ALGEBRA LINIOWA
Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 4

Wielomian, pierwiastki wielomianu
Twierdzenie Bézout'a
Zasadnicze twierdzenie algebry

WIELOMIAN

Wielomianem rzeczywistym stopnia $n \in \mathbb{N}$ nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 0, ..., n$ oraz $a_n \neq 0$. Liczby $a_k, k = 0, ..., n$ nazywamy ***współczynnikami wielomianu*** W.
Stopień wielomianu W oznaczamy symbolem st_W.

Wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$ nazywamy funkcję $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0,$$

gdzie $c_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, ..., n$ oraz $c_n \neq 0$. Liczby $c_k, k = 0, ..., n$ nazywamy ***współczynnikami wielomianu*** W.

Każdy wielomian rzeczywisty po rozszerzeniu jego dziedziny do $\mathbb{C}$ jest wielomianem zespolonym.
Wielomian rzeczywisty lub zespolony będziemy krótko nazywać ***wielomianem***.
Wielomian W, w którym wszystkie współczynniki są równe 0 nazywamy **wielomianem zerowym**.

Niech P i Q będą wielomianami odpowiednio stopnia n i m.
Sumę wielomianów P i Q określamy jako

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

Wielomian $-Q$ nazywamy ***wielomianem przeciwnym*** do wielomianu Q. Wtedy ***różnicę wielomianów*** P i Q określamy jako

$$(P-Q)(x) = (P+(-Q)(x) = P(x) + (-Q(x)).$$

Wtedy $st_{P\pm Q} \leqslant \max\{n, m\}$.

Iloczyn wielomianów P i Q określamy jako

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Wtedy $st_{P \cdot Q} = n + m$.

Oczywiście suma, różnica i iloczyn wielomianów są wielomianami.

Mówimy, że wielomian Q jest ***ilorazem***, a wielomian R jest ***resztą*** z dzielenia wielomianu W przez wielomian P, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$, ($x \in \mathbb{C}$), spełniony jest warunek

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

oraz $st_R < st_P$. Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to mówimy, że ***wielomian*** W ***jest podzielny przez wielomian*** P.

TWIERDZENIE BÉZOUT’A

Twierdzenie 4.1. [Bézout]. *Liczba* x_0 *jest pierwiastkiem wielomianu* W *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian* P *taki, że*

$$W(x) = (x - x_0)P(x).$$

Liczba $W(x_0)$ jest resztą z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - x_0)$.

Étienne Bézout (1730–1783) francuski matematyk, zajmował się głównie algebrą, a zwłaszcza metodami rozwiązywania układów równań algebraicznych każdego stopnia. Był autorem podręczników do nauki matematyki, które przez wiele lat były podstawowymi podręcznikami na Uniwersytecie Harvarda w USA. W Polsce jego imieniem zostało nazwane powyższe twierdzenie, choć nie zostało przez niego ani sformułowane ani udowodnione i było znane już wcześniej. Bézout udowodnił sformułowane przez Colina Maclaurina **twierdzenie o liczbie punktów przecięcia dwóch krzywych algebraicznych.**

Liczbę x_0 nazywamy ***pierwiastkiem*** $k-$***krotnym*** wielomianu W, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k P(x)$$

oraz $P(x_0) \neq 0$.

Innymi słowy, x_0 jest pierwiastkiem $k-$krotnym wielomianu W, gdy W jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ ale nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli liczba całkowita $p \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu*

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych, to jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli liczba wymierna* $\frac{p}{q}$, *gdzie* p, q *są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, jest pierwiastkiem wielomianu*

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych, to p *jest dzielnikiem* a_0 *a* q *- dzielnikiem* a_n.

ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY

Twierdzenie 4.4. [Zasadnicze twierdzenie algebry].
Każdy wielomian stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Wniosek 4.1.

1. *Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma n pierwiastków zespolonych, (uwzględniając krotności pierwiastków)*.
2. *Jeśli wielomian zespolony W ma pierwiastki zespolone z_j o krotnościach odpowiednio $k_j \in \mathbb{N}$, dla $k = 1, 2, ..., m$ oraz $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, to*

$$W(z) = c_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}...(z - z_m)^{k_m}.$$

Zasadniecze Twierdzenie algebry zostało **udowodnione w 1799 r. przez Gaussa**, który podał później kilkanaście innych dowodów tego twierdzenia. Przed Gaussem próbowali je udowodnić m.in. d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace. Jednak ich wyniki były jednak niekompletne lub zawierały luki.

Określenie „zasadnicze (lub podstawowe) twierdzenie algebry" wydaje się dziś nieco przesadzone, powstało ono jednak w czasach, gdy problem rozwiązalności równań algebraicznych był jednym z głównych tematów zainteresowań matematyków.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) francuski filozof, fizyk i matematyk, Zasłużony na polu fizyki i matematyki, zwłaszcza w dziedzinie mechaniki teoretycznej i równań różniczkowych. Zajmował się też estetyką i teorią muzyki.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) francuski matematyk i astronom pochodzenia włoskiego. Samouk. najważniejsze prace Lagrange'a dotyczą rachunku wariacyjnego i mechaniki teoretycznej, istotne wyniki uzyskał również w algebrze, teorii liczb i analizie matematycznej, 1790-95 brał udział w pracach komisji nad wprowadzeniem nowego systemu jednostek miar (układ metryczny).

Pierre Simon de Laplace (1749–1827) francuski matematyk, astronom, geodeta i fizyk, jeden z twórców teorii prawdopodobieństwa.

Karol Fryderyk Gauss (1777–1855) niemiecki matematyk, fizyk, astronom i geodeta. Uznawany jest za jednego z twórców geometrii nieeuklidesowej. Uważany jest za jednego z największych matematyków (obok Archimedesa i Newtona), przez sobie współczesnych określany był mianem „Księcia matematyków”.

Fakt 4.1. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wtedy $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{z_0}$ jest k-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.

WZORY VIÉTE'A

Fakt 4.2. [Wzory Viéte'a]. Niech $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$ będzie wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$. Wtedy liczby $z_1, z_2, ..., z_n$ są pierwiastkami wielomianu W, gdy

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + ... + z_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n} \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + ... + z_{n-1} z_n = \frac{c_{n-2}}{c_n} \\ z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 z_4 + ... + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{c_{n-3}}{c_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1 z_2 z_3 ... z_{n-1} z_n = (-1)^n \frac{c_0}{c_n} \end{cases}$$

François Viéte (1540-1603) francuski matematyk i astronom. Zajmował się m.in. algebrą i trygonometrią, **sformułował wzory algebraiczne pozwalające rozwiązywać równania kwadratowe,** zwane dziś wzorami Viéte'a. **Wprowadził notację literową dla stałych w równaniach oraz oznaczenia literowe dla niewiadomych.** Podczas wojny francusko-hiszpańskiej Viéte **znalazł klucz do szyfru** używanego przez Hiszpanów.