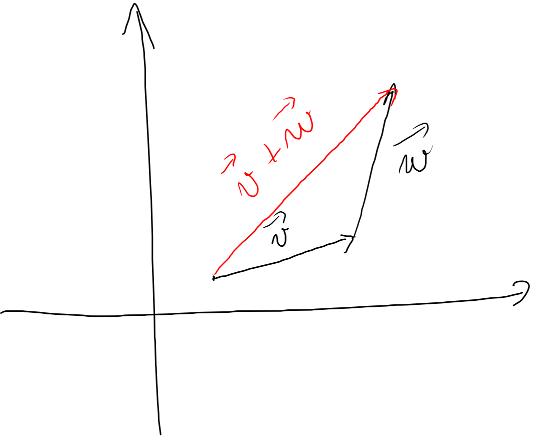
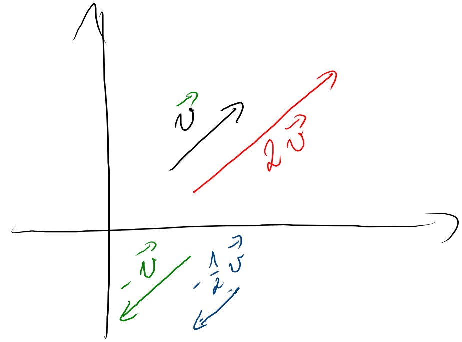
Działania na wektorach





Przykład endomorfizmu

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \varphi([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2,\ x_1 + x_2]$$

$\varphi(v) = \lambda v$

np $\varphi([1,1]) = [1+1,\ 1+1] = [2,2] = 2 \cdot [1,1]$

$\varphi([1,2]) = [1+2,\ 1+2] = [3,3]$ $[1,2]$ nie jest wektorem własnym φ.

1) wektor własny φ to $[1,1]$ i odpowiadająca mu wartość własna 2

$\varphi([2,2]) = [2+2,\ 2+2] = 2[2,2]$

wektor własny $[2,2]$ i odpowiadająca mu wartość własna 2.

$$\underbrace{\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(v) = \lambda v$$

$$Av = \lambda v \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0 \text{ (wektor zerowy)}$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \qquad I \text{ - macierz jednostkowa}$$

$$\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{wielomian charakterystyczny}} = 0 \qquad \text{bo } v \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \ \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

Przykład 1 Wyznaczyć wartości własne i wektory własne endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^2$ danego wzorem a) $\varphi([x_1, x_2]) = [4x_1 + x_2,\ 12x_1 + 5x_2]$

(1) Macierz tego endomorfizmu to
$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy wielomian charakterystyczny φ.

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 12 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(5-\lambda) - 12 = 20 - 9\lambda + \lambda^2 - 12 = \lambda^2 - 9\lambda + 8$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 8 = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7 \quad \lambda_1 = \frac{9-7}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{9+7}{2} = 8$$

Znajdujemy wartości własne φ

$$Sp(\varphi) = \{1, 8\}$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 1 \\ 12 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 = 0 \ /:4 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -3x_1$$

$$v_1 = [x_1, -3x_1] = x_1[1, -3] \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\lambda_2 = 8$

$$\begin{bmatrix} 4-8 & 1 \\ 12 & 5-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -4x_1 + x_2 \\ 12x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 0 \\ 12x_1 - 3x_2 = 0 \ /:(-3) \end{cases} \Rightarrow x_2 = 4x_1$$

$$v_2 = [x_1, 4x_1] = x_1[1, 4] \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b) $\varphi([x_1, x_2]) = [7x_1 - x_2, 9x_1 + x_2]$

$$A = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 9 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) + 9 = 7 - 8\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 = 0$

$\lambda_0 = \frac{8}{2} = 4$

$S_p(\varphi) = \{4\}$

$\lambda_0 = 4$

$$\begin{bmatrix} 7-4 & -1 \\ 9 & 1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 = 0 \quad |:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3x_1$$

$v_0 = [x_1, 3x_1] = x_1[1, 3] \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\varphi([x_1, x_2]) = [x_1 + 7x_2, 4x_1 + 4x_2]$ odp $S_p(\varphi) = \{-3, 8\}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 7 \\ 4 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 28 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 28 = \lambda^2 - 5\lambda - 24$

$\lambda^2 - 5\lambda - 24 = 0$ $\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = 8$

$\lambda_1 = -3$ $\begin{bmatrix} 1-(-3) & 7 \\ 4 & 4-(-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$4x_1 + 7x_2 = 0$

$x_2 = -\frac{4}{7} x_1$

$v_1 = [x_1, -\frac{4}{7} x_1]$

$v_1 = \frac{1}{7} x_1 [7, -4]$

$\forall_{x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$\lambda_2 = 8$

$\begin{bmatrix} 1-8 & 7 \\ 4 & 4-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 = 0 & | : 7 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 & | : 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

$v_2 = x_1 [1, 1]$

$\forall_{x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

Przykład 2 Niech $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ Znaleźć macierz diagonalną B podobną do macierzy A oraz macierz odwracalną V taką, że $B = V^{-1} A V$

(R) Postępując jak w prz. 1. znajdujemy wartości własne $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 4$ i odpowiadające im wektory własne $v_1 = [1, 1]$, $v_2 = [8, 3]$

Macierz diagonalna B jest

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \end{array} \qquad V = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \end{array}$$

Sprawdzić, że $B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$