ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 3, 17.10.2022)

Ciągi i granice, wyrażenia nieoznaczone.

Zad. 1. Określić typ monotoniczności ciągu:

(a)
$$a_n = -2n + 7;$$

(b)
$$a_n = (-1)^n n$$

(a)
$$a_n = -2n + 7$$
; (b) $a_n = (-1)^n n$; (c) $a_n = 1 - \frac{2}{n}$; (d) $a_n = n - 3^n$;



$$a_n = n - 3^n$$

Zad. 2. Zbadać, czy ciągi są, od pewnego wyrazu, monotoniczne:

(a)
$$a_n = \frac{n}{n+1}$$
, (b) $b_n = \frac{9^n}{n!}$

Zad. 3. Korzystając z definicji granicy pokazać, że

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$
, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

Zad. 4 Granicą różnicy ciągów a_n i b_n jest 0. Stąd wynika, że ciągi te:

a) są równe, b) mają taką samą granicę, c) mogą być rozbieżne do nieskończoności?

Zad. 5. Granica ilorazu dwóch ciągów $\frac{a_n}{b}$ jest 0. Stąd wynika, że

a) ciągi a_n i b_n są zbieżne, b) ciąg a_n musi być zbieżny, c) oba ciągi muszą posiadać gra-

Zad. 6. Obliczyć granicę ciągów:

b)
$$\frac{n^2-1}{3-n^3}$$

(a)
$$\frac{4n-3}{6-5n}$$
, b) $\frac{n^2-1}{3-n^3}$, (c) $\frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$, d) $\frac{(n-1)(n+2)}{3n^2+5}$, e) $\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$,

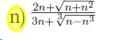
d)
$$\frac{(n-1)(n+2)}{3n^2+5}$$
,

e)
$$\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$$
,

g)
$$\frac{(-1)^n}{2n-1}$$
,

$$\frac{2n+(-1)^n}{n}$$

$$(1) \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3,$$



$$\frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$$

$$k) \quad \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$$

1)
$$\frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$$

$$\frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$$
.

Zad. 7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a)
$$\sqrt[n]{3^n+2^n}$$

a)
$$\sqrt[n]{3^n + 2^n}$$
, b) $\sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$, c) $\sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}}$

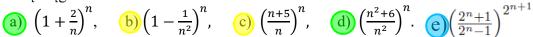
$$\sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}}$$

Zad. 8. Obliczyć granicę ciągu:

(a)
$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$(b) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$\binom{n+5}{n}^n$$



Zad. 9. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej wykazać, że

a)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} = \infty$$
, b) $\lim_{n\to\infty} (n^6 + n^2) = \infty$, c) $\lim_{n\to\infty} (5-2^n) = -\infty$,

a)
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[3]{n+1} = \infty$$
, b) $\lim_{n \to \infty} (n^6 + n^2) = \infty$, c) $\lim_{n \to \infty} (5-2^n) = -\infty$,
d) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2}{n} = \infty$, e) $\lim_{n \to \infty} (3-n^2) = -\infty$, f) $\lim_{n \to \infty} \frac{9 - 25n^2}{5n+3} = -\infty$.

Korzystając z arytmetyki granic niewłaściwych. wyznaczyć granice ciagów





Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

- 1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
- 2. Krysicki L., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

Zad. 10. Zbadać, które z ciągów są zbieżne/rozbieżne, lub nie mają granicy.

(a)
$$n \sin \frac{n\pi}{3}$$
 (b) $n^2 - 2^n$, (c) $3^n + (-1)^n \cdot n$, d) $\frac{2}{n+3} \sin \frac{n\pi}{2}$.

Zad. 11. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągów:

(a)
$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$
 (b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$

Zad. 12. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach obliczyć granice niewłaściwą ciągu:

(a)
$$a_n = n^4 + (-1)^n n$$
, (b) $a_n = \frac{1-n^2}{n-\sin n}$

- **Zad. 13.** Młot pneumatyczny wbija słup za pierwszym razem na głębokość 30 cm, a następnie, za każdym razem przyrost głębokości wynosi 2/3 przyrostu głębokości przy poprzednim uderzeniu. Obliczyć o ile wbije się słup oraz na jaką w sumie głębokość przy 1,2,3,4,5 uderzeniach. Przy ilu uderzeniach słup wbije się na głębokość 1 m?
- Zad. 14. Miesięczna inflacja wynosi 0.5%. Ile wynosi inflacja roczna?
- **Zad. 15.** Załóżmy, że tempo wzrostu gospodarczego będzie w najbliższych latach stałe. Jaki powinien być roczny wzrost dochodu narodowego, aby jego podwojenie nastąpiło po 10 latach? A po pięciu lub trzech latach?