ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 14

Płaszczyzna
Równania płaszczyzny
Prosta
Równania prostej

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania geometrii analitycznej

- rozwiązanie układów równań liniowych,
- obliczanie odległości różnych obiektów zadanych równaniami liniowymi lub współrzędnymi punktów,
- rozwiązanie różnego rodzaju zagadnień metodami algebraicznymi poprzez wprowadzenie układu współrzędnych punktów,
- projektowanie obiektów,
- programowanie (np. gier komputerowych, maszyn),
- inne zastosowania w fizyce i w technice.

PŁASZCZYZNA

Równanie płaszczyzny Q ***przechodzącej przez punkt*** $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ***i prostopadłej do niezerowego wektora*** $\overline{n} = [A, B, C]$, (tzn. $A^2 + B^2 + C^2 > 0$) zwanego ***wektorem normalnym*** jest postaci

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Po podstawieniu $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

otrzymujemy ***postać ogólną równania płaszczyzny***.

Jeżeli płaszczyzna nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, to $D \neq 0$. Dzieląc stronami przez $-D$, po odpowiednich podstawieniach otrzymujemy równanie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

zwane ***postacią odcinkową równania płaszczyzny***. Płaszczyzna ta przecina oś OX w punkcie $x = a$, oś $0Y$ w punkcie $y = b$ i oś OZ w punkcie $z = c$.

Równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez punkt $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i rozpiętej na dwóch niewspółliniowych wektorach $v_1 = [x_1, y_1, z_1], v_2 = [x_2, y_2, z_2]$ ma postać

$$M = M_0 + av_1 + bv_2,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a $M = (x, y, z)$ oznacza dowolny zmienny punkt płaszczyzny Q.

Powyższe równanie możemy tez zapisać jako

$$\begin{cases} x = x_0 + ax_1 + bx_2 \\ y = y_0 + ay_1 + by_2 \\ z = z_0 + az_1 + bz_2 \end{cases}$$

Postać tę nazywamy ***postacią parametryczną równania płaszczyzny***.

Wektor normalny tej płaszczyzny ma postać $\overline{n} = v_1 \times v_2$.

Niech $M = (x, y, z)$ oznacza dowolny zmienny punkt płaszczyzny Q. Równanie płaszczyzny Q przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$ wyraża się wzorem

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0,$$

który po rozwinięciu wyznacznika jest szukanym **równaniem płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty**.

Wektor normalny tej płaszczyzny ma postać $\overline{n} = \overline{M_1 M_2} \times \overline{M_1 M_3}$ i jest prostopadły do wektora $\overline{M_1 M}$.

PROSTA

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny o równaniach odpowiednio:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Wiadomo, że płaszczyzny takie przecinają się wzdłuż prostej, dlatego układ powyższy określa prostą w przestrzeni. Nazywamy go ***postacią krawędziową równania prostej***.

Równania prostej l przechodzącej przez ustalony punkt $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, której kierunek określa ustalony, niezerowy wektor $v = [x_1, y_1, z_1]$, (nazywamy ***wektorem kierunkowym*** prostej l) możemy tez wyrazić wzorem

$$M = M_0 + av,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, a $M = (x, y, z)$ oznacza dowolny zmienny punkt prostej l. Postać tę nazywamy ***postacią wektorową równania prostej***.

Powyższe równanie możemy też zapisać jako

$$\begin{cases} x = x_0 + ax_1 \\ y = y_0 + ax_2 \\ z = z_0 + ax_3 \end{cases}$$

Postac tę nazywamy ***postacią parametryczną równania prostej***.

Eliminując a z powyższych równań otrzymujemy

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1},$$

którą nazywamy ***postacią kierunkową równania prostej***.

(Jeżeli w równaniach tych jeden z mianowników ma wartość zero, to przyjmujemy, że również odpowiadający mu licznik jest równy zeru).

Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty $M_1 = (x_1, y_1, z_1), M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ma postać

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

co możemy przedstawić w postaci parametrycznej jako

$$\begin{cases} x = x_1 + a(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + a(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + a(z_2 - z_1) \end{cases}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$. Gdy $a \in (0, 1)$, to równania powyższe są ***równaniami odcinka***.