W6 – Systemy naprawialne

Henryk Maciejewski

Marek Woda

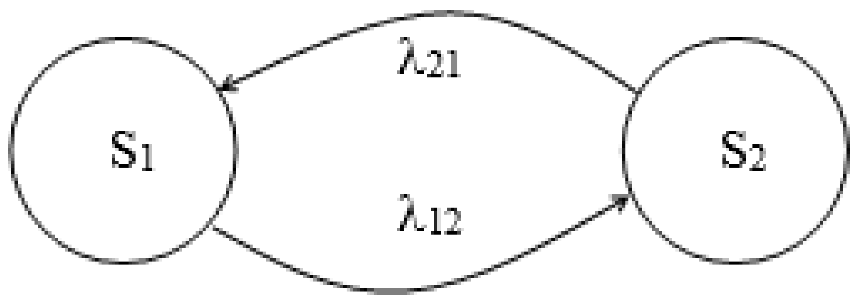
Plan wykładu

1. Graf stanów elementu naprawialnego / systemu

2. Analiza niezawodnościowa systemu – model Markowa

3. Naprawy prewencyjne – analiza (*preventive maintenance*)

Graf stanów elementu naprawialnego



S1 – stan sprawności

S2 – stan niesprawności (element uszkodzony – w trakcie naprawy)

λ_{12} – intensywność przejść (intensywność uszkodzeń) np. $\frac{2}{rok}$

λ_{21} – intensywność przejść (intensywność napraw)

Opis i modelowanie takich systemów – za pomocą procesów stochastycznych

Procesy stochastyczne - przypomnienie

Przestrzeń probabilistyczna:

$$[\Omega, \mathcal{B}, P]$$

Ω – zbiór *zdarzeń elementarnych,* $\omega \in \Omega$

$\mathcal{B}$ – zbiór *zdarzeń losowych*

P – *prawdopodobieństwo* zdarzeń ze zbioru $\mathcal{B}$

Proces stochastyczny – rodzina zmiennych losowych:

$$\{X(t): t \in T\}$$

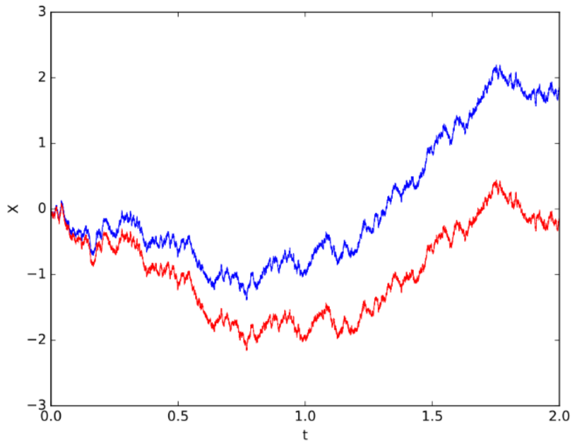
t – parametr (indeks) procesu
np. interpretowany jako czas (np. $T=[0, \infty)$)

Wartości zmiennych losowych X – **stany** procesu

Procesy stochastyczne - przypomnienie

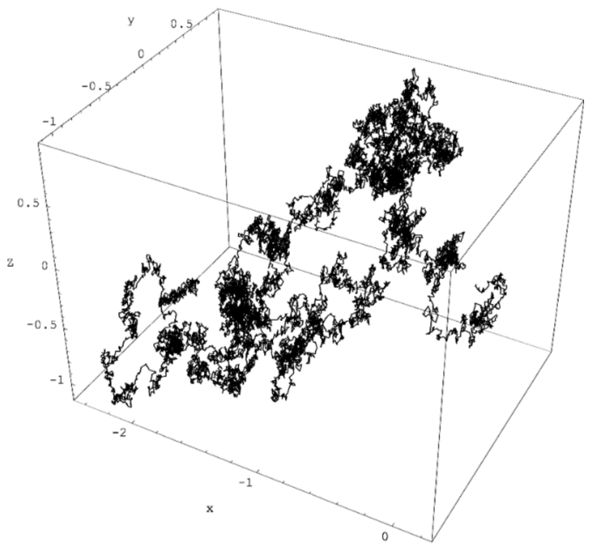
Przykład – ruchy Browna (proces Wienera)

(przyrosty procesu $X(t_2) - X(t_1)$ niezależne i mają rozkład normalny)



Stany procesu w R

X(t) dla ustalonego t – zmienna losowa

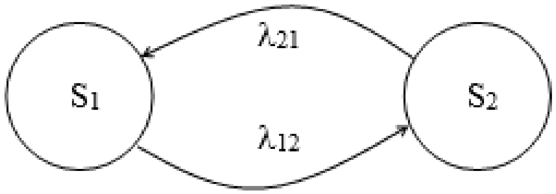


Stany procesu w R^3

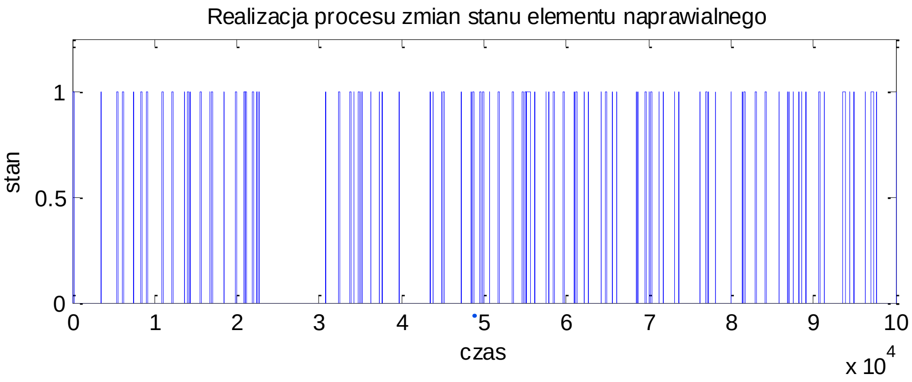
Procesy Markowa, łańcuchy Markowa

Proces Markowa - proces bez pamięci: kolejny stan zależy tylko od stanu bieżącego

Łańcuch Markowa (Markov chain) – proces Markowa z dyskretną przestrzenią stanów



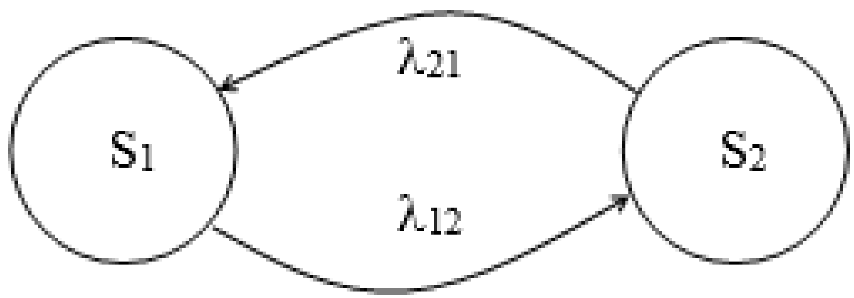
Stany procesu {S1,S2), czas ciągły



Czas ciągły – określamy **intensywności przejść** (*transition rates*)

Czas dyskretny – określamy **prawdopodobieństwa przejść**

Graf stanów elementu naprawialnego

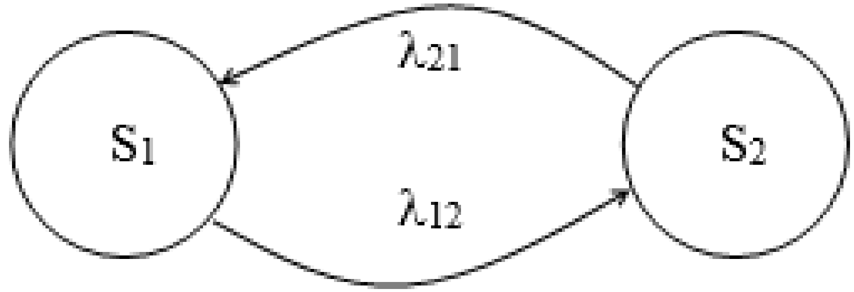


S1 – stan sprawności

S2 – stan niesprawności (element uszkodzony – w trakcie naprawy)

λ_{12} – intensywność przejść (intensywność uszkodzeń)

λ_{21} – intensywność przejść (intensywność napraw)



Analiza niezawodności elementu naprawialnego w oparciu o:

F(t) – rozkład czasu pracy

G(t) – rozkład czasu naprawy

Przyjmujemy F(t), G(t) – rozkłady wykładnicze, ze średnimi czasami:

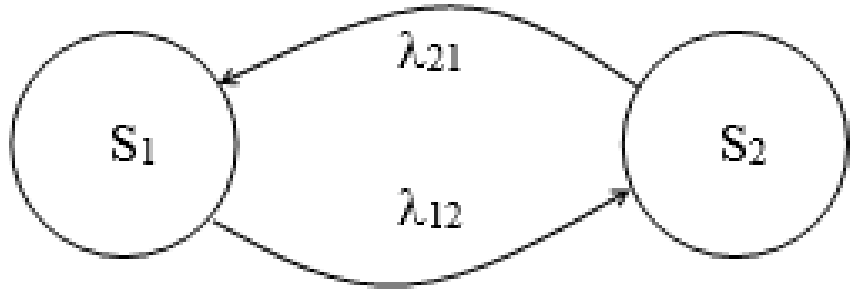
T1 – średni czas pracy,

T2 – średni czas naprawy,

wówczas

$\lambda_{12} = 1/T1$ intensywność uszkodzeń

$\lambda_{21} = 1/T2$ intensywność napraw



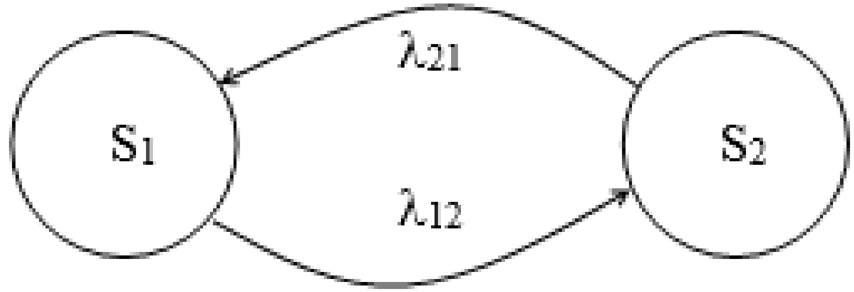
Analizujemy prawdopodobieństwo przebywania systemu w stanach S1, S2: $P_1(t)$, $P_2(t)$

Użyteczną miarą w analizie systemów naprawialnych są **prawdopodobieństwa stacjonarne**:

$$p_i = \lim_{t \to \infty} P_i\,(t)$$

Na mocy twierdzenia ergodycznego Markowa, p_1, p_2:

- istnieją
- są skończone
- nie zależą od $P_1(0)$ i $P_2(0)$, tj. od stanu początkowego



$$p_i = \lim_{t \to \infty} P_i\,(t)$$

Zachodzą zależności:

$p_1 = \lambda_{21}/(\lambda_{12}+\lambda_{21})=T_1/(T_1+T_2)$

$p_2 = \lambda_{12}/(\lambda_{12}+\lambda_{21})=T_2/(T_1+T_2)$

A – **współczynnik gotowości** (prawdopodobieństwo przebywania systemu w stanie sprawności)

$A = p_1$

Graf stanów **systemu** naprawialnego

Przykład: Rozważamy system złożony z dwóch elementów, gdzie drugi element jest elementem rezerwowym

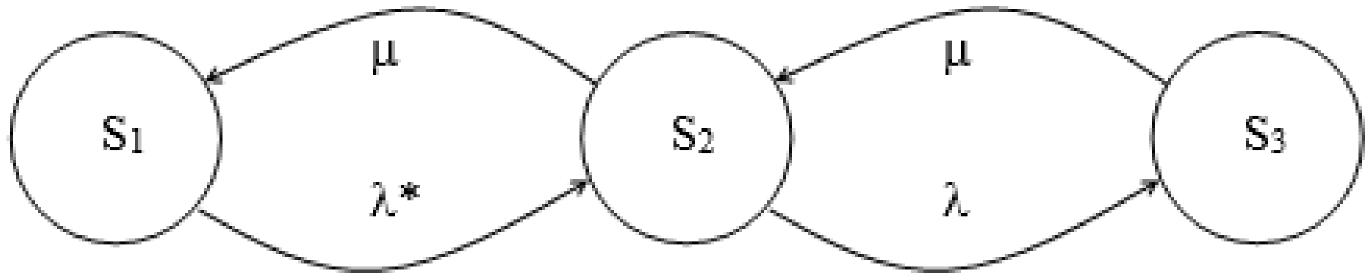
- rezerwa gorąca (oba elementy pracują), lub
- rezerwa zimna (drugi włączany w zerowym czasie po awarii pierwszego)

Stany systemu:

S1 – oba elementy sprawne – stan sprawności

S2 – jeden element sprawny, drugi uszkodzony – stan sprawności

S3 – oba uszkodzone – stan niesprawności



S1 – oba elementy sprawne – stan sprawności

S2 – jeden element sprawny, drugi uszkodzony – stan sprawności

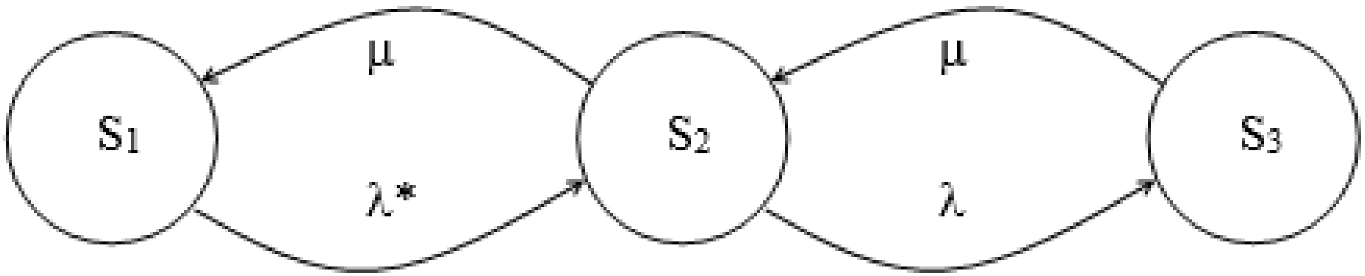
S3 – oba uszkodzone – stan niesprawności

λ - intensywność uszkodzeń

μ - intensywność napraw

$\lambda^* = 2\lambda$ dla rezerwy gorącej (oba pracują)

$\lambda^* = \lambda$ dla rezerwy zimnej (tylko jeden pracuje)



S1 – oba elementy sprawne – stan sprawności

S2 – jeden element sprawny, drugi uszkodzony – stan sprawności

S3 – oba uszkodzone – stan niesprawności

A = $p_1 + p_2$ – współczynnik gotowości tego systemu

Pokażemy teraz ogólną procedurę wyznaczania **prawdopodobieństw stacjonarnych** oraz FPT - First Passage time **oczekiwanych czasów przejścia do stanu niesprawności** dla systemu opisanego modelem Markowa

Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

1. Zdefiniować stany niezawodnościowe systemu S1, S2,…,Sn (przyjmujemy, że stany zostały ponumerowane w taki sposób, że indeksy 1,...,m odpowiadają stanom sprawności systemu, zaś m+1,...,n – stanom niesprawności systemu)

2. Określić intensywności przejść pomiędzy stanami.
   Dla rozkładu wykładniczego czasu przejścia Si → Sj o dystrybuancie $F(t)=1-\exp(-\lambda_{ij}t)$, intensywność przejścia Si→Sj jest równa λ_{ij}.

3. Zbudować macierz intensywności przejść $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{dla } i \neq j \\ -\sum\limits_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_{ik} & \text{dla } i = j \end{cases}$$

Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

4. Wyznaczyć wektor $\mathbf{p}=[p_1,p_2,...,p_n]$ prawdopodobieństw stacjonarnych przebywania systemu w stanach 1,2,...,n:

$$\mathbf{p} = [0,0,\ldots,0,1]_{1\times n} \cdot \mathbf{A}_{\text{prob}}^{-1}$$

gdzie $\mathbf{A}_{\text{prob}}$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ po zastąpieniu ostatniej kolumny A wektorem złożonym z 1

$$A_{prob} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 1 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & 1 \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [0,0,\ldots,1]_{1\times n} \times A_{prob}^{-1} = [p_1, p_2, \ldots p_n]_{1\times n}$$

Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

5. Wyznaczyć średni czas t_1=**t**(1) przejścia systemu ze stanu S_1 (sprawności) do stanu niesprawności, gdzie wektor **t** otrzymuje się z zależności:

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -(\mu+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{B}_{m \times m}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

gdzie macierz **B** powstaje z macierzy **A** po usunięciu wierszy i kolumn odpowiadających stanom niesprawności.

Element **t**(i) (i=1,2,...,m) wektora **t** jest ***średnim czasem przejścia*** ze stanu sprawności i **do stanu niesprawności**.

Procedura analizy niezawodności systemu opisanego modelem Markowa

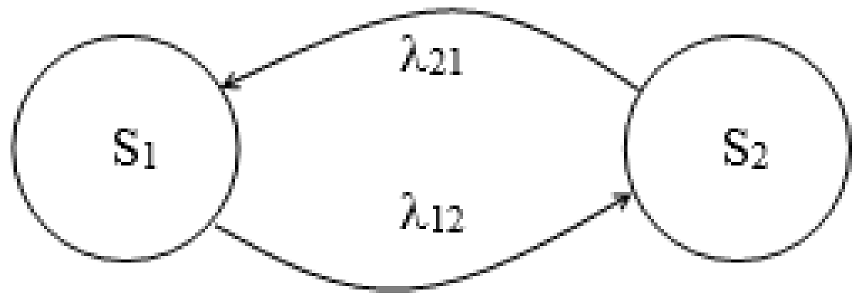
6. Na podstawie wektora p, wyznaczyć współczynnik gotowości systemu, jako sumę elementów wektora p odpowiadających stanom sprawności:

$$A = \sum_{i:\, Si-\text{stan sprawności}} p_i$$

średni czas pracy systemu (czas do awarii):

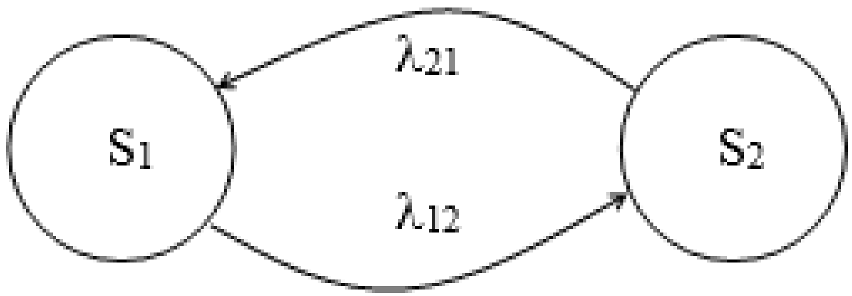
$$t_1 = \mathbf{t}(1)$$

Przykład 1
System składa się z 55 węzłów o modelu:
(system bez rezerwy: S_1 – stan sprawności, S_2 – niesprawności)



Przyjmujemy parametry:
$1/\lambda_{12}$ = 20000 h -- średni czas pracy (MTBF)
$1/\lambda_{21}$ = 24 h -- średni czas naprawy

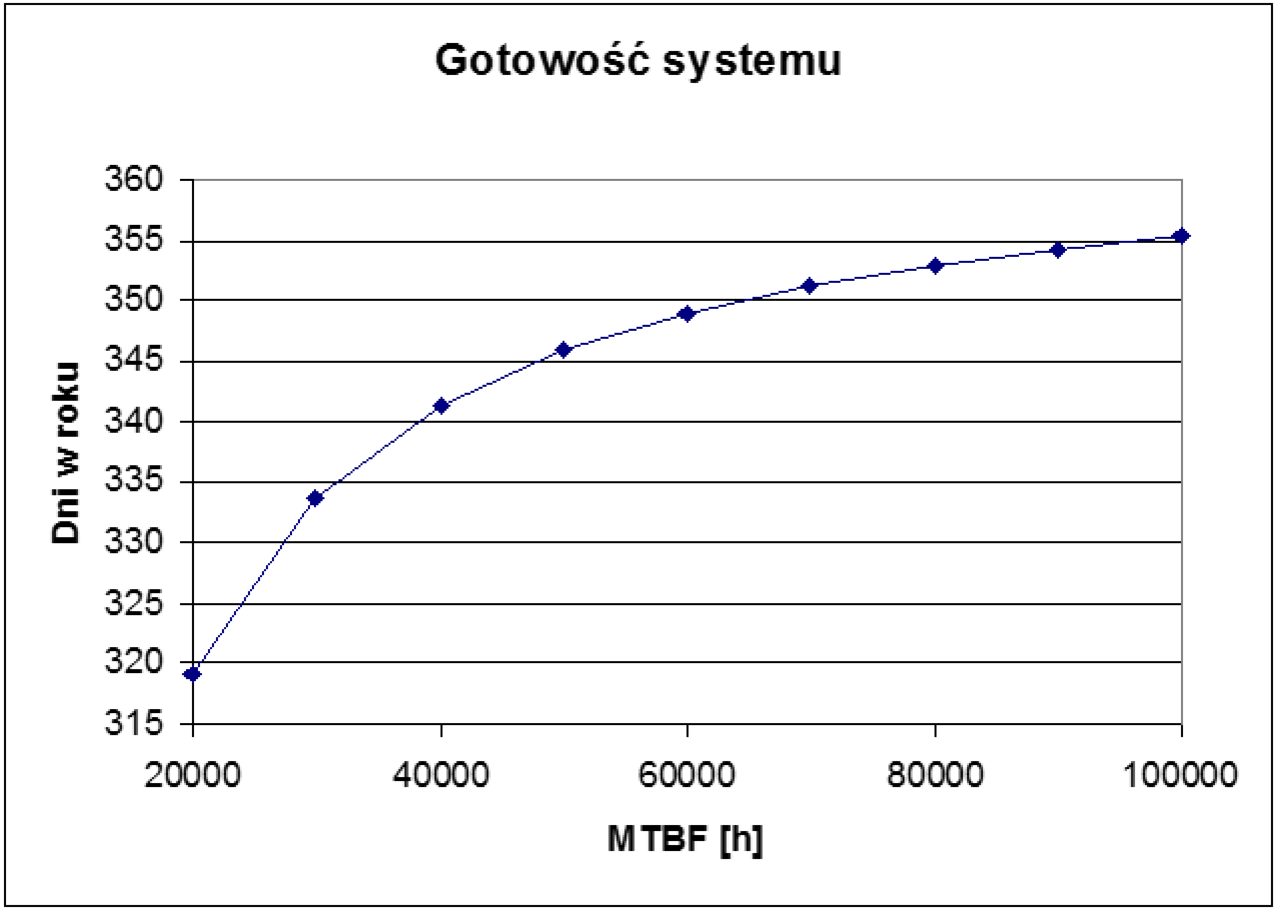
Przykład 1
System składa się z 55 węzłów o modelu:
(system bez rezerwy: S_1 – stan sprawności, S_2 – niesprawności)



Wyniki analizy:

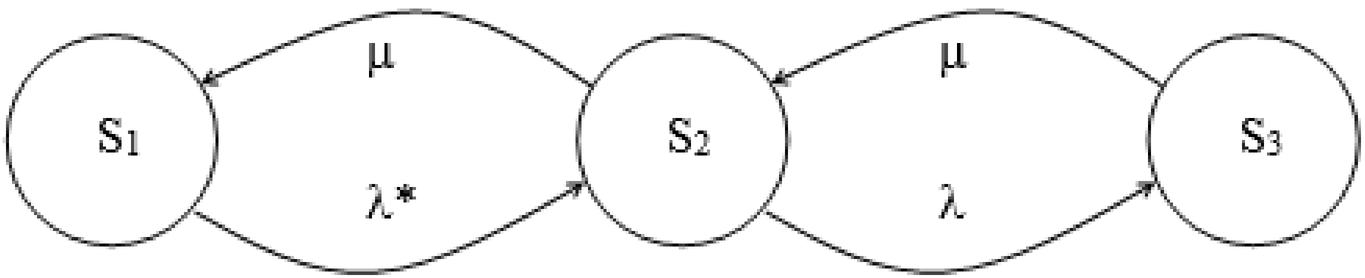
a (gotowość)	a [dni] (gotowość – dni w roku)	1-a [h] (niegotowość – godziny w roku)	t [y] (średni czas do awarii systemu)	t [w] (średni czas do awarii systemu – tygodnie)
0.8743	319.1	1101	0.02038	1.06

Przykład 1
Gotowość w zależności od parametru MTBF urządzenia (system bez rezerwowania)



Przykład 1
Gotowość w zależności od średniego czasu naprawy (system bez rezerwowania)

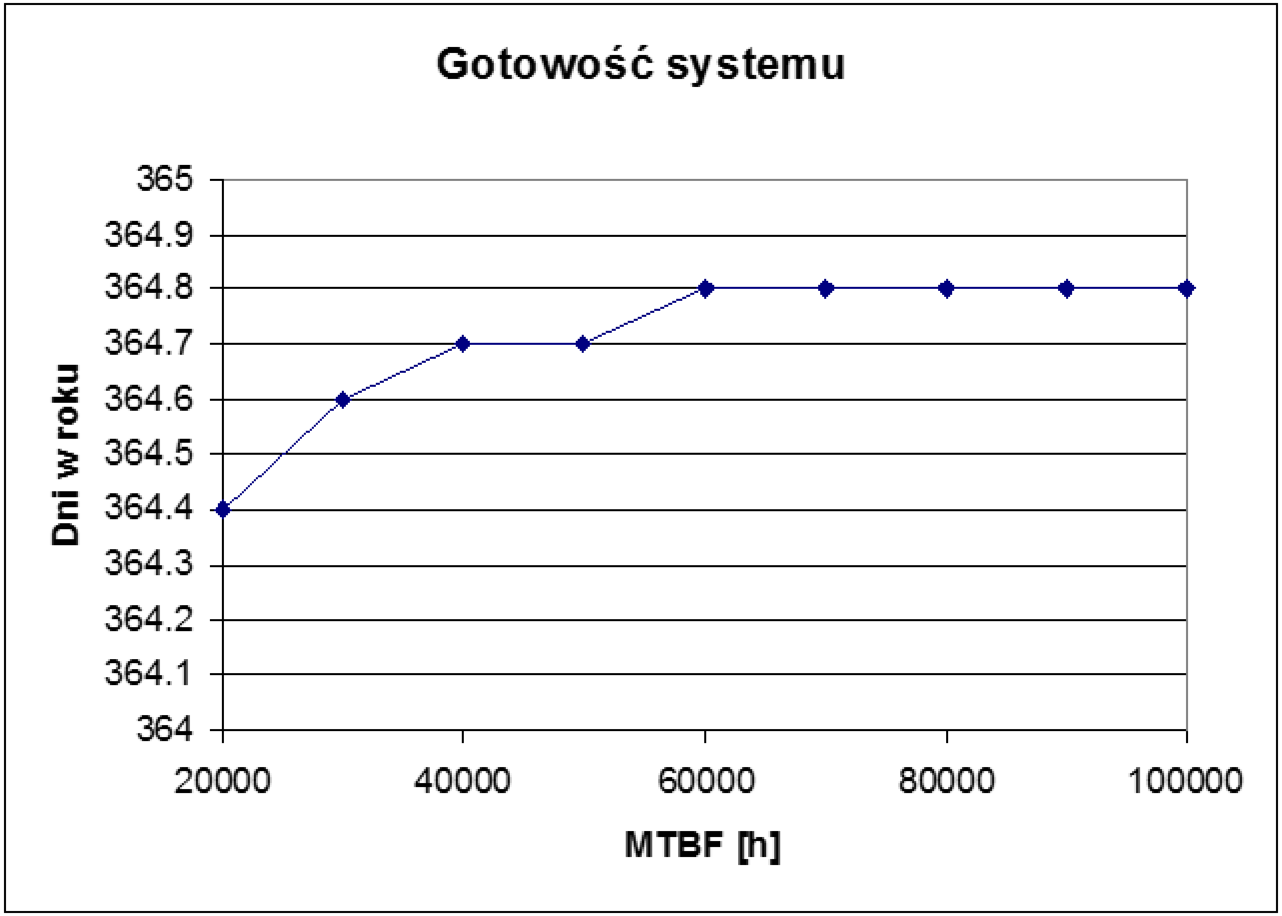
Przykład 2
System składa się z 55 węzłów o modelu:
(system z rezerwą)



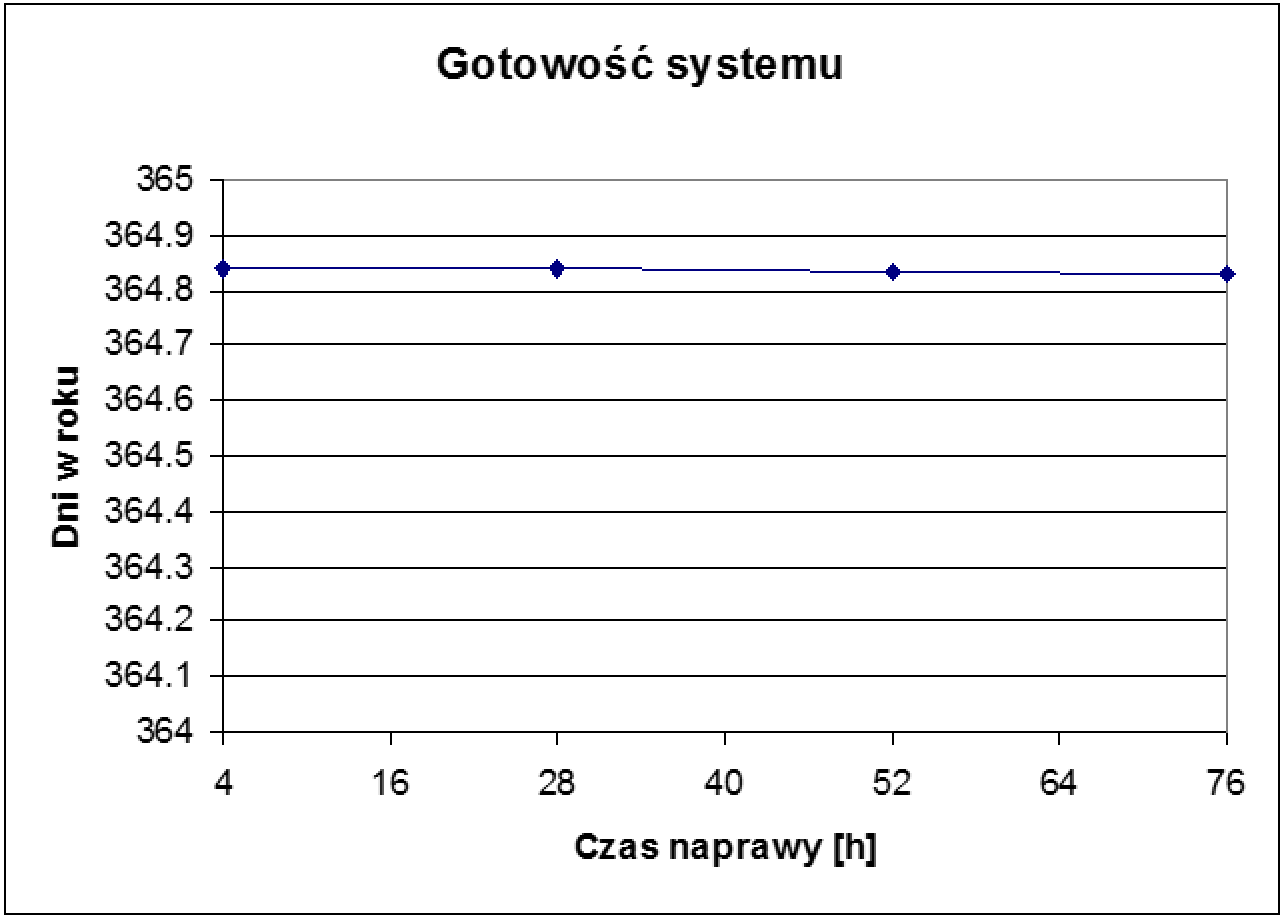
Wyniki analizy:

a (gotowość)	a [dni] (gotowość – dni w roku)	1-a [h] (niegotowość – godziny w roku)	t [y] (średni czas do awarii systemu)	t [w] (średni czas do awarii systemu – tygodnie)
0.9984	364.4	14.35	0.04	2.12

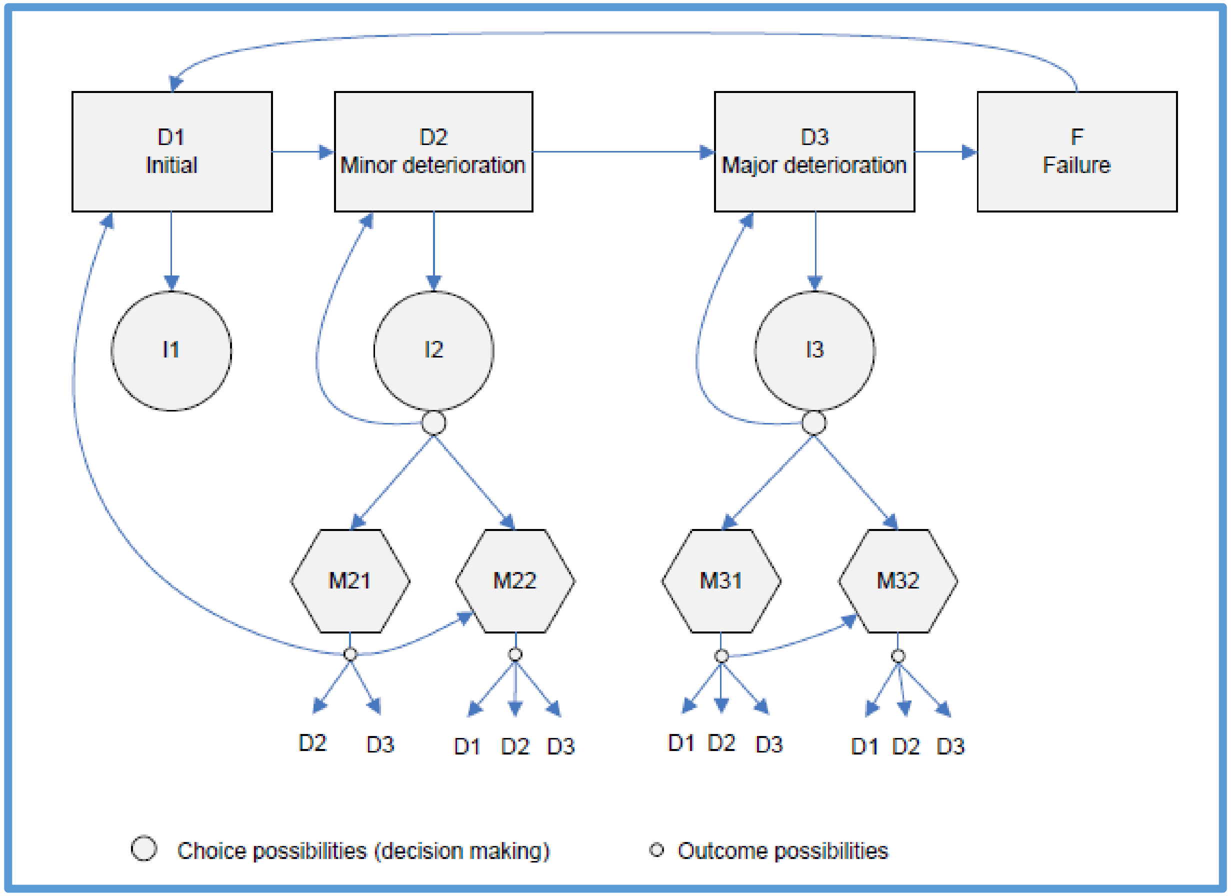
Przykład 1
Gotowość w zależności od parametru MTBF urządzenia (system z rezerwowaniem)



Przykład 1
Gotowość w zależności od średniego czasu naprawy (system z rezerwowaniem)



Modelowanie wpływu napraw prewencyjnych



Stany:

- zużycia (D, deterioration)
- przeglądów (I, inspection)
- napraw (M, maintenance)

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.

Planowanie napraw prewencyjnych

Proponujemy model systemu uwzględniający stany:

- zużycia (D, *deterioration*)
- przeglądów (I, *inspection*)
- napraw (M, *maintenance*)

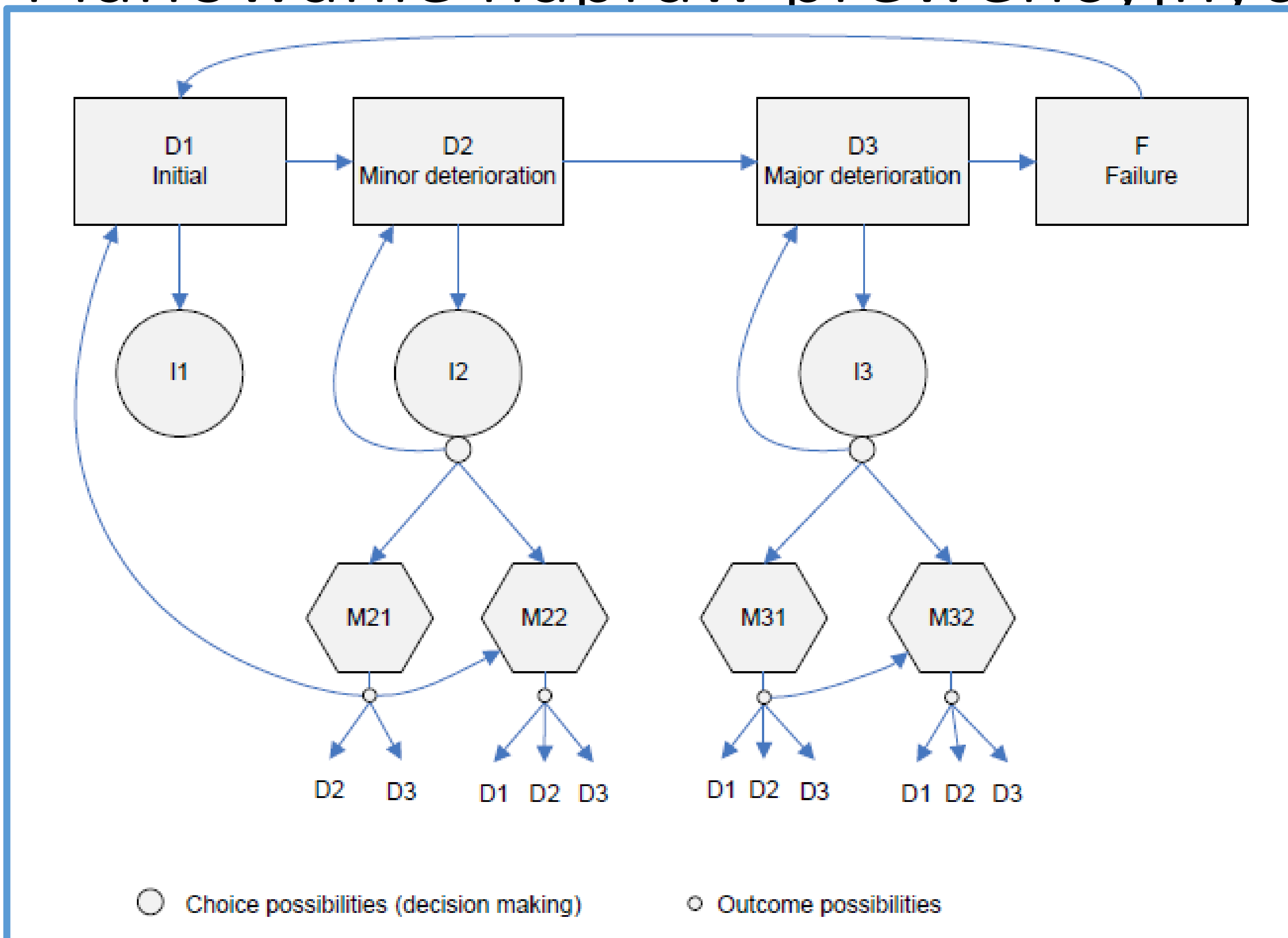
Parametry systemu:

- intensywności przejść (zał.: D1→D2→D3→F: 6, 10, 2 y)
- prawdopodobieństwa decyzji w stanach I
- prawdopodobieństwa ścieżek M→D (wynik napraw)
- koszty stanów

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.

Planowanie napraw prewencyjnych



Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.

Przykład: Analiza następującej *maintenance policy*:

	M21	M22	M32	M33
Cost of state	3.5	10	10	75
Duration	8 h	32 h	32 h	5 d
Prob M→D1	0	0	0	0.99
Prob M→D2	0.99	0.98	0.8	0.01
Prob M→D3	0.01	0.02	0.2	0
Prob M→next M	0	N/A	0	N/A

Wyniki:

Cost 4.0
Unavailability 0.001
Time to failure 27.8 years

(bez napraw prewencyjnych T_F=18 lat)

Henryk MACIEJEWSKI, George ANDERS

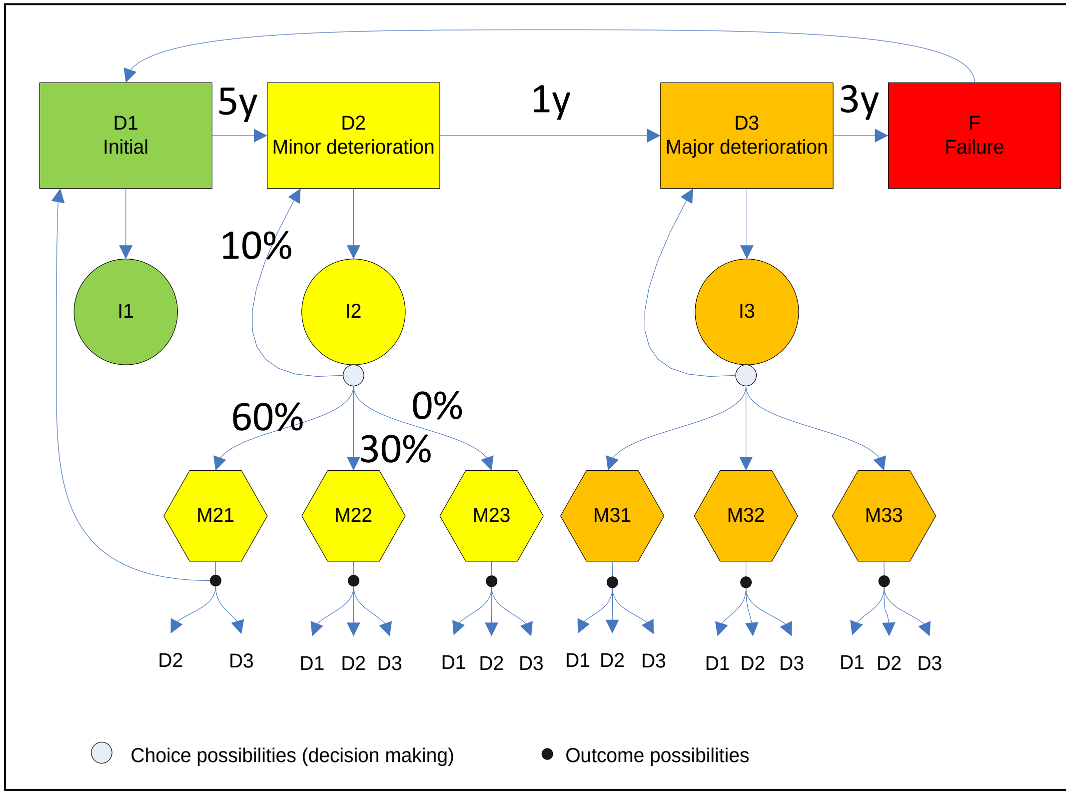
Maximization of dependability through multidimensional optimization of a Markov model of deterioration and maintenance.

Przykład – analiza wpływu przeglądów / napraw prewencyjnych na niezawodność

- Budujemy probabilistyczny model procesu życia/inspekcji/napraw (proces Markowa)

  D – stany sprawności systemu
  I – stany inspekcji
  M – stany napraw

  Określamy czasy przejść między stanami, czas realizacji inspekcji i napraw oraz prawdopodobieństwa decyzji



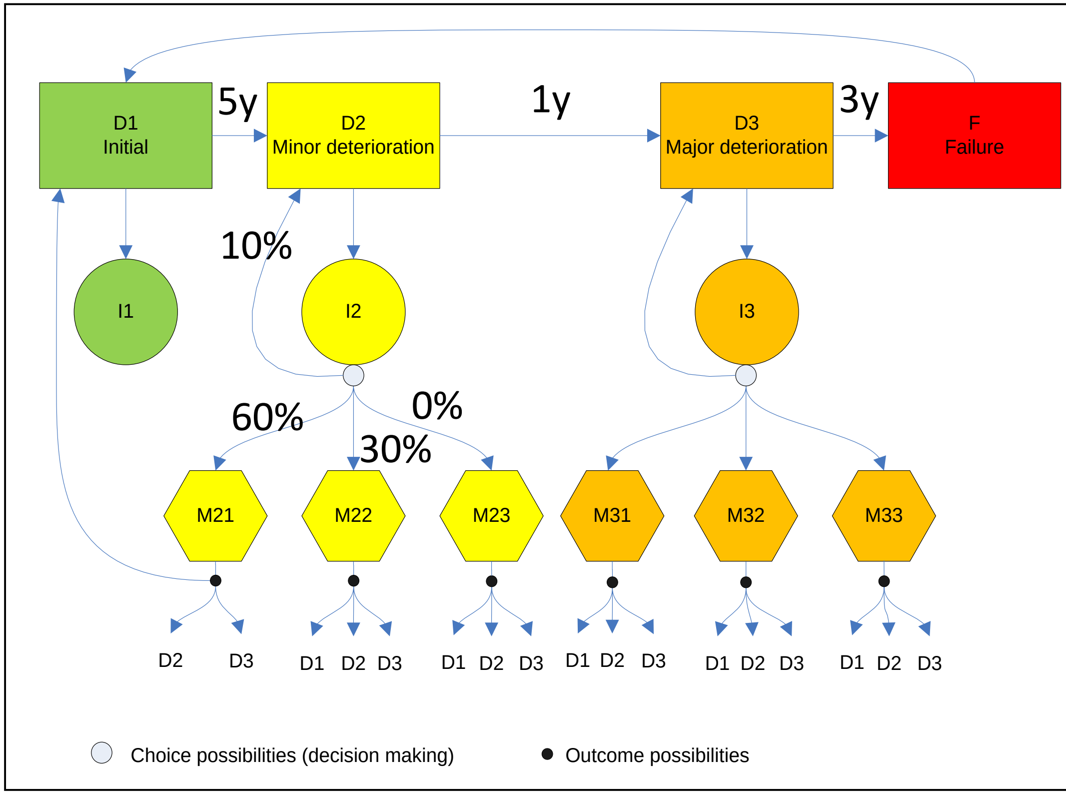
Przykład – analiza wpływu przeglądów / napraw prewencyjnych na niezawodność

- Rozwiązanie:

  czasy przejścia (do awarii)
  D1→F
  D2→F
  D3→F

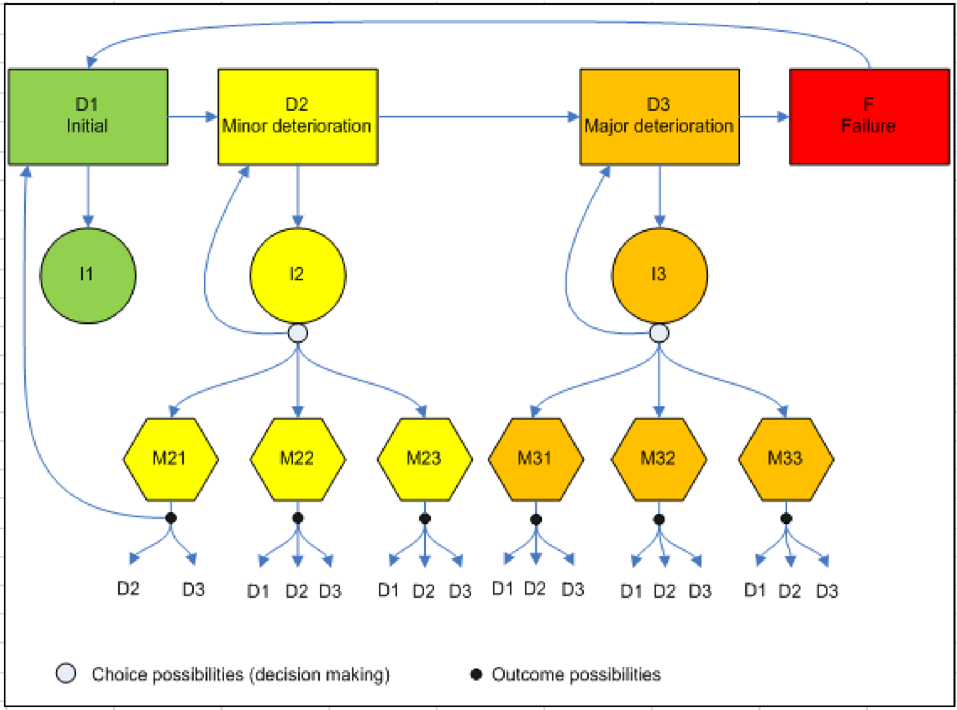
  prawdopodobieństwa przebywania w systemu w stanach

- Rozwiązanie analityczne procesu Markowa (rozwiązanie symulacyjne jeśli chcemy znać rozkłady czasów przejść)



	System in initial state of deterioration (D1)		
D1	D1-->D2	5	Transition time to next deterioration state [year]
	D1-->I1	1	Transition time to inspection [year]
I1	uI1	7,0192308	Inspection duration [days]
	cI1	1	Cost of state
	System in minor state of deterioration (D2)		
D2	D2-->D3	1	Transition time to next deterioration state [year]
	D2-->I2	10	Transition time to inspection [year]
I2	uI2	7,0192308	Inspection duration [days]
	I2-->M21	182,5	Time to minor maintenance [days]
	I2-->M22	182,5	Time to medium maintenance [days]
	I2-->M23	182,5	Time to major maintenance [days]
	pI2-->M21	60	Probability: do minor maintenance
	pI2-->M22	30	Probability: do medium maintenance
	pI2-->M23	0	Probability: do major maintenance
	pI2-->D2	10	Probability: do nothing
	cI2	5	Cost of state
M21	uM21	14,038462	Minor maintenance duration [days]
	pM21-->D1	20	Probability: after maintenace system as new (D1)
	pM21-->D2	75	Probability: after maintenace system in state D2
	pM21-->D3	5	Probability: after maintenance system in state D3
	cM21	50	Cost of state
M22	uM22	14,038462	Medium maintenance duration [days]
	pM22-->D1	25	Probability: after maintenace system as new (D1)
	pM22-->D2	70	Probability: after maintenace system in state D2
	pM22-->D3	5	Probability: after maintenance system in state D3
	cM22	50	Cost of state
M23	uM23	30,416667	Major maintenance duration [days]
	pM23-->D1	30	Probability: after maintenace system as new (D1)
	pM23-->D2	65	Probability: after maintenace system in state D2
	pM23-->D3	5	Probability: after maintenance system in state D3
	cM23	50	Cost of state
	System in major state of deterioration (D3)		
D3	D3-->F	3	Transition time to failure state [year]
	D3-->I3	10	Transition time to inspection [year]
I3	uI3	7,0192308	Inspection duration [days]

Inspekcje co 10 lat



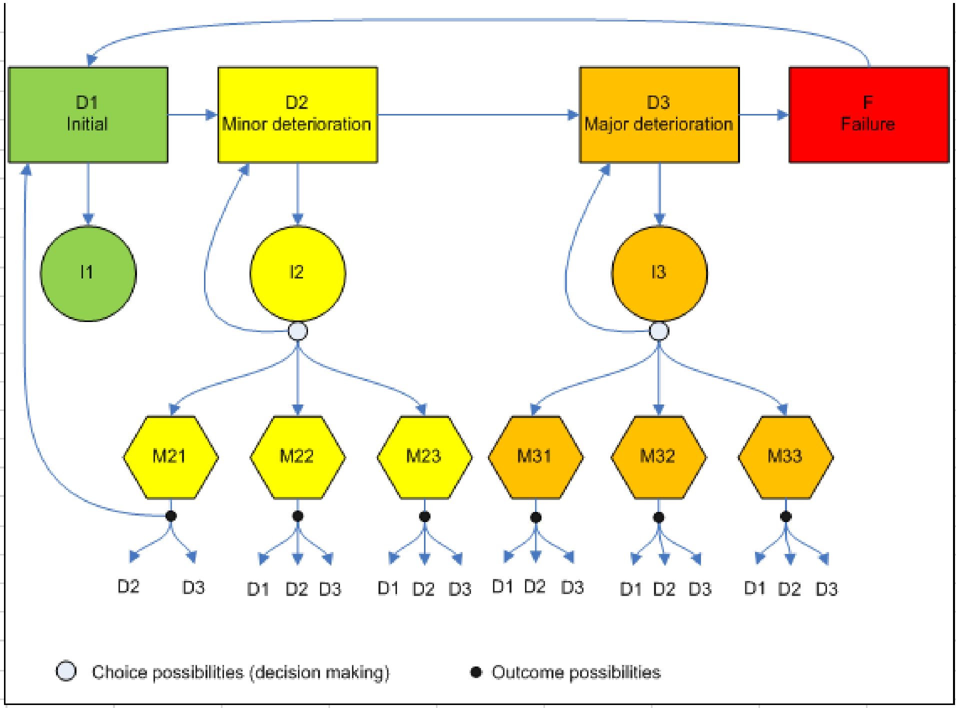
Results: times to failure	
from D1	9,649513
from D2	4,553362
from D3	3,488037

Czas do awarii 9,6 lat

Results: steady state probabilities	
D1	0,505278
D2	0,104103
D3	0,279936
F	0,093901

	System in initial state of deterioration (D1)		
D1	D1-->D2	5	Transition time to next deterioration state [year]
	D1-->I1	1	Transition time to inspection [year]
I1	uI1	7,0192308	Inspection duration [days]
	cI1	1	Cost of state
	System in minor state of deterioration (D2)		
D2	D2-->D3	1	Transition time to next deterioration state [year]
	D2-->I2	1	Transition time to inspection [year]
I2	uI2	7,0192308	Inspection duration [days]
	I2-->M21	182,5	Time to minor maintenance [days]
	I2-->M22	182,5	Time to medium maintenance [days]
	I2-->M23	182,5	Time to major maintenance [days]
	pI2-->M21	60	Probability: do minor maintenance
	pI2-->M22	30	Probability: do medium maintenance
	pI2-->M23	0	Probability: do major maintenance
	pI2-->D2	10	Probability: do nothing
	cI2	5	Cost of state
M21	uM21	14,038462	Minor maintenance duration [days]
	pM21-->D1	20	Probability: after maintenace system as new (D1)
	pM21-->D2	75	Probability: after maintenace system in state D2
	pM21-->D3	5	Probability: after maintenace system in state D3
	cM21	50	Cost of state
M22	uM22	14,038462	Medium maintenance duration [days]
	pM22-->D1	25	Probability: after maintenace system as new (D1)
	pM22-->D2	70	Probability: after maintenace system in state D2
	pM22-->D3	5	Probability: after maintenace system in state D3
	cM22	50	Cost of state
M23	uM23	30,416667	Major maintenance duration [days]
	pM23-->D1	30	Probability: after maintenace system as new (D1)
	pM23-->D2	65	Probability: after maintenace system in state D2
	pM23-->D3	5	Probability: after maintenace system in state D3
	cM23	50	Cost of state
	System in major state of deterioration (D3)		
D3	D3-->F	3	Transition time to failure state [year]
	D3-->I3	1	Transition time to inspection [year]
I3	uI3	7,0192308	Inspection duration [days]

Inspekcje co 1 rok



Results: times to failure	
from D1	14,83071
from D2	9,734563
from D3	8,227189

Czas do awarii 14,8 lat

Results: steady state probabilities	
D1	0,573854
D2	0,112784
D3	0,178251
F	0,063168

! średnia ↑

inaczej symulacje robimy (lepsze)