Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2023-2024

Aleatório

- Em termos qualitativos, “qualquer coisa” que não seja previsível com certeza absoluta

- Acontecimento (evento) cujo resultado não possa ser determinado com certeza absoluta.
  - Caso contrário é determinístico

- adj. Que repousa sobre um acontecimento **incerto**, fortuito: contrato aleatório.
  Diz-se de uma grandeza que pode tomar certo número de valores, a cada um dos quais está ligada uma probabilidade.
    - De: **dicionário online de português**

- http://www.priberam.pt/dlpo/aleat%C3%B3rio

Então qual o interesse ?

- Qual o interesse em estudar algo que não se pode prever ?

- Na maioria das aplicações existe algum tipo de regularidade que se manifesta se o número de observações / experiências for elevado

Problema Exemplo 1

- Qual a probabilidade de acertar num PIN/**password** de 4 dígitos escolhendo um PIN completamente ao acaso?

E de 20 dígitos ?

Probabilidade

"Medida do grau de certeza associado a um resultado proveniente de um fenómeno de acaso"

- Palavra usada pela primeira vez por Bernoulli (1654-1705)

...

- **Experiência aleatória**
  - Procedimento que deve produzir um resultado
  - Mas mesmo que seja repetido nas mesmas condições não garante que o resultado seja idêntico
  - Resultado imprevisível
  - Exemplo:
    - Escolher aleatoriamente uma letra do alfabeto

- A uma experiência aleatória são associados
  - Espaço de amostragem (conj. de resultados possíveis)
  - Conjunto de acontecimentos (ou eventos)
  - Lei de probabilidade

Espaço de amostragem

- Conjunto (S) de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória
  – Em geral representado por S (do inglês "Sample Space")

- Resultados têm de ser mutuamente exclusivos e não divisíveis

- discreto se for contável
  – i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- contínuo se não for contável

- Elementos de S são designados por resultados elementares

Acontecimentos / eventos

- Os resultados elementares das experiências não constituem necessariamente os únicos itens de interesse nas experiências
  - Exemplo:
    - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar (nº > L)

- **Acontecimento (evento)** A é um subconjunto de S
  - S é obviamente um subconjunto de si próprio e constitui o evento certo
  - O conjunto vazio, ϕ, também é subconjunto e representa o evento impossível

Lei de probabilidade

- **Atribui probabilidade aos vários eventos**

- Probabilidade: número associado a um evento que indica a "verosimilhança" de esse evento ocorrer quando se efetua a experiência
  - valor entre 0 e 1 (às vezes é usada a escala 0 a 100%)
    - 1 para acontecimento certo
    - 0 para acontecimento impossível

Cálculo de probabilidades

Como é que se definem/obtêm as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de **medição**
- Através da construção de **modelos** probabilísticos

- Probabilidades **teóricas**
- Probabilidades **empíricas**
- Probabilidades subjectivas
  - Exemplo:
    - Um Médico diz que tem 95 % de certeza de que determinada pessoa tem uma determinada doença
    - Uma casa de apostas estimou em 1/5 a probabilidade de Portugal ser campeão Europeu em 2016
      - E fomos Campeões ☺
  - Não nos interessam nesta UC

Diferentes abordagens

- Teoria **clássica** (de Laplace)
  - Probabilidades teóricas

- **Frequencista**
  - Probabilidades empíricas

- Teoria **matemática**

Teoria Clássica

Noção clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- "*Pour étudiér un phénoméne, il faut réduire tous les evénements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d'un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l'événement e dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles*"
  - pg 17 livro "O Acaso"

- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, **"casos", igualmente prováveis**

$$P(acontecimento) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Exemplo

- **Lançamento de 1 DADO**
  – Honesto
    - => qualquer face igualmente provável

- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ?

- 6 resultados ou <u>eventos elementares</u>
  – Representáveis pelo conjunto {1,2,3,4,5,6}

- Ao evento "saída da face 5" apenas corresponde um caso favorável
  – > P("face 5")=1/6

Variante do problema

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?

- Espaço de amostragem ?
  - S={1,2,3,4,5} ? => casos possíveis =5 ?
  - S={1,2,3,4,**5**,**5**}

- P("sair 5")=2/6

Regras básicas (**OU**)

- P("sair face maior que 4") ?

  = P("sair face 5 ou face 6") = P({5,6}) = 2/6

  = P({5})+P({6})

- P("face par")=P({2})+P({4})+P({6})=1/2
- P("qualquer face") = 6 x 1/6 =1

… P(A U B) = P(A) + P(B)

Sempre ???

Regras básicas

- P("face menor ou igual a 4")

  =1 – P("face maior que 4")

  = 1 – 2/6 = 4/6

Regra do **complemento**

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Regras básicas (**E**)

- P("face par E face menor ou igual a 4")=

  = P("face par") x P("face menor ou igual a 4")

  $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

  De facto existem 2 possibilidades em 6 , {2,4}

  … $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

  Sempre? ….

  (só se os acontecimentos forem independentes)

Aplicação das regras (OU novamente)

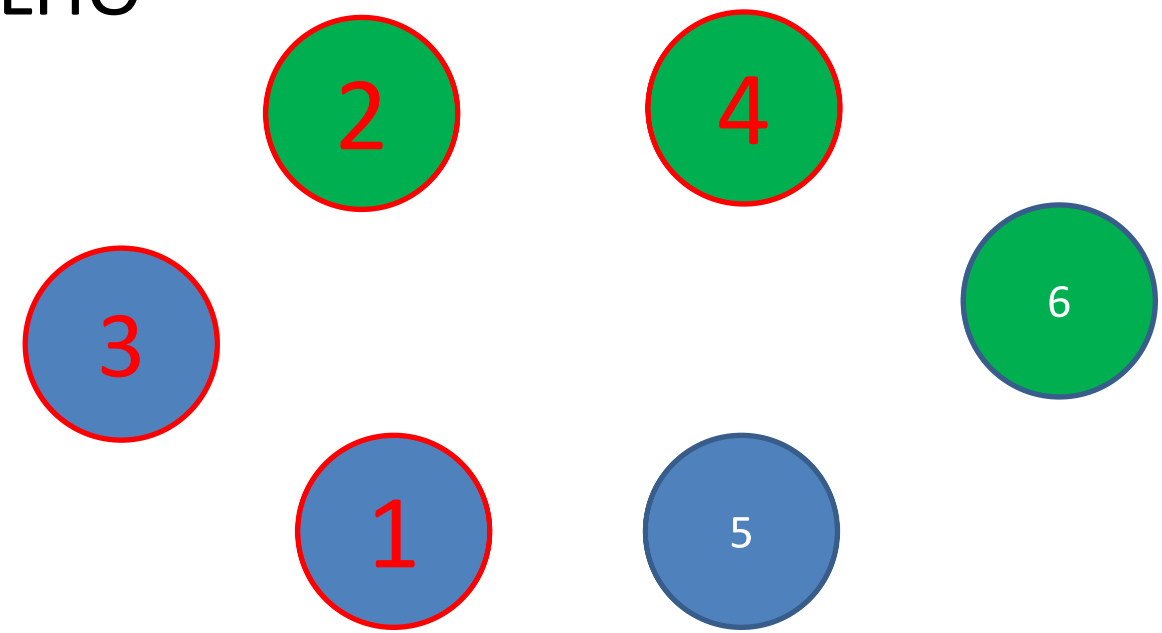
- P(“face par OU face menor ou igual a 4”) = ?

- Se fizermos P(“face par”)+ P(“face menos ou igual a 4”) dá 7/6 > 1 !!

- Qual o erro ?

Acontecimentos

- A="face par" e fundo VERDE
- B="face menor ou igual a 4" limite e texto a VERMELHO



…

Temos 3 com fundo verde => P(A) = ½

Temos 4 com vermelho => P(B) = 2/3

… mas temos 2 casos com fundo verde e limite e texto vermelho

– No mínimo perigoso ☺

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B)$

  $= \frac{1}{2} + 2/3 - 2/6 = 3/6+4/6-2/6 = 5/6$

Testar as regras num problema

- Considere uma **família com 2 filhos** e que a probabilidade de nascer um rapaz é igual à de nascer uma rapariga.
- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?

- Probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos ?

Resolução

- Pelo menos 1 rapaz => MF ou FM ou MM

- MF é a intersecção (“e”) de M no primeiro e F no segundo = ½ * ½

- Similar para MM e FM

- P(MF) + P(MM) + P(FM) = ¾
  - Devido à união (“ou”)

Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, equiprobabilidade para os eventos elementares

- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

Abordagem Frequencista

Noção **Frequencista**

- Noção introduzida por De Moivre (1718)

- Repete-se a experiência um certo número de vezes (N)
- Seja k o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (ex: "sair face 5 num dado")
- Determina-se $f=k/N$, ou seja a frequência relativa de ocorrência
- Usa-se esta frequência como uma medida empírica de probabilidade

Frequência relativa

- Definição:
  - Se uma experiência for repetida N vezes nas mesmas condições a frequência relativa do evento A é

$$f(A) = \frac{\#\ ocorrências\ do\ evento\ A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando N aumenta, então o limite da frequência relativa é a probabilidade de A

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\ ocorrências\ de\ A}{N}$$

Frequência relativa (cont.)

- $0 \leq f(A) \leq 1$

- Numa experiência com K resultados possíveis em N experiências:
    - S= $\{A_1, A_2, A_3, \dots , A_K\}$
    - O resultado A_i ocorre N_i vezes
    - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de $f(A_i) = N_i/N$
    - $\sum_{i=1}^{K} f(A_i) = \frac{(N_1 + N_2 + \dots + N_K)}{N} = 1$

Exemplo em **Matlab**

- Probabilidade de **sair 2 caras em 3 lançamentos**

- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?
- Como se simula a experiência de 3 lançamentos?
- Como se repete “muitas” vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

Simular lançamentos …

```
% simular 1 lançamento (de uma moeda)
lan= rand() <0.5  % assumiremos que 1 = “cara”

% simular os 3 lançamentos
lan_3= rand (3, 1) < 0.5     % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes
N= 1e6  %  mas comecem com valor pequeno
lancamentos= rand(3,N);  % importante o “;”
```

ocorrências ... freq. relativa

```
% contar num ocorrências de "2 caras"
%         contar num caras (1s) em cada experiência
%         (que se encontra numa coluna da matriz lancamentos)
numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);

%  contar vezes em que esse número de caras é 2
numOcorrencias =    sum (numCarasNaExperiencia ==2)

% calcular freq relativa
fr  = numOcorrencias / N

%  usar como estimativa da probabilidade
pA= fr
```

Variação com *N*

% variação da frequência relativa em função de *N*

```
N= 1e5
lancamentos = rand(3,N) < 0.5;
sucessos= sum(lancamentos)==2; % 1 = sucesso
fabsol =  cumsum(sucessos);
frel = fabsol ./ (1:N);

plot(1:N, frel);
```

Simples mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências

- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
  - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
  - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
  - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efetuar um número finito de repetições da experiência
  - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
    - Quantos ensaios se tem de efetuar para termos medidas fiáveis ?
    - Como se lida com medições sujeitas a erro ?

Teoria Axiomática de Probabilidade

Definição axiomática de probabilidade

- Em 1933, Kolmogorov estabeleceu a DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE POR AXIOMATIZAÇÃO
  - na sua obra Foundations of the Theory of Probability.

- com base nas propriedades das frequências relativas e das operações sobre conjuntos

O que é uma axiomática?

Em determinado ponto da evolução de uma teoria de pensamento matemático, torna-se imperioso ordenar, sistematizar e relacionar todos os conhecimentos entretanto nela reconhecidos, isto é, proceder à sua **AXIOMATIZAÇÃO**

Axiomática de probabilidades

- Axioma 1- probabilidades são não-negativas
  P(A) > = 0
- Axioma 2 – normalização (S tem probabilidade 1)
  P(S) =1

- Axioma 3a – Se A e B forem mutuamente exclusivos
  P(A U B) = P(A) + P(B)

- Axioma 3b – Se A1, A2, … for uma sequência infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos ($\forall_{i \neq j} Ai \ \cap Aj = \emptyset$)

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} Ak) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ak)$$

Teoremas

- Como sabem, às afirmações que se obtêm dedutivamente a partir dos axiomas, ou de outras já deles obtidas por dedução, chamamos TEOREMAS.

Teoremas / Corolários :

Prob. do acontecimento complementar

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Demonstração

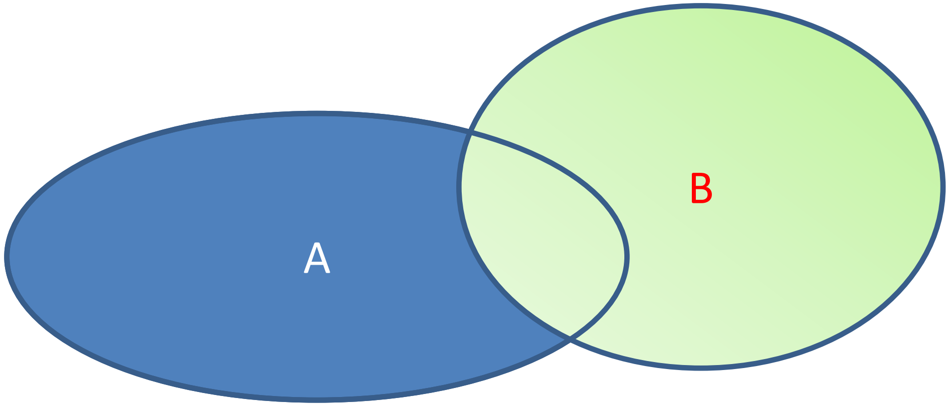
- Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- E $A \cup \bar{A} = S$

- Pelo axiomas 2 e 3:
- $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$ …
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

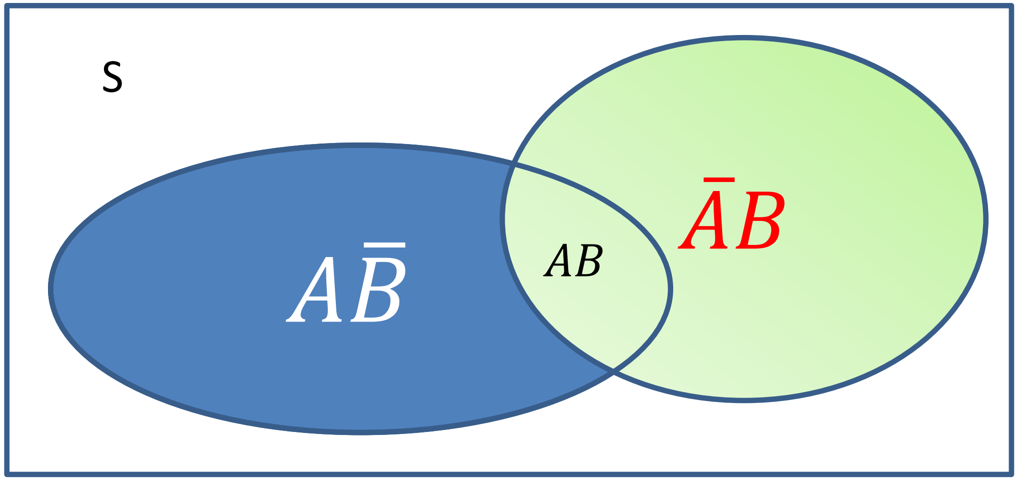
Teorema/Corolário:
Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Com AB$\equiv A \cap B$



Demonstração



$A \cup B = A\bar{B} \ \cup AB \cup \bar{A}B$, disjuntos

Logo (axioma):

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Adicionando e subtraindo P(AB)

$$\mathrm{P}(A \cup B)$$
$$= \big(P(A\bar{B}) + P(AB)\big) + P\big((\bar{A}B) + P(AB)\big) - P(AB)$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  - Escolha de um número real no intervalo [a,b]
- Seja o acontecimento A “número pertencer a [c,d]”

- P(A)= (d-c)/ (b-a)

- A probabilidade de qualquer ponto $x \in [a,b]$ é igual a 0
  - Ter, por exemplo,]c,d[dará igual

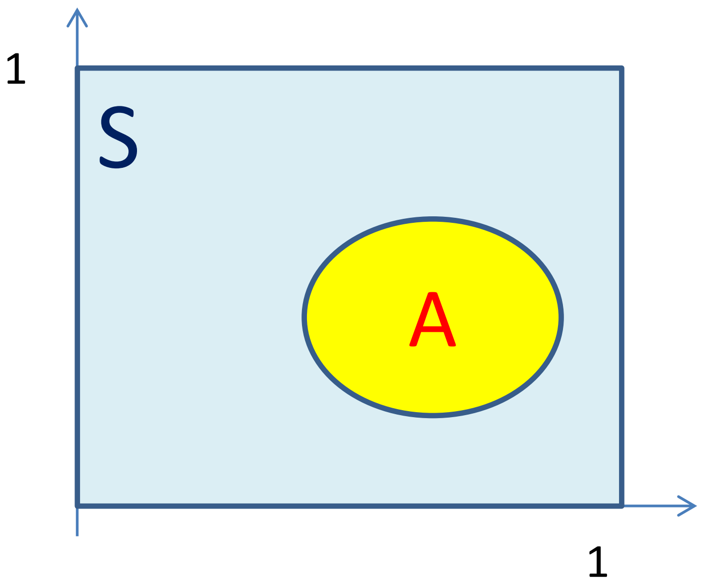
Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  – Escolha de um número real no intervalo [0,60] relativo ao atraso de chegada a uma aula de 60m
- Seja o acontecimento A "chegar dentro da tolerância, i.e. [0,15[
- P(A)= (15-0)/ (60-0) = 0.25
  – Assumindo que podem chegar em qualquer altura da aula ☹
    - O que não é válido

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- No caso de um par de números reais *x, y* entre 0 e 1

$$S = \{x, y: x \in [0,1] \cap y \in [0,1]\}$$



$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Área\ (A)}{Área\ (S)}}$$

A axiomática é compatível com as teorias anteriores ?

Sim, como era de esperar.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: «p(A) não negativo»
  - pois se as frequências relativas são números não negativos também convergem para um número não negativo.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: «p(E)=1»
  - pois as frequências relativas de um acontecimento certo são sempre 1, logo, tendem para 1.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 3: «Se (A e B são incompatíveis) então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B»
  - pois se os acontecimentos A e B são incompatíveis não têm resultados comuns, a frequência relativa de AUB é a frequência relativa de A mais a frequência relativa de B e o limite da soma das duas sucessões é a soma dos limites.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Lei de Laplace
  - Num espaço finito de resultados equiprováveis a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a A (#A) e o número de resultados possíveis (#E)

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: «p(A) não negativo»

  – Pois $p(A)=\#A\ /\ \#E$ o que significa que p(A) é o quociente entre um número real não negativo e um número positivo.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: «p(E)=1»
  - Pois p(E)= #E / #E é o quociente entre dois números iguais.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 3: «Se (A e B são incompatíveis) então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B»

  – Se A e B são disjuntos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

E então:

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{\#A + \#B}{\#E} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E} = p(A) + p(B)$$

Exemplo de Aplicação

k ocorrências em *n* experiências

- *n* lançamentos de moeda de 1 Euro

  P(Face) = P(F) = p ; P(Verso) = P(V) = 1-p

- P(FVVFFF)= P(F)xP(V) … = p (1-p) (1-p) p p p

- P(FVVFFF) = $p^{\#\,Faces}\,(1-p)^{\#\,Versos}$

  $$= p^4(1-p)^2$$

Para aprender mais …

- Capítulos iniciais do livro "Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática", F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.

- Links para material online:
  - http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/probabilityAxioms.htm

- Capítulos iniciais do Livro "O Acaso" , Joaquim Marques de Sá, Gradiva

Probabilidades Condicionais

Probabilidade condicional

- Por vezes dois acontecimentos estão relacionados
  - A ocorrência de um depende ou faz depender a ocorrência do outro

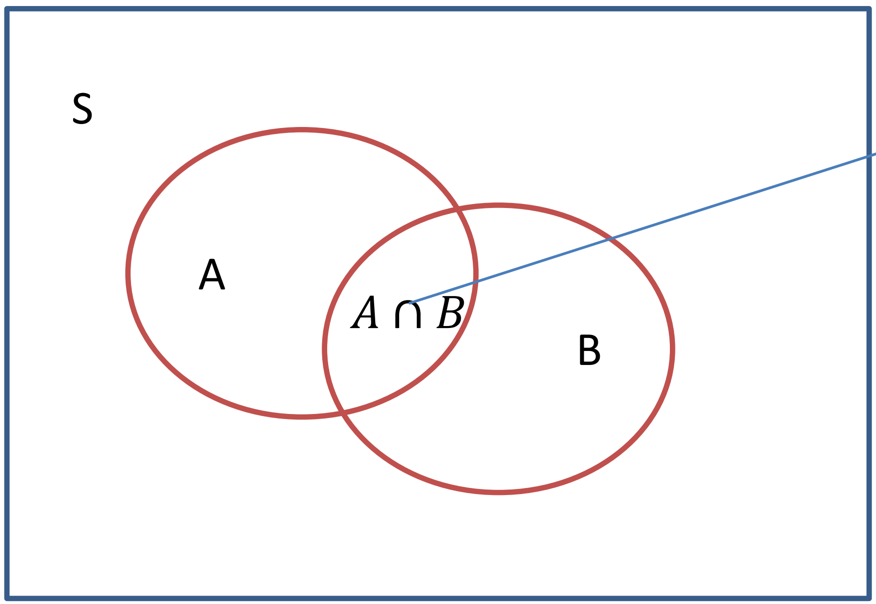
- A Probabilidade de ocorrência de um evento A com a informação de que o evento B ocorreu é a designada **PROBABILIDADE CONDICIONAL** de A dado B
  - Definida por:

$$P(A|B) = \frac{\boldsymbol{P(AB)}}{P(B)} \; se \; P(B) \neq 0$$

Indefinida se P(B)=0

Interpretação da probabilidade condicional

- $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ se $P(B) \neq 0$



Zona onde A se realiza,
Sabendo que B ocorreu

Exemplo de aplicação

- 2 números de 1 a 4, N1 e N2

- Evento B = “min(N1,N2)=2”
- Evento M = “max(N1,N2)”

- **P(M=1|B) =**
  P(“max()=1” & “min()=2”) / P(“min()=2”) =
  …
  =0

- P(M=2|B) = …
  = 1/5

N2→	1	2	3	4
1				
2		B / 2	B /3	B /4
3		B /3		
4		B /4		

Regra da cadeia: P(AB), P(ABC) …

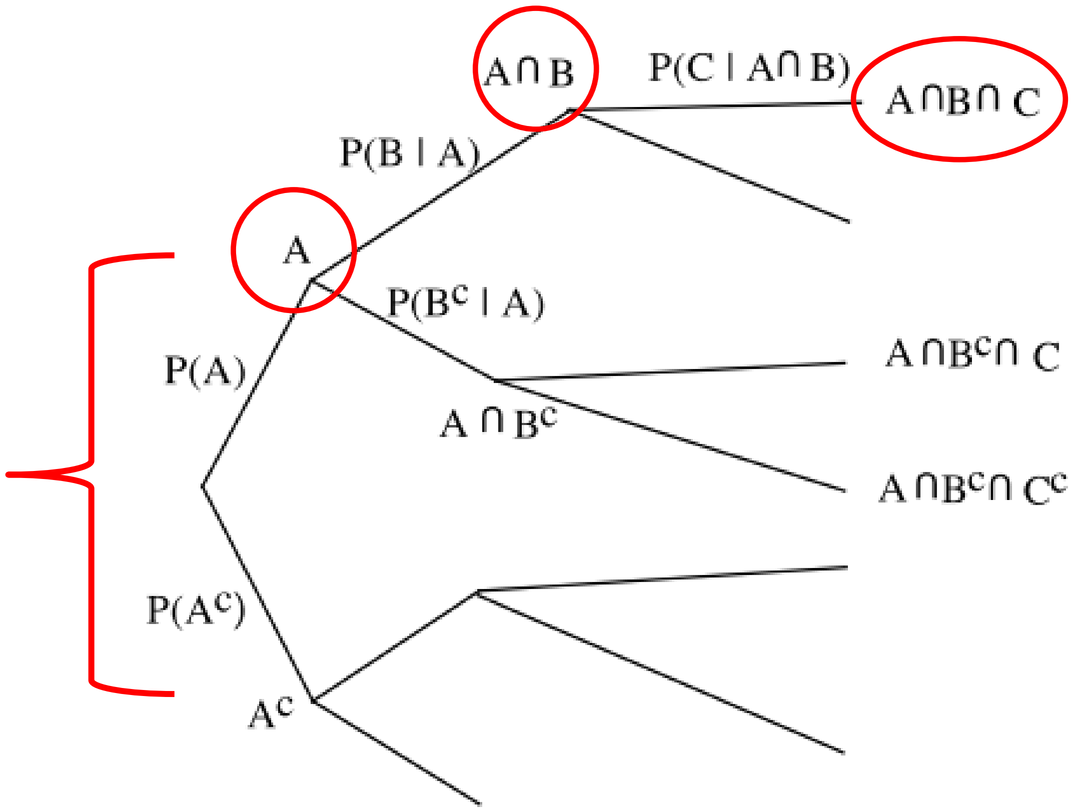
- $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$

- Aplicando sucessivamente temos (regra da cadeia)

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) \\
&= P(A_1|A_2 \dots A_n) \times P(A_2 A_3 \dots A_n) \\
&= P(A_1|A_2 \dots A_n) \\
&\times P(A_2|A_3 \dots A_n) \dots P(A_{n-1}|A_n)
\end{aligned}
$$

Regra da cadeia / multiplicação

- $P(ABC) = P(A)P(B|A)\,P(C|AB)$



Problema com 2 urnas...

- Consideremos 2 urnas, designadas por X e Y, contendo bolas brancas e pretas:
  - X contém 4 brancas e 5 pretas e
  - Y contém 3 brancas e 6 pretas.
- Escolhe-se uma urna ao acaso e extrai-se uma bola. Qual a probabilidade de sair bola branca?

- **P("bola branca")**

= P("branca da urna X OU branca da urna Y")

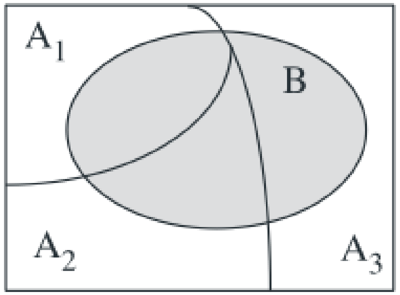
= P("branca E urna X")+P("branca E urna Y")

= P("branca"|"urna X") x P("urna X") + P("branca"|"urna Y") x P("urna Y")

= $(4/9)\times(1/2)+(3/9)\times(1/2) \approx 0{,}39$

Lei da Probabilidade total

- Dividir para conquistar
- Partição do espaço de amostragem A_1, A_2, A_3
- Ter $P(B|A_i)$, para todos os i



- $$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

Em geral: $\mathrm{P(B)} = \sum_j P(B|A_j)P(A_j)$

Condicionamento inverso

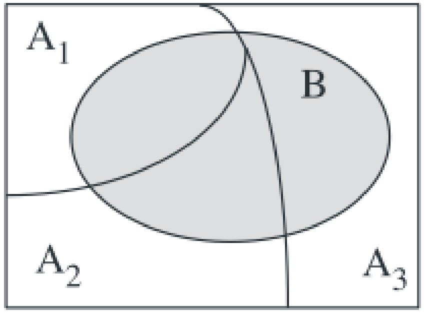
- Continuando com as urnas ...
- **Problema Inverso** (condicionamento inverso)

P("urna X" | "bola branca")

Resolvido pela primeira vez pelo Reverendo Thomas Bayes (1702-1761)

Regra de Bayes

- Probabilidades *a priori* $P(A_i)$
- Sabemos $P(B|A_i) \ \forall i$



- Pretendemos calcular $\boldsymbol{P(A_i|B)}$
  – i.e. $P(A_i)$ dado que B ocorreu

- $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$

$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$

Aplicando ao problema das urnas

- **P("urna X" | "bola branca")**

$$= \frac{P(\text{"bola branca"}|\text{"}urna\ X\text{"}) \times P(\text{"}urna\ X\text{"})}{P(\text{"bola branca"})}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{4}{7}$$

- P("urna Y" | "bola branca")=

$$\ldots = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{3}{7}$$

$$= 1 - P(\text{"urna X"}|\text{"bola branca"})$$

Causa e efeito

- No evento “urna X se bola branca” podemos considerar que a saída de bola branca é o EFEITO da causa “urna X”
- A Regra de Bayes, em consequência, pode ser escrita da seguinte forma:

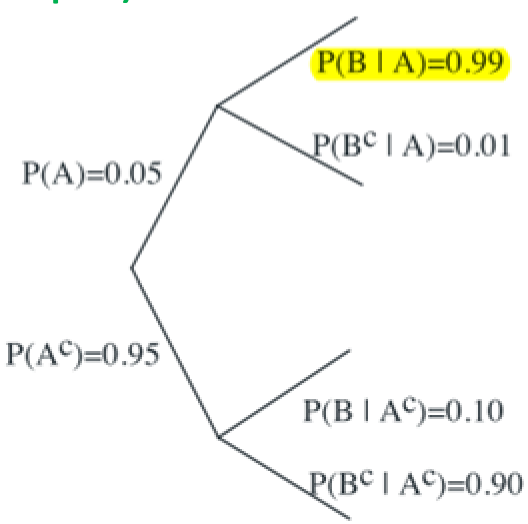
$$P(\text{"causa"} \mid \text{"efeito"}) = \frac{P(\text{"efeito"} \mid \text{"causa"}) \times P(\text{"causa"})}{P(\text{"efeito"})}$$

Exemplo de aplicação Regra de Bayes - radar

Evento A: avião voando na zona do radar, P(A)= 0.05

Evento B: Aparece algo no ecrã do radar, P(B|A)= 0.99

P(A | B)= ?



- P(A ∩ B) =

=P(B|A) P(A)

=0,99 x 0,05

- P(B) =

$$= P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

- P(A | B) =

$$= \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

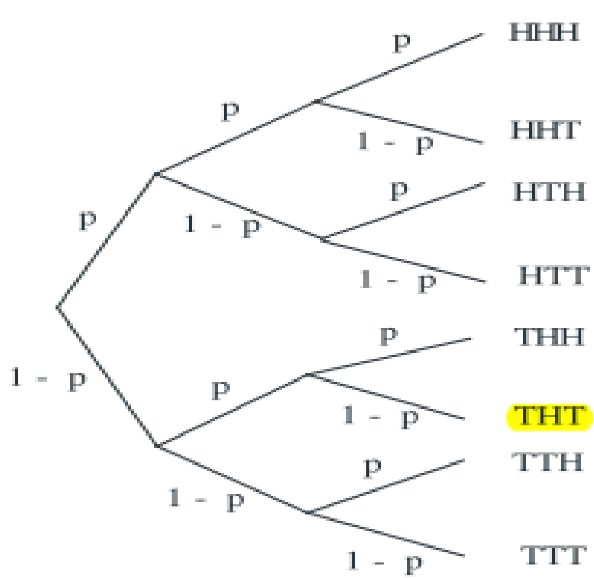
$$= \frac{0,99 \times 0,05}{0,1445} = 0.3426$$

(valor baixo)

Outro exemplo

3 lançamentos de uma moeda não honesta

P(H) = p , p(T)=1-p



Calcular:

- P(THT)

=(1-p) p (1-p)

- P("1 H")

= P(HTT)+P(THT)+P(TTH)
= p(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p)+(1-p)(1-p)p
= 3x p(1-p)(1-p)

- P("primeiro lançamento dá H" | "1 H")

= P (primeiro H & 1 H) /p(1H)
… = p(1-p)(1-p) / … = 1/3

Confirmando caso favorável {HTT} e casos possíveis {HTT, THT, TTH}
Nota: os casos possíveis são equiprovaveis

Outro exemplo – sistema de comunicação/transmissão

- 0 ou 1 na entrada, transmissão sujeita a erros, entradas equiprováveis.
- No receptor uma decisão é tomada (0 ou 1):
  - Se ε for a probabilidade de erro, qual a entrada mais provável se na saída obtemos 1 ?

- Seja A_k o acontecimento "entrada é k", k=0,1

  $A_0\ e A_1$constituem uma partição de S
- Seja B_1 o acontecimento "saída = 1"

…

- $P(B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0) + P(B_1|A_1) \times P(A_1)$

$$= \varepsilon \frac{1}{2} + (1-\varepsilon)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Probabilidade de entrada ter sido zero dado que saída igual a 1 ?
  $P(A_0|B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0)/P(B_1)$
  $= \frac{\varepsilon}{2} \,/\, \frac{1}{2} = \varepsilon$

- De forma similar $P(A_1|B_1) = \ldots = 1 - \varepsilon$

- Se ε <1/2 a entrada mais provável é 1 (se saída for 1)
  – Que é o que se pretende em geral.

Independência

Independência

- 2 acontecimentos são independentes sse P(AB) = P(A)P(B)
  - Simétrico relativamente a A e B
  - Aplica-se mesmo que P(A)=0
  - Implica P(A|B)=P(A) [mas não é a definição]
    - Ocorrência de B não fornece informação sobre ocorrência de A

- Generalização…

  os acontecimentos $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ são independentes sse

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Independência vs independência 2 a 2

- Experiência:
  2 lançamentos de moeda
- Acontecimentos
  - A: primeira é caras
  - B: segunda é caras
  - C: mesmo resultado em ambas

HH	HT
TH	TT

- $P(C)$? P(A) ? P(B) ?

  2/4=1/2
- $P(C \cap A) =$

  1/4 = 1/2 x 1/2
  C e A indep.
- $P(C \cap B) =$

  1/4 = 1/2 x 1/2
  C e B indep.
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ .... $A\ e\ B\ ind.$
- $P(C \cap B\ \cap A) =$

  $$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Independência 2 a 2 não implica independência

Independência e acontecimentos mutuamente exclusivos

- Em geral dois acontecimentos que sejam mutuamente exclusivos e tenham probabilidade não nula não podem ser independentes

$$0 = P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

implicaria que um deles tenha probabilidade nula

- Em geral considera-se que acontecimentos em experiências distintas são independentes (experiências independentes)

Sequências de experiências independentes

- Se uma experiência aleatória for composta por *n* experiências independentes e se A_k for um acontecimento que diga respeito à experiência *k*, é razoável admitir que os *n* acontecimentos são independentes

- Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Experiências de Bernoulli

- Uma **experiência de Bernoulli** consiste em realizar uma experiência e registar se um dado acontecimento se verifica (sucesso) ou não (falha)

Qual a **probabilidade de *k* sucessos em *n* ensaios independentes** ?

- Seja ***p*** a probabilidade de sucesso e **(1-*p*)** a de falha
- A probabilidade de *k* sucessos e (*n*-*k*) falhas é:

$$p^k \, (1-p)^{n-k}$$

- *k* sucessos em *n* experiências podem ocorrer de C_k^n maneiras

- Então a probabilidade pedida é:

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_k^n \; p^k \; (1-p)^{n-k}}$$

Lei Binomial

Visão frequencista e probabilidade condicional

- Do ponto de vista frequencista, considerando os eventos *A* e *B* e *N* experiências, podemos escrever:

- $P(A|B) \approx \frac{k_{A\ e\ B}/_N}{k_B/_N} = \frac{k_{A\ e\ B}}{k_B}$

- Onde $k_{A\ e\ B}$ é o número de ocorrência de “A e B”
  - Que também se pode denominar por frequência absoluta e representar por f_{AB}

Simulação

- Como fazer para ter P(A|B) ?

- Realizar *N* experiências

- Contar o número de ocorrências de *AB*
  Será fAB (frequência absoluta)
- Contar número de ocorrências de *B*
  fB

- $P \cong \dfrac{fAB/N}{fB/N} = \dfrac{fAB}{fB}$

Exemplo de simulação
(Independência vs independência 2 a 2)

- Relembremos:

  2 lançamentos de moeda

  A: primeira é caras

  B: segunda é caras

  C: mesmo resultado em ambas

- $P(C \mid A \cap B)$

simulação

```
% P(C | A e B) =  P(C e A e B) / P(A e B)
N= 1e5;
m1= rand(1,N) < 0.5; % registo lançamentos da 1ª moeda
m2= rand(1,N) < 0.5; % registo lançamentos da 2ª moeda


ABC= (m1==m2) & (m1==1) & (m2==1);   % C: iguais   A: primeira caras
                                     % B: segunda caras
fABC=sum(ABC,1);

AB =   (m1==1) & (m2==1);    %  A: primeira caras  B: segunda caras

fAB=sum(AB,1);

p=fABC/fAB
P= 1 ....
```

Principais assuntos

- Probabilidade
- Teorias de Probabilidade (Clássica, Frequencista, Axiomática)
- Probabilidade Condicional
  - 3 Ferramentas muito importantes
    - Regra da multiplicação
    - Teorema da Probabilidade total
    - Regra Bayes
- Independência
- Aplicação da teoria frequêncista a probabilidades condicionais

Não esquecer

- Independência de 2 eventos
- Independência de um conjunto de eventos
- Probabilidade condicional

$$P(A|B) = {P(A \cap B)}/{P(B)}$$

- Regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Probabilidade total:

$$\mathrm{P(B)} = \sum_j P(B|A_j)P\left(A_j\right)$$

Regra de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \;\; P(B|A_i)}{P(B)}$$

Para aprender mais …

- Capítulos iniciais do livro "Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática", F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.