0 1 2

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 5, 31.10.2022)

Granica funkcji w punkcie, ciągłość, asymptoty.

Zad. 1. Obliczyć granice jednostronne funkcji w punkcie:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=0$, b) $f(x)=\begin{cases} x^2+5, x\geq 0 \\ \frac{1}{x-0.2}, x<0 \end{cases}$ $x_0=0$, e) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+\lceil x\rceil}{3x^2+2x-1}$

c) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_0=1$, $x_0=-1$. d) $f(x)=\begin{cases} -2, \text{dla } x<-1, \\ x, \text{dla } x\geq -1, \end{cases}$ x_0=-1.

Zad. 2. Obliczyć granice jednostronne oraz zbadać istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x)=\frac{4-x}{x^2}$, $x_0=0$; b) $f(x)=\frac{3x}{1-x}$, $x_0=1$; c) $f(x)=\frac{x+1}{9-x^2}$, $x_0=\pm 3$;
d) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$; e) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2}$, $x_0=0$; f) $f(x)=\frac{|x+1|-1}{x^2-4}$, $x_0=\pm 2$.

Zad. 3. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$, c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$, d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-5x+6}$, l) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{27-x^3}{9-x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$, f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$, g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$, h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{x+1}$, n) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2^x+3}{3^x+2}$

i) $\lim_{x\to\pi}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$, j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3+x}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$, o) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x})$

Zad. 4. Uzasadnić, że nie istnieją granice funkcji w punkcie:

a) $\lim\limits_{x\to 0.5}\frac{2x-1}{4x^2-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}2^{1/x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^x-3^x}$, d) $\lim\limits_{x\to\pi} sgn(sinx)$.

e) $sin\frac{1}{x}$ x_0=0, f) $2^{\frac{1}{1-x}}$, x_0=1, g) $\frac{[x]}{x-1}$ x_0=1.

Zad. 5. Zbadać, czy funkcja

$$f(x)=\begin{cases} -2, \text{dla } x<-1, \\ x, \text{dla } x\geq -1, \end{cases}$$

jest lewostronnie oraz prawostronnie ciągła w punkcie -1.

Zad. 6. Zbadać ciągłość funkcji

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{dla } x\geq 2 \\ x+2, \text{dla } x<2 \end{cases}$ w $x_0=2$. b) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}e^x, \text{dla } x\neq 0, \\ 1, \text{dla } x=0. \end{cases}$ w $x_0=0$.

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L. , Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

Zad. 7 Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{|x-1|}, \; dla \; x \neq 1, \\ 1, \; dla \;\; x = 1, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 12x & \text{dla } x > 0, \\ x^3 & \text{dla } x \leqslant 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ -2 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x^3-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$

Zad. 8. Dobrać parametry a, b tak, aby funkcja

$f(x) = \begin{cases} ax + 1, \; dla \; x \leq \pi/2, \\ \sin x + b, \; dla \;\; x > \pi/2, \end{cases}$ była ciągła w punkcie $\pi/2$.

Zad. 9. Zbadać asymptoty funkcji:

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-5}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$, i) $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2}{x^2-1}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ d) $f(x) = (x+1)^2(x-1)$, e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$. f) $\dfrac{sinx}{1+sinx}$, j) $f(x) = \dfrac{x^2-2|x|}{x+1}$

Zad. 10. Wykazać, że równanie $x^5 - 3x + 1 = 0$ ma pierwiastek w przedziale (0,1) oraz ma także pierwiastek w przedziale (1,2).

Zad. 11. Uzasadnić, że równanie $x^3 + ax + 1 = 0$ ma dla każdej wartości rzeczywistej parametru a przynajmniej jeden pierwiastek (Wskazówka. Obliczyć granicę przy $x \to \infty$ oraz $x \to -\infty$.

Zad. 12. Uzasadnić, że równania mają tylko jedno rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $4^x = x^2$, $(-1,0)$, b) $e^x = \dfrac{1}{x}$, $(1/2, 1)$, c) $x^x = 3$, $(1,2)$,

d) $2^x + 4^x = 8^x$, $[0,1]$, e) $x^2 arctgx = 3$, $[1,2]$.

Zad. 13. Turysta przemierza szlak od podnóża góry na szczyt i z powrotem. Wyrusza w sobotę o 8.00 rano osiąga szczyt o 18.00. Nocuje, a w niedzielę wyrusza w dół o 8.00 rano kończy zejście (w punkcie startu w sobotę) o godzinie 18.00. Wykazać, że o tej samej porze turysta był w tym samym miejscu trasy w sobotę oraz w niedzielę.