



## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ОПТИКЕ

### Лабораторная работа № 405

МОСКВА 2005

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

Анализ сложного волнового поля во многих случаях целесообразно проводить, разлагая его на простейшие составляющие, например, представляя его в виде разложения по плоским волнам. При этом оказывается, что если мы рассматриваем поле, полученное после прохождения плоской монохроматической волны через предмет или транспарант (изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания  $t(x)$ , то разложение по плоским волнам соответствует преобразованию Фурье от этой функции. Если за предметом поставить линзу, то каждая плоская волна сфокусируется в свою точку в задней фокальной плоскости линзы. Таким образом, картина, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы, даёт нам представление о спектре плоских волн падающего на линзу волнового поля. Поэтому можно утверждать, что с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье.

#### Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки

Рассмотрим вначале простой пример: дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом  $d$  расположена в плоскости  $Z = 0$ , а её штрихи ориентированы вдоль оси  $Y$ . Функция пропускания такой решётки имеет вид

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} \quad (1)$$

с постоянными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u$  ( $u = 2\pi/d$  — пространственная частота).

Если на решётку падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси  $Z$ ,

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (2)$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $k$  — волновой вектор ( $k = 2\pi/\lambda$ ),  $E_0$  — амплитуда, то на выходе из решётки мы получим три плоских волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta E_0 e^{-i(\omega t - kz)}; \\ E_2 &= \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t - ux - \sqrt{k^2 - u^2} \cdot z)}; \\ E_3 &= \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t + ux - \sqrt{k^2 - u^2} \cdot z)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, легко видеть, что в плоскости  $Z = 0$  амплитуда колебаний, создаваемая суммой этих волн, описывается функцией (1), а фаза колебаний постоянна. Таким образом, в силу единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях мы нашли искомую суперпозицию плоских волн. Каждая из этих трёх плоских волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости.

Волна  $E_1 = \beta E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ , распространяющаяся вдоль оси линзы (оси  $Z$ ), фокусируется в начало координат, а волны  $E_2$  и  $E_3$ , распространяющиеся в направлении  $\sin \theta = \pm(u/k)$ , фокусируются в точках  $x_{1-2} = \pm Fu/k = \pm F\lambda/d$  ( $F$  — фокусное расстояние линзы).

Функция  $t(x)$  с самого начала задана в виде суммы гармонических составляющих, т. е. в виде *ряда Фурье*. Каждой гармонической составляющей мы поставили в соответствие с (3) плоскую волну, собираемую линзой в точку в задней фокальной плоскости (её обычно называют *фурье-плоскостью*). Проводя аналогию с «временной» координатой, мы можем заключить, что спектр функции  $t(x)$  представлен в фурье-плоскости тремя пространственными частотами: 0,  $+u$ ,  $-u$ ; с амплитудами соответственно:  $\beta$ ,  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$ .

Теорема Фурье, доказываемая в курсе математического анализа, утверждает, что *широкий класс периодических функций  $t(x)$  может быть представлен в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих, имеющих кратные частоты, т. е. в виде ряда Фурье*. В комплексной форме этот ряд имеет вид

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inu x}. \quad (4)$$

Рассуждая так же, как в случае амплитудной синусоидальной решётки, мы придём к выводу, что картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами

$$x_n = \frac{Fu}{k}n = \frac{F\lambda}{d}n$$

и амплитудами, пропорциональными  $C_n$ . Таким образом, с помощью линзы в оптике осуществляется *пространственное преобразование Фурье*: при освещении транспаранта плоской монохроматической волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за транспарантом, представляет собой *фурье-образ* функции пропускания транспаранта.

Последнее утверждение нуждается в уточнении. Распределение света в задней фокальной плоскости линзы будет воспроизводить распределение амплитуд плоских волн, продифрагировавших на транспаранте, но

фазовые соотношения при этом, вообще говоря, оказываются искажёнными и не соответствуют аргументам комплексных амплитуд в выражении (4). При изменении расстояния между транспарантом и линзой фазовые соотношения изменяются. Можно доказать, что если транспарант установлен в передней фокальной плоскости линзы, то в её задней фокальной плоскости восстанавливаются и амплитудные, и фазовые соотношения между плоскими волнами, и таким образом строго осуществляется комплексное фурье-преобразование (4).

Во многих практически важных случаях функция пропускания транспаранта чисто амплитудная, как, например, в случае амплитудной синусоидальной решётки (1). Тогда для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания транспаранта, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе из транспаранта. Для амплитудной синусоидальной решётки мы получили три плоских волны с пространственными частотами 0,  $+u$ ,  $-u$  и амплитудами, пропорциональными  $\beta$ ,  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$ . В соответствии с (1) мы можем утверждать, что нашли пространственный фурье-образ функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки.

Интересно заметить, что наблюдаемая визуально картина фраунгоферовой дифракции в задней фокальной плоскости линзы не зависит от расстояния между транспарантом и линзой, так как глаз не реагирует на фазу волны, а регистрирует только интенсивность (усреднённый по времени квадрат амплитуды поля). Условия наблюдения дифракции Фраунгофера можно выполнить и без применения линзы, если наблюдать дифракционную картину на достаточно удалённом экране. Таким образом, пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Фраунгофера.

**Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций**

Картина дифракции Фраунгофера на щели и на дифракционной решётке, имеющей вид периодического набора щелей, хорошо известна из курса оптики. Спектр дифракционной решётки представлен на рис. 1. Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы в спектре бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

Направление на главные максимумы  $\theta_n = un/k = \lambda n/d$  ( $n$  — целое число) определяется периодом решётки  $d$ , а распределение амплитуд в спектре (огнивающая) — фурье-образом функции пропускания отдельно-

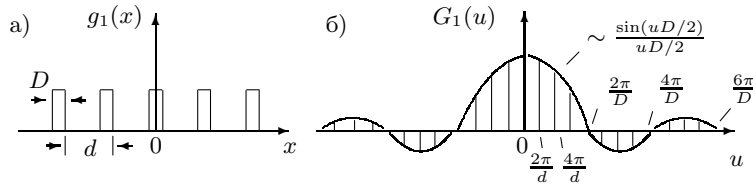


Рис. 1. а)  $g_1(x)$  — функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос);  
б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания дифракционной решётки

го штриха:

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -D/2 \leq x \leq D/2; \\ 0 & \text{при } -D/2 > x > D/2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как функция  $g_2(x)$  непериодична, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{iux} du, \quad (6)$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

Говорят, что в таком виде  $g(x)$  и  $G(u)$  представляют собой *пару преобразований Фурье*:  $G(u)$  — *спектр* или *фурье-образ* функции  $g(x)$ .

Спектр функции  $g_2(x)$  хорошо известен, он соответствует картине дифракции Фраунгофера на щели и описывается функцией вида  $\frac{\sin x}{x}$  (рис. 2).

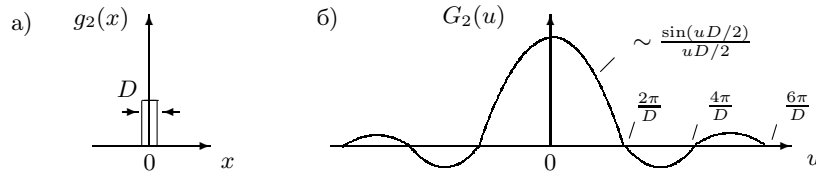


Рис. 2. а)  $g_2(x)$  — функция пропускания щелевой диафрагмы;  
б)  $G_2(u)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы

Получим спектр  $G_2(u)$  ещё раз с помощью преобразования Фурье:

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{-D/2}^{D/2} e^{-iux} dx = D \frac{\sin(uD/2)}{uD/2}.$$

Отсюда видно, что направление на первый минимум  $\theta_1$  в огибающей спектра пропускания дифракционной решётки определяется шириной функции пропускания отдельного штриха:  $\theta_1 = u/k = \lambda/D$ . Если ввести понятия *протяжённости функции пропускания* транспаранта по координате ( $\Delta x$ ) и *ширины её спектра* ( $\Delta u$ ), то

$$\Delta u \cdot \Delta x = \text{const.} \quad (7)$$

Для частного случая функции пропускания щелевой диафрагмы, определяя ширину её спектра по первому нулю функции  $\frac{\sin(uD/2)}{uD/2}$ , получаем

$$\Delta u \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Соотношение (7) в волновой физике играет чрезвычайно важную роль. Его называют *соотношением неопределённости*.

Измерив на удалённом экране расстояния между максимумами или минимумами в спектре пропускания щели (рис. 2б) или решётки (рис. 1б), можно рассчитать размер щели или период решётки.

Размер малого объекта можно рассчитать, если получить его изображение, увеличенное с помощью линзы.

Метод Аббе

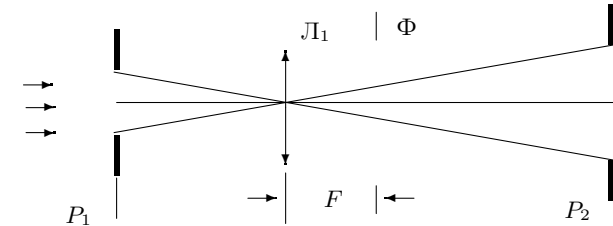


Рис. 3. Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Рассмотрим кратко схему образования изображения (рис. 3). Пусть предмет расположен в плоскости  $P_1$  на расстоянии от линзы большем, чем фокусное. Тогда существует сопряжённая предметной плоскости  $P_1$  плоскость  $P_2$ , где образуется изображение предмета-щели.

Аббе предложил рассматривать схему прохождения лучей от предмета к изображению в два этапа. Сначала рассматривается изображение-спектр в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $L_1$  (это изображение Аббе назвал *первичным*).

Затем это изображение рассматривается как источник волн, создающий изображение предмета в плоскости  $P_2$  (вторичное изображение). Такой подход опирается на принцип Гюйгенса–Френеля, согласно которому любой участок волнового фронта можно рассматривать как источник излучения.

Картина, наблюдаемая в плоскости  $P_2$ , зависит от распределения амплитуды и фазы в плоскости  $\Phi$  — в первичном изображении. Если плоскость  $P_2$  сопряжена с предметной плоскостью  $P_1$ , то фазовые соотношения в первичном изображении оказываются именно такими, что в плоскости  $P_2$  мы наблюдаем соответственно увеличенное или уменьшенное изображение предмета. Поэтому иногда говорят, что линза дважды осуществляет преобразование Фурье: сначала в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы получается световое поле, соответствующее фурье-образу функции пропускания предмета (с точностью до фазы), а затем на промежутке между фокальной плоскостью  $\Phi$  и плоскостью изображений  $P_2$  осуществляется обратное преобразование Фурье, и в плоскости  $P_2$  восстанавливается таким образом изображение предмета.

### Мультипликация изображения предмета

Рассмотрим, что произойдёт с изображением предмета, если мы установим в задней фокальной плоскости линзы решётку. Сопоставим вначале спектры щелевой диафрагмы (рис. 2) и периодической последовательности щелевых диафрагм (рис. 1).

Легко видеть, что спектр, изображённый на рис. 1, можно получить из спектра, изображённого на рис. 2, если исключить из него часть пространственных частот, поместив в фурье-плоскость решётку — последовательность прозрачных и непрозрачных линий (рис. 4).

Отфильтрованный таким образом спектр не будет отличаться ни по

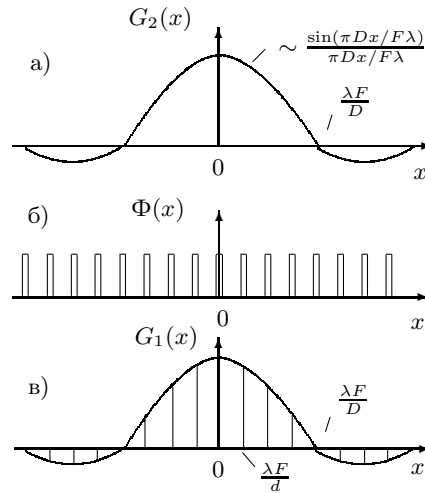


Рис. 4. а)  $G_2(x)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы;  $x$  — координаты в задней фокальной плоскости линзы; б)  $\Phi(x)$  — функция пропускания решётки, установленной в фурье-плоскости линзы; в)  $G_1(x)$  — отфильтрованный спектр щелевой диафрагмы (ср. с рис. 1)

амплитуде, ни по фазе от спектра периодической последовательности щелевых диафрагм, и в плоскости  $P_2$  мы получим вместо изображения одиночной щели изображение периодической последовательности щелей.

Эти рассуждения можно повторить и для предмета с произвольным спектром, необходимо только, чтобы период решётки был заметно меньше ширины спектра (точное соотношение можно получить из теоремы Котельникова). Таким образом, установив в задней фокальной плоскости линзы решётку, мы вместо изображения одиночного предмета получим эквидистантный набор изображений таких предметов, т. е. осуществим мультипликацию изображения предмета (увидим изображение несуществующей «фиктивной» решётки).

Поменяв местами сетку и щель, можно проследить влияние размера щели на изображение сетки.

**Экспериментальная установка.** Схема установки представлена на рис. 5. Щель переменной ширины  $D$ , снабжённая микрометрическим винтом В, освещается параллельным пучком света, излучаемым He-Ne лазером (радиус кривизны фронта волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используемых в схеме линз).

Увеличенное изображение щели с помощью линзы  $L_1$  проецируется на экран Э. Величина изображения  $D_1$  зависит от расстояний от линзы до предмета —  $a_1$  и до изображения —  $b_1$ , т. е. от увеличения  $\Gamma$  системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1}. \quad (8)$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $L_1$ . Размещая в плоскости  $\Phi$  двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультиплицированное изображение щели.

Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. 6), а если заменить щель решёткой — спектр решётки. Крупные решётки дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. 7): первая (длиннофокусная) формирует первичное изображение — спектр, вторая (короткофокусная) — проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается: А) определить размеры щели сначала по увеличенному с помощью линзы изображению, затем — по спектру на экране; Б) определить периоды сеток сначала по спектру, затем по увеличенному изображению спектра; В) исследовать изображение щели,

мультиплицированное с помощью сеток; Г) проследить влияние щелевой диафрагмы, расположенной в фурье-плоскости, на изображение сетки.

## ПОПАДАНИЕ ПРЯМОГО ЛУЧА НА СЕТЧАТКУ ОПАСНО!

### А. Определение ширины щели

#### І. Определение ширины щели с помощью линзы

1. Включите в сеть блок питания лазера. Обратите внимание на распределение интенсивности излучения лазера на экране: на его сложную структуру, обусловленную возбуждением различных типов колебаний в резонаторе лазера.
2. Установите тубус со щелью вплотную к выходному окну лазера (см. рис. 5). Настройку системы следует вести, наблюдая за пятном света на листе бумаги.

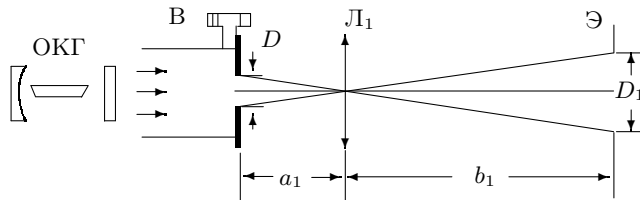


Рис. 5. Схема для определения ширины щели с помощью линзы

3. С помощью короткофокусной линзы  $L_1$  ( $F_1 \simeq 3 - 4$  см) получите на экране Э увеличенное изображение щели. Фокусы линз указаны на оправах.
4. Определите начало отсчёта ширины щели по её открытию, т. к. ноль может быть сбит. Цена деления винта — 10 мкм.
5. Меняя ширину щели от 50 до 500 мкм (5–50 делений от нового нуля), снимите зависимость размера изображения  $D_1$  от ширины щели  $D$ . Изменение ширины щели следует вести в сторону увеличения, чтобы исключить влияние люфта (свободного хода винта).
6. Измерьте расстояния  $a_1$  и  $b_1$  для определения увеличения  $\Gamma$  системы<sup>1</sup>. Погрешность этих измерений велика (особенно для малого расстояния

<sup>1</sup>Метки на столах расположены на расстояниях 50, 100 и 120 см от экрана.

$a_1$ ), поэтому, измерив дополнительно  $L = a_1 + b_1$  и зная  $F_1$ , можно по формуле линзы рассчитать  $a_1$  и  $b_1$  и сравнить с измеренными. Для удалённого экрана расчёт даёт обычно  $a_1 \simeq F_1$ .

7. Зная увеличение линзы и размер изображения, рассчитайте по формуле (8) ширину входной щели  $D_{\text{л}}$  («л» — с применением линзы).

#### ІІ. Определение ширины щели по её спектру

8. Получите на удалённом экране спектр щели (рис. 6). Меняя ширину щели, проследите за изменением спектра на экране и оцените интервал, для которого можно наблюдать и измерять спектр.

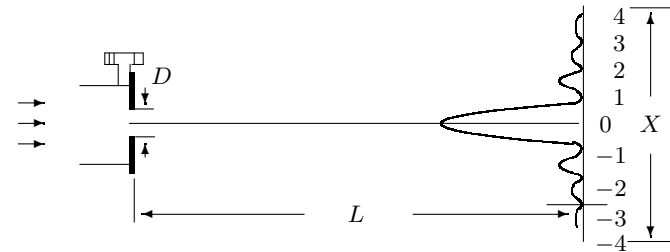


Рис. 6. Схема для определения ширины щели по спектру

9. Измерьте ширину спектра для самой маленькой щели. Для большей точности следует измерять расстояние  $X$  между удалёнными от центра минимумами, расположенными симметрично относительно центра картины, и отмечать порядок минимума  $m$  (например, 1-й, 2-й, 3-й, ..., начиная от центра).

Проведите серию измерений  $X(m)$ , меняя ширину щели в тех же пределах, что и в п. 5.

Измерьте расстояние  $L$  от щели до экрана.

10. По результатам измерений спектра рассчитайте ширину щели  $D_c$  («с» — по спектру), используя соотношения

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{D_c}. \quad (9)$$

Длина волны He-Ne лазера  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ .

Постройте на одном листе графики  $D_{\text{л}} = f(D)$  и  $D_c = f(D)$ .

Обратите внимание, что по спектру можно определить размер малой щели, который не может быть достаточно точно определён с помощью линзы, т. к. размер изображения щели на экране 2–3 мм.

- Если поднести волос с выходному окну лазера, то по дифракционной картине на экране можно определить его диаметр. Проведите измерения и расчёт так же, как для щели.

## Б. Определение периода решёток

### I. Определение периода по спектру на удалённом экране

- Поставьте кассету с двумерными решётками (сетками) вплотную к выходному окну лазера. В окошке под отверстием с сеткой виден № сетки. Вращением наружного кольца кассеты можно менять сетки.
- Для каждой сетки измерьте расстояние  $X$  между  $m$ -ми максимумами и отметьте  $m$  — порядок максимума.

Измерьте расстояние  $L$  от кассеты до экрана.

- Рассчитайте расстояния  $\Delta X$  между соседними максимумами и определите период каждой решётки  $d_c = f(N^\circ)$ , используя соотношения

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{d_c} L. \quad (10)$$

Для крупных решёток спектры промерить не удаётся — они слишком узки. Их можно увеличить с помощью системы линз.

### II. Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра

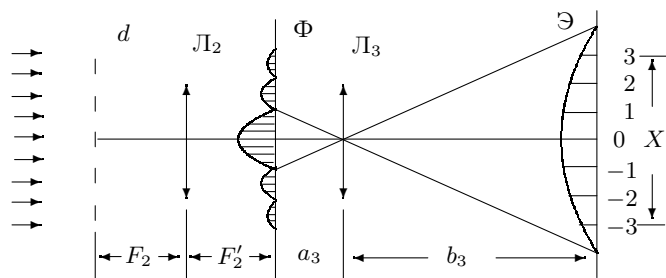


Рис. 7. Схема определения периода решётки по увеличенному изображению спектра

- Линзу  $L_2$  с максимальным фокусом ( $F_2 \simeq 10$  см) поставьте на расстоянии  $\simeq F_2$  от кассеты. В плоскости  $\Phi$  линза  $L_2$  даёт фурье-образ сетки — её спектр, а короткофокусная линза  $L_3$  ( $F_3 \simeq 2,5$  см) создаёт на экране увеличенное изображение этого спектра.

Так как экран достаточно удалён ( $b_3 \gg a_3$ ), то практически  $a_3 = F_3$ , и расстояние между линзами  $\simeq F_2 + F_3$ .

- Измерьте  $X$  и  $m$  для всех сеток, где это возможно.
- Зная увеличение линзы  $L_3$  ( $\Gamma_3 = b_3/a_3$ ), можно рассчитать расстояние между максимумами  $\Delta x$  в плоскости  $\Phi$ , а затем период сетки  $d_\pi$ :

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\Gamma_3} = \frac{\lambda}{d_\pi} F_2. \quad (11)$$

## В. Мультиплицирование

- Снова поставьте тубус со щелью к окну лазера (рис. 8) и найдите на экране резкое изображение щели с помощью линзы  $L_2$  ( $F_2 \simeq 10$  см).

В фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $L_2$  поставьте кассету с сетками, которые будут «рассекать» фурье-образ щели — осуществлять пространственную фильтрацию.

- Подберите такую ширину входной щели  $D$ , чтобы на экране можно было наблюдать мультиплицированное изображение для всех сеток. Чем уже щель, тем шире её фурье-образ и тем легче рассеять его сетками.

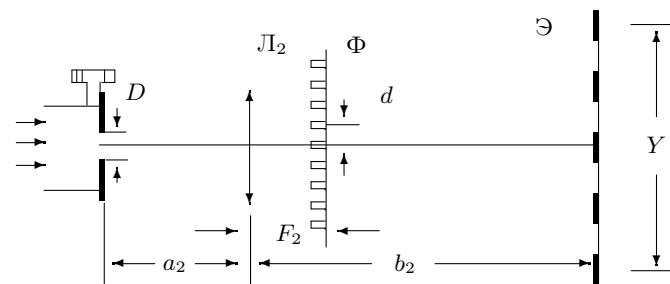


Рис. 8. Схема для наблюдения мультиплицирования

- Снимите зависимость  $Y$  (расстояние между удалёнными изображениями щели) и  $K$  (число промежутков между изображениями) от  $N^\circ$  (номер сетки) для фиксированной ширины входной щели.

Запишите величины  $D$  и  $F_2$ . Измерьте расстояния  $a_2$  и  $b_2$  для расчёта увеличения  $\Gamma_2$ .

- Рассчитайте периоды  $\Delta y$  «фиктивных» решёток, которые дали бы такую же периодичность на экране:  $\Delta y = \Delta Y/\Gamma_2$ , где  $\Delta Y = Y/K$ .

Постройте график  $\Delta y = f(1/d_c)$ , где  $d_c$  — периоды решёток, определённые по спектру. Зависимость должна быть линейной, поскольку

$$\frac{\lambda}{\Delta y} F_2 = d_c.$$

5. Зная размер щели  $D$ , постройте в масштабе первичное изображение (спектр щели) и отложите на нём величины  $d(\mathbb{N})$  — периоды самой плотной и самой редкой из использованных решёток.

### Г. Влияние щелевой диафрагмы на изображение сетки

1. Поставьте на место щели (рис. 8) кассету с сетками и сфокусируйте на экран изображение сетки. Убедитесь, что изображение остаётся резким при смене сеток. Если нет — добейтесь этого (устраните саморепродукцию), слегка перемещая линзу  $L_2$ .

Поставьте в плоскости  $\Phi$  вертикальную щель и проследите за изменением изображения на экране при сужении щели. Прodelайте то же для щели, ориентированной горизонтально и под углом  $45^\circ$  к вертикали. Объясните явление.

### Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой изображения, наблюдаемые в плоскостях  $P_1$ ,  $\Phi$ ,  $P_2$ ?
2. Что общего между спектром одиночной щели и спектром периодической последовательности щелей такой же ширины?
3. Как связаны между собой ширина щели и ширина её спектра?
4. В работе наблюдается картина дифракции Фраунгофера на сетке. Какие параметры сетки можно определить по этой картине?
5. Что общего и чем отличаются спектры, образующиеся при дифракции Фраунгофера на щели и на волосе?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. IV. Оптика. — М.: Наука, 1980. Гл. IV, § 52.
2. *Козел С.М., Листвин В.Н., Локшин Г.Р.* Введение в когерентную оптику и голографию: Учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2001.
- 3\* *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы Физики. — Т. I. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Гл. 1, § 1.4; Гл. 8.