3

Zad. 7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$, b) $\sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$, c) $\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}}$

Zad. 8. Obliczyć granicę ciągu:

a) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, b) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, c) $\left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, d) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^n$. e) $\left(\frac{2^n+1}{2^n-1}\right)^{2^n+1}$

Zad.6. Stosując **kryterium d'Alamberta** rozstrzygnąć, które poniższe szeregi są zbieżne:

4

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Zad. 7. Stosując **kryterium Cauchy'ego** rozstrzygnąć, które poniższe szeregi są zbieżne:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^6}{6^n}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+3^n}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$, (e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$. (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{(3n+2)^2}$

Zad. 2. Obliczyć granice jednostronne oraz zbadać istnienie granicy funkcji *f* w punkcie x_0:

a) $f(x) = \frac{4-x}{x^2}$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \frac{3x}{1-x}$, $x_0 = 1$; c) $f(x) = \frac{x+1}{9-x^2}$, $x_0 = \pm 3$;

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$; e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$; f) $f(x) = \frac{|x+1|-1}{x^2-4}$, $x_0 = \pm 2$.

5

Zad. 3. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$, c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$, d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$,

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$, f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$, g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}$, h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{x+1}$,

i) $\lim_{x\to\pi}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$, j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3+x}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$

l) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{27-x^3}{9-x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

n) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2^x+3}{3^x+2}$

o) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x})$

Zad. 9. Zbadać asymptoty funkcji:

5

g) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

a) $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$ c) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$,

i) $f(x) = \frac{2x^3+3x^2}{x^2-1}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

d) $f(x)=(x+1)^2(x-1)$, e) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$. f) $\frac{sinx}{1+sinx}$,

j) $f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x+1}$

Zad. 2. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x)=2x^5+3x+5$, b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, c) $f(x)=(x+1)(1-x)$, d) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$,

6

e) $f(x)=(x^2+2x+4)^7$, f) $f(x)=\sqrt{x^3+3x-4}$, g) $f(x)=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, x) $f(x)=\frac{x\sin x}{x+\cos x}$

h) $f(x)=\frac{1}{x^4+2x^3-4x}$, i) $f(x)=(x^3+1)\sqrt{x}$, j) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$, y) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{tg}^3 x\ln^2 x$

k) $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}+2\sin x$, l) $f(x)=3\cos(x^2+4)$, m) $f(x)=\frac{3\cos^2 x}{\sin^3 x}$, z) $f(x)=(\sin x)^x$

n) $f(x)=3^x x^3$, o) $f(x)=3e^{\sin^2 x}$, p) $f(x)=x^x$, r) $f(x)=\mathrm{arctg}\left(x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\right)$,

s) $f(x)=\ln\frac{3}{x+2}$, t) $f(x)=\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(\cos x)}$, u) $f(x)=x^x$, w) $f(x)=10x^{3x}$.

Zad. 9. Korzystając z twierdzenia de l'Hospitala obliczyć granice:

6

a) $\lim_{x\to 0}\frac{3x+e^{-x}-e^{x}}{x}$, b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}$, c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$, d) $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)$,

e) $\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{x-2}$, f) $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}$, g) $\lim_{x\to \pi/4}\left(\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\mathrm{ctg}2x}\right)$, h) $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

Zad 3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x + 2$, b) $f(x) = x^3(8 - x)$, c) $f(x) = 3x - x^3$, $h)\ f(x) = 4x + \frac{9}{x}$

d) $f(x) = 2x - \sin x$, e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$, f) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, g) $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{(x-1)^2}$. $i)\ f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$

Zad 4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 54x^2 + x - 5$, b) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 2$, c) $f(x) = \sin x$, d) $f(x) = \sin^2 x$,

$h)\ f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e) $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$, f) $f(x) = x\ln\frac{1}{x}$ g) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$. $i)\ f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)$

7

Zad 6. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji:

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$, c) $f(x) = x^2 \ln x$, d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$.

Zad 9. Zbadać funkcje (dziedzina, granice, ciągłość, monotoniczność, wypukłość/wklęsłość, asymptoty, punkty przegięcia, ekstrema, wykres): 7

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2,}$, c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, d) $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2-1)^2}$,

e) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, f) $f(x) = xe^x$, g) $f(x) = xe^{-x}$, h) $f(x) = x^2e^{x-1}$. i) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

8

Zad. 5. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

a) $f(x,y) = x^3 + 4xy^2 - y^3$, b) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, c) $f(x,y) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{y}}$, d) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,

e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, f) $f(x,y) = x^y$, g) $f(x,y) = e^{x(x+y)}$, h) $f(x,y) = \sin(x\cos y)$,

i) $f(x,y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$, j) $f(x,y) = arctg(x-y)^2$.

Zad. 1. Obliczyć gradienty (kierunki najszybszego wzrostu) funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3$, $(x_0, y_0) = (-1,1)$, b) $f(x,y,z) = \frac{xy^2}{z^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (16,-3,2)$,

Zad. 2. Obliczyć, pochodne funkcji w punkcie (1,1) w kierunku $\left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$: 3

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, c) $f(x,y) - \sin(x - y)$.

Zad. 7. Wyznaczyć, jeżeli istnieją, ekstrema funkcji:

9

a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, b) $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$,

c) $f(x,y) = xe^{x^2}$, d) $f(x,y) = (x^2+y)e^{\frac{y}{2}}$, e) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$,

~~f)~~ $\cancel{f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2}$, ~~g)~~ $\cancel{f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z}$,

~~h)~~ $\cancel{f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z}$. i) $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

Zad. 1. Obliczyć całki:

10

a) $\int x(x-1)(x-2)dx,$

b) $\int (x^2-x+1)^2 dx,$

c) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx,$

d) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2}dx,$

e) $\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}dx,$

f) $\int \frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}}dx.$

$g)$ $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$

$h)$ $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$

Zad. 4. Obliczyć całki:

a) $\int 3x^2(x^3+5)^9\,dx$ (podstawienie $t = x^3+5$),

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$ (podstawienie $t=\sqrt{2x-3}$),

c) $\int xe^{x^2}\,dx$ (podstawienie $t=x^2$),

d) $\int x\sin x^2\,dx$ (podstawienie $t=x^2$),

e) $\int \sin^4 x\cos x\,dx$ (podstawienie $t=\sin x$),

f) $\int \sin x\cos x\,dx$ (podstawienie $t=\sin x$),

g) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$,

h) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx$,

i) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

j) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$.

$k)$ $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

$l)$ $\int \frac{dx}{e^x+1}$

$m)$ $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

Zad. 5. Stosując metodę całkowania przez części obliczyć całki:

a) $\int x\sin x\,dx$,

b) $\int e^x\sin x\,dx$,

c) $\int \ln x\,dx$,

d) $\int (\ln x)^2\,dx$,

e) $\int x^3\ln x\,dx$,

f) $\int x^2e^x\,dx$,

g) $\int x\cos x\,dx$,

h) $\int x^2\sin x\,dx$.

i) $\int (2x^2-1)\cdot e^x\,dx$,

j) $\int x\cdot\ln x\,dx$,

k) $\int x\cdot\sin x\cos x\,dx$,

l) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

$m)$ $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$

$n^*)$ $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Zad. 1. Obliczyć całki oznaczone:

12

a) $\int_{1}^{3}\left(4x^2-3x+4\right)dx$, b) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx$, c) $\int_{0}^{1}3x^2e^{x^3-1}dx$, d) $\int_{1}^{e}x\ln x dx$, e) $\int_{-\pi/2}^{\pi}\sin^5 x dx$ f) $\int_{-1}^{1}x(x+1)^2dx$

Zad. 3. Obliczyć długości krzywych:

a) $y = x^2, -1 \le x \le 3$, b) $\boldsymbol{y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}}$, c) $y = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{1}{6x^3}$, $1 \le x \le 3$,

d) $\boldsymbol{y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le \frac{1}{2}}$. e) $y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $2 \le x \le 3$.

Zad. 4. Wyznaczyć pole obszaru pomiędzy krzywą, a osią współrzędnych na odcinku $[a; b]$

a) $y = 4 - x^2,\ a = -2,\ b = 2$; b) $y = \sqrt{x+2},\ a = -2,\ b = 2$;

c) $y = 9x - x^2,\ a = 0,\ b = 3$; d) $y = 3x^{1/3},\ a = 1,\ b = 8$.

Zad. 5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami:

12

a) parabolą $\boldsymbol{y = x^2}$ oraz prostą $\boldsymbol{y = x}$,

b) parabolą $\boldsymbol{y = 2x - x^2}$ oraz prostą $\boldsymbol{x + y = 0}$,

c) krzywą $\boldsymbol{y = e^x}$, prostymi x=0 i x=1 oraz osią OX,

d) parabolą $\boldsymbol{y = x^2 + x - 6}$, prostymi x=-1 i x=1 oraz osią OX,

e) parabolami $y = x^2$, $y = 2x^2$ oraz prostą $y = 8\ (x \ge 0)$,

f) krzywą $\boldsymbol{y = x^2 \ln x}$, prostymi x=e i x=e^2 oraz osią OX,

g) hiperbolą $\boldsymbol{y = \frac{2}{x} + 1}$, prostymi x=1 i x=2 oraz osią OX, $h)$ krzywymi : $y = \ln x, x = e, y = -1$

Zad. 4. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX trapezu krzywoliniowego ograniczonego przez wykres funkcji $\boldsymbol{f(x)}$, proste $\boldsymbol{x = a}$ i $\boldsymbol{x = b}$:

a) $y = 2\sqrt{x},\ a = 0,\ b = 1$,

b) $y = x^2 + 1,\ a = -1,\ b = 1$

c) $y = x^3,\ a = 0,\ b = 1$,

d) $y = \sin x,\ a = 0,\ b = \pi$,

e) $\boldsymbol{y = e^x,\ a = 1, b = 2}$.

Zad. 5. Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu wokół osi OX krzywej $\boldsymbol{y = f(x)}$.

a) $y = 2\sqrt{x},\ x \in [0,1]$,

b) $y = \frac{1}{2}x + 1,\ x \in [1,3]$,

c) $y = \cos x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Zad. 1. Obliczyć całki podwójne (w prostokącie):

13

a) $\iint_P x^2(2+4y)dxdy$, gdy prostokąt P opisany jest nierównościami: $0 \le x \le 3$, $1 \le y \le 2$.

b) $\iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy$, gdy prostokąt D opisany jest nierównościami: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Zad. 2. Obliczyć całki podwójne: (w obszarze normalnym):

a) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

d) $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+1)^2}$

$D: x+y=0, x=y^2$

b) $\iint_D (x^3+4y)dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $y = x^2, y = 2x$.

c) $\iint_D (sinxcosy)dxdy$, gdzie obszar całkowania D jest trójkątem o wierzchołkach: (0,0), (1,1), (0,2).