ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 2

Równanie różniczkowe liniowe
Przykłady równań różniczkowych nieliniowych

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE

Równanie różniczkowe postaci

$$y' + p(x)y = q(x)$$

liniowe względem y i y' nazywamy ***równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego.***

Jeżeli $q(x) = 0$, to jednym z rozwiązań tego równania jest $y = 0$. Przy założeniu $y \neq 0$ równanie rozwiązujemy metodą rozdzielania otrzymując

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Jeżeli $q(x) \neq 0$, to najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y' + p(x)y = 0$$

otrzymując $y = Ce^{-P(x)}$, gdzie $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$.
Teraz stałą C zastępujemy funkcją $u(x)$, (tzn. **uzmienniamy stałą**) otrzymując

$$y = u(x)e^{-P(x)}.$$

Po zróżniczkowaniu i podstawieniu do głównego równania otrzymujemy

$$u' = q(x)e^{P(x)}$$

Obliczamy $u(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}dt + C_1$ i wstawiamy powyżej uzyskując rozwiązanie.

Twierdzenie 2.1 (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania liniowego). *Jeżeli funkcje* $p(x), q(x)$ *są ciągłe na przedziale* (a, b), *to dla dowolnych* $x_0 \in (a, b)$ *oraz* $y_0 \in \mathbb{R}$ *zagadnienie początkowe*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ma tylko jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to określone jest na przedziale (a, b).

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE NIELINIOWE
RÓWNANIE BERNOULLIEGO

Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie postaci

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0,$$

gdzie funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są funkcjami ciągłymi w pewnym wspólnym przedziale (a,b), a $n \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Równanie Bernoulliego przez podstawienie $y^{1-n} = z$ sprowadza się do równania różniczkowego liniowego

$$z' + (1-n)p(x)z + (1-n)q(x) = 0.$$

Dla $n = 0$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne postaci

$$y' + p(x)y + q(x) = 0.$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe jednorodne postaci

$$y' + p(x)y + q(x)y = 0.$$

Daniel Bernoulli (1700 – 1782) prof. matematyki,prof. anatomii i botaniki. Twórca podwalin mechaniki statystycznej (kinetyczno-molekularna teoria gazów). Obszarem jego zainteresowań były także medycyna i fizjologia. Jako matematyk zajmował się **rachunkiem prawdopodobieństwa, równaniami różniczkowymi i metodami przybliżonymi rozwiązywania równań**. Zdefiniował liczbę e. Jako fizyk rozwiązał **problem struny drgającej** i podał równanie ruchu stacjonarnego cieczy idealnej zwane **równaniem Bernoulliego.** Pochodził ze znanej rodziny matematyków Bernoullich.

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZUPEŁNE

Równanie różniczkowe postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

nazywamy ***równaniem różniczkowym zupełnym***, jeżeli istnieje funkcja $U(x,y)$ taka, że

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y).$$

Wyrażenie

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$$

nazywamy ***różniczką zupełną***.

Twierdzenie 2.2 (warunek konieczny i wystarczający zupełności równania). *Niech funkcje $P(x,y), Q(x,y)$ i pochodne cząstkowe $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ będą ciągłe w obszarze jednospójnym $D \subset \mathbb{R}^2$. Wtedy równanie różniczkowe*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

jest zupełne wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $(x,y) \in D$ spełniony jest warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Twierdzenie 2.3 (całka równania zupełnego). *Całka równania różniczkowego*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

dana jest wzorem

$$U(x,y) = C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą.

CZYNNIK CAŁKUJĄCY

Rozważmy równanie $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, gdzie $P(x,y), Q(x,y)$ są funkcjami ciągłymi. Jeżeli $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, to równanie powyższe nie jest zupełne. Ale może istnieć funkcja $\mu(x,y) \neq 0$ w rozpatrywany obszarze, taka, że jeśli pomnożymy przez nią powyższe równanie otrzymamy równanie zupełne

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0,$$

tzn.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}(x,y).$$

Funkcję $\mu(x,y) \neq 0$ nazywamy ***czynnikiem całkującym*** równania $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Twierdzenie 2.4. (czynnik całkujący zależny od jednej zmiennej).
(I) Jeżeli wyrażenie $T = \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y))$ *jest funkcją tylko zmiennej* x*, to równanie* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *ma czynnik całkujący postaci*

$$\mu(x) = e^{\int T(x)dx}.$$

(II) Jeżeli wyrażenie $S = \frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y))$ *jest funkcją tylko zmiennej* y*, to równanie* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *ma czynnik całkujący postaci*

$$\mu(y) = e^{\int S(y)dy}.$$