na wektory. Wtedy jeśli $A$ jest macierzą kwadratową stopnia $n$ oraz

$$A \cdot v = \lambda \cdot v,$$

to $v$ będziemy nazywać ***wektorem własnym macierzy*** $A$, natomiast $\lambda$ będziemy nazywać ***wartością własną macierzy*** $A$.

Przekształcając powyższe równanie mamy

$$(A - \lambda I) \cdot v = (\lambda I - A) \cdot v = \mathbb{O}.$$

Równanie to ma trywialne rozwiązanie, gdy $v = \mathbb{O}$, (wtedy $v$ nie jest wektorem własnym), a nietrywialne rozwiązanie, gdy macierz $A - \lambda I$ jest macierzą osobliwą, tzn.

$$det(A - \lambda I) \ = det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

(wtedy $v$ jest wektorem własnym).

Łatwo sprawdzić, że

$$det(A-\lambda I)=\rho(\lambda)=d_n\lambda^n+d_{n-1}\lambda^{n-1}+...+d_1\lambda+d_0.$$

Wielomian $\rho$ nazywamy ***wielomianem charakterystycznym macierzy** A*.
Pierwiastki takiego wielomianu charakterystycznego są wartościami własnymi tej macierzy.
Wyznacznik macierzy $A$ jest równy iloczynowi wszystkich wartości własnych tej macierzy.
Każda macierz stopnia $n$ ma dokładnie $n$ wartości własnych.

# PODOBIEŃSTWO MACIERZY

Niech $w$ będzie wektorem postaci $w = Cv$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $C$, gdzie $C$ spełnia równość $Av = \lambda v$. Wtedy istnieje macierz $B$ taka, że $Bw = \lambda w$. Wartości własne macierzy $A$ i $B$ są jednakowe, (tzn. $v$ jest wektorem własnym macierzy $A$ przynależnym do wartości własnej $\lambda$, wektor $w = Cv$ jest wektorem własnym macierzy $B$ przynależnym do tej samej wartości własnej $\lambda$). Porównując obydwa wzory otrzymujemy równość

$$A = C^{-1}BC.$$

Wtedy powiemy, że ***macierze*** $A$ ***i*** $B$ ***są podobne***, co zapisujemy jako $A \approx B$.

# DIAGONALIZACJA MACIERZY

Powiemy, że macierz $A$ jest ***diagonalizowalna***, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej $B$, tzn. istnieje nieosobliwa macierz $C$, taka, że $C^{-1}AC = B$.

***Twierdzenie 11.1.*** *Niech macierz A będzie macierzą kwadratową stopnia $n$*.

- *A jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma n liniowo niezależnych wektorów własnych (tzn. macierz utworzona z tych wektorów jest nieosobliwa).*
- *Jeśli A ma n różnych wartości własnych to jest diagonalizowalna.*
- *Jeśli A jest symetryczna, to jest diagonalizowalna.*