ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 12

Przestrzeń euklidesowa
Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany wektorów

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania wektorów

- obliczanie pól i objętości brył,
- reprezentacja dowolnej wielkości mającej kierunek: np. prędkość, (której modułem jest szybkość), siła, (ponieważ ma moduł, kierunek i zwrot), przemieszczenie, przyspieszenie, pęd,
- reprezentacja pola elektrycznego i magnetycznego, (jako układ wektorów skojarzonych z każdym punktem przestrzeni fizycznej, czyli pole wektorowe).

PRZESTRZEŃ EUKLIDESOWA

Niech dana będzie przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{R}$. Jeśli każdej parze wektorów $v, w \in V$ przyporządkujemy liczbę rzeczywistą oznaczoną symbolem (v, w), tak aby spełnione były warunki

- $(v, w) = (w, v)$,
- $(av, w) = a(v, w)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$,
- $(u_1 + u_2, w) = (u_1, w) + (u_2, w)$, gdzie $u_1 + u_2 = v$,
- $(v, v) \geqslant 0$ dla dowolnego $v \in V$, z równością jedynie dla $v = 0$,

to mówimy, że został określony ***iloczyn skalarny*** (v, w) wektorów v, w.

Przestrzeń wektorową wyposażoną w takie mnożenie skalarne nazywamy ***przestrzenią euklidesową***.

Euklides z Aleksandrii (ok. 365r. p.n.e. – ok. 270r. p.n.e.) matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii. Autor jednych z pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Główne jego dzieło to ***Elementy*, które są pierwszą próbą aksjomatycznego ujęcia geometrii i były podstawowym podręcznikiem geometrii do XIX wieku**. *Elementy* przetłumaczono na wiele języków, zaś liczbą wydań ustępują jedynie Biblii. Euklides usystematyzował ówczesną wiedzę matematyczną w postaci aksjomatycznego wykładu. Zachowały się też jego dzieła z geometrii, optyki, astronomii i teorii muzyki.

Rozważmy przestrzeń euklidesową

$$\mathscr{E}^3 = \{(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Elementami (tzn. wektorami) tej przestrzeni są uporządkowane trójki liczb rzeczywistych. Przestrzeń $\mathscr{E}^3$ jest przestrzenią trójwymiarową. Bazą tej przestrzeni jest trójka wektorów $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, które oznaczamy przez i,j,k odpowiednio. Jest to tzw. ***baza kanoniczna***. Każdy wektor $v=(x,y,z)\in\mathscr{E}^3$ jest ***kombinacją*** wektorów i,j,k, tzn.

$$v = xi + yj + zk.$$

Liczby x,y,z nazywamy ***współrzędnymi wektora*** v, a wektory xi, yj, zk nazywamy ***składowymi wektora*** v.

UKŁAD KARTEZJAŃSKI

Jeżeli wektory i, j, k rozpatrzymy jako trzy wektory zaczepione (o wspólnym początku) i jeżeli każdy z nich będzie wyznaczać jednostkę na odpowiedniej osi liczbowej, to otrzymamy układ zwany ***układem kartezjańskim***. Wektory i, j, k nazywamy ***wersorami***, a wspólny punkt tych wektorów nazywamy ***początkiem układu współrzędnych***.

René Descartes, pol. Kartezjusz (1596 – 1650) francuski ojciec filozofii nowożytnej, matematyk i fizyk, jeden z najwybitniejszych uczonych XVII w. Swój dorobek w dziedzinie matematyki zebrał w jednym dziale *Geometria* (1637), w którym przedstawił **podstawy geometrii analitycznej i algebry. Wprowadził pojęcia: zmiennej, funkcji oraz współrzędnych prostokątnych, zwanych dziś współrzędnymi kartezjańskimi.** Linie krzywe dające opisać się równaniami algebraicznymi podzielił na klasy, w zależności od najwyższej potęgi zmiennej występującej w równaniu. **Wprowadził znak "+" i "–" dla oznaczenia liczb dodatnich i ujemnych, oznaczenie potęgi oraz symbolu nieskończoności.** W oparciu o dorobek Kartezjusza rozwinął się później (dzięki Newtonowi i Leibnizowi) rachunek różniczkowy.

Każdy element $P = (x, y, z) \in \mathscr{E}^3$ wyznacza jednoznacznie wektor $v = [x, y, z]$ odpowiadający odcinkowi OP i zaczepiony w punkcie $O = (0, 0, 0)$ skierowany do punktu P.
Przez wektor swobodny rozumiemy rodzinę wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, mających ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor v.
Wektor $\mathbb{O} = [0, 0, 0]$ nazywamy ***wektorem zerowym***.
Wektor $-v = [-x, -y, -z]$ nazywamy ***wektorem przeciwnym*** do wektora v.
W dalszej częśći przestrzeń $\mathscr{E}^3$ będziemy oznaczać przez $\mathbb{R}^3$.

W $\mathbb{R}^3$ okreśone są takie same działania jak w każdej przestrzeni wektorowej i mają te same własności. Mianowicie niech u, v, w będą wektorami (swobodnymi) w $\mathbb{R}^3$, niech $a, b \in \mathbb{R}$ i ponadto $v = [x_1, y_1, z_1]$ oraz $w = [x_2, y_2, z_2]$. Wtedy

- $v + w = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$
- $av = [ax_1, ay_1, az_1]$

oraz

- $v + w = w + v$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $v + \mathbb{O} = v$
- $1 \cdot v = v$
- $(ab)v = a(bv)$
- $(a + b)v = av + bv$
- $a(u + v) = au + av$

PUNKT PODZIAŁU ODCINKA

Niech $v = [x_1, y_1, z_1], w = [x_2, y_2, z_2]$ będą wektorami wodzącymi odpowiednio punktów A, B. **Punkt** P **podziału odcinka** AB **w stosunku** $1 : a, (a > 0)$ ma wektor wodzący $u = [x, y, z]$, gdzie

$$x = \frac{ax_1 + x_2}{1 + a}, \quad y = \frac{ay_1 + y_2}{1 + a}, \quad z = \frac{az_1 + z_2}{1 + a}.$$

W szczególności, gdy szukamy środka odcinka AB podstawiamy w powyższych wzorach $a = 1$.

WEKTORY WSPÓŁLINIOWE

WEKTORY WSPÓŁPŁASZCZYZNOWE

Mówimy, że punkty $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ są ***współliniowe***, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty.

Mówimy, że wektory v, w są ***współliniowe***, gdy istnieje prosta, do której należą te wektory. Wektory współliniowe będziemy też nazywać równoległymi.

Czasem zamiennie słowa "współliniowe" będziemy używać ***kolinearne***.

Wektory v, w **są równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste $a, b \in \mathbb{R}$ nie równe jednocześnie zeru takie, że

$$av + bw = \mathbb{O}.$$

W szczególności, jeżeli $v \neq 0$, to wektory v, w są równoległe, gdy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $w = av$.
Jeżeli $v = [x_1, y_1, z_1]$, $w = [x_2, y_2, z_2]$, to wtedy $x_1 = ax_2, y_1 = ay_2, z_1 = az_2$ lub $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = a$.
Oznacza to, że rząd macierzy

$$rz \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 1.$$

Mówimy, że punkty $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ są ***współpłaszczyznowe***, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty.

Mówimy, że wektory u, v, w są ***współpłaszczyznowe***, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te wektory.

Czasem zamiennie słowa "współpłaszczyznowe" będziemy używać ***komplanarne***.

Wektory u, v, w **są współpłaszczyznowe** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ nie wszystkie równe zeru takie, że

$$au + bv + cw = \mathbb{O}.$$

W szczególności, jeżeli wektory v, w są równoległe, to u, v, w są współpłaszczyznowe, gdy istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $w = au + bv$.
Jeżeli $u = [x_1, y_1, z_1]$, $v = [x_2, y_2, z_2]$, $w = [x_3, y_3, z_3]$ to u, v, w są współpłaszczyznowe, gdy

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Niech dany jest układ $k = 3, 4, 5, ...$ wektorów, których współrzędne tworzą macierz A o wymiarze $k \times 3$.
Wtedy, jeżeli

- $rz(A) = 1$, to każde dwa wektory układu są współliniowe,
- $rz(A) = 2$, to układ ten jest współpłaszczyznowy,
- $rz(A) = 3$, to istnieją trzy wektory niewspółpłaszczyznowe.

DŁUGOŚĆ WEKTORA

Niech $v = [x, y, z]$ będzie wektorem. Liczbę

$$|v| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

nazywamy ***długością wektora*** v.

Długość wektora jest więc odległością punktu $P = (x, y, z)$ od początku układu wpsółrzędnych.

Jeżeli rozważymy wektor swobodny $v = P_1 P_2$, gdzie $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Niech dane będą wektory u i v oraz $a \in \mathbb{R}$. Wtedy

- $|v| \geqslant 0,$ przy czym $|v| = 0$ gdy $v = 0$
- $|av| = |a| \cdot |v|$
- $|u + v| \leqslant |u| + |v|$
- $||u| - |v|| \leqslant |u - v|$

ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

Niech $v = [x_1, y_1, z_1]$ oraz $w = [x_2, y_2, z_2]$ będą wektorami. ***Iloczynem skalarnym*** $v \circ w$, (inne oznaczenia (v, w) lub $v \cdot w$), nazywamy liczbę

$$v \circ w = |v||w| \cos \angle(v, w).$$

Niech $v = [x_1, y_1, z_1]$ oraz $w = [x_2, y_2, z_2]$. Wtedy iloczyn skalarny wektorów v i w możemy obliczyć ze wzoru

$$v \circ w = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Niech u, v, w będą wektorami oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wtedy

- $u \circ v = v \circ u$
- $(au) \circ v = a(u \circ v)$
- $u \circ u = |u|^2$
- $(u + v) \circ w = (u \circ w + v \circ w)$
- $|u \circ v| \leqslant |u| \cdot |v|$
- $|u \circ v| = |u| \cdot |v|$ gdy wektory u i v są równoległe
- $u \circ v = 0$ gdy wektory u i v są prostopadłe lub jeden z wektorów jest zerowy.

ORIENTACJA WEKTORÓW

Niech $u = [x_1, y_1, z_1], v = [x_2, y_2, z_2], w = [x_3, y_3, z_3]$ będą niewspółpłaszczyznowymi wektorami. Mówimy, że uporządkowana trójka u, v, w tworzy **układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych**, jeżeli

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} > 0.$$

Gdy wyznacznik jest ujemny, to mówimy, że **orientacja układu wektorów u, v, w jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych**. Układ u, v, w nazywamy ***prawoskrętnym (lewoskrętnym)***, gdy jest on zgodny z prawoskrętnym (lewoskrętnym) układem współrzędnych.

ILOCZYN WEKTOROWY

Niech u i v będą niewspółliniowymi wektorami. ***Iloczynem wektorowym*** uporządkowanej pary wektorów u i v nazywamy wektor w, który spełnia warunki

1. jest prostopadły do wektorów u i v,
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach u i v, tzn. $|w| = |u| \cdot |v| \sin \angle(u, v)$,
3. orientacja trójki wektorów u, v, w jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Iloczyn wektorowy oznaczamy symbolem $u \times v$.

Niech $u = [x_1, y_1, z_1], v = [x_2, y_2, z_2]$. Chcąc wyznaczyć iloczyn wektorowy wektorów u i v możemy skorzystać ze wzoru

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Niech u, v, w będą wektorami oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wtedy

- $u \times v = -(v \times u)$
- $(au) \times v = a(u \times v)$
- $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$
- $u \times (v+w) = u \times v + u \times w$
- $|u \times v| \leqslant |u| \cdot |v|$
- $u \times v = 0$ gdy wektory u, v są współliniowe lub jeden z wektorów jest zerowy.

ILOCZYN MIESZANY WEKTORÓW

Iloczyn mieszany (uporządkowanej trójki) **wektorów** u, v, w jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach u, v, w, tzn.

$$|(u, v, w)| = |\text{objętość (V)}|.$$

Inaczej mówiąc

$$(u, v, w) = (u \times v) \circ w = |u \times v| \cdot |w| \cos \angle(u \times v, w).$$

Liczba $|u \times v|$ określa pole podstawy równoległościanu wyznaczonej przez wektory u, v. Liczba $|w|$ określa długość wysokości równoległościanu opuszczoną na wspomnianą podstawę.

Niech $u = [x_1, y_1, z_1]$, $v = [x_2, y_2, z_2]$, $w = [x_3, y_3, z_3]$. Chcąc wyznaczyć iloczyn mieszany (u, v, w) możemy skorzystać ze wzoru

$$(u, v, w) = (u \times v) \circ w = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Niech u, v, w będą wektorami oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wtedy

- $(u_1 + u_2, v, w) = (u_1, v, w) + (u_2, v, w)$, gdzie $u_1 + u_2 = u$
- $(au, v, w) = a(u, v, w)$
- $(u, v, w) = -(v, u, w)$
- $(u, v, w) = 0$ gdy u, v są współliniowe lub jeden z wektorów jest zerowy.