§2 Affine Geometrie

§2.0 Affine Räume und Koordinaten (an der Tafel)

§2.1 Koordinatentransformationen

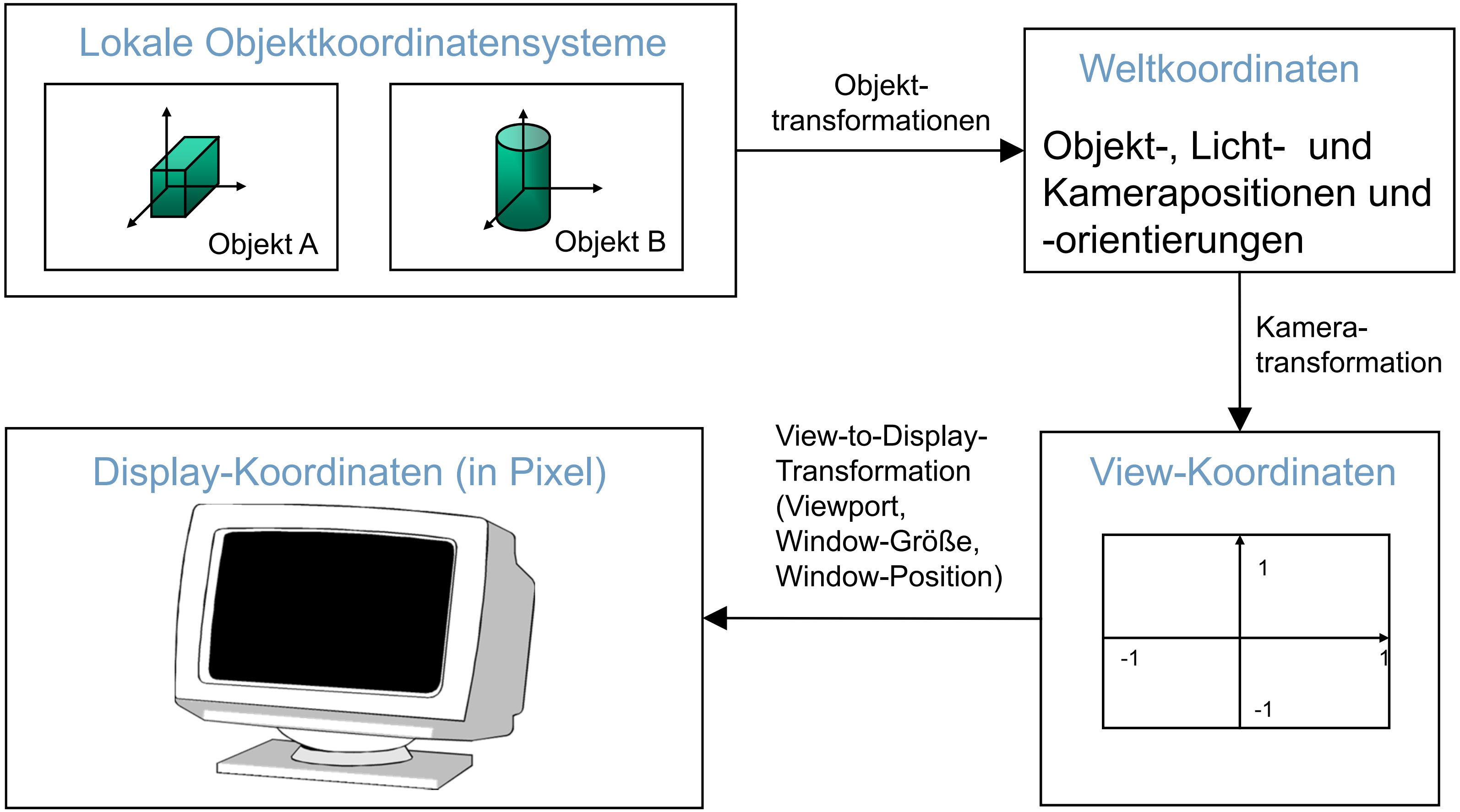
§2.2 Transformationen in der Ebene

§2.3 Transformationen im Raum

§2.4 Quaternionen

§2.1 Koordinatentransformationen

Überblick / Zusammenspiel:



§2.1 Koordinatentransformationen

Gegeben:

- Koordinatensystem S' (z.B. Weltsystem) gegeben durch

$$S': (O'; x'_1, x'_2),$$

  und

- Koordinatensystem S (z.B. Objektsystem) gegeben durch

$$S: (O; x_1, x_2).$$

Gesucht:

- **Sicht a)**: Änderung der Punktkoordinaten von System S nach S'

  bzw.

- **Sicht b)**: Transformation des Koordinatensystems S nach S'.

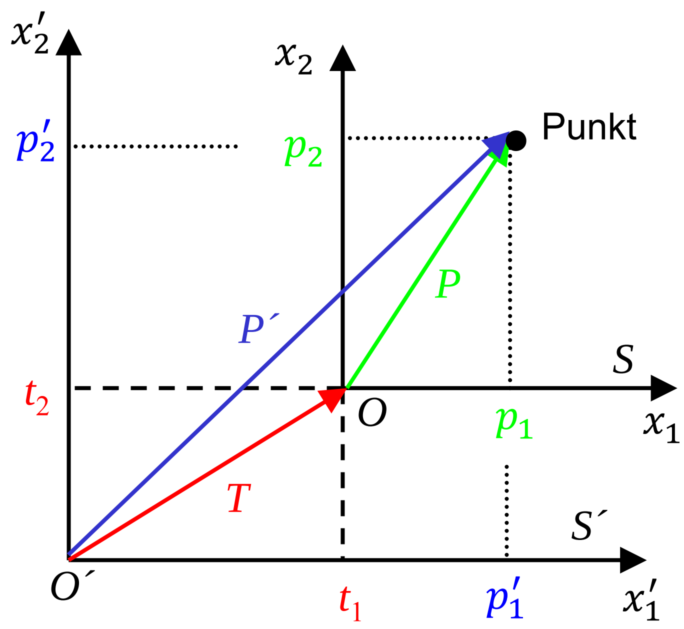
§2.2 Transformationen in der Ebene

§2.2.1 Translation (Verschiebung)

Voraussetzung: Koordinatenachsen sind zueinander jeweils parallel.

Sicht b): Es gilt für das System S'.

- S' ergibt sich aus S durch Verschiebung um $-T$, wobei $T = (t_1, t_2)^t$ die Koordinaten des Ursprungs O von S im System S' sind.
- Der Punkt hat
  - in S die Koordinaten $P = (p_1, p_2)^t$,
  - in S' die Koordinaten $P' = T + P = (t_1, t_2)^t + (p_1, p_2)^t$.

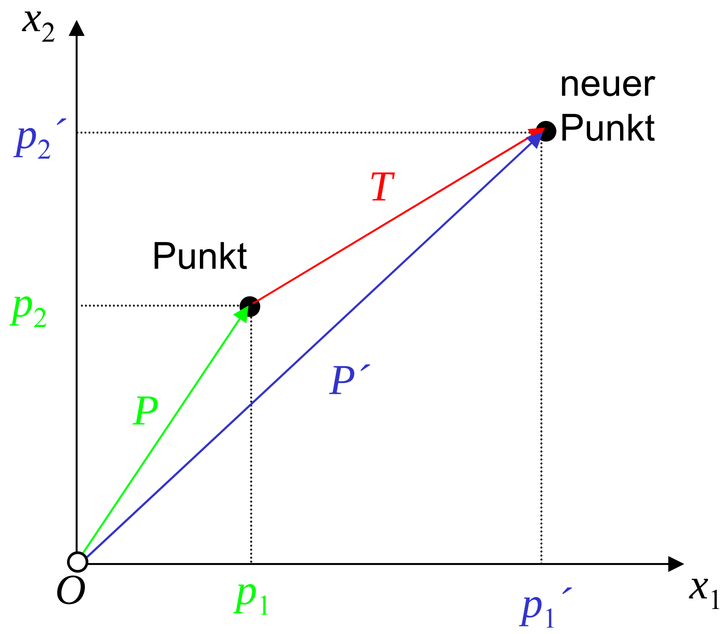


§2.2 Transformationen in der Ebene

Sicht a): Es gilt für den Punkt.

- Punkt mit Koordinaten P wird um T verschoben

  und es entsteht ein neuer Punkt mit Koordinaten P' mit $P'=T+P$.



- Für beide Sichtweisen gilt in Vektor-Schreibweise:

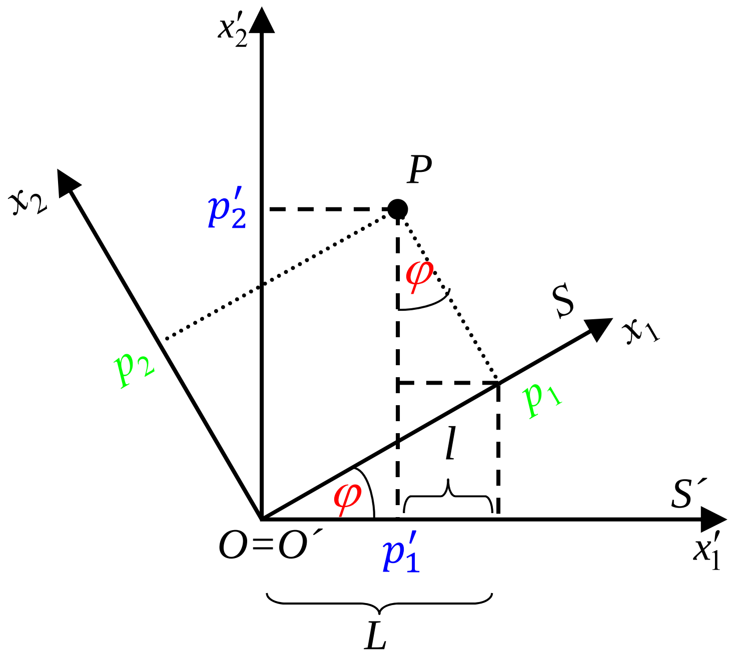
$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

- Oder kurz: $P'=T+P$.

§2.2 Transformationen in der Ebene

§2.2.2 Rotation (Drehung)

Voraussetzung: Koordinatensysteme haben gleichen Ursprung $O=O´$.



Sicht b): Drehung des Systems S gegenüber $S´$ um den Winkel φ um O:

- Das System $S´$ ergibt sich aus S durch Drehung um $-\varphi$.
- Es gilt: $l/p_2 = \sin\varphi$ und $L/p_1 = \cos\varphi$

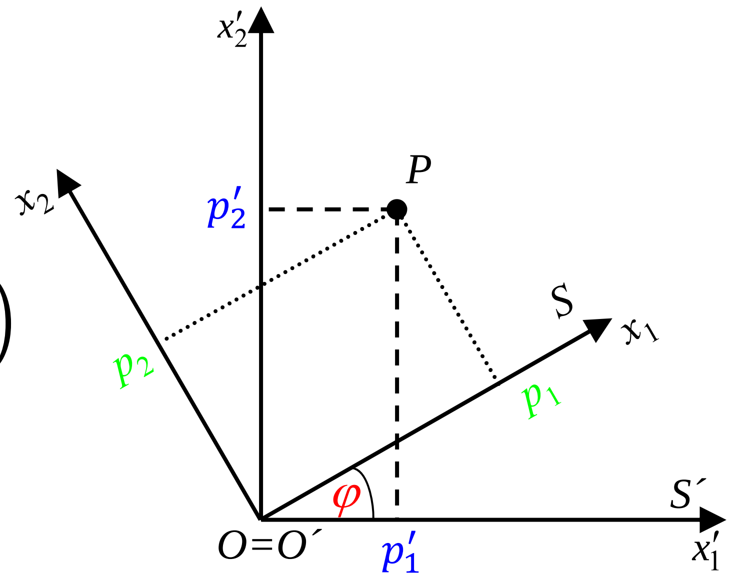
  also $p_1' = L - l = p_1 \cos\varphi - p_2 \sin\varphi$

  analog $p_2' = \;\ldots\; = p_1 \sin\varphi + p_2 \cos\varphi$

§2.2 Transformationen in der Ebene

- Kurz:

$$P' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cos\varphi - p_2 \sin\varphi \\ p_1 \sin\varphi + p_2 \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$



- In Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$P' = R(\varphi) \cdot P,$$

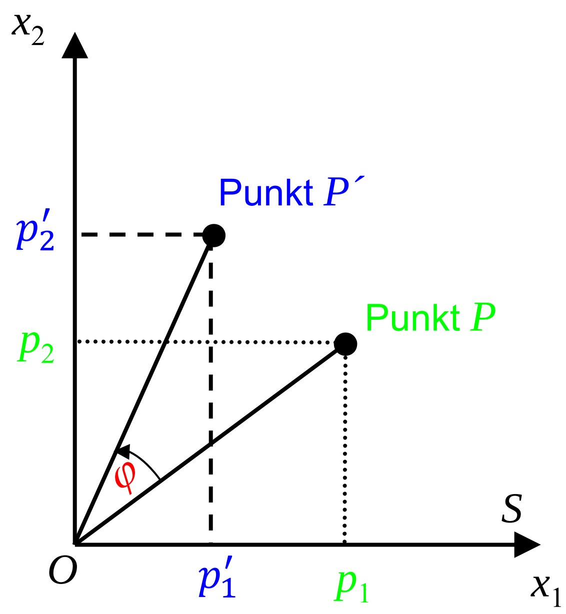
mit der (orthonormalen) Rotationsmatrix: $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Bemerkung: R ist orthonormal gdw. $R^{-1} = R^T$.

§2.2 Transformationen in der Ebene

Sicht a)

Die Matrix $R(\varphi)$ dreht Punkte um den Winkel φ in positiver Richtung um den Ursprung O eines festen Koordinatensystem.



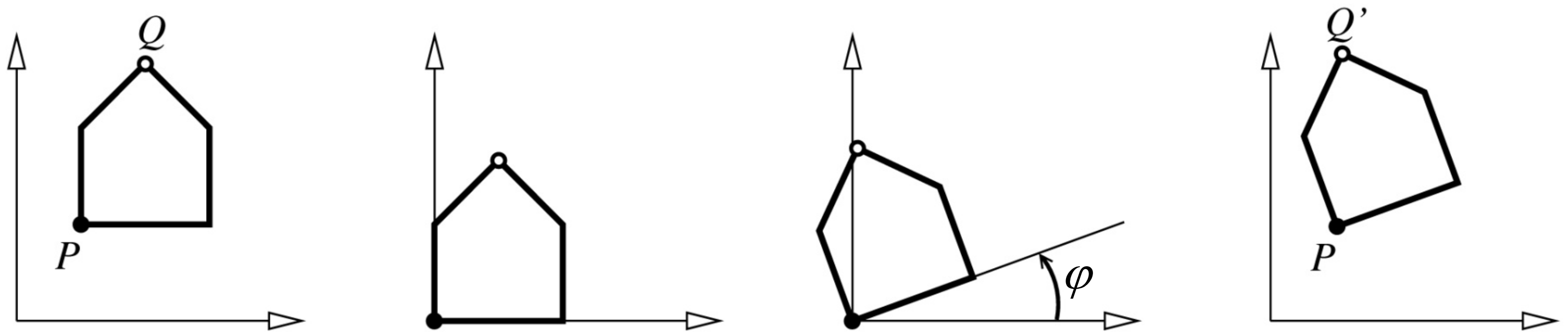
§2.2 Transformationen in der Ebene

Rotation um einen beliebigen Punkt P:

(1) Translation von P in den Ursprung,

(2) Rotation um den Ursprung um den Winkel φ,

(3) Translation von P in die ursprüngliche Position.



Original Haus | Nach Translation | Nach Rotation | Nach Rücktranslation

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge der Matrizen muss der Reihenfolge der Rotationen entsprechen.

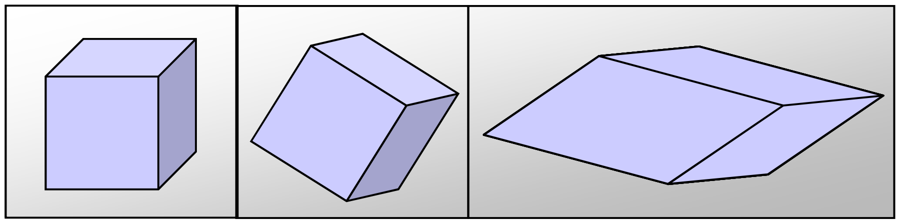
§2.2 Transformationen in der Ebene

§2.2.3 Skalierung (Scaling, Größenänderung)

- Soll das System S „vergrößert" oder „verkleinert" werden, so muss eine Skalierung durchgeführt werden:

$$p_1' = \lambda_1 \cdot p_1$$
$$p_2' = \lambda_2 \cdot p_2$$

- In Vektor-Matrix-Schreibweise: $P' = S \cdot P$ mit $S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
- **Vorsicht!** Skalierungen können Längen und Winkel ändern, d.h. Orthogonalität (Winkel), Orthonormalität (Längen), Rechtshändigkeit (Orientierung) können zerstören werden!



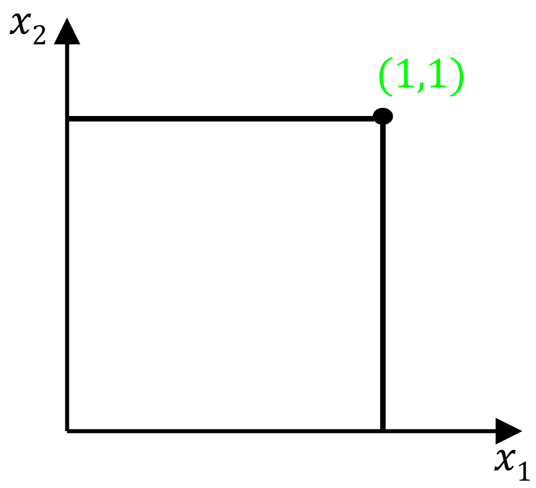
§2.2 Transformationen in der Ebene

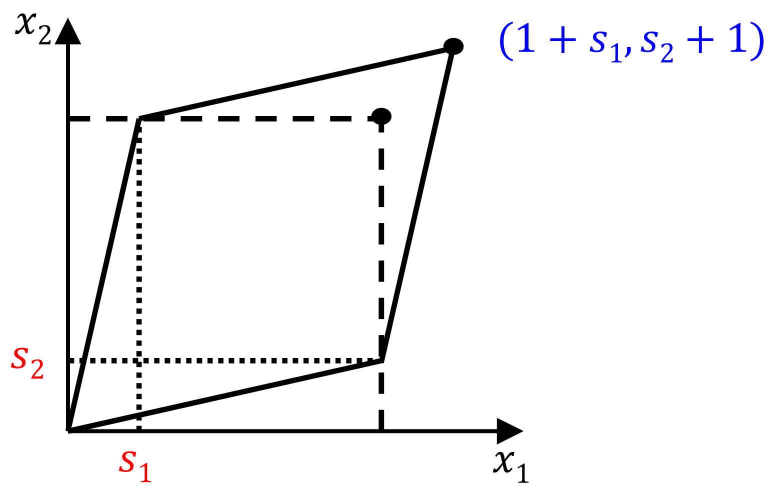
§2.2.4 Scherung (Shear)

- Eine Scherung ergibt sich, wenn Abhängigkeiten folgender Form bestehen:

$$
\begin{aligned}
p_1' &= p_1 + s_1 \cdot p_2 \\
p_2' &= s_2 \cdot p_1 + p_2
\end{aligned}
$$

- In Vektor-Matrix-Schreibweise: $P' = S \cdot P$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix}$.





§2.2 Transformationen in der Ebene

§2.2.5 Affine Transformationen

- Affine Transformationen lassen sich als Kombination einer linearen Abbildung A und einer Translation T schreiben:

$$P' = A \cdot P + T.$$

- Die bisher genannten Transformationen (Translation, Rotation, Skalierung, Scherung) sind affine Transformationen.

§2.2 Transformationen in der Ebene

Affine Invarianz von Teilungsverhältnissen:

Für eine affine Transformation F und die Punkte P und Q gilt immer

$F(\lambda\, P + (1-\lambda)Q\,) = \lambda \cdot F(P) + (1-\lambda) \cdot F(Q)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

bzw. allgemein für Punkte P_i

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i F(P_i)$$

mit

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i = 1\,.$$

§2.2 Transformationen in der Ebene

Eigenschaften affiner Abbildungen:

1. Eine affine Abbildung F ändert Teilverhältnisse $\lambda : (1 - \lambda)$ nicht.
2. Das Bild einer Strecke von Q nach P unter einer affinen Abbildung F ist wieder eine Strecke.
3. Es genügt die Endpunkte Q und P einer Strecke abzubilden; Zwischenpunkte erhält man durch Interpolation von $F(Q)$ und $F(P)$.
4. Unter affinen Abbildungen bleiben parallele Linien parallel.

- **Aber:** Winkel, Längen und Orientierungen können sich ändern!

§2.2 Transformationen in der Ebene

Weitere affine Transformationen:

- Reflexion an der Gerade $y = x$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Reflexion an der Gerade $y = -x$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Reflexion an der x-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Reflexion an der y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Reflexion am Ursprung: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

§2.2 Transformationen in der Ebene

§2.2.6 Homogene Koordinaten

- Die Hintereinanderschaltung von Rotation R, Translation T und Skalierung S führt auf die Abbildungsgleichung

$$P' = S \cdot (T + R \cdot P).$$

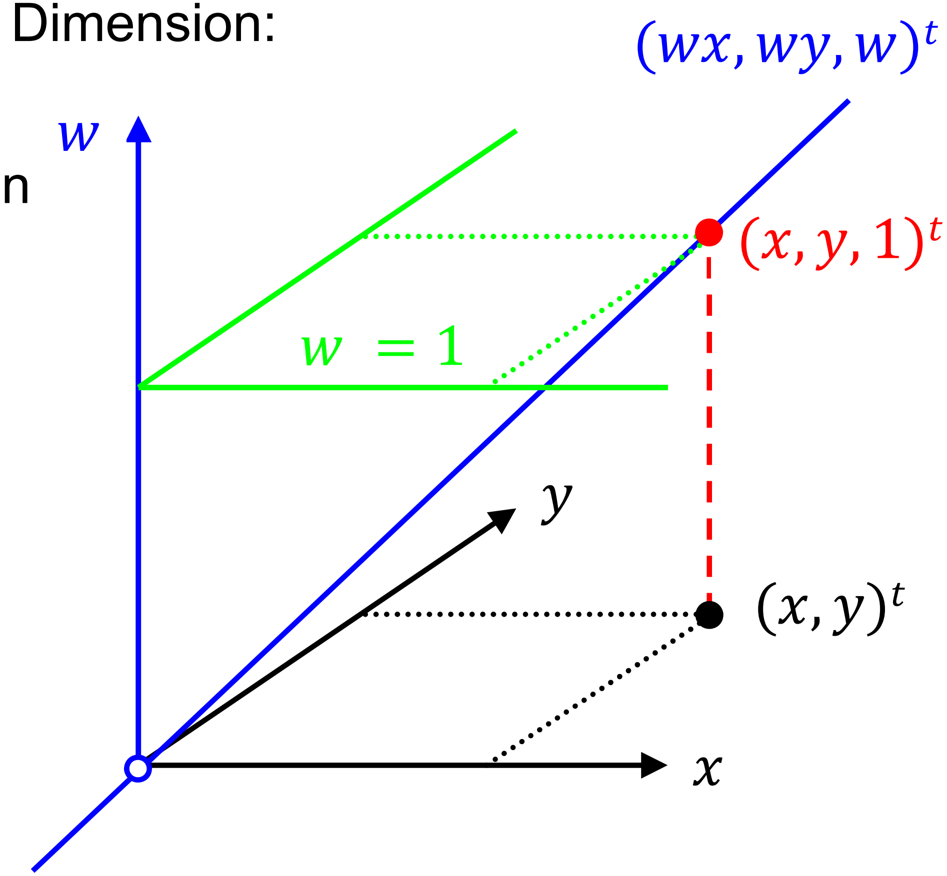
- Müssen mehrere solcher Transformationen hintereinander ausgeführt werden, stört die Addition in der obigen Gleichung.
- Da heutige Grafik-Hardware insbesondere auch Matrixmultiplikationen unterstützt, ist es günstig, affine Transformationen ausschließlich mittels Matrixmultiplikationen auszuführen

$$P' = M_n \cdots M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P.$$

§2.2 Transformationen in der Ebene

Übergang auf die nächst höhere Dimension:

- Das Tripel $(wx, wy, w)^t$, $w \neq 0$, stellt die homogenen Koordinaten des Punktes $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ dar.
- Es gibt unendlich viele solcher Darstellungen desselben Punktes.
- Verwende die so genannte Standarddarstellung $w = 1$.
- Also besitzt ein Punkt $P = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ die homogenen Koordinaten $(x, y, 1)^t$.



- Für Punkt im $\mathbb{R}^3$ gilt Analoges.

§2.2 Transformationen in der Ebene

Darstellung affiner Transformationen in homogenen Koordinaten:

- **Translation** des Punktes $(x, y)^t$ um den Vektor $(t_1, t_2)^t$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Rotation** des Punktes $(x, y)^t$ um den Winkel φ um den Ursprung:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi \\ x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

§2.2 Transformationen in der Ebene

- **Skalierung** des Punktes $(x, y)^t$ mit den Faktoren λ_1 und λ_2:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Rotation** des Punktes $(x, y)^t$ **um einen Punkt** $P = (p_x, p_y)^t$ um den Winkel φ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

§2.3 Transformationen im Raum

§2.3.1 Translation

Die Verschiebung eines Punktes $(x, y, z)^t$ um den Translations-vektor $(t_x, t_y, t_z)^t$ ergibt den Punkt $(x', y', z')^t$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=T(t_x, t_y, t_z)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§2.3 Transformationen im Raum

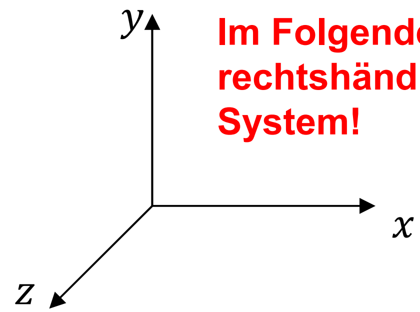
§2.3.2 Skalierung

Eine Skalierung mit den Faktoren λ_1, λ_2 und λ_3 in den drei Achsenrichtungen hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \\ \lambda_3 \cdot z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§2.3 Transformationen im Raum

§2.3.3 Rotation



Im Folgenden: rechtshändiges System!

- Alle Rotationen erfolgen im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn).
  - Der Betrachter „sitzt" dabei auf der Rotationsachse und schaut in Richtung Ursprung des Koordinatensystems.
- Wir betrachten zuerst die Rotationen um die einzelnen Koordinatenachsen um den Winkel φ.

➡ Transformationsmatrizen $R_x(\varphi), R_y(\varphi), R_z(\varphi)$.

- Wir verwenden die Sicht a):

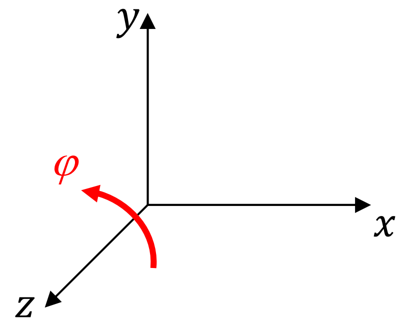
„globales festes Koordinatensystem;

Punkt wird transformiert (gedreht)"

§2.3 Transformationen im Raum

Rotation um die z-Achse

Die Rotation eines Punktes $(x, y, z)^t$ um die z-Achse um den Winkel φ ergibt den Punkt $(x', y', z')^t$ mit



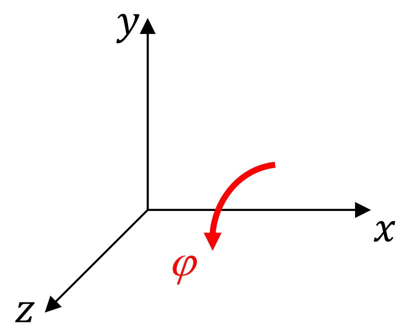
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=R_z(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi \\ x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte: Drehung um den Winkel φ um die z-Achse entspricht dem 2d-Fall, wobei die z-Koordinate konstant bleibt!

§2.3 Transformationen im Raum

Rotation um die x-Achse

Die Rotation eines Punktes $(x,y,z)^t$ um die x-Achse um den Winkel φ ergibt den Punkt $(x',y',z')^t$ mit

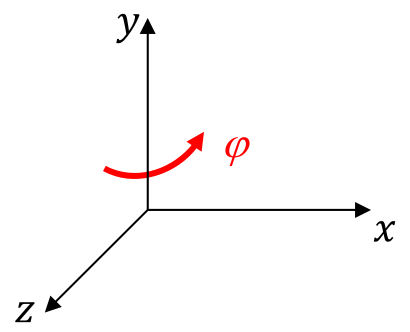


$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=R_x(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cdot\cos\varphi - z\cdot\sin\varphi \\ y\cdot\sin\varphi + z\cdot\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte: Drehung um den Winkel φ um die x-Achse entspricht dem 2d-Fall, wobei die x-Koordinate konstant bleibt!

§2.3 Transformationen im Raum

Rotation um die y-Achse



Die Rotation eines Punktes $(x, y, z)^t$ um die y-Achse um den Winkel φ ergibt den Punkt $(x', y', z')^t$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=R_y(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\varphi + z \cdot \sin\varphi \\ y \\ -x \cdot \sin\varphi + z \cdot \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

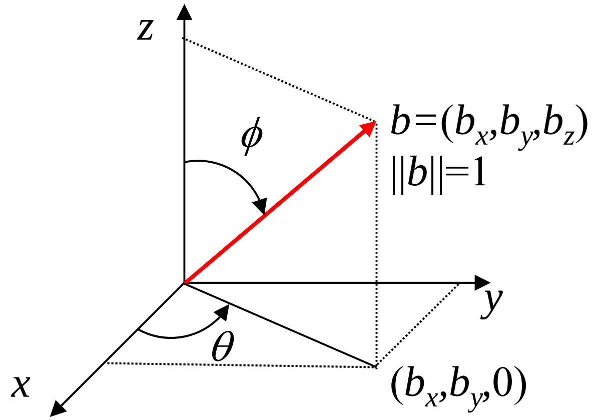
Beachte: Drehung um den Winkel φ um die y-Achse entspricht dem 2d-Fall, wobei die y-Koordinate konstant bleibt!

§2.3 Transformationen im Raum

Rotation um eine beliebige Achse

- Jede Rotation um eine beliebige Achse kann aus **drei** Rotationen um die einzelnen Koordinatenachsen zusammengesetzt werden (→ Euler).
- **Ziel**: Rotation $R_G(\alpha)$ eines Punktes P um eine beliebig orientierte Achse G im Raum um einen Winkel α.

Bem.: Immer noch rechtshändiges System, hier nur gedreht.



$$b_x = \sin\phi \; \cos\theta$$
$$b_y = \sin\phi \; \sin\theta$$
$$b_z = \cos\phi$$

- **Zunächst Sonderfall:** Drehachse G geht durch den Ursprung und wird von einem Vektor $b = (b_x, b_y, b_z)^t$ mit $||b|| = 1$ generiert:

$$G = \{\, \lambda \cdot b \colon \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

§2.3 Transformationen im Raum

Gesucht: Koordinaten eines Punktes P nach einer Drehung um die Achse G um den Winkel α.

- Vorgehensweise:
  (1) Der Punkt P wird so transformiert, dass die Drehachse mit der z-Achse zusammenfällt.
  (2) Anschließend wird für die Drehung um α die Rotationsmatrix $R_z(\alpha)$ verwendet.
  (3) Hinterher werden die „Hilfstransformationen" wieder rückgängig gemacht.
  - Ist G mit der z-Achse identisch, entfallen die Hilfstransformationen.

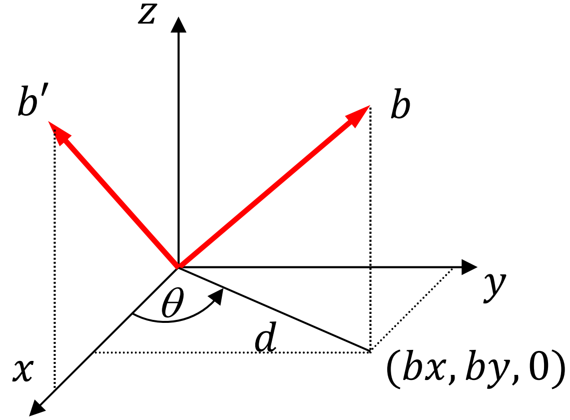
§2.3 Transformationen im Raum

Schritt 1:

- Drehe den Vektor b in die (z, x)-Ebene: $b \to b'$.
- P wird auf P' mit $P' = R_z(-\theta) \cdot P$ abgebildet, mit

$$R_z(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} b_x & b_y & 0 & 0 \\ -b_y & b_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$



$$d^2 = b_x^2 + b_y^2$$

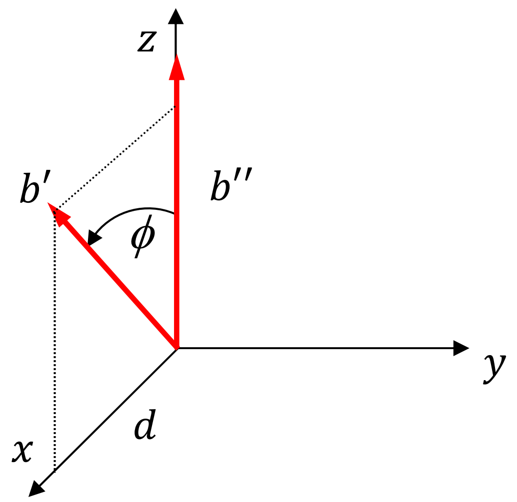
§2.3 Transformationen im Raum

Schritt 2:

- Drehe den Vektor b' auf die z-Achse: $b' \to\ b''$.
- P' wird auf P'' mit $P'' = R_y(-\phi) \cdot P'$ abgebildet, mit

$$R_y(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_z & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

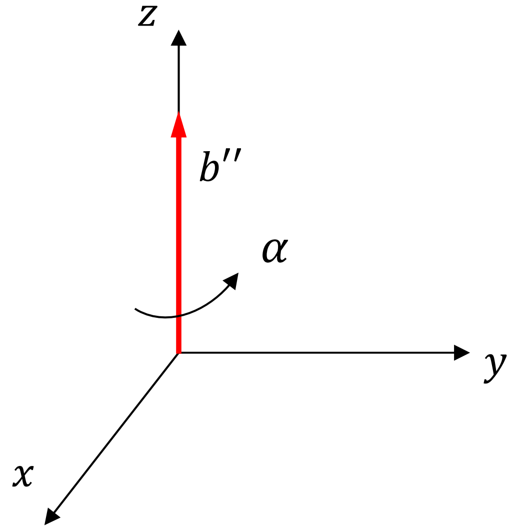


§2.3 Transformationen im Raum

Schritt 3:

- Drehe um den Winkel α um die z-Achse.
- P'' wird auf P''' mit $P''' = R_z(\alpha) \cdot P''$ abgebildet, mit

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



§2.3 Transformationen im Raum

Schritte 4 und 5:

- Die Rotationen aus den Schritten 1 und 2 werden in umgekehrter Reihenfolge rückgängig gemacht.
- P''' wird auf den gewünschten gedrehten Punkt Q des ursprünglichen Punktes P mittels $Q = R_z(\theta)R_y(\phi) \cdot P'''$ abgebildet, mit

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} b_z & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R_z(\theta) = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_x & -b_y & 0 & 0 \\ b_y & b_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

§2.3 Transformationen im Raum

Ergebnis:

Die Gesamttransformation lässt sich in einem Schritt durch die Verknüpfung aller Transformationen realisieren

$$M_b(\alpha) = R_z(\theta)\, R_y(\phi)\, R_z(\alpha)\, R_y(-\phi)\, R_z(-\theta).$$

Allgemeiner Fall:

Ist die Drehachse eine allgemeine Gerade

$$G = \{a + \lambda \cdot b : \lambda \in \mathbb{R}, a = \left(a_x, a_y, a_z\right)^t, \|b\| = 1\},$$

so ist vor Schritt 1 und nach Schritt 5 eine entsprechende Translation einzuschieben, also

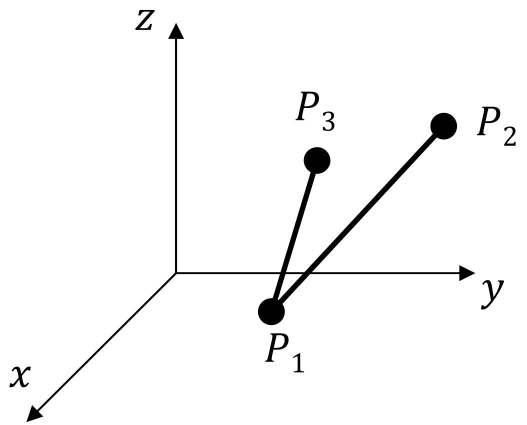
$$M_b(\alpha) = T(a)\, R_z(\theta)\, R_y(\phi)\, R_z(\alpha)\, R_y(-\phi)\, R_z(-\theta)\, T(-a).$$

§2.3 Transformationen im Raum

§2.3.4 Transformation von Koordinatensystemen (Orientierung)

- Zur Definition eines Koordinatensystems im 3D genügen drei (nicht-kollineare) Punkte P_1, P_2, P_3.
- Wie berechnet man die Transformationsmatrix, die
  - P_1 in den Ursprung,
  - P_1P_2 auf die z-Achse und
  - P_2P_3 in die (y, z)-Ebene mit positiver y-Koordinate

  abbildet?



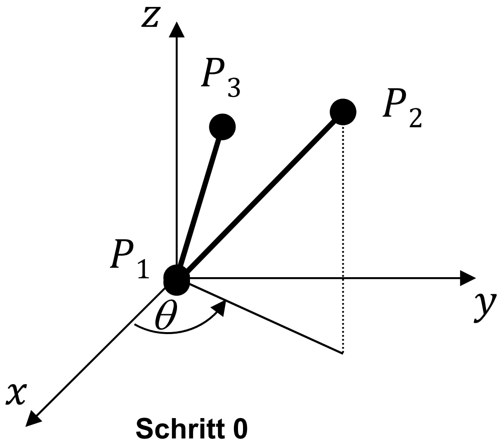
§2.3 Transformationen im Raum

Schritt 0: Translation mit $T(-P_1)$.

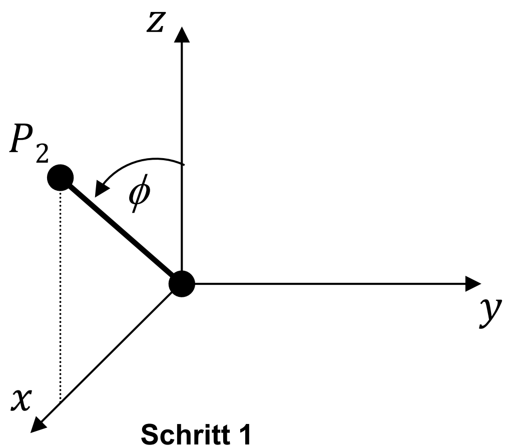
Schritt 1: Rotation mit $R_z(-\theta)$.

Schritt 2: Rotation mit $R_y(-\phi)$.

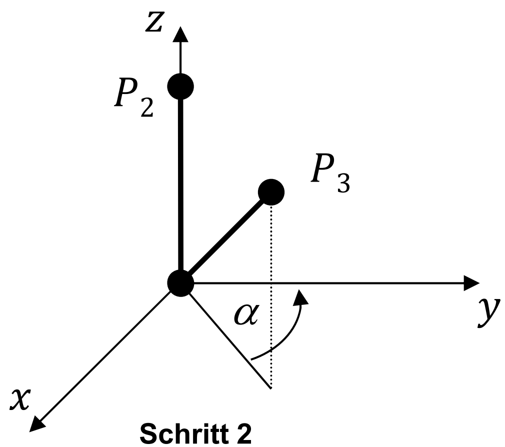
Schritt 3: Rotation mit $R_z(\alpha)$.



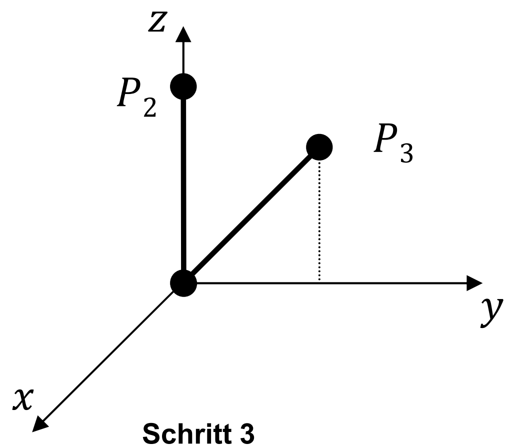
Schritt 0



Schritt 1



Schritt 2



Schritt 3

§2.3 Transformationen im Raum

Die zusammengesetzte Transformationsmatrix hat die Form

$$R_z(\alpha) \cdot R_y(-\phi) \cdot R_z(-\theta) \cdot T(-P_1) = \begin{pmatrix} R & -P_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mit einer orthonormalen 3×3 Matrix R.

- Die Zeilen R_1, R_2, R_3 von R bilden eine Orthonormalbasis

$$R \cdot R_1^t = (1,0,0)^t,$$

$$R \cdot R_2^t = (0,1,0)^t,$$

$$R \cdot R_3^t = (0,0,1)^t,$$

d.h. sie werden durch R auf die Achsen des Koordinatensystems (x, y, z) abgebildet.

§2.3 Transformationen im Raum

Daraus lassen sich die Zeilen von R bestimmen:

Zeile 3: P_1P_2 wird durch R auf die z-Achse abgebildet, d.h.

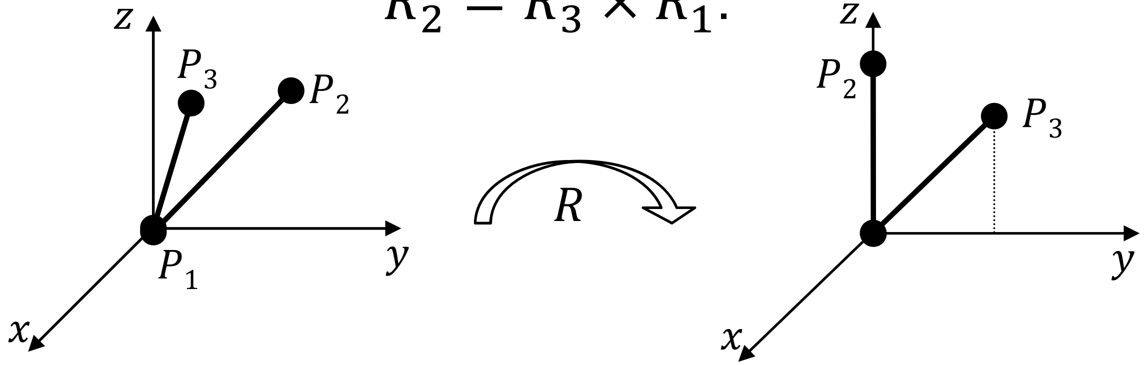
$$R_3^t = (P_2 - P_1)/||P_2 - P_1||.$$

Zeile 1: Der (normierte) Normalenvektor der Ebene $P_1P_2P_3$ wird durch R auf die positive x-Achse abgebildet, d.h.

$$R_1^t = (P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1)/||(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1)||.$$

Zeile 2: Die zweite Zeile ist orthonormal zu R_1, R_3, d.h.

$$R_2^t = R_3^t \times R_1^t.$$

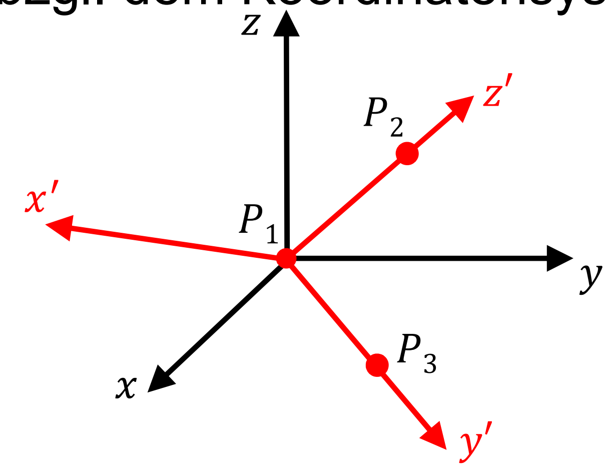


§2.3 Transformationen im Raum

Sonderfall: Ist das von P_1, P_2, P_3 aufgespannte Koordinatensystem kartesisch, ist R gegeben durch

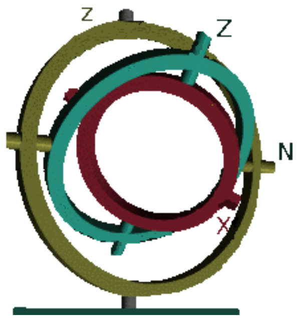
$$R = \begin{pmatrix} x'^t \\ y'^t \\ z'^t \end{pmatrix}$$

in Koordinaten bzgl. dem Koordinatensystem (x, y, z).



§2.3 Transformationen im Raum

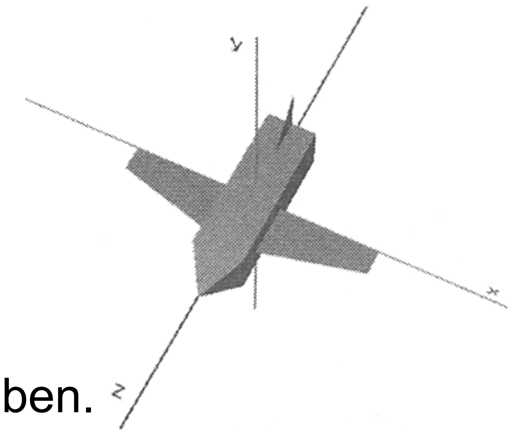
Achtung: Sind P_1P_2 und die z-Achse parallel, sind die Winkel θ und α nicht wohldefiniert.



wikipedia

➡ In diesem Fall ist nur $\theta + \alpha$ wohldefiniert.

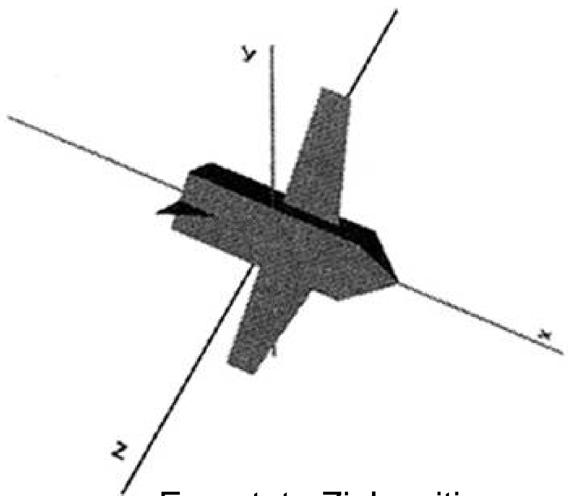
- Dieser Effekt ist eine Ausprägung des sog. **Gimbal-Lock** (gimbal = Kardanaufhängung):
  - Er ist bei einer anderen Rotationsreihenfolge (pilotview) ausgeprägter:
    - x-Rotation um Neigungswinkel (pitch) φ_x,
    - y-Rotation um Gierungswinkel (yaw) φ_y,
    - z-Rotation um Rollwinkel (roll) φ_z.
  - Die Orientierung eines Koordinatensystem wird dann durch das Tripel $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ beschrieben.



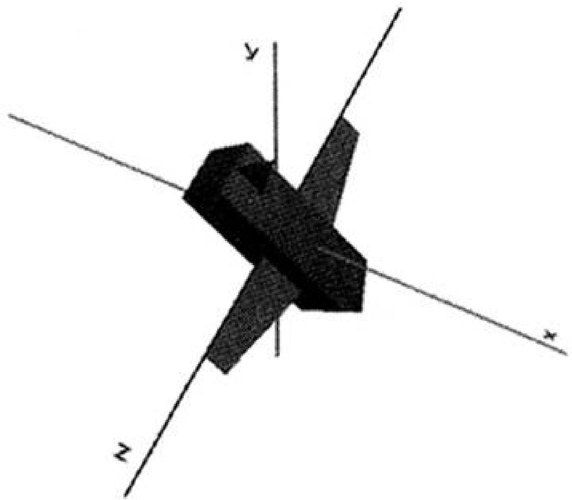
Bender/Brill

§2.3 Transformationen im Raum

- Eine Änderung der Orientierung von $(0°, 0°, 0°)$ nach $(0°, 90°, 45°)$ liefert nicht das gewünschte Ergebnis:
  - Nach der Drehung um die y-Achse ist die dritte Rotationsachse auf die x-Achse gedreht.



Erwartete Zielposition.



Erreichte Zielposition.

Bender/Brill

- Ein Freiheitsgrad geht verloren!

§2.4 Quaternionen

- Vermeidung des Gimbal-Locks bei Euler-Winkeln.
- Interpolation von Rotationen bei der Animation.

Idee: Koordinatensystemfreie Beschreibung einer Rotation!

- Drehachse G geht durch den Ursprung und wird von einem Vektor $b = (b_x, b_y, b_z)^t$ mit $||b|| = 1$ generiert:

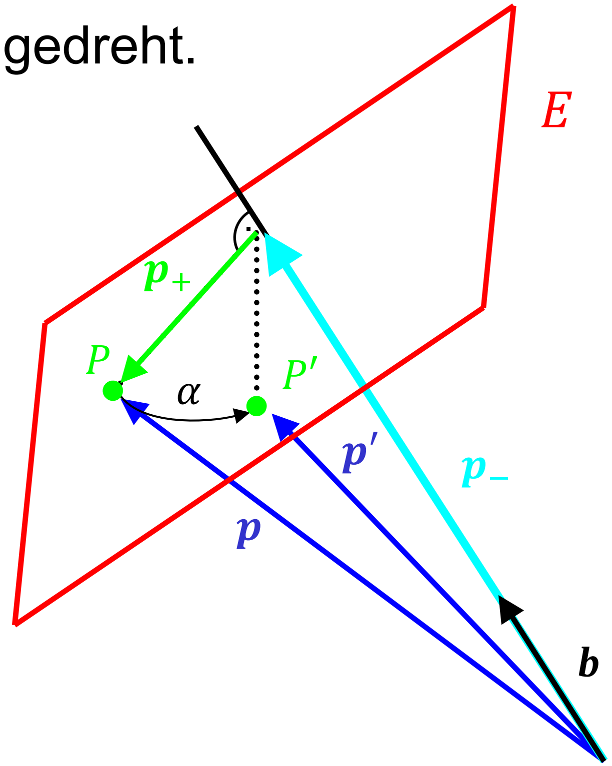
$$G = \{\lambda \cdot b : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Drehe einen Punkt P um die orientierte Achse G im Raum um einen Winkel α.

§2.4 Quaternionen

- Wähle Ebene E durch P senkrecht zu $\boldsymbol{b}$.
- ➡ P wird in der Ebene E auf P' gedreht.
- ➡ Der Vektor $\boldsymbol{p}$ wird auf den Vektor $\boldsymbol{p}'$ gedreht.
- ➡ Diese Rotation hat eine Anteil
  - $\boldsymbol{p}_- = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{b})$ parallel und
  - $\boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{b})$ senkrecht

  zur Ebenen-Normale $\boldsymbol{b}$.



§2.4 Quaternionen

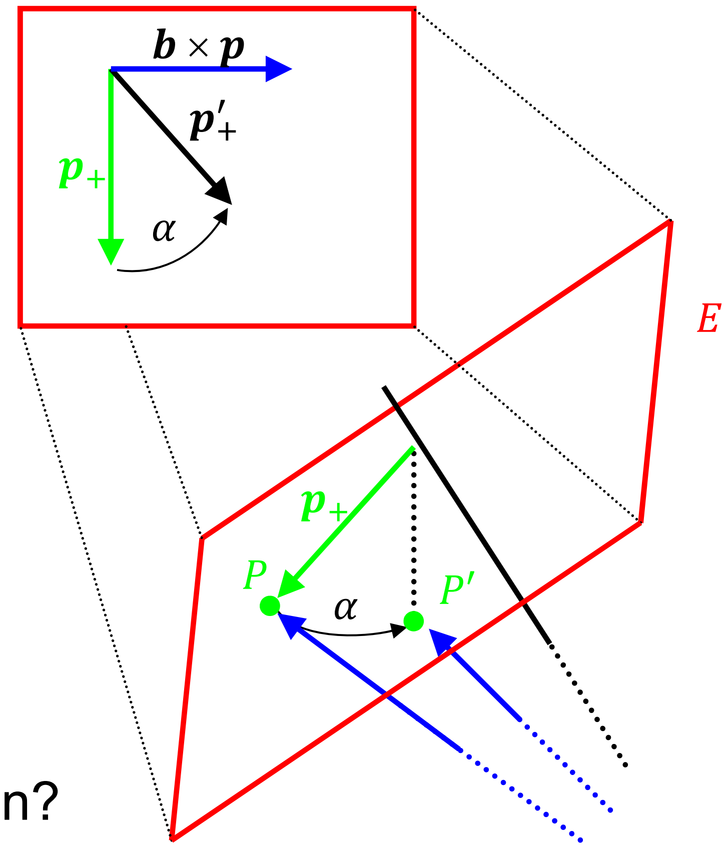
- In der Ebene E wird $\boldsymbol{p}_+$ auf

$$\boldsymbol{p}'_+ = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{p}_+ + \sin\alpha \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p}$$

gedreht.

- Die gesamte Rotation wird also beschrieben durch

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}' = & \cos\alpha \cdot \boldsymbol{p} \\ & + (1-\cos\alpha) \cdot \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p}) \\ & + \sin\alpha \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p}.\end{aligned}$$



- Wie lässt sich das elegant formulieren?

§2.4 Quaternionen

... mit Quaternionen:

Quelle: wikipedia

Sir Walter Hamiton, 1805-1865.

Definition

Ein **Quaternion** q ist gegeben durch vier reelle Zahlen (s, a, b, c) und

$$q = s + a \cdot \boldsymbol{i} + b \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1.$$

Für die **imaginären Einheiten** $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ gilt darüber hinaus

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}.$$

§2.4 Quaternionen

Addition und Multiplikation sind definiert als

$$
\begin{aligned}
(s_1, a_1, b_1, c_1) + (s_2, a_2, b_2, c_2) &= (s_1 + s_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \\
&= s_1 + s_2 + (a_1 + a_2)\boldsymbol{i} \\
&\quad +(b_1 + b_2)\boldsymbol{j} + (c_1 + c_2)\boldsymbol{k}, \\
(s_1, a_1, b_1, c_1) \cdot (s_2, a_2, b_2, c_2) &= s_1 s_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 \\
&\quad +(s_1 a_2 + s_2 a_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)\, \boldsymbol{i} \\
&\quad +(s_1 b_2 + s_2 b_1 + c_1 a_2 - c_2 a_1)\, \boldsymbol{j} \\
&\quad +(s_1 c_2 + s_2 c_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

Ein Quaternion q kann auch geschrieben werden als $q = (s, \boldsymbol{x})$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$(s_1, \boldsymbol{x}_1) \cdot (s_2, \boldsymbol{x}_2) = (s_1 s_2 - \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2, s_1 \boldsymbol{x}_2 + s_2 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2).$$

§2.4 Quaternionen

- Auf Grund der Multiplikation für Quaternionen gibt es auch eine Norm für Quaternionen:

  $$(q \cdot q')^{1/2} = ||q|| = (s^2 + ||\boldsymbol{x}||^2)^{1/2} \text{ mit } q' = (s, -\boldsymbol{x}).$$

  Dabei heißt q' das **konjugierte Quaternion**.

- ➡ Für ein **normiertes Quaternion** q, d.h. $||q|| = 1$, ist das konjugierte Quaternion das Inverse q^{-1}, d.h. $q \cdot q' = (1,0,0,0)$.

Theorem

Jedes normierte Quaternion q kann geschrieben werden als

$$q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\, \boldsymbol{n})$$

für ein $\theta \in [0, \pi]$ und $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $||\boldsymbol{n}|| = 1$.

§2.4 Quaternionen

- Identifiziert man den Vektor $\boldsymbol{p}$ von Seite §2-42 mit dem Quaternion $p = (0, \boldsymbol{p})$, liefert Multiplikation mit einem normierten Quaternion q von links und dem konjugierten Quaternion q' von rechts:

$$
\begin{aligned}
q \cdot p \cdot q' &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}\right) \cdot (0, \boldsymbol{p}) \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}\right) \\
&= \left(0, \cos\theta \cdot \boldsymbol{p} + (1 - \cos\theta) \cdot \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}) + \sin\theta \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}\right).
\end{aligned}
$$

➡ Das ist exakt die selbe Formel wie auf Seite §~~3-55~~ für $\boldsymbol{p}'$ mit $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}$ und $\alpha = \theta$.

➡ Die Multiplikation eines Quaternions mit einem normierten Quaternion q von links und mit dem konjugierten Quaternion q' von rechts ist eine Rotation um die Achse $\boldsymbol{n}$ mit den Winkel θ.

§2.4 Quaternionen

Rotation mit Quaternionen von einem Vektor $\boldsymbol{p}$ um die Achse $\boldsymbol{n}$ mit dem Winkel θ:

1. Bilde das Quaternion $q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\, \boldsymbol{n}\right)$.
2. Berechne $q \cdot (0, \boldsymbol{p}) \cdot q'$.
3. Transformiere das Ergebnis zurück zu einem Vektor im $\mathbb{R}^3$.

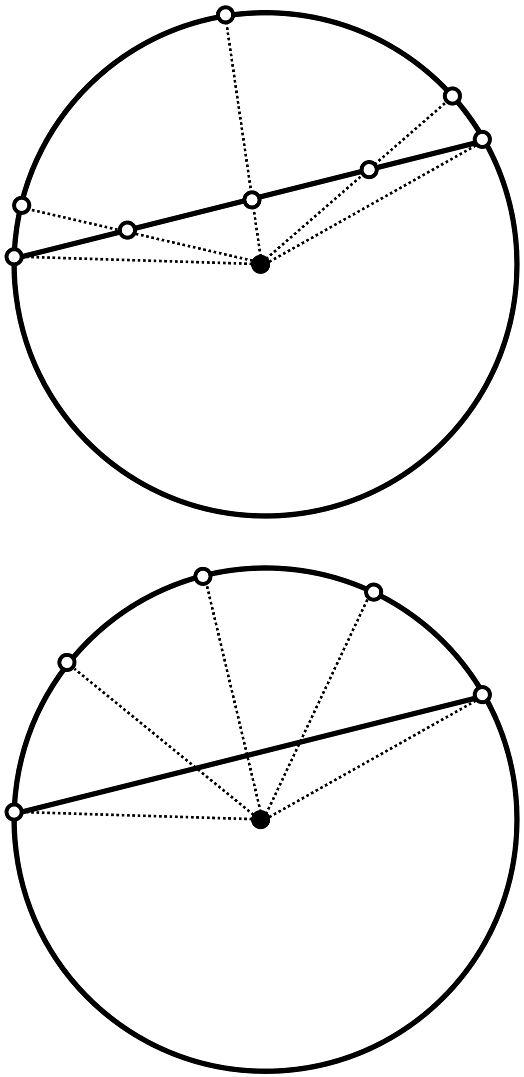
- Weil das Produkt zweier normierte Quaternionen wieder ein normiertes Quaternion ist, können mehrere Rotationen um verschiedene Achsen durch Multiplikation hintereinander ausgeführt werden.

➡ **Achtung:** Die Multiplikation ist nicht kommutativ!

§2.4 Quaternionen

Eigenschaften:

- Die Multiplikation ist nicht kommutativ!
- Es gibt keinen Gimbal-Lock, weil die Reihenfolge von Koordinatenachsen unerheblich ist.
- Interpolation:
  - Lineare Interpolation liefert variierende Winkelgeschwindigkeiten.
  - **S**pherical **L**in**E**a**R** inter**P**olation (SLERP) [Shoemeker85].



Lernziele

- Was ist der Unterschied zwischen Objekt-, Welt-, und Sichtkoordinaten?
- Wie können Translationen, Rotationen und Skalierungen im 2D und 3D beschrieben werden?
- Was sind affine Transformationen?
- Was sind homogenen Koordinaten?
- Was sind Quaternionen?