

2. *Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material; von P. Debye.*

(Auszug aus der Münchener Dissertation.)

Einleitung.

Die hohe Bedeutung, die die Tatsache des Lichtdruckes neuerdings gewonnen hat, in der allgemeinen Physik für die Theorie der Strahlung, sowie in der kosmischen Physik für die Arrheniussche Theorie der Kometenschweife, legt es nahe, die Berechnung des Lichtdruckes in den verschiedenen vorkommenden Fällen auch zahlenmäßig durchzuführen. Die Bedürfnisse der Strahlungstheorie wurden schon vollständig befriedigt durch die Behandlung des Lichtdruckes bei einem vollkommen reflektierenden, ebenen Spiegel, wie diese seit Maxwell bekannt und neuerdings von M. Abraham auch für bewegte Spiegel geliefert wurde. Anders liegen die Verhältnisse in der kosmischen Physik. Arrhenius legte seiner Theorie der Kometenschweife¹⁾ ursprünglich eine Formel für den Lichtdruck zugrunde, wie man sie durch Verbindung der Prinzipien der geometrischen Optik mit den Maxwellschen Formeln für die Ätherspannungen bei einer vollkommen absorbierenden Kugel erhält. Diese zeigt bei abnehmendem Radius a der Kugeln ein Anwachsen von der Form $1/a$ für das Verhältnis des Lichtdruckes zur Gravitation, so daß erstere immer überwiegen würde, wenn nur die Kugeln einen genügend kleinen Durchmesser haben. Nun gelten aber die Gesetze der geometrischen Optik nur so weit, wie man die Dimensionen der Körper als sehr groß im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes

1) S. Arrhenius, *Physik. Zeitschr.* 2. p. 81 u. 97. 1901; vgl. auch: *Das Werden der Welten*, Leipzig 1907. p. 85 u. f.

betrachten kann; eine Anwendung der Arrheniusschen Formel auf Kugeln, deren Durchmesser von der Größenordnung der Wellenlänge ist, muß deshalb als eine unberechtigte Extrapolation angesehen werden. K. Schwarzschild¹⁾ berechnete deshalb strenge auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen für das elektromagnetische Feld den Lichtdruck für vollkommen reflektierende Kugeln von kleinem, mit der Wellenlänge vergleichbarem Durchmesser. Er zeigte, daß das oben erwähnte Verhältnis von Lichtdruck zu Gravitation für Kugeldurchmesser, die mit der auffallenden Wellenlänge vergleichbar sind, einen Maximalwert erreicht, von dem aus es für noch kleinere Durchmesser schnell zu Null sinkt. Eine Überschlagsrechnung ergibt aber, daß, natürlich unter der wesentlichen Voraussetzung der vollkommenen Reflexion, dieses Maximum immerhin so groß ist, daß auf der Sonne der Lichtdruck die Gravitation um das Zwanzigfache überwiegt. Es ist jedoch von vornherein klar, daß diese Zahlenangaben Veränderungen erleiden werden, wenn die Teilchen das Licht teilweise absorbieren oder der Hauptsache nach nur zerstreuen. Wir wollen deshalb im folgenden den Lichtdruck ausrechnen für den allgemeinsten Fall, daß dem Teilchenmaterial eine Dielektrizitätskonstante ϵ und eine Leitfähigkeit σ zukommt. Ein Bedenken, das man aufwerfen könnte, nämlich ob es gestattet sei, bei diesen kleinen Teilchen noch mit denselben Materialkonstanten zu rechnen, die man an großen Stücken (natürlich bei der gleichen Wellenlänge der auffallenden Strahlung) beobachtet, findet seine Erwiderung besonders in einer neueren Arbeit von G. Mie²⁾ „über die Farben kolloidaler Goldlösungen“. Dort wird an Hand der experimentell bekannten Tatsachen gezeigt, daß die Eigenart des von solchen Lösungen seitlich ausgestrahlten Lichtes erklärt werden kann, wenn man eben die Materialeigenschaften der suspendierten Teilchen durch die sonst bekannten Konstanten beschreibt. Die Teilchendurchmesser, die bei Mie in Betracht kommen, betragen schon nur mehr Bruchteile der Wellenlänge des äußersten violetten sichtbaren Lichtes, wir sind also wohl

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akademie d. Wissensch. 31. p. 293. 1901.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 377. 1908.

berechtigt, die späteren Rechnungen ohne Bedenken auch noch auf so kleine Teilchen anzuwenden. Es ist aber klar, daß nach unten hin eine Grenze existieren wird, über die hinaus es sich als notwendig zeigen wird, den Molekülbau in weniger globaler Weise zu berücksichtigen, als wie es durch zwei, wenn auch mit der Wellenlänge variable, Konstanten möglich ist.

Die Grundlage für das Folgende wird in üblicher Weise gebildet von den Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes. Die Lösungen dieser Gleichungen in Reihenform, wie sie für uns in Betracht kommen (vgl. § 2), sind nicht neu. Mehrfach findet man sie schon in der Literatur vor, z. B. bei Clebsch¹⁾, Love²⁾ usw. für die elastischen, bei J. J. Thomson³⁾, Schwarzschild⁴⁾, Mie⁵⁾ für die elektromagnetischen Verhältnisse. Durch die Einführung zweier geeigneter Potentiale (§ 1 ff.) glaube ich indessen die Behandlung des elektromagnetischen Problems übersichtlicher wie sonst gestaltet zu haben. Der § 5 des ersten Kapitels bringt eine Übersicht über die möglichen Eigenschwingungen von Kugeln, wobei auch solche, die nicht unendlich gut leiten, in Betracht gezogen werden. Im Anschluß an diesen Paragraphen lassen sich die beiden vorher benutzten Potentiale dahin kennzeichnen, daß das erste den *elektrischen* Eigenschwingungen (d. h. den von wechselnden Ladungen der Kugeloberfläche begleiteten), das zweite den *magnetischen* (d. h. den ohne Aufladung der Kugeloberfläche erfolgenden) entspricht.

Im zweiten Kapitel werden dann die Ausdrücke für die elektrischen und magnetischen Komponenten dazu benutzt, eine allgemeine Formel für den Lichtdruck auf Kugeln zu gewinnen, nachdem noch (in § 6) der Fall des ebenen Spiegels (wegen einiger Unstimmigkeiten in der vorhandenen Literatur) kurz

1) Clebsch, Crelles Journ. 61. p. 195. 1864.

2) A. E. H. Love, Lehrbuch d. Elastizität (Deutsch v. A. Timpe), Leipzig 1907, p. 320, wo sich auch einige weitere Literaturangaben zum elastischen Problem finden.

3) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism p. 361.

4) K. Schwarzschild, l. c.

5) G. Mie, l. c. Sonstige Literatur findet sich bei M. Abraham, Enz. d. math. Wissensch. V 18, Nr. 6 c.

ins Auge gefaßt wurde. Den Schluß dieses Kapitels bildet die Ableitung einer Formel für den Lichtdruck auf einen schwingenden Dipol, welche in dem schon oben hervorgehobenen Grenzfall äußerst kleiner Kugeln (Moleküle) die Formeln des § 7 zu ersetzen hat.

Das dritte Kapitel bringt in den vier ersten Paragraphen die numerische Diskussion der allgemeinen Lichtdruckformel für vollkommen reflektierende, zerstreuende und absorbierende Kugeln. *In allen Fällen zeigt der Lichtdruck im Verhältnis zur auffallenden Energie für einen gewissen Wert des Quotienten Kugelradius : Wellenlänge ein Maximum, das indessen niemals die Höhe des bei vollkommener Reflexion gefundenen erreicht.* Zugleich wird in den betreffenden Paragraphen der Lichtdruck mit der Gravitation verglichen, wobei sich im allgemeinen sowohl für unendlich kleine wie für unendlich große Kugeln ein Überwiegen der letzteren Wirkung ergibt und nur unter geeigneten Bedingungen für mittlere Kugeldurchmesser der Lichtdruck vorherrscht. *Eine eigenartige Ausnahme bildet der Fall eines Kugelmaterials mit mittlerem Absorptionskoeffizienten, für welchen das Verhältnis der beiden Wirkungen bei unendlich kleinen Kugeln einer endlichen Grenze zustrebt.*

Bei der Ausführung der numerischen Rechnung zeigt sich insofern eine Schwierigkeit, als die allgemeine Formel für den Lichtdruck um so schlechter konvergiert, je größer das Verhältnis Radius : Wellenlänge wird. Obwohl stets konvergent, ist die Reihe schon für verhältnismäßig kleine Werte des eben erwähnten Verhältnisses umständlich zu berechnen, während sie für die Fälle der gewöhnlichen Optik total unbrauchbar wird. Diese Schwierigkeiten, deren Ursache in § 9 etwas näher ins Auge gefaßt wird, können behoben werden unter Benutzung gewisser semikonvergenter Entwicklungen, welche die in der Reihe auftretenden Zylinderfunktionen asymptotisch darstellen für sehr große Werte des Arguments und beliebige Werte des Index.¹⁾ Mit ihrer Hilfe gelingt es, in § 14 und § 15 auch den optischen Grenzfall von der allgemeinen Formel aus zu

1) Vgl. die demnächst in den Math. Ann. erscheinende diesbezügliche Abhandlung. Soweit die Formeln für die jetzigen Zwecke in Betracht kommen, sind sie in § 14 zusammengestellt.

behandeln. Auch sonst sind die obengenannten Entwicklungen nützlich; sie bilden z. B. die Grundlage für eine strenge Theorie der Beugung des Lichtes an Kugeln und Zylindern (Regenbogen, Materialeinfluß), wie ich in der nächsten Zeit noch näher ausführen will.¹⁾

Im letzten § 16 wird schließlich noch mit Rücksicht auf die § 5 behandelten Eigenschwingungen untersucht, inwieweit das charakteristische Maximum der Lichtdruckkurven als Resonanzphänomen aufgefaßt werden kann.

Erstes Kapitel.

Bestimmung des elektromagnetischen Feldes.

§ 1. Grundgleichungen und Darstellung der Feldstärken mittels skalarer Potentiale.

Indem wir rationale Heavisidesche Einheiten zugrunde legen und uns von vornherein spezialisieren auf zeitlich periodische Zustände von der Periodenzahl ω in 2π sec., lauten die Maxwell'schen Gleichungen für die elektrische Feldstärke²⁾ $\mathcal{E} = \Re[Ee^{i\omega t}]$ und die magnetische $\mathcal{H} = \Re[He^{i\omega t}]$:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{i\mu\omega}{c} H = -\text{rot } E, \\ \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E = \text{rot } H. \end{cases}$$

Hierin bedeutet weiter μ die Permeabilität, ε die Dielektrizitätskonstante, σ die Leitfähigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit.

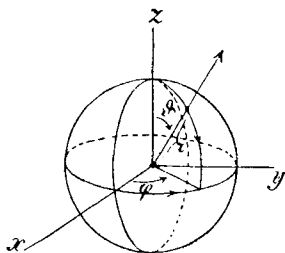


Fig. 1.

Führt man Kugelkoordinaten r, ϑ, φ ein (vgl. Fig. 1) und nennt die entsprechenden Komponenten von E : R, T, F , während

1) Vgl. die vorläufige Mitteilung auf der Naturforscher-Versammlung in Köln: Physik. Zeitschr. 9. p. 775, oder Verhandl. der Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 741. 1908.

2) \Re bedeutet hier und im folgenden stets, daß von der eingeklammerten Größe der reelle Teil zu nehmen ist.

die Komponenten von H durch P , Θ , Φ angedeutet werden, so gehen die Gleichungen (1) über in

$$(2a) \quad \begin{cases} \frac{i\mu\omega}{c} P = -\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} r \sin \vartheta F - \frac{\partial}{\partial \varphi} r T \right), \\ \frac{i\mu\omega}{c} \Theta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} R - \frac{\partial}{\partial r} r \sin \vartheta F \right), \\ \frac{i\mu\omega}{c} \Phi = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r T - \frac{\partial}{\partial \vartheta} R \right), \end{cases}$$

$$(2b) \quad \begin{cases} \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) R = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} r \sin \vartheta \Phi - \frac{\partial}{\partial \varphi} r \Theta \right), \\ \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) T = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} P - \frac{\partial}{\partial r} r \sin \vartheta \Phi \right), \\ \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) F = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \Theta - \frac{\partial}{\partial \vartheta} P \right). \end{cases}$$

Denkt man sich nun mit Mie¹⁾ den Zustand entstanden durch Übereinanderlagerung zweier anderen, dadurch charakterisiert, daß beim ersten die zur Kugel normale r -Komponente P der magnetischen Kraft, beim zweiten die elektrische r -Komponente R verschwindet, so kann man den weiteren Überlegungen eine sehr einfache Gestalt geben, indem man bemerkt, daß jedes dieser Teilfelder aus einem einzigen skalaren Potentiale ableitbar ist. Wir nennen das erste dieser Potentiale Π_1 , das zweite Π_2 und unterscheiden die zugehörigen Feldstärken durch dieselben Indizes. Für das erste Teilfeld wird jetzt die erste Gleichung des Systems (2a) befriedigt durch den Ansatz²⁾:

$$F_1 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r \partial \varphi}, \quad T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r \partial \vartheta}.$$

Mit diesen Werten liefert dann die zweite Gleichung des Systems (2b)

$$\Phi_1 = -\left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) \frac{\partial \Pi_1}{\partial \vartheta},$$

und die dritte Gleichung desselben Systems

$$\Theta_1 = \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \vartheta}.$$

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 382. 1908.

2) Zunächst legt diese Gleichung nur nahe, zu setzen

$$F_1 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta},$$

es ist aber wegen des Folgenden bequem, statt V zu schreiben $(\partial r \Pi / \partial r)$.

Schließlich ergibt die erste Gleichung des Systems (2b) für die radiale elektrische Komponente:

$$R_1 = - \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial \Pi_1}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} \right).$$

Soll nun der Ansatz mit unserem ganzen System (2) verträglich sein, so müssen die beiden letzten noch unbenutzten Gleichungen des Systems (2a) dieselbe Differentialgleichung für das Potential Π_1 liefern. Letzteres ist tatsächlich der Fall, man erhält nämlich aus jeder dieser beiden:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial \Pi_1}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi_1 = 0,$$

oder auch

$$(3) \quad \Delta \Pi_1 + k^2 \Pi_1 = 0$$

mit der Abkürzung:

$$(4) \quad k^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} - i \frac{\mu \sigma \omega}{c^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Differentialgleichung für Π_1 läßt sich die Formel für die elektrische radiale Komponente noch vereinfachen zu:

$$R_1 = - \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_1,$$

so daß wir zusammenfassend die hier betrachteten Feldstärken aus Π_1 ableiten können, mittels des Formelsystems:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = - \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_1, \\ T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r \partial \vartheta}, \\ F_1 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r \partial \varphi}, \\ P_1 = 0, \\ \Theta_1 = \left(\frac{i \varepsilon \omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r \Pi_1}{\partial \varphi}, \\ \Phi_1 = - \left(\frac{i \varepsilon \omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial r \Pi_1}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Für das zweite Teilfeld, bei dem die radiale elektrische Komponente verschwindet, gelten analoge Überlegungen. Bedenkt man, daß unsere Grundgleichungen (2) unverändert bleiben,

wenn man die elektrischen Komponenten mit den entsprechenden magnetischen vertauscht und zu gleicher Zeit $i\epsilon\omega/c + \sigma/c$ durch $-i(\mu\omega)/c$ und umgekehrt ersetzt, so erhält man ohne weiteres das Resultat:

Definiert man ein Potential Π_2 durch die Gleichung:

$$(3') \quad \Delta \Pi_2 + k^2 \Pi_2 = 0,$$

so können daraus die Komponenten des zweiten Teilfeldes abgeleitet werden durch Benutzung der folgenden Formeln:

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} P_2 = \frac{\partial^2 r \Pi_2}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_2, \\ \Theta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi_2}{\partial r \partial \vartheta}, \\ \Phi_2 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi_2}{\partial r \partial \varphi}, \\ R_2 = 0, \\ T_2 = -\frac{i\mu\omega}{c} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r \Pi_2}{\partial \varphi}, \\ F_2 = \frac{i\mu\omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial r \Pi_2}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Die Definitionsgleichungen (3) und (3') der beiden Potentiale stimmen überein, so daß man sich nur mit den Lösungen der einen Gleichung (3) zu beschäftigen hat.

§ 2. Die Lösungen der Gleichung für das Potential Π .

Lassen wir vorläufig die Indizes weg, so lautet unsere Grundgleichung (3) für Π :

$$(3) \quad \Delta \Pi + k^2 \Pi = 0.$$

Man kann hier nun den gewöhnlichen Weg einschlagen und (3) lösen durch das Produkt dreier Funktionen, von denen jede nur von einer Koordinate abhängt.

Schreibt man z. B.

$$(6) \quad \Pi = f_1(r) f_2(\vartheta) f_3(\varphi),$$

so erhält man für diese drei Funktionen die Differentialgleichungen:

$$(7) \quad \frac{d^2 r f_1}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) r f_1 = 0,$$

$$(8) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d \vartheta} \sin \vartheta \frac{d f_2}{d \vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2 \vartheta} \right) f_2 = 0,$$

$$(9) \quad \frac{d^2 f_3}{d \varphi^2} + \nu^2 f_3 = 0,$$

wobei die Konstanten $n(n+1)$ und ν zunächst beliebig sind. Die Bedingung, daß f_2 sowohl wie f_3 auf einer Kugeloberfläche eindeutig und endlich sein soll, hat dann bekanntlich zur Folge, daß n und ν beide ganzzahlig angenommen werden müssen.

Die Lösungen der Gleichungen (7) bis (9) sind bekannte Funktionen; es ist nämlich

$$f_1 = (k r)^{-1/2} C_{n+1/2}(k r),$$

wo $C_{n+1/2}(k r)$ eine Zylinderfunktion mit dem Index $n + \frac{1}{2}$ bedeutet; Gleichung (8) definiert die ν^{te} Zugeordnete der Kugelfunktionen n^{ter} Ordnung, während (9) die einfach periodischen Funktionen zur Lösung hat.

Wir wollen jetzt noch ganz kurz einige Reihenentwicklungen für unsere Funktionen zusammenschreiben, welche wir in den späteren Paragraphen benutzen werden.

Die Lösungen von (7) können in zwei verschiedenen Formen auftreten, einmal als Potenzreihen, die vom singulären Punkt $k r = 0$ aus entwickelt sind, nämlich¹⁾

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} r f_1 = \psi_n(k r) &= \left(\frac{\pi k r}{2} \right)^{1/2} J_{n+1/2}(k r) \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{k r}{2} \right)^{2p+n+1}}{\Gamma(p+1) \Gamma\left(p+n+\frac{3}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

oder:

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_n(k r) &= \frac{(k r)^{n+1}}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \left[1 - \frac{\left(\frac{k r}{2} \right)^2}{1! \frac{2n+3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{k r}{2} \right)^4}{2! \frac{2n+3}{2} \frac{2n+5}{2}} - + \dots \right] \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. für die Reihenentwicklungen der Zylinderfunktionen N. Nielsen, Handbuch d. Theorie d. Zylinderfunktionen, Leipzig 1904.

und

$$(11) \left\{ \begin{aligned} r f_1 &= \chi_n(kr) = (-1)^n \left(\frac{\pi k r}{2} \right)^{1/2} J_{-n-1/2}(kr) \\ &= (-1)^n \sqrt{\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{kr}{2} \right)^{2p-n}}{\Gamma(p+1) \Gamma\left(p-n+\frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

oder

$$(11') \left\{ \begin{aligned} \chi_n(kr) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(kr)^n} \left[1 + \frac{\left(\frac{kr}{2} \right)^2}{1! \frac{2n-1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{kr}{2} \right)^4}{2! \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2}} + + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

wobei die Funktionen J die gewöhnlichen Besselschen Funktionen mit dem Argument $n + \frac{1}{2}$, bzw. $-n - \frac{1}{2}$ sind.

Eine zweite Art der Entwicklung für $r f_1$ erhält man, indem man vom Punkte $kr = \infty$ ausgeht. Diese ist für den hier vorliegenden Fall nicht wie sonst semikonvergent, sondern bekanntlich genau richtig, weil die betreffenden Reihen endlich sind. Die beiden Partikularlösungen lauten

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \eta_n(kr) &= \left(\frac{\pi k r}{2} \right)^{1/2} H_{n+1/2}^1(kr), \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{ikr} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{i}{2kr} \right)^p \frac{(n-p+1)(n-p+2)\dots(n+p)}{p!} \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder

$$(12') \left\{ \begin{aligned} \eta_n(kr) &= e^{-i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{ikr} \left[1 + \frac{i}{2kr} \frac{n(n+1)}{1!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(2kr)^2} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!} - + + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

und

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \zeta_n(kr) &= \left(\frac{\pi k r}{2} \right)^{1/4} H_{n+1/2}^2(kr) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{-ikr} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{-i}{2kr} \right)^p \frac{(n-p+1)(n-p+2)\dots(n+p)}{p!} \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder:

$$(13') \left\{ \begin{aligned} \zeta_n(kr) = e^{i \frac{\pi}{2} (n+1)} e^{-i kr} & \left[1 - \frac{i}{2kr} \frac{n(n+1)}{1!} \right. \\ & \left. - \frac{1}{(2kr)^2} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!} + + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Zeichen H^1 und H^2 bedeuten dabei die beiden Hankelschen Zylinderfunktionen, die mit den vorher benutzten Besselschen Zylinderfunktionen J zusammenhängen mittels der Formeln:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} H_a^1(x) &= \frac{i}{\sin \alpha \pi} (e^{-i \alpha \pi} J_a(x) - J_{-a}(x)), \\ H_a^2(x) &= -\frac{i}{\sin \alpha \pi} (e^{i \alpha \pi} J_a(x) - J_{-a}(x)), \end{aligned} \right.$$

woraus sich für unsere Funktionen ψ_n , χ_n , η_n , ζ_n ergibt:

$$(14') \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_n &= \psi_n - i \chi_n, \\ \zeta_n &= \psi_n + i \chi_n. \end{aligned} \right.$$

Weiterhin werden wir noch die Zusammenhangsformeln benutzen für die zu verschiedenen Werten von n gehörigen Funktionen. Diese lauten, wie man z. B. ohne weiteres aus den entsprechenden Formeln für die Zylinderfunktionen ableiten kann:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} (2n+1) \frac{d\psi_n(x)}{dx} &= (n+1) \psi_{n-1}(x) - n \psi_{n+1}(x), \\ (2n+1) \frac{\psi_n(x)}{x} &= \psi_{n-1}(x) + \psi_{n+1}(x) \end{aligned} \right.$$

und gelten bekanntlich nicht allein für ψ_n , sondern für jede beliebige Lösung von (7) (insbesondere für χ_n , η_n , ζ_n).

Von den verschiedenen möglichen Lösungen von (8) werden wir nur die zu $\nu=1$ gehörigen ersten Zugeordneten $P_n^1(\cos \vartheta)$ im folgenden brauchen. Diese sind bekanntlich aus den gewöhnlichen zonalen Kugelfunktionen $P_n^0(\cos \vartheta)$ ableitbar mittels der Formel¹⁾:

1) Für die Reihenentwicklungen usw. der Kugelfunktionen vgl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Berlin 1878. Wir setzen indessen mit F. Neumann

$$P_n^\nu(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{d^\nu}{d(\cos \vartheta)^\nu} P_n^0(\cos \vartheta).$$

Hiernach unterscheiden sich die im folgenden benutzten P_n^ν von der Heineschen durch einen konstanten Faktor. Man vgl. auch Enc. d. math. Wiss., Art. Wangerin II. A. 10., p. 711.

$$(16) \quad P_n^1(\cos \vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} P_n^0(\cos \vartheta)$$

und können u. a. definiert werden durch die endliche Reihe

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n^1(\cos \vartheta) &= \frac{(2n)! \sin \vartheta}{2^n \cdot n! (n-1)!} \left[\cos^{n-1} \vartheta - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)} \cos^{n-3} \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-5} \vartheta - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Schließlich gilt noch die fundamentale Integralrelation:

$$(18) \quad \int_0^\pi P_m^1(\cos \vartheta) P_n^1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 & \dots \dots \dots m \neq n, \\ 2 \frac{n(n+1)}{2n+1} \dots m = n. \end{cases}$$

§ 3. Die Grenzbedingungen und die Potentiale Π_1^e , Π_2^e der einfallenden Welle.

Nach den Maxwell'schen Gleichungen (1) verlangen die Grenzbedingungen die Stetigkeit der tangentialen Kraftkomponenten an jeder Trennungsfläche zweier Medien. In unserem Falle ist das eine Medium der Äther ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$), das zweite eine Kugel vom Radius a aus beliebigem Material; für $r = a$ soll also

$$T_i = T_a, \quad F_i = F_a, \quad \Theta_i = \Theta_a, \quad \Phi_i = \Phi_a,$$

wenn der Index i die Feldkomponenten im Innern und der Index a dieselbe außerhalb der Kugel andeutet.

Man denke sich jetzt die ungestörte einfallende Welle dargestellt durch zwei Potentiale Π_1^e und Π_2^e , ebenso definiert wie die Potentiale Π_1 und Π_2 , dann wird das ganze äußere Feld (einfallende + reflektierte Wellensysteme) abgeleitet werden können aus Potentialen von der Form $\Pi_1^a + \Pi_1^e$ und $\Pi_2^a + \Pi_2^e$, während das innere Feld (gebrochene Wellensysteme) sich ergibt aus zwei anderen Funktionen Π_1^i und Π_2^i . Mittels dieser Potentiale schreiben sich jetzt die Grenzbedingungen sehr einfach. Betrachtet man zunächst nur das aus den Potentialen mit dem Index 1 abzuleitende Feld, so folgt aus der Stetigkeit der elektrischen Tangentialkomponenten T_1 und F_1 unter Berücksichtigung von (5) ohne weiteres die Stetigkeit der Ableitungen unserer Verbindungen $r \Pi$, genommen nach der Kugelnormale. Ebenso schließt man aus der Stetigkeit der tangen-

tialen magnetischen Komponenten Θ_1 und Φ_1 auf die Stetigkeit der mit den zugehörigen Konstanten $(i\varepsilon\omega/c + \sigma/c)$ multiplizierten Potentiale. Schreibt man zur Abkürzung

$$(19) \quad \kappa_1^a = \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right)_a, \quad \kappa_1^i = \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right)_i,$$

so erhält man also in Formeln:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} r (\Pi_1^a + \Pi_1^e) = \frac{\partial}{\partial r} r \Pi_1^i \\ \kappa_1^a r (\Pi_1^a + \Pi_1^e) = \kappa_1^i r \Pi_1^i \end{array} \right\} \text{ für } r = a.$$

In gleicher Weise erhält man für die Potentiale Π_2 unter Benutzung der Gleichungen (5') die Grenzbedingungen

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} r (\Pi_2^a + \Pi_2^e) = \frac{\partial}{\partial r} r \Pi_2^i \\ \kappa_2^a r (\Pi_2^a + \Pi_2^e) = \kappa_2^i r \Pi_2^i \end{array} \right\} \text{ für } r = a,$$

wobei gesetzt wurde

$$(22) \quad \kappa_2^a = \left(\frac{i\mu\omega}{c} \right)_a, \quad \kappa_2^i = \left(\frac{i\mu\omega}{c} \right)_i.$$

Die hier eingeführten Abkürzungen κ hängen mit den Konstanten k (vgl. (4)) zusammen mittels der Formeln

$$h_a^2 = -\kappa_1^a \kappa_2^a, \quad h_i^2 = -\kappa_1^i \kappa_2^i.$$

Ist das äußere Medium der freie Äther (was wir stets voraussetzen wollen), so hat man übrigens einfach:

$$\kappa_1^a = \kappa_2^a = i k_a = i \frac{\omega}{c}.$$

Als einfallende Welle denken wir uns jetzt eine ebene, polarisierte, in Richtung der negativen z -Achse fortschreitende Welle, deren elektrische Komponente die Amplitude 1 hat und in der x -Richtung gerichtet ist (vgl. Fig. 1); diese Welle besitzt dann die zwei Feldkomponenten:

$$(23) \quad \mathfrak{E}_x = \Re [e^{ik_a z} e^{i\omega t}], \quad \mathfrak{H}_y = \Re [-e^{ik_a z} e^{i\omega t}],$$

wobei, da die Welle im freien Äther verläuft:

$$k_a = \frac{\omega}{c}.$$

In den r, ϑ, φ -Koordinaten und den entsprechenden Kraftkomponenten ist die Welle also, wie leicht aus Fig. 1 ersichtlich, dargestellt durch

$$(24) \quad \begin{cases} R_e = e^{i k_a r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi; & P_e = - e^{i k_a r \cos \vartheta} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ T_e = e^{i k_a r \cos \vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi; & \Theta_e = - e^{i k_a r \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi, \\ F_e = - e^{i k_a r \cos \vartheta} \sin \varphi; & \Phi_e = - e^{i k_a r \cos \vartheta} \cos \varphi. \end{cases}$$

Um die beiden vorher erwähnten zu dieser Welle gehörigen Potentiale Π_1^e und Π_2^e zu bestimmen, kann man von irgend zweien der soeben angeschriebenen Komponenten $R_e \dots \Phi_e$ und ihren nach (5), bzw. (5') gebildeten Ausdrücken durch Π_1^e und Π_2^e ausgehen. Am bequemsten ist es offenbar, die radialen Komponenten zu benutzen; aus der ersten Gleichung von (5) erhält man dann mit Rücksicht auf (24):

$$(25) \quad \frac{\partial^2 r \Pi_1^e}{\partial r^2} + k_a^2 r \Pi_1^e = e^{i k_a r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi,$$

also

$$r \Pi_1^e = \frac{1}{k_a^2} \frac{e^{i k_a r \cos \vartheta}}{\sin \vartheta} \cos \varphi;$$

ebenso findet man aus der ersten Gleichung von (5') und dem in (24) angegebenen Wert von P_e :

$$r \Pi_2^e = - \frac{1}{k_a^2} \frac{e^{i k_a r \cos \vartheta}}{\sin \vartheta} \sin \varphi.$$

Man bestätigt leicht, daß Π_1^e und Π_2^e Potentiale der in § 2 definierten Art sind: sie befriedigen beide Differentialgleichung (3), und ihre Ableitungen, im Sinne der Gleichungen (5) und (5') genommen, geben tatsächlich sämtliche in (24) angegebenen Komponenten unserer einfallenden Welle. Indessen kann man sich leicht überzeugen, daß die Potentiale Π_1^e und Π_2^e durch die Angabe der Komponenten des elektromagnetischen Feldes nicht vollständig bestimmt sind, vielmehr kann man noch gewisse Bestandteile hinzufügen von der Form

$$A(\varphi, \vartheta) e^{i k r} + B(\varphi, \vartheta) e^{-i k r},$$

die aber dann natürlich so gewählt werden müssen, daß sie keinen Einfluß auf die aus den Potentialen durch Differentiation gewonnenen Werte der Feldstärken haben. Für die folgenden Entwicklungen empfiehlt es sich, von dieser Willkür Gebrauch

zu machen, so daß $r \Pi_1^e$ sowie $r \Pi_2^e$ nicht mehr für $\vartheta = 0$ unendlich werden und zugleich die Reihenentwicklungen sich möglichst einfach gestalten. Eine genauere Durchrechnung zeigt, daß man dazu am besten setzt:

$$(26) \quad r \Pi_1^e = \frac{\cos \varphi}{k_a^2} \left\{ \frac{e^{i k_a r \cos \vartheta}}{\sin \vartheta} - \frac{e^{i k_a r}}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta/2} - \frac{e^{-i k_a r}}{2} \operatorname{tg} \vartheta/2 \right\},$$

$$(26') \quad r \Pi_2^e = -\frac{\sin \varphi}{k_a^2} \left\{ \frac{e^{i k_a r \cos \vartheta}}{\sin \vartheta} - \frac{e^{i k_a r}}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta/2} - \frac{e^{-i k_a r}}{2} \operatorname{tg} \vartheta/2 \right\}.$$

Da die allgemeine Lösung von (3) nach den Erörterungen des § 3 in Form einer nach Produkten von Zylinder- und Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe angesetzt werden soll, wollen wir zunächst unsere Potentiale Π^e in eine solche Reihe entwickeln. Wir verfahren gerade so wie soeben, indem wir zunächst eine solche Entwicklung für R_e bzw. P_e angeben, aus der die gesuchte für Π^e durch Integration unmittelbar folgt.

Nach Heine¹⁾ gilt:

$$(27) \quad e^{i k_a r \cos \vartheta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} i^n (2n+1) \frac{\psi_n(k_a r)}{k_a r} P_n^0(\cos \vartheta),$$

woraus man durch Differentiation nach ϑ und Multiplikation mit $-\cos \varphi / i k_a r$ für R_e erhält:

$$R_e = \sum_{n=1}^{n=\infty} i^{n-1} (2n+1) \frac{\psi_n(k_a r)}{(k_a r)} P_n^1(\cos \vartheta) \cos \varphi.$$

Trägt man jetzt auf der rechten Seite von (25) diese Reihenentwicklung für R_e ein und setzt für Π_1^e eine analoge Reihenentwicklung mit unbestimmten Koeffizienten an, so erhält man unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (7) für ψ_n ohne weiteres:

$$(28) \quad r \Pi_1^e = \frac{1}{k_a^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(k_a r) P_n^1(\cos \vartheta) \cos \varphi.$$

Analog gilt für das Potential des zweiten Teilfeldes:

$$(28') \quad r \Pi_2^e = -\frac{1}{k_a^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(k_a r) P_n^1(\cos \vartheta) \sin \varphi.$$

1) E. Heine, l. c., 2. Aufl. 1. p. 82.

Die in (28) und (28') auftretenden Summen werden durch die rechten Seiten von (26) und (26') summiert.

§ 4. Die schließliche Form der Potentiale Π_1 und Π_2 .

Zunächst wollen wir uns auf die Betrachtung nur eines der beiden Teilfelder beschränken, die Resultate sind dann mit geringer Änderung auf das zweite übertragbar.

Setzt man an:

$$(29) \quad r \Pi_1^a = \frac{1}{k_a^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n^1 \zeta_n(k_a r) P_n^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$$

und

$$(30) \quad r \Pi_1^i = \frac{1}{k_a^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n^1 \psi_n(k_i r) P_n^1(\cos \vartheta) \cos \varphi,$$

wobei A_n^1 und B_n^1 verfügbare Konstanten, ζ_n und ψ_n die § 3 definierten Funktionen bedeuten und

$$(31) \quad k_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_i^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} - i \frac{\mu \sigma \omega}{c^2}$$

gesetzt ist, so genügen diese Ausdrücke beide der Differentialgleichung (3) für Π . Weiter befriedigt Π_1^a die Bedingung, nur divergierende nach dem Unendlichen hin fortleitende Wellen zu geben (vgl. Formel (13)), während Π_1^i der Bedingung der Endlichkeit der Feldkomponenten im Innern der Kugel vom Radius a genügt (vgl. Formel (10)). Setzt man die Ausdrücke (29) und (30) nebst der im vorigen Paragraphen für $r \Pi_1^e$ angegebenen Reihenentwicklung in die Grenzbedingungen (20) ein, so erhält man für die Konstanten A_n^1 und B_n^1 die Gleichungen:

$$(32) \quad \begin{cases} \alpha_1^a \zeta_n(k_a a) A_n^1 + i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \alpha_1^a \psi_n(k_a a) = \alpha_1^i \psi_n(k_i a) B_n^1, \\ k_a \zeta_n'(k_a a) A_n^1 + i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} k_a \psi_n'(k_a a) = k_i \psi_n'(k_i a) B_n^1. \end{cases}$$

Für A_n^1 und B_n^1 bekommt man demnach explizite:

$$(33) \quad \begin{cases} A_n^1 = -i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\alpha_1^a \psi_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \psi_n'(k_a a) \alpha_1^i \psi_n(k_i a)}{\alpha_1^a \zeta_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \zeta_n'(k_a a) \alpha_1^i \psi_n(k_i a)}, \\ B_n^1 = +i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\alpha_1^a \zeta_n(k_a a) k_a \psi_n'(k_a a) - k_a \zeta_n'(k_a a) \alpha_1^a \psi_n(k_a a)}{\alpha_1^a \zeta_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \zeta_n'(k_a a) \alpha_1^i \psi_n(k_i a)}, \end{cases}$$

womit nach (5) und (5') das erste Teilfeld vollständig bestimmt ist.

Man ersieht ohne weiteres aus dem Vergleich von (28) mit (28') und (20) mit (21), daß der Ansatz

$$(29') \quad r H_2^a = - \frac{1}{k_a^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n^2 \zeta_n(k_a r) P_n^1(\cos \vartheta) \sin \varphi,$$

$$(30') \quad r H_2^i = - \frac{1}{k_a^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n^2 \psi_n(k_i r) P_n^1(\cos \vartheta) \sin \varphi$$

für das zweite Teilfeld wieder alle Oberflächenbedingungen erfüllt, wenn man A_n^2 und B_n^2 definiert durch die aus (33) bei Vertauschung von κ_1^a bzw. κ_1^i mit κ_2^a bzw. κ_2^i entstehenden Formeln. Somit ist nun auch das zweite Teilfeld vollständig bestimmt.

§ 5. Die Eigenschwingungen der Kugel.

Da die Eigenschwingungen von Kugeln an sich nicht ohne Interesse sind und sie auch für das Verständnis der später anzugebenden Formel für den Lichtdruck mit Nutzen herangezogen werden können, wollen wir in diesem Paragraphen die Werte für Eigenschwingungszahl und Dämpfung aus unseren Formeln berechnen.

Geht man wieder aus von den Potentialen H_1 und H_2 in der Form des vorigen Paragraphen und verlangt für diese solche den Grundgleichungen und Oberflächenbedingungen genügenden Darstellungen, die auch ohne äußere Anregung bestehen können, so erhält man z. B. zur Bestimmung der Konstanten A_n^1 und B_n^1 Gleichungen, die aus (32) hervorgehen, indem man das zweite Glied der linken Seite Null setzt. Ein von Null verschiedener Wert für diese Konstanten ist also nur möglich, wenn die Determinante des so erhaltenen Gleichungssystems verschwindet in Formel:

$$(34) \quad \frac{k_a \zeta_n'(k_a a)}{\kappa_1^a \zeta_n(k_a a)} = \frac{k_i \psi_n'(k_i a)}{\kappa_1^i \psi_n(k_i a)}.$$

Ebenso findet man, daß eine, einem einzelnen Gliede von H_2 entsprechende, Lösung ohne Anregung möglich ist, wenn

$$(34') \quad \frac{k_a \zeta_n'(k_a a)}{\kappa_2^a \zeta_n(k_a a)} = \frac{k_i \psi_n'(k_i a)}{\kappa_2^i \psi_n(k_i a)}.$$

Nehmen wir nun an, daß die Permeabilität $\mu = 1$ gesetzt werden kann, wie solches bei einigermaßen schnellen Schwingungen zutrifft, und setzen

$$(35) \quad h_i = N h_a,$$

so ist nach (31):

$$(36) \quad N = \sqrt{\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}} = \nu(1 - i\kappa),$$

und es bedeutet daher (in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise) N den komplexen Brechungsexponenten, ν bzw. κ den gewöhnlichen Brechungsexponenten bzw. Absorptionsindex. Unter Anwendung der Abkürzung N schreiben sich die Gleichungen (34) und (34')

$$(37) \quad \frac{\zeta_n'(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)} = \frac{1}{N} \frac{\psi_n'(N\varrho)}{\psi_n(N\varrho)},$$

$$(37') \quad \frac{\zeta_n'(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)} = N \frac{\psi_n'(N\varrho)}{\psi_n(N\varrho)},$$

wenn noch gesetzt wird:

$$(38) \quad \varrho = h_a a = \frac{a\omega}{c}.$$

Ihrem Zusammenhang mit dem ersten Potential entsprechend definiert (37) Schwingungen, bei denen die radiale *magnetische* Feldstärke überall verschwindet, während die radiale elektrische Komponente vorhanden ist, so daß an der Oberfläche der Kugel elektrische Ladungen auftreten können. Deshalb wollen wir fürderhin diejenigen Schwingungen, für welche (37) erfüllt ist, die „elektrischen Eigenschwingungen“ der Kugel nennen. Im Gegensatz zu diesen stehen die „magnetischen Eigenschwingungen“, bei denen ϱ durch (37') bestimmt wird und im ganzen Raume die radiale *elektrische* Komponente verschwindet.

In dem schon von J. J. Thomson¹⁾ behandelten Grenzfall $N = \infty$ (vollkommen reflektierende Kugel) werden die beiden Bestimmungsgleichungen für ϱ einfach

$$(39) \quad \zeta_n'(\varrho) = 0,$$

$$(39') \quad \zeta_n(\varrho) = 0.$$

1) J. J. Thomson, Lond. math. Soc. Proc. 15. p. 197. 1884; Recent researches. p. 361. Zur Frage der Darstellung des zeitlichen Verlaufes einer beliebigen anfänglichen Störung mittels der, den anzugebenden Wurzeln entsprechenden Funktionen, vgl. A. E. H. Love; Lond. math. Soc. (2) 2. p. 88. 1904.

Setzt man nun für ζ_n die (endliche) Reihenentwicklung (13) ein, so werden die Wurzeln von (39) bestimmt durch eine algebraische Gleichung vom Grade $n + 1$, die von (39') durch eine algebraische Gleichung vom Grade n . Die betreffenden Wurzeln für $n = 1, 2, 3$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Elektrische Eigenschwingungen	Magnetische Eigenschwingungen
$i \varrho_1 = \begin{cases} -0,50 + i 0,86 \\ -0,50 - i 0,86 \end{cases}$	$i \varrho_1 = -1$
$i \varrho_2 = \begin{cases} -1,60 \\ -0,70 + i 1,81 \\ -0,70 - i 1,81 \end{cases}$	$i \varrho_2 = \begin{cases} -1,50 + i 0,86 \\ -1,50 - i 0,86 \end{cases}$
$i \varrho_3 = \begin{cases} -2,17 + i 0,87 \\ -2,17 - i 0,87 \\ -0,83 + i 2,77 \\ -0,83 - i 2,77 \end{cases}$	$i \varrho_3 = \begin{cases} -2,26 \\ -1,87 + i 1,75 \\ -1,87 - i 1,75 \end{cases}$

Weiterhin wollen wir die allgemeingültigen Gleichungen (37) und (37') noch dazu benutzen, ϱ in zweiter Näherung zu bestimmen für den Fall, daß N sehr groß gegen 1 ist. Dazu setzen wir $\varrho = \varrho_0 + \Delta \varrho_0$ und verstehen unter $\varrho = \varrho_0$ eine Wurzel der Gleichung (39) bzw. (39'). Beschäftigen wir uns zunächst nur mit den elektrischen Eigenschwingungen, so ergibt sich für $\Delta \varrho_0$ die Bestimmungsgleichung

$$(40) \quad \Delta \varrho_0 = \frac{1}{N} \frac{\psi_n'(N \varrho_0) \zeta_n(\varrho_0)}{\psi_n(N \varrho_0) \zeta_n''(\varrho_0)}.$$

Ersetzt man nun nach der Differentialgleichung für ζ_n den Quotienten $\frac{\zeta_n(\varrho_0)}{\zeta_n''(\varrho_0)}$ durch den Ausdruck $\frac{\varrho_0^2}{n(n+1) - \varrho_0^2}$ und substituiert für die Funktionen ψ_n bzw. ψ_n' ihre Näherungen für große Werte des Arguments, so erhält man schließlich:

$$(41) \quad \Delta \varrho_0 = \frac{1}{N} \frac{\varrho_0^2}{\varrho_0^2 - n(n+1)} \operatorname{tg} \left\{ N \varrho_0 - \frac{\pi}{2} (n+1) \right\}.$$

Ist beispielsweise $N = \nu$ (vgl. (36)) rein reell, wie das bei einer dielektrischen Kugel zutrifft, so hat man in zweiter Näherung

für große Werte von ν bei der ersten elektrischen Eigenschwingung ($i \varrho_0 = \frac{1 \pm i \sqrt{3}}{2}$, vgl. Tab. I):

$$i \varrho = \begin{cases} -0,50 + i 0,86 \left(1 - \frac{2}{3\nu}\right), \\ -0,50 - i 0,86 \left(1 - \frac{2}{3\nu}\right). \end{cases}$$

Bei einer dielektrischen Kugel bedeutet also eine Erniedrigung des Brechungsexponenten ν eine Verlängerung der Schwingungsdauer, während die Dämpfungskonstante ungeändert bleibt, solange wenigstens ν selbst groß ist.

Durch das Vorhergehende ist indessen die Zahl der Wurzeln nicht erschöpft. Neben den vorher betrachteten aus den Werten der Tab. I stetig herauswachsenden sind nämlich auch noch solche Wurzeln zu betrachten, die bei großem N in der Nähe des Punktes $\varrho = 0$ liegen, und für welche das Produkt $N \varrho$ eine endliche Zahl ist.¹⁾ Schreibt man nämlich (37) in der Form

$$(42) \quad \psi_n(N \varrho) = \frac{\psi_n'(N \varrho)}{N} \frac{\zeta_n(\varrho)}{\zeta_n'(\varrho)}$$

und bedenkt, daß nach § 2 für kleine Werte von ϱ :

$$\zeta_n(\varrho) = i \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{\varrho^n}, \quad \zeta_n'(\varrho) = -\frac{n}{\varrho} i \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{\varrho^n},$$

so erhält man in der Grenze für $\varrho = 0$ aus (42) die Bedingungsgleichung

$$(42') \quad \psi_n(N \varrho) = -\frac{1}{n} \frac{N \varrho \psi_n'(N \varrho)}{N^2}.$$

Für große Werte von N kann man statt dessen in erster Näherung auch schreiben

$$(43) \quad \psi_n(N \varrho) = 0.$$

Letztere Gleichung hat bekanntlich, ebenso wie die gewöhnliche Besselsche Funktion mit ganzzahligem Index unendlich viele reelle Wurzeln. Asymptotisch fallen diese zusammen mit den Nullpunkten der Funktion

$$\cos \left\{ x - \frac{\pi}{2} (n+1) \right\},$$

wenn zur Abkürzung $N \varrho = x$ gesetzt wird.

1) In der Literatur scheinen diese Wurzeln bisher übersehen zu sein.

Der Verlauf der ψ -Funktion ist für kleine Werte des Arguments aus Fig. 3, p. 106 zu ersehen; die Werte der kleinsten Wurzeln für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sind in der folgenden Tabelle enthalten, sie wurden ohne weiteres aus der Figur entnommen.

Tabelle II.

Wurzeln von $\psi_n(x) = 0$.

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	0	0	0	0	0
π	4,5	5,7	7,0	8,2	9,4
2π	7,7	9,1	10,3	—	—
3π	11,0	—	—	—	—

Bezeichnen wir die p^{te} Wurzel von $\psi_n(x)$ mit $x_{n,p}$, so erhält man in zweiter Näherung aus (42):

$$(44) \quad \varrho = \frac{x_{n,p}}{N} \left(1 - \frac{1}{N^2} \frac{1}{n} \right).$$

Die zu diesen Wurzeln gehörigen Eigenschwingungen sind hiernach ungedämpft, wenn die betreffende Kugel nicht absorbiert. Lassen sich andererseits die Materialeigenschaften durch die Leitfähigkeit σ allein beschreiben, und ist in (36) die Dielektrizitätskonstante ϵ zu vernachlässigen neben σ/ω , so erhält man unter Benutzung von (36) für ω in erster Näherung:

$$\omega = i \frac{c^2}{a^2 \sigma} x_{n,p}^2.$$

Die betreffenden Schwingungen sind in diesem Falle also aperiodisch gedämpft; während die Dämpfung um so kleiner wird, je größer die Leitfähigkeit ist.

Überlegungen analog zu den obigen führen auch für die magnetischen Schwingungen zu unendlich vielen Eigenwerten, welche in erster Näherung bestimmt werden durch die Gleichung:

$$(45) \quad \frac{\psi'_n(N\varrho)}{\psi_n(N\varrho)} = - \frac{n}{N\varrho},$$

und neben den in der zweiten Spalte der Tab. I angegebenen existieren können. Die kleinsten aus (45) für $y = N\varrho$ folgenden Werte finden sich in der folgenden Tabelle.

Tabelle III.

Wurzeln von $\frac{\psi_n'(y)}{\psi_n(y)} = -\frac{n}{y}$.

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\frac{\pi}{2}$	3,1	4,5	5,8	6,9	8,2
$\frac{3\pi}{2}$	6,3	7,9	9,1	10,4	11,7
$\frac{5\pi}{2}$	9,4	11,0	—	—	—

Auch diese Werte wurden ebenso wie die der Tab. II aus einer Figur entnommen, in der sowohl ψ_n'/ψ_n wie n/y als Funktion von y aufgetragen waren. Für jedes n gibt es wieder unendlich viele Wurzeln, welche asymptotisch immer näher an die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} \left\{ y - \frac{\pi}{2} (n+1) \right\} = \frac{n}{y} = 0$$

heranrücken.

Schließlich erübrigt es noch, die Wurzeln unserer Grundgleichungen (37) und (37') zu bestimmen für den zweiten Grenzfall, daß das Kugelmateriale wenig vom freien Äther verschieden ist, d. h. $N - 1 \ll 1$, wobei $N = \nu$ als reell angenommen werden möge. Ist $\nu = 1$, so haben (37) und (37') keine Wurzeln, da bekanntlich

$$\zeta_n \psi_n' - \zeta_n' \psi_n = \text{konst.},$$

wobei für diese Funktionen die Konstante den Wert i hat. Wenn ν nur wenig von 1 verschieden ist, so führt, wie die Rechnung zeigt, die Annahme $|\varrho| \gg 1$ zum Ziel. Ersetzt man nämlich unter dieser Voraussetzung in (37) die Funktionen ψ_n und ζ_n durch ihre asymptotischen Näherungswerte, so erhält man die Gleichung:

$$(46) \quad \operatorname{tg} \left\{ \nu \varrho - \frac{\pi}{2} (n+1) \right\} = i \nu.$$

Setzt man noch vorübergehend

$$(47) \quad \nu \varrho - \frac{\pi}{2} (n+1) = a + i b,$$

wobei $b \gg 1$ anzunehmen ist, so hat man (in zweiter Näherung):

$$\operatorname{tg} \left\{ \nu \varrho - \frac{\pi}{2} (n+1) \right\} = i(1 - 2e^{2i(a+ib)}).$$

Zur Bestimmung von $(a+ib)$ gilt also nach (46) die Gleichung:

$$(48) \quad e^{2ia} e^{-2b} = -\frac{\nu-1}{2},$$

so daß man erhält:

$$a = (2p+1) \frac{\pi}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \log \frac{2}{\nu-1},$$

wobei p eine beliebig zu wählende ganze Zahl bedeutet. Für unsere Größe ϱ erhalten wir hieraus schließlich:

$$(49) \quad \varrho = (2p+n+2) \frac{\pi}{2} \frac{1}{\nu} + \frac{i}{2\nu} \log \frac{2}{\nu-1}.$$

Für die magnetischen Eigenschwingungen ergibt (37') in demselben Grenzfall ($\nu \simeq 1$) für ϱ die Werte:

$$(49') \quad \varrho = (2p+n+1) \frac{\pi}{2} \frac{1}{\nu} + \frac{i}{2\nu} \log \frac{2}{\nu-1}.$$

Beide Schwingungstypen sind also um so stärker gedämpft, je näher ν an 1 heranrückt.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Berechnung des Lichtdruckes.

§ 6. Die Grundlagen der Rechnung.

Auf die *Existenz* einer mechanischen Kraft, angreifend an einem von Lichtwellen getroffenen Körper, wurde von zwei ganz verschiedenen Seiten geschlossen. J. C. Maxwell¹⁾ erklärte ihr Vorhandensein auf Grund der nach seiner Theorie des elektromagnetischen Feldes im Äther vorhandenen Spannungen; A. Bartoli²⁾ dagegen nahm als Ausgangspunkt die

1) J. C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1881. 2. p. 401. Die benutzten Gleichungen für die Spannungen finden sich 1. p. 144 und 2. p. 253.

2) Man vgl. die Übersetzung in Exners Repertorium der Physik 21. p. 198. 1885. Bartoli hatte die betreffenden Überlegungen schon in einer 8 Jahre früher erschienenen Denkschrift niedergelegt und wurde zu der erneuten Publikation veranlaßt durch eine Arbeit von H. T. Eddy mit dem Titel: „Radiant heat as an exception of the second law of thermodynamics“ Proc. of Ohio Inst. Juli 1882, p. 105, die von L. Boltzmann referiert wurde in den Beibl. zu den Ann. d. Phys. p. 251. 1883.

beiden Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie und zeigte, daß man ein Perpetuum mobile zweiter Art konstruieren könne, wenn eine solche Kraft nicht vorhanden wäre. Während nun das Verfahren Maxwells zugleich auch einen numerischen Wert für den Lichtdruck liefert, ist das mit der wärmetheoretischen Methode nicht der Fall. Nach letzterer erhält man, wie besonders Boltzmann¹⁾ klar hervorhebt, nur eine Differentialbeziehung zwischen dem Lichtdruck einerseits, Energie und Temperatur der schwarzen Strahlung andererseits. Sie ergibt also nur dann einen numerischen Wert für den Lichtdruck, wenn das Strahlungsgesetz schon experimentell ermittelt ist. Bekanntlich gelang es Boltzmann²⁾ auf dem umgekehrten Wege unter Benutzung des Maxwellschen Resultates das Stephansche Strahlungsgesetz³⁾ theoretisch zu begründen.

Nachdem es also klargestellt ist, daß eine Berechnung des Lichtdruckes nur auf Grund spezieller (elektrodynamischer) Prinzipien möglich ist, wollen wir zunächst den Gang der Rechnung etwas näher beleuchten. Will man sich möglichst wenig von den durch die Erfahrung zu kontrollierenden Tatsachen entfernen, so ist es wohl am besten, die Ätherspannungen als reines Rechnungsergebnis zu betrachten, statt sie wie Maxwell an die Spitze zu stellen. Vielmehr werden wir mit Lorentz den Ausdruck für die mechanische Kraft des elektromagnetischen Feldes als das Primäre ansehen und aus diesem die Ätherspannungen durch Umformung gewisser Volumenintegrale entstanden denken. Während aber Maxwell und H. Hertz⁴⁾ neben der altbekannten mechanischen Wirkung eines elektrischen bzw. magnetischen Feldes auf eine (im allgemeinen) bewegte Ladung noch eine analoge Wirkung

1) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22. p. 31. 1884 (Berichtigungen p. 616); vgl. auch M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906. § 60. p. 56.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22. p. 291. 1884.

3) J. Stephan, Wien. Ber. 79. p. 423. 1879.

4) H. Hertz, Wied. Ann. 41. p. 389. 1890 oder „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“, Leipzig 1882. p. 275. Eine kurze Darstellung findet sich bei H. A. Lorentz, Enc. d. math. Wiss. (V) 13. p. 107.

des magnetischen Feldes auf den Verschiebungsstrom und des elektrischen Feldes auf den „magnetischen Strom“ einführen müssen, damit die Wirkung dieser Volumkräfte dasselbe Resultat liefert wie die Ätherspannungen, kennt die Elektronentheorie nach H. A. Lorentz¹⁾ nur Kräfte, die auf die Materie bzw. auf die in ihr befindlichen Elektronen wirken. Nimmt man nun an, daß sich alle elektromagnetischen Erscheinungen in ponderablen Körpern durch bewegte Ladungen erklären lassen, und setzt nach Lorentz für die auf die Ladungseinheit wirkende Kraft

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \cdot \mathfrak{S} \right]$$

(v = Geschwindigkeit der Ladung), so erhält man für die ganze auf den betreffenden Körper wirkende Kraft zunächst das über diesen erstreckte Volumenintegral $\mathfrak{F} = \int \mathfrak{f} dS$. Nun kann man aber offenbar ebensogut die Integration auf einen Raum erweitern, der den fraglichen Körper, aber sonst keine ponderabele Materie, sondern nur reinen Äther umfaßt; man erhält dann, indem man noch das Volumenintegral teilweise in ein Oberflächenintegral umwandelt²⁾, das Resultat: Die mechanische Kraft auf den betreffenden Körper besteht aus zwei Teilen:

1. der Wirkung der Maxwell'schen Spannungen

$$(50) \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{E} \mathfrak{E}_n + \mathfrak{S} \mathfrak{S}_n - \frac{n}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{S}^2)$$

summiert über die Oberfläche des betrachteten Raumes, wobei n die nach außen gerichtete Einheitsnormale dieser Oberfläche bedeutet;

2. der Wirkung einer Volumkraft vom Betrage

$$- \frac{1}{c^2} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

1) „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern“, p. 21 u. 24 des 1906 bei Teubner (Leipzig) erschienenen unveränderten Abdruckes der 1895 bei Brill (Leiden) gedruckten ursprünglichen Arbeit. Man vgl. auch Enc. d. math. Wiss. (V) 14. p. 161.

2) Für die nähere Ausführung der Rechnung vgl. man M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 23. Leipzig 1905.

pro Volumeneinheit, integriert über das ganze Innere desselben Raumes, wobei \mathfrak{S} den Poyntingschen Strahlungsvektor:

$$\mathfrak{S} = c [\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]$$

bedeutet.

Bei zeitlich periodischen Zuständen liefert das letztere Volumenintegral zum Werte der Kraft im Mittel der Zeit den Beitrag Null, so daß diese dann sowohl nach Lorentz wie nach Maxwell-Hertz aus den Spannungen \mathfrak{Z} allein ableitbar ist. Wir werden demnach im folgenden die allgemeine Formel für den Lichtdruck auf eine Kugel vom Radius a berechnen, indem wir die Spannung \mathfrak{Z} über eine konzentrische Kugel summieren, deren Radius wir ins Unendliche wachsen lassen werden, wodurch das Schlußresultat eine verhältnismäßig sehr übersichtliche Gestalt annimmt. Dabei dürfen wir uns, wie allgemein üblich, auf die Angabe des zeitlichen Mittelwertes der mechanischen Kraft beschränken und brauchen, wie aus Symmetriegründen hervorgeht, nur die Komponente derselben nach der Einfallrichtung, also auch nur diese Komponente der Spannungen \mathfrak{Z} zu berücksichtigen.

Auch für einen ebenen Spiegel kann man die Berechnung dadurch vereinfachen, daß man die Integration in zwei Ebenen ausführt, welche genügend weit von seiner Oberfläche entfernt sind. Ist S die pro Zeiteinheit senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung von der einfallenden Welle geförderte Energie und setzt für die von der reflektierten bzw. durchgelassenen Welle mitgeführte Energie:

$$S_r = \rho S, \quad S_d = \delta S,$$

wo ρ den Reflexionskoeffizienten bedeutet und δ in entsprechender Weise die Durchlässigkeit der Platte mißt, so erhält man für den zeitlichen Mittelwert des Lichtdruckes die Formel:

$$M(\mathfrak{Z}) = \frac{S}{c} (1 + \rho - \delta) \cos^2 \varphi$$

in Übereinstimmung mit einem schon von Goldhammer angegebenen Resultat.¹⁾

Ist der Spiegel dick genug, keine merkliche Strahlung mehr durchzulassen, so erhält man für senkrecht einfallendes

1) D. A. Goldhammer, Ann. d. Phys. 4. p. 834. 1901.

Licht die schon von Maxwell¹⁾ angegebene und von Lebedew²⁾ sowie Nichols und Hull³⁾ zur Berechnung ihrer experimentellen Resultate benutzte Gleichung:

$$M(\mathfrak{L}) = \frac{S}{c}(1 + \varrho).$$

Demgegenüber bemerkt Drude in der zweiten Auflage seines Lehrbuches der Optik⁴⁾, daß diese Beziehung nur angenähert richtig sei und nur für $\varrho = 1$ (vollkommene Reflexion) den betreffenden Wert des Lichtdrucks darstelle. Im Grenzfalle $\varrho = 0$ soll derselbe nicht wie oben gleich S/c , sondern nur gleich $\frac{1}{2} S/c$ sein. Bei der hohen Bedeutung des Drudeschen Werkes und dem wohlbegründeten Einfluß desselben auf die Entwicklung der Wissenschaft ist es wohl richtig, die Ursache dieser vermeintlichen Abweichung aufzudecken. Verfolgt man den Gang der Drudeschen Rechnung etwas näher, so sieht man, daß die Nichtübereinstimmung darauf beruht, daß er zwar die von Maxwell und Hertz angenommene mechanische Kraft des magnetischen Feldes auf den Verschiebungsstrom, nicht dagegen die des elektrischen Feldes auf den magnetischen Strom mit in Rechnung zieht, welche vom Maxwell-Hertzschen Standpunkt des auch auf den Äther übertragenen Reaktionsprinzipes mit der erstgenannten Wirkung gleichberechtigt ist. Dem entspricht es, daß Drude für senkrecht auffallendes Licht das Glied mit \mathfrak{E}^2 in (50) wegläßt. Im Falle des schwarzen Spiegels ($\varrho = 0$) folgt daraus, daß er nur die Hälfte des hier angegebenen Lichtdruckes erhält. Dagegen versteht man, daß für einen vollkommen reflektierenden Spiegel an dessen Oberfläche \mathfrak{E} sowieso verschwindet, die Drudesche Annahme auf den sonst bekannten und für die Strahlungstheorie fundamentalen Wert des Lichtdruckes führen muß.

Es sei noch bemerkt, daß man, wenn die Formel auf einen Spiegel von endlichen Dimensionen angewendet wird,

1) J. C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, I. c.

2) P. Lebedew, Ann. d. Phys. 6. p. 433. 1901.

3) E. L. Nichols u. G. F. Hull, Ann. d. Phys. 12. p. 225. 1903.
In den beiden zuletzt zitierten Arbeiten findet sich eine ausführlichere Zusammenstellung der betreffenden Literatur.

4) P. Drude, Optik p. 477. Anm. 2. Leipzig 1906.

streng genommen noch zwei Korrekturen einführen müßte. Einmal nämlich treten hier immer Beugungserscheinungen auf, andererseits dringt auch nach der geometrischen Optik Licht durch die seitliche Begrenzung des Spiegels hinaus, beides Ursachen, die kleine Abänderungen nötig machen würden. Es ist aber klar, daß für gewöhnliche Dimensionen des Spiegels und bei stark absorbierendem Material diese Korrekturen ganz unbedeutend sein werden.

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich theoretisch in einem durchstrahlten absorbierenden Gas Druckdifferenzen zeigen müssen. Diese sind zwar außerordentlich klein (von der Größenordnung 10^{-10} Atm.), indessen gelang es Lebedew¹⁾, dieselben im Laufe des vorigen Sommers auch experimentell nachzuweisen. Es möge dieses besonders hervorgehoben werden, da Arrhenius²⁾ die Meinung ausspricht, daß eine solche Wirkung des Lichtes in Gasen überhaupt nicht vorhanden wäre. Die Wirkung folgt sowohl direkt aus den Grundgleichungen, wenn man den Lichtdruck in verschiedenen Schichten des absorbierend gedachten Gases ausrechnet, wie auch anschaulicher durch molekulare Betrachtungen, wenn man die Moleküle in Anlehnung an § 13 z. B. als schwingungsfähige Dipole betrachtet.

§ 7. Die allgemeine Formel für den Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material.

Nach den Erörterungen von § 6 erhalten wir den Lichtdruck auf unsere Kugel vom Radius a , indem wir die in Richtung der einfallenden Welle (nach unserer Annahme die z -Richtung) weisenden Komponenten der Maxwellschen Spannungen über eine beliebige den Körper umschließende Kugel summieren. Charakterisieren wir nun wie in § 4 die zu der einfallenden Welle gehörigen Feldkomponenten durch den Index e , während die Komponenten des „Streu“feldes den Index 1 oder 2 tragen, entsprechend ihrer Ableitung aus dem ersten

1) Vgl. die vorläufige Mitteilung im Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **40**. phys. Teil, p. 20. 1908, referiert in den Beibl. zu den Ann. d. Phys. **33**. p. 160. 1909.

2) S. Arrhenius, Das Werden der Welten p. 87. Leipzig 1907.

oder zweiten unserer Potentiale Π_1 oder Π_2 , so ergibt (50) des § 6 mit

$$\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_r, \quad \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_r$$

und

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_r \cos \vartheta - \mathfrak{E}_\vartheta \sin \vartheta, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_r \cos \vartheta - \mathfrak{H}_\vartheta \sin \vartheta$$

für den momentanen Lichtdruck pro Flächeneinheit der Integrationskugel¹⁾

$$(51) \left\{ \begin{aligned} -\mathfrak{Z}_z &= \frac{\cos \vartheta}{2} (\mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{E}_\vartheta + \mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{E}_\varphi + \mathfrak{H}_\vartheta \mathfrak{H}_\vartheta + \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_r \mathfrak{E}_r - \mathfrak{H}_r \mathfrak{H}_r) \\ &\quad + \sin \vartheta (\mathfrak{E}_r \mathfrak{E}_\vartheta + \mathfrak{H}_r \mathfrak{H}_\vartheta), \end{aligned} \right.$$

wenn wir die totalen Feldstärken ohne Index lassen und von vornherein das ohnehin bei der Bildung des zeitlichen Mittelwertes verschwindende Volumenintegral über $\frac{1}{c^2} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$ nicht mit berücksichtigen.

Nach § 1 haben wir für die totalen elektrischen Komponenten:

$$\mathfrak{E}_r = \Re [(R_e + R_1) e^{i\omega t}],$$

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \Re [(T_e + T_1 + T_2) e^{i\omega t}],$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = \Re [(F_e + F_1 + F_2) e^{i\omega t}]$$

und entsprechende Formeln für die magnetischen Komponenten. Um den fraglichen Lichtdruck auf unsere Kugel vom Radius a zu erhalten, muß jetzt zunächst der zeitliche Mittelwert von (51) gebildet und dann dieser Mittelwert über die Kugel vom Radius r integriert werden. Das Resultat ist nur scheinbar von r abhängig, da ja unsere Kugel durch jede andere, insbesondere die unendlich große ersetzt werden kann. Letzterer Grenzübergang zu unendlich großem r liefert dann die schließliche Formel für den Lichtdruck.

In großer Entfernung der Kugel werden die zerstreuten Wellen rein transversal, ein Umstand, der beim Dipol wohl bekannt ist und damit zusammenhängt, daß die radialen elektrischen und magnetischen Feldstärken von höherer Ordnung

1) Wir schreiben $\mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{E}_\vartheta$, $\mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{E}_\varphi$ usw. statt \mathfrak{E}_ϑ^2 , \mathfrak{E}_φ^2 usw., um Verwirrung vorzubeugen; letztere Zeichen bedeuten nämlich im folgenden keine Quadrate, sondern die aus dem zweiten Potential abgeleiteten Feldkomponenten. Es sei übrigens noch bemerkt, daß weiterhin im vorliegenden Paragraphen der Index a durchweg weggelassen ist, da wir es ausschließlich mit Komponenten des äußeren Feldes zu tun haben.

verschwinden, wie die übrigen. Dem entspricht es, daß bei unserem Grenzübergang der Beitrag der vier letzten Terme von (51) verschwindet.¹⁾ Für die weitere Rechnung empfiehlt es sich, die beiden Glieder $\mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{E}_\vartheta$ und $\mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{E}_\varphi$ zu gleicher Zeit zu berücksichtigen. Schreibt man dann für den von diesen Produkten herrührenden Teil \mathfrak{L}_1 des ganzen Lichtdruckes \mathfrak{L} :

$$(52) \quad \mathfrak{L}_1 = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{E}_\vartheta + \mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{E}_\varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

so wird der zeitliche Mittelwert²⁾

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}(\mathfrak{L}_1) &= \frac{r^2}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \{ (T_e + T_1 + T_2) (\bar{T}_e + \bar{T}_1 + \bar{T}_2) \\ &\quad + (F_e + F_1 + F_2) (\bar{F}_e + \bar{F}_1 + \bar{F}_2) \} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Zunächst ist nun nach (24):

$$(54) \quad T_e = e^{i k r \cos \vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi$$

und nach den in § 5 für die Potentiale Π_1^a und Π_2^a angegebenen Gleichungen (29) bzw. (29') durch Anwendung der Formeln (5) und (5')

$$(54') \quad \left\{ \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r \partial \vartheta} = \sum_1^\infty A_n^1 \frac{1}{k r} \frac{d \zeta_n(k r)}{d(k r)} \frac{d P_n^1(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \cos \varphi, \\ T_2 &= - \frac{i k}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r \Pi_2}{\partial \varphi} = i \sum_1^\infty A_n^2 \frac{\zeta_n(k r)}{k r} \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \cos \varphi. \end{aligned} \right.$$

Analog erhält man:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} F_e &= - e^{i k r \cos \vartheta} \sin \varphi, \\ F_1 &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r \Pi_1}{\partial r \partial \varphi} = - \sum_1^\infty A_n^1 \frac{1}{k r} \frac{d \zeta_n(k r)}{d(k r)} \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \sin \varphi, \\ F_2 &= \frac{i k}{r} \frac{\partial r \Pi_2}{\partial \vartheta} = - i \sum_1^\infty A_n^2 \frac{\zeta_n(k r)}{k r} \frac{d P_n^1(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

1) Der genauere Beweis dieser Behauptung ist in der Dissertation ausgeführt.

2) Der horizontale Strich bedeutet wie üblich den Übergang zur konjugiert komplexen Größe.

Setzt man diese Ausdrücke in (53) ein, so erhält man nach Ausführung der Integration nach φ , da

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi,$$

für $M(\mathfrak{L}_1)$ folgende Darstellung:

$$(56) \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{L}_1) &= \frac{\pi r^2}{2} \Re \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos^2 \vartheta + 1) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right. \\ &+ \sum_1^\infty A_n^1 \frac{\zeta_n'}{k r} \int_0^\pi e^{-i k r \cos \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &+ i \sum_1^\infty A_n^2 \frac{\zeta_n}{k r} \int_0^\pi e^{-i k r \cos \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} + \frac{dP_n^1}{d\vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &+ i \sum_1^\infty \sum_1^\infty A_m^1 A_n^2 \frac{\bar{\zeta}_m'}{k r} \frac{\zeta_n}{k r} \\ &\quad \int_0^\pi \left(\frac{dP_m^1}{d\vartheta} \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} + \frac{dP_n^1}{d\vartheta} \frac{P_m^1}{\sin \vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \left(\bar{A}_m^1 A_n^1 \frac{\bar{\zeta}_m'}{k r} \frac{\zeta_n'}{k r} + \bar{A}_m^2 A_n^2 \frac{\bar{\zeta}_m}{k r} \frac{\zeta_n}{k r} \right) \\ &\quad \left. \int_0^\pi \left(\frac{dP_m^1}{d\vartheta} \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_m^1}{\sin \vartheta} \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right]. \end{aligned} \right.$$

Verglichen mit (53) entspricht die erste Zeile der obigen Formel (56) den Gliedern $T_e \bar{T}_e + F_e \bar{F}_e$, die zweite und dritte den Gliedern

$$(T_e \bar{T}_1 + \bar{T}_e T_1) + (F_e \bar{F}_1 + \bar{F}_e F_1),$$

bzw.

$$(T_e \bar{T}_2 + \bar{T}_e T_2) + (F_e \bar{F}_2 + \bar{F}_e F_2),$$

die vier letzten endlich den Gliedern

$$(T_1 \bar{T}_2 + \bar{T}_1 T_2) + (F_1 \bar{F}_2 + \bar{F}_1 F_2),$$

bzw.

$$(T_1 \bar{T}_1 + \bar{T}_2 T_2) + (F_1 \bar{F}_1 + \bar{F}_2 F_2).$$

Die hier auftretenden Integrale nach ϑ sind in § 8 angegeben; unter Benutzung dieser Werte sowie der Beziehung

$$\int_0^\pi \cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = 0$$

erhält man:

$$(57) \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{L}_1) &= \frac{\pi}{k^2} \Re \left[\sum_1^\infty (-i)^{n-2} n(n+1) k^2 r^2 \right. \\ &\quad \left(A_n^1 \frac{\zeta_n'}{kr} \cdot \frac{d}{d(kr)} \frac{\psi_n'}{kr} + A_n^2 \frac{\zeta_n}{kr} \cdot \frac{d}{d(kr)} \frac{\psi_n}{kr} \right) \\ &\quad + i \sum_1^\infty \frac{n(n+1)}{2n+1} \bar{A}_n^1 A_n^2 \zeta_n' \zeta_n \\ &\quad \left. + \sum_1^\infty \frac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} (\bar{A}_n^1 A_{n+1}^1 \frac{\bar{\zeta}_n'}{kr} \frac{\zeta_{n+1}'}{kr} + \bar{A}_n^2 A_{n+1}^2 \frac{\bar{\zeta}_n}{kr} \frac{\zeta_{n+1}}{kr}) \right]. \end{aligned} \right.$$

Indem wir diesen Ausdruck mit dem vorigen zusammenhalten, bemerken wir: die erste Zeile von (56) ist bei der Integration fortgefallen; die zweite und dritte sind in die erste Summe des jetzigen Ausdruckes übergegangen; die Doppelsumme der vierten Zeile hat sich, weil das Integral nach ϑ nur für $m = n$ von Null verschieden ist, auf eine einfache Reihe reduziert, ähnlich ergibt sich die Doppelreihe der vorletzten Zeile des vorigen Ausdruckes, da in ihr das Integral nach ϑ nur für $m = n - 1$ und $m = n + 1$ von Null verschieden ausfällt, zunächst gleich der Summe zweier einfacher Reihen, die in der Form:

$$\begin{aligned} &\sum_1^\infty \frac{(n-1)^2 n(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} \left(\bar{A}_{n+1}^1 A_n^1 \frac{\bar{\zeta}_{n-1}'}{kr} \frac{\zeta_n'}{kr} + \bar{A}_{n-1}^2 A_n^2 \frac{\bar{\zeta}_{n-1}}{kr} \frac{\zeta_n}{kr} \right) \\ &+ \sum_1^\infty \frac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \left(\bar{A}_{n+1}^1 A_n^1 \frac{\bar{\zeta}_{n+1}'}{kr} \frac{\zeta_n'}{kr} + \bar{A}_{n+1}^2 A_n^2 \frac{\bar{\zeta}_{n+1}}{kr} \frac{\zeta_n}{kr} \right) \end{aligned}$$

erscheinen. Ersetzt man in der ersten Summe dieses Ausdruckes den Summationsindex n durch $n + 1$, so lassen sich,

indem noch der Umstand benutzt wird, daß das $n=1$ entsprechende Glied Null ist, in der Tat die übereinanderstehenden Glieder bis auf den Faktor 4 als reeller Teil derjenigen Reihe schreiben, die in der letzten Zeile des Ausdruckes (57) steht.

In (57) wollen wir jetzt den Grenzübergang zu unendlichem r ausführen; wir dürfen dabei die Funktionen ζ und ψ durchweg durch ihre asymptotischen Werte für $r = \infty$ ersetzen.¹⁾ Aus (13') folgt für unendlich große Werte des Argumentes sofort:

$$\zeta_n(kr) = i^{n+1} e^{-ikr}, \quad \frac{d\zeta_n(kr)}{d(kr)} = i^n e^{-ikr},$$

während die Zusammenhangsformeln (14') verbunden mit den Entwicklungen (13) und (13') ergeben:

$$\psi_n(kr) = \frac{1}{2} (i^{n+1} e^{-ikr} + (-i)^{n+1} e^{ikr}),$$

so daß:

$$\frac{d}{d(kr)} \frac{\varphi_n(kr)}{kr} = \frac{1}{2kr} (i^n e^{-ikr} + (-i)^n e^{ikr})$$

und

$$\frac{d}{d(kr)} \frac{1}{kr} \frac{d\psi_n(kr)}{d(kr)} = -\frac{1}{2kr} (i^{n+1} e^{-ikr} + (-i)^{n+1} e^{ikr}).$$

Setzt man nun diese Werte in (57) ein, so erhält man:

$$(58) \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{L}_1) &= \frac{\pi}{k^2} \Re \left[e^{-2ikr} \sum_1^{\infty} i^{n+1} n(n+1) \frac{A_n^1 - A_n^2}{2} \right. \\ &+ \sum_1^{\infty} (-i)^{n+1} n(n+1) \frac{A_n^1 + A_n^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \bar{A}_n^1 A_n^2 \\ &\left. + i \sum_1^{\infty} \frac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} (\bar{A}_n^1 A_{n+1}^1 + \bar{A}_n^2 A_{n+1}^2) \right]. \end{aligned} \right.$$

Berechnet man in gleicher Weise den zeitlichen Mittelwert des von den magnetischen Komponenten \mathfrak{S}_ϑ und \mathfrak{S}_φ herührenden Teiles des mittleren Lichtdruckes $M(\mathfrak{L}_1')$, so erhält man

1) Für die nähere Begründung vgl. man die Diss. § 8.

$$(58) \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{L}_1) &= \frac{\pi}{k^2} \Re \left[-e^{-2ikr} \sum_1^{\infty} i^{n+1} n(n+1) \frac{A_n^1 - A_n^2}{2} \right. \\ &+ \sum_1^{\infty} (-i)^{n+1} n(n+1) \frac{A_n^1 + A_n^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \bar{A}_n^1 A_n^2 \\ &\left. + i \sum_1^{\infty} \frac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} (\bar{A}_n^1 A_{n+1}^1 + \bar{A}_n^2 A_{n+1}^2) \right], \end{aligned} \right.$$

ein Ausdruck, der aus (58) durch Vertauschung von A^1 mit A^2 und umgekehrt entsteht und sich dementsprechend von (58) nur durch das Vorzeichen des ersten Gliedes unterscheidet. Die Rechnung erfordert keine anderen Integralwerte wie die bereits zur Ableitung von (57) benutzten, wie die folgende Zusammenstellung der magnetischen ϑ - und φ -Komponenten verglichen mit (54), (54') und (55) zeigt. Nach (24) und aus (29) und (29') folgt nämlich unter Benutzung von (5) und (5'):

$$\Theta_e = -e^{ikr \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$\Theta_1 = i \frac{k}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r}{\partial \varphi} II_1 = -i \sum_1^{\infty} A_n^1 \frac{\zeta_n(kr)}{kr} \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \sin \varphi,$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial r \partial \vartheta} II_2 = - \sum_1^{\infty} A_n^2 \frac{1}{kr} \frac{d \zeta_n(kr)}{d(kr)} \frac{d P_n^1(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \sin \varphi,$$

$$\Phi_e = -e^{ikr \cos \vartheta} \cos \varphi,$$

$$\Phi_1 = -i \frac{k}{r} \frac{\partial r}{\partial \vartheta} II_1 = -i \sum_1^{\infty} A_n^1 \frac{\zeta_n(kr)}{kr} \frac{d P_n^1(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \cos \varphi,$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 r}{\partial r \partial \varphi} II_2 = - \sum_1^{\infty} A_n^2 \frac{1}{kr} \frac{d \zeta_n(kr)}{d(kr)} \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \cos \varphi.$$

Benutzen wir die schon hervorgehobene Tatsache, daß in der Grenze für $r = \infty$ der Beitrag der vier letzten Terme von (51) verschwindet, und definieren wir schließlich noch mit Rücksicht auf (33) und das auf p. 73 über den Zusammenhang von A_n^2 mit A_n^1 Gesagte neue Abkürzungen

$$(59) \quad \alpha_n^1 = a_n^1 + i b_n^1 \quad \text{und} \quad \alpha_n^2 = a_n^2 + i b_n^2,$$

indem wir setzen:

$$(60) \quad A_n^1 = -i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \alpha_n^1, \quad A_n^2 = -i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \alpha_n^2,$$

so erhalten wir durch Addition von (58) und (58') das zusammenfassende Resultat:

Erklärt man die komplexen Größen α_n^1 und α_n^2 durch die Formeln:

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha_n^1 = a_n^1 + i b_n^1 = \frac{\kappa_1^a \psi_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \psi_n'(k_a a) \kappa_1^i \psi_n(k_i a)}{\kappa_1^a \zeta_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \zeta_n'(k_a a) \kappa_1^i \psi_n(k_i a)}, \\ \alpha_n^2 = a_n^2 + i b_n^2 = \frac{\kappa_2^a \psi_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \psi_n'(k_a a) \kappa_2^i \psi_n(k_i a)}{\kappa_2^a \zeta_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \zeta_n'(k_a a) \kappa_2^i \psi_n(k_i a)}, \end{cases}$$

wobei mit Rücksicht darauf, daß das äußere Medium der freie Äther ist

$$(62) \quad \begin{cases} \kappa_1^a = i \frac{\omega}{c}, \quad \kappa_2^a = i \frac{\omega}{c}, \quad k_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \\ \kappa_1^i = i \frac{\epsilon \omega}{c} + \frac{\sigma}{c}, \quad \kappa_2^i = i \frac{\mu \omega}{c}, \quad k_i^2 = \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} - i \frac{\mu \sigma \omega}{c^2}; \end{cases}$$

so ist der zeitliche Mittelwert des Lichtdruckes auf eine Kugel vom Radius a , bestehend aus einem Material mit den Konstanten ϵ, μ, σ , dargestellt durch

$$(63) \quad \begin{cases} M(\mathfrak{U}) = \frac{2\pi}{k_a^2} \Re \left[\sum_1^\infty (2n+1) \frac{\alpha_n^1 + \alpha_n^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} \bar{\alpha}_n^1 \alpha_n^2 \right. \\ \left. - \sum_1^\infty \frac{n(n+2)}{n+1} (\bar{\alpha}_n^1 \alpha_{n+1}^1 + \bar{\alpha}_n^2 \alpha_{n+1}^2) \right] \end{cases}$$

oder

$$(63') \quad \begin{cases} M(\mathfrak{U}) = \frac{2\pi}{k_a^2} \left[\sum_1^\infty (2n+1) \frac{a_n^1 + a_n^2}{2} \right. \\ \left. - \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^1 a_n^2 + b_n^1 b_n^2) \right. \\ \left. - \sum_1^\infty \frac{n(n+2)}{n+1} (a_n^1 a_{n+1}^1 + b_n^1 b_{n+1}^1 + a_n^2 a_{n+1}^2 + b_n^2 b_{n+1}^2) \right], \end{cases}$$

unter der Voraussetzung, daß die einfallende ebene Welle linear polarisiert ist und die Amplitude 1 hat. Für eine beliebige Am-

plitude wird sich (63) bzw. (63') noch mit dem Quadrate derselben multiplizieren.

Es ist bequem, den Lichtdruck zu vergleichen mit der gleich dimensionierten Größe des Mittelwertes der Energie W , die sich in der einfallenden Welle pro Längeneinheit der Einfallrichtung in einem der Kugel umschriebenen Kreiszylinder befindet, und welche bekanntlich mit der pro sec durch 1 cm^2 senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung von dieser Welle geförderten Energie S zusammenhängt mittels der Formel

$$(64) \quad W = \pi a^2 \frac{S}{c}.$$

Bedenkt man, daß die pro cm^3 vorhandene Energie der einfallenden Welle dem halben Quadrate der Amplitude gleichkommt, so wird für den Fall, daß diese gleich 1 genommen wird

$$(64') \quad W = \frac{\pi}{2} a^2,$$

führt man dann noch in (63) statt k_a die Wellenlänge λ dieser Welle ein durch die Formel

$$(65) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_a},$$

so erhält man schließlich:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M(Q)}{W} &= \frac{\lambda^2}{\pi^2 a^2} \Re \left[\sum_1^{\infty} (2n+1) \frac{\alpha_n^1 + \alpha_n^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \bar{\alpha}_n^2 \alpha_n^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^{\infty} \frac{n(n+2)}{n+1} (\bar{\alpha}_n^1 \alpha_{n+1}^1 + \bar{\alpha}_n^2 \alpha_{n+1}^2) \right], \end{aligned} \right.$$

und entsprechend in den reellen Größen $a_n^1, a_n^2, b_n^1, b_n^2$ geschrieben:

$$(66') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M(Q)}{W} &= \frac{\lambda^2}{\pi^2 a^2} \left[\sum_1^{\infty} (2n+1) \frac{\alpha_n^1 + \alpha_n^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^1 a_n^2 + b_n^1 b_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^{\infty} \frac{n(n+2)}{n+1} (a_n^1 a_{n+1}^1 + b_n^1 b_{n+1}^1 + a_n^2 a_{n+1}^2 + b_n^2 b_{n+1}^2) \right]. \end{aligned} \right.$$

Nach der gebräuchlichen Auffassung des natürlichen Lichtes sind wir berechtigt, (66) bzw. (66') auch für dieses anzuwenden.

Wir heben noch den Spezialfall einer vollkommen reflektierenden Kugel hervor, in dem α_n^1 und α_n^2 die einfache Gestalt annehmen:

$$(67) \quad \alpha_n^1 = \frac{\psi_n'(ka)}{\zeta_n'(ka)}, \quad \alpha_n^2 = \frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)},$$

welche Formeln aus (61) hervorgehen, indem man die Leitfähigkeit σ unendlich groß werden läßt. Wir haben somit auch für diesen, in der Einleitung genannten, schon von Schwarzschild behandelten Spezialfall in (63) bzw. (63') (oder auch (66) bzw. (66')), eine neue, und wie man sieht, wesentlich vereinfachte Lösung gefunden.

§ 8. Ableitung der in den beiden vorigen Paragraphen benutzten Integralwerte.

Um den Wert der verschiedenen Integrale zu finden, die bei der Berechnung des Lichtdruckes benutzt werden, kann man natürlich in mannigfacher Weise vorgehen.

Am einheitlichsten und übersichtlichsten scheint das folgende Verfahren, bei dem außer der Entwicklung (27) für $e^{ikr \cos \vartheta}$ nur die zwei Zusammenhangsformeln (15) für die Funktionen ψ_n mit verschiedenem Index und die eine fundamentale Integralrelation (18) für die Kugelfunktionen benutzt werden.

Um Formel (58) zu erhalten, brauchen wir zunächst die beiden Integrale:

$$(68) \quad J_n^1 = \int_0^\pi e^{i x \cos \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$(69) \quad J_n^2 = \int_0^\pi e^{i x \cos \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} + \frac{dP_n^1}{d\vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

wobei zur Abkürzung $kr = x$ gesetzt ist. Betrachten wir zunächst J_n^1 , so kann man schreiben

$$(68') \quad J_n^1 = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \int_0^\pi e^{i x \cos \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} \right) \sin \vartheta d\vartheta,$$

oder, indem man im ersten Term dieser Summe partiell integriert¹⁾ und $\cos^2 \vartheta$ durch $1 - \sin^2 \vartheta$ ersetzt:

$$J_n^1 = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \int_0^\pi e^{ix \cos \vartheta} (2 \sin^2 \vartheta + ix \cos \vartheta \sin^2 \vartheta) P_n^1 d\vartheta$$

oder auch:

$$(68'') \quad J_n^1 = \frac{1}{i} \left(2 \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \right) \int_0^\pi e^{ix \cos \vartheta} P_n^1 \sin^2 \vartheta d\vartheta.$$

Nun ist nach (27)

$$e^{ix \cos \vartheta} = \sum_0^\infty i^m (2m+1) \frac{\psi_m(x)}{x} P_m^0,$$

woraus durch Differentiation nach ϑ und Division mit ix folgt

$$(70) \quad e^{ix \cos \vartheta} \sin \vartheta = \sum_0^\infty i^{m-1} (2m+1) \frac{\psi_m(x)}{x^2} P_m^1.$$

Setzt man diese Reihenentwicklung in (68'') ein, so erhält man unter Benutzung der Fundamentalformel (18):

$$(71) \quad J_n^1 = 2n(n+1) i^{n-2} \frac{d}{dx} \left(2 \frac{\psi_n(x)}{x^2} + x \frac{d}{dx} \frac{\psi_n(x)}{x^2} \right),$$

was noch durch Ausführung der letzten Differentiation in die einfachere, in § 7 benutzte Form

$$(71') \quad J_n^1 = 2n(n+1) i^{n-2} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d\psi_n(x)}{dx}$$

übergeführt werden kann.

Berücksichtigt man, daß die Differenz von dem in (68') auftretenden (noch nicht nach x differentiierten) Integral und J_n^2 den Wert hat:

$$\int_0^\pi e^{ix \cos \vartheta} P_n^1 \sin^2 \vartheta d\vartheta = 2n(n+1) i^{n-1} \frac{\psi_n(x)}{x^2},$$

wie sich aus dem Vergleich von (68'') und (71) ergibt, so erhält man:

$$(72) \quad J_n^2 = 2n(n+1) i^{n-1} \left(\frac{\psi_n(x)}{x^2} + x \frac{d}{dx} \frac{\psi_n(x)}{x^2} \right)$$

1) Hier und im folgenden verschwinden stets bei den partiellen Integrationen die Glieder ohne Integralzeichen beim Einsetzen der Grenzen.

oder auch

$$(72') \quad J_n^2 = 2n(n+1) i^{n-1} \frac{d}{dx} \frac{\psi_n(x)}{x}.$$

Hiermit sind die zwei ersten in (56) auftretenden Integrale gefunden; es erübrigt noch die zwei anderen

$$(73) \quad K_{m,n}^1 = \int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin \vartheta} \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} + \frac{dP_m^1}{d\vartheta} \frac{dP_n^1}{d\vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

und

$$(74) \quad K_{m,n}^2 = \int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin \vartheta} \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + \frac{dP_m^1}{d\vartheta} \frac{P_n^1}{\sin \vartheta} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

zu bestimmen. Wir wollen jetzt zeigen, wie diese aus J_n^1 und J_n^2 (vgl. (71') und (72')) folgen unter Benutzung der Relationen (15) zwischen den ψ_n verschiedener Ordnungen.

Nimmt man Rücksicht auf die Entstehungsweise dieser Integrale aus den elektrischen Komponenten T und F , so liegt es nahe, für $e^{ix \cos \vartheta} \cos \vartheta$ bzw. $e^{ix \cos \vartheta}$ in J_n^1 und J_n^2 die Entwicklungen einzusetzen, welche sich unter Benutzung der Formeln (5) und (5') aus den in § 3 abgeleiteten Potentialen der einfallenden Welle ergeben (und die von den soeben benutzten Entwicklungen formal verschieden sind). Man erhält so:

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{ix \cos \vartheta} \cos \vartheta = \frac{T_e}{\cos \varphi} &= \sum_1^\infty i^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{1}{x} \frac{d\psi_m(x)}{dx} \frac{dP_m^1}{d\vartheta} \\ &+ \sum_1^\infty i^m \frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{\psi_m(x)}{x} \frac{P_m^1}{\sin \vartheta} \end{aligned} \right.$$

und

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{ix \cos \vartheta} &= -\frac{F_e}{\sin \varphi} = \sum_1^\infty i^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{1}{x} \frac{d\psi_m(x)}{dx} \frac{P_m^1}{\sin \vartheta} \\ &+ \sum_1^\infty i^m \frac{2m+2}{m(m+1)} \frac{\psi_m(x)}{x} \frac{dP_m^1}{d\vartheta}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Entwicklungen in (68) und (69) ein, so bekommt man für J_n^1 und J_n^2 die zweite Darstellung:

$$(77) \quad \begin{cases} J_n^1 = \sum_1^{\infty} i^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left(\frac{1}{x} \frac{d\psi_m(x)}{dx} K_{m,n}^1 + i \frac{\psi_m(x)}{x} K_{m,n}^2 \right), \\ J_n^2 = \sum_1^{\infty} i^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left(i \frac{\psi_m(x)}{x} K_{m,n}^1 + \frac{1}{x} \frac{d\psi_m(x)}{dx} K_{m,n}^2 \right) \end{cases}$$

und durch Elimination von $K_{m,n}^1$ bzw. $K_{m,n}^2$

$$(77') \quad \begin{cases} -i J_n^2 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^1 = \sum_1^{\infty} i^{m-1} (2m+1) \frac{\psi_m(x)}{x^3} K_{m,n}^1, \\ -i J_n^1 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^2 = \sum_1^{\infty} i^{m-1} (2m+1) \frac{\psi_m(x)}{x^3} K_{m,n}^2. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ist jetzt der Wert von $K_{m,n}^1$ und $K_{m,n}^2$ nach leichter Rechnung zu entnehmen. Zunächst ist nämlich nach (71') und (72')

$$-i J_n^1 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^2 = 2n(n+1)^{n-1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{\psi_n}{x} - \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d\psi_n}{dx} \right),$$

oder da

$$(78) \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{\psi_n}{x} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d\psi_n}{dx} + \frac{\psi_n}{x^3} \\ -i J_n^1 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^2 = 2n(n+1) i^{n-1} \frac{\psi_n}{x^3}.$$

Eine gliedweise Vergleichung von (78) mit der zweiten Gleichung von (77') ergibt also das Resultat:

$$(79) \quad K_{m,n}^2 = \begin{cases} 0 & \dots \dots \dots m \neq n, \\ 2 \frac{n(n+1)}{2n+1} & \dots \dots \dots m = n. \end{cases}$$

Etwas mehr Rechnung erfordert die Bestimmung von $K_{m,n}^1$. Man erhält wieder durch Einsetzen der Werte von J_n^1 und J_n^2 zuerst:

$$-i J_n^2 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^1 = 2n(n+1) i^{n-2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\psi_n}{x} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d\psi_n}{dx} \right).$$

Indem man die Differentiation ausführt, sieht man, daß man für die Klammer auch schreiben kann:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} \left(\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \psi_n \right) + \frac{1}{x^3} \frac{d\psi_n}{dx},$$

so daß man mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (7) für ψ_n erhält:

$$-iJ_n^2 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^1 = 2n(n+1)i^{n-2} \left(n(n+1) \frac{d}{dx} \frac{\psi_n}{x^3} + \frac{1}{x^3} \frac{d\psi_n}{dx} \right).$$

Führt man schließlich noch die Differentiation im rechtsstehenden Ausdruck aus und ersetzt sowohl $d\psi_n/dx$ wie ψ_n/x nach (15) durch ihre Darstellungen in ψ_{n-1} und ψ_{n+1} , so folgt:

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} & -iJ_n^1 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x J_n^1 \\ & = 2 \frac{n(n+1)}{2n+1} i^{n-2} \left[(n+1)(n-1)^2 \frac{\psi_{n-1}}{x^3} - n(n+2)^2 \frac{\psi_{n+1}}{x^3} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die gliedweise Vergleichung der so erhaltenen Formel mit der ersten Gleichung von (77') liefert also das Resultat:

$$(81) \quad K_{m,n}^1 = \begin{cases} 0 & \dots & m \neq n-1 \text{ oder } m \neq n+1, \\ 2 \frac{(n-1)^2 n(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} & \dots & m = n-1, \\ 2 \frac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} & \dots & m = n+1. \end{cases}$$

Damit sind jetzt die im vorigen Paragraphen auftretenden Integrale ausgewertet.

§ 9. Der Lichtdruck auf einen schwingenden Dipol.

Schon in der Einleitung wurde hervorgehoben, daß unsere allgemeine Bestimmung des Lichtdruckes keinen Anspruch darauf machen könne, auch noch für ganz kleine Kügelchen Gültigkeit zu besitzen, welche nicht als Konglomerate sehr vieler Moleküle betrachtet werden können. Wir werden deshalb in diesem Paragraphen noch den Fall untersuchen, daß eine ebene Lichtwelle auf ein Molekül fällt, indem wir uns die aus der Dispersionstheorie geläufige Vorstellung bilden, daß der für uns wesentliche Bestandteil desselben aus Elektronen besteht, die durch quasielastische Kräfte an ihre Ruhelage gebunden sind. Die Elektronen werden durch die auffallende Welle zu Schwingungen angeregt, bilden also Stromelemente, auf die das vorhandene elektromagnetische Feld eventuell einseitige Wirkungen ausüben kann. Wie in § 6 auseinander gesetzt, genügt es indessen, das Feld in größerer Entfernung

des Moleküls zu kennen, um den Lichtdruck berechnen zu können.

Um die Verhältnisse nicht unnötig zu komplizieren, nehmen wir ein einziges schwingungsfähiges Elektron an, das bei genügend kleiner Dämpfung nur Wirkungen ausübt, solange die auffallende Wellenlänge in der Nähe seiner Eigenwellenlänge liegt. Den Fall mehrerer Eigenschwingungen des Moleküls kann man dann durch einfache Übereinanderlagerung erhalten.

Die einfachste Lösung unserer Grundgleichung (3) für das Potential Π , aus der mittels (5) ein elektromagnetisches Feld folgt, ist

$$(82) \quad r \Pi_1 = C \zeta_1(kr) P_1^0(\cos \vartheta),$$

wobei C eine verfügbare Konstante und $P_1^0(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$ die erste zonale Kugelfunktion bedeutet, während (13') ergibt

$$\zeta_1(kr) = -e^{-ikr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right).$$

Berechnet man aus (82) die Komponenten des elektromagnetischen Feldes mittels (5), so sieht man, daß dieses Potential Π_1 zu einem schwingenden Dipol gehört, dessen Achse in der z -Richtung liegt (vgl. Fig. 1). Hat dieser das maximale Moment m_0 und wird dasselbe zur Zeit $t=0$ erreicht, so ergibt die Vergleichung der aus (82) folgenden radialen elektrischen Komponente für die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes mit der bekannten statischen, für C den Wert

$$(83) \quad C = -ik \frac{m_0}{4\pi}.$$

Die ebene einfallende Welle, die wir allen unseren früheren Betrachtungen zugrunde legten, schritt in der negativen z -Richtung fort, während ihre elektrische Komponente in der x -Richtung gerichtet war. Die Schwingungen, die durch diese Welle im Molekül erregt werden (und nach außen hin wie ein Dipol wirken), liegen demnach auch in der x -Richtung, so daß wir die Achse unseres Dipols ebenfalls in diese hineinlegen müssen. Fig. 1 zeigt dann ohne weiteres, daß man statt (82) setzen muß

$$(82') \quad r \Pi_1 = -ik \frac{m_0}{4\pi} \zeta_1(kr) \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Überdies nahmen wir die Komponenten unserer einfallenden Welle proportional $e^{i\omega t}$. Im allgemeinen wird nun der

Dipol gegen die einfallende Welle eine Phasenverschiebung β zeigen, sein Moment ist also zur Zeit $t=0$ nicht m_0 , sondern $m_0 e^{-i\beta}$, so daß wir schließlich für das Potential der von dem Dipol ausstrahlenden Welle erhalten:

$$(84) \quad r \Pi_1 = -i k \frac{m_0}{4\pi} e^{-i\beta} \zeta_1(kr) \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Die zwei hier noch unbestimmt gebliebenen Konstanten m_0 und β werden durch eine Sonderbetrachtung über die Bewegungsgesetze des Dipols, derentwegen wir auf die Originalarbeiten von Planck¹⁾ und Abraham²⁾ verweisen, durch Intensität und Phase der auffallenden Welle ausgedrückt.

Unter der Annahme, daß der Resonator nur durch Strahlung Energie verliert, erhält man für die Phasenverschiebung β die Formel:

$$(85) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma}{\pi} \frac{(\lambda_0/\lambda)^3}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3},$$

wenn σ die Dämpfungskonstante³⁾ und λ_0 die Eigenwellenlänge des Oszillators bedeuten, während λ die auffallende Wellenlänge ist. Zugleich ist das maximale Moment

$$(86) \quad m_0 = \frac{3}{4\pi^2} \lambda^3 \sin \beta,$$

wenn wir der elektrischen Amplitude der auffallenden Welle den Wert 1 geben, wie wir das in den vorigen Paragraphen stets machten.

Der zeitliche Mittelwert des Lichtdruckes $M(\mathfrak{Q})$ ergibt sich jetzt ohne weiteres aus (63). Bei unserem Dipol ist nämlich $\Pi_2 = 0$, so daß alle Konstanten A_n^2 verschwinden, während bei Π_1 (vgl. (29)) nur der erste Koeffizient A_1^1 von Null verschieden ist und den Wert hat:

$$(87) \quad \frac{A_1^1}{k^2} = -i k \frac{m_0}{4\pi} e^{-i\beta}.$$

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 100 ff. Leipzig 1906.

2) M. Abraham, Theorie der Elektrizität p. 58 u. 117. Leipzig 1908.

3) Die Dämpfungskonstante σ ist hier definiert als log. des Verhältnisses zweier um die Zeit einer Vollschrwingung nacheinander erreichten Amplituden des frei schwingenden Dipols.

Weiter hängt nach (60) die in der allgemeinen Formel (63) vorkommende Größe α_1^{-1} mit A_1^{-1} zusammen mittels der Formel:

$$(88) \quad \alpha_1^{-1} = -\frac{2}{3} A_1^{-1},$$

so daß wir schließlich erhalten¹⁾:

$$(89) \quad M(\mathfrak{L}) = \frac{2\pi}{k^2} \Re \left[i k^3 \frac{m_0}{4\pi} e^{-i\beta} \right].$$

Substituieren wir noch für $k = \omega/c$ die Größe $2\pi/\lambda$ und für m_0 den Wert (86), so kommt:

$$(89') \quad M(\mathfrak{L}) = \frac{\pi}{\lambda} m_0 \sin \beta = \frac{3}{4\pi} \lambda^2 \sin^2 \beta$$

oder unter Benutzung von (85)

$$(89'') \quad M(\mathfrak{L}) = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{\frac{\sigma^2}{\pi^2} \frac{\lambda_0^6/\lambda^6}{(1 - \lambda_0^2/\lambda^2)^2}}{1 + \frac{\sigma^2}{\pi^2} \frac{\lambda_0^6/\lambda^6}{(1 - \lambda_0^2/\lambda^2)^2}}.$$

Die mechanische Wirkung des Lichtes ist also für alle Wellenlängen ein in Richtung der fortschreitenden Welle gerichteter Druck, der ein Maximum erreicht, wenn $\beta = \pi/2$, d. h. wenn die auffallende Wellenlänge λ mit der Eigenwellenlänge λ_0 des Dipols übereinstimmt. Letzteres gilt nur annähernd und nur, solange man die Änderungsgeschwindigkeit des Faktors λ^2 neben derjenigen von $\sin^2 \beta$ vernachlässigen kann, was indessen bei genügend kleiner Dämpfungskonstante σ immer erlaubt ist. Für unendlich kleine sowie für unendlich große Wellenlängen ist der Lichtdruck Null; im ersten Falle verhält er sich wie λ^2 , im zweiten wie $1/\lambda^4$; der Maximalwert beträgt $3\lambda_0^2/4\pi$ und ist also von der Dämpfung unabhängig.²⁾

Die pro cm^3 in der auffallenden Welle enthaltene Energie ist gleich dem halben Amplitudenquadrat; nennen wir weiter

1) Ist die Amplitude der einfallenden Welle A statt 1, so sind die rechten Seiten von (89), (89') und (89'') noch mit A^2 zu multiplizieren.

2) Die ponderomotorische Wirkung von Wellen verschiedener Natur auf Resonatoren wurde besonders eingehend experimentell untersucht von P. Lebedew, Wied. Ann. 52. p. 621. 1894; 59. p. 116. 1896; 62. p. 158. 1897. Den im obigen § 9 zugrunde gelegten Verhältnisse entsprechen indessen nur die in der letzten Abhandlung p. 168 angeführten Versuche.

noch die zum Wellenlängenbereich $d\lambda$ gehörige auffallende Energie $S(\lambda) d\lambda$, so bekommen wir für den von dieser Strahlung herrührenden Teil des Lichtdruckes mit Rücksicht auf Anm. 1 der vorigen Seite den Wert

$$\frac{3}{2\pi} \frac{S(\lambda)}{c} \lambda^2 \sin^2 \beta d\lambda.$$

Für den ganzen auf dem Dipol lastenden Druck folgt also:

$$(90) \quad M(\mathfrak{U}) = \frac{3}{2\pi c} \int_0^\infty S(\lambda) \lambda^2 \sin^2 \beta d\lambda.$$

Der Dipol schwingt indessen nur wesentlich mit für Strahlen, deren Wellenlänge nahe gleich λ_0 ist, wir dürfen also für $\lambda^2 S(\lambda)$ den Wert $\lambda_0^2 S(\lambda_0)$ substituieren und vor das Integralzeichen ziehen. Weiterhin ergibt sich aus (85) näherungsweise unter Berücksichtigung der Kleinheit der Dämpfungskonstante σ

$$d\lambda = -\frac{\sigma \lambda_0}{2\pi} \frac{d\beta}{\sin^2 \beta},$$

während die Integration nach der Variablen β von π bis 0 auszudehnen ist. Wir erhalten also schließlich

$$(90') \quad M(\mathfrak{U}) = \frac{3\sigma}{4\pi c} \lambda_0^3 S(\lambda_0).$$

Wir wollen jetzt die Eigenwellenlänge unseres Dipols zu $\lambda_0 = 600 \mu\mu$ annehmen und wollen die Kraft berechnen, welche an der Erdoberfläche infolge der Sonnenstrahlung auf ihm lastet. Identifizieren wir die Sonne mit einem vollkommen schwarzen Körper von der Temperatur 7000°C. absolut, so wird nach dem Planckschen Strahlungsgesetz

$$S(\lambda_0) = 1,3 \cdot 10^{11} \frac{\text{erg}}{\text{sec} \cdot \text{cm}^2}.$$

Es erübrigt noch, auch für σ eine Annahme zu machen. Wir wählen den schon außerordentlich kleinen Wert

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-8},$$

der der Dämpfung eines gewöhnlichen Elektrons entspricht und z. B. noch Interferenzen bei 50 cm Gangunterschied ohne weiteres zulassen würde. Aus (90') folgt dann:

$$M(\mathfrak{U}) = 1,1 \cdot 10^{-20} \text{ dyne}.$$

Berechnet man andererseits die Kraft, womit z. B. ein Wasserstoffmolekül von der Erde angezogen wird, so findet man, da die Anzahl Moleküle in 1 cm^3 bei 0° und Atmosphärendruck gleich $2,8 \cdot 10^{19}$ ist für die Gravitationswirkung G der Erde, den Wert:

$$G = 0,32 \cdot 10^{-20} \text{ dyne.}$$

Der Lichtdruck ist also für einen Dipol abnorm groß, wie der Vergleich mit den numerischen Resultaten der folgenden Paragraphen besonders deutlich zeigt.

Drittes Kapitel.

Näherungsformeln und numerische Resultate für den Lichtdruck.

§ 10. Vorbemerkungen.

Die Formeln (63), (63') oder auch (66), (66') des § 9 lösen mathematisch gesprochen das Problem der Bestimmung des Lichtdruckes für Kugeln aus beliebigem Material. Will man indessen ein Bild des wirklichen Vorganges gewinnen, so hat an dieser Stelle erst die Diskussion der Formeln einzusetzen, welche vom physikalischen Standpunkt aus als Hauptsache zu betrachten ist und ziemlich verwinkelte Zahlenrechnungen erfordert. In den ersten drei folgenden Paragraphen werden wir drei verschiedene Fälle getrennt behandeln: in § 11 die vollkommen reflektierenden, in § 12 die dielektrischen nicht absorbierenden und in § 13 solche Kugeln, bei denen dem Material (in der üblichen Bezeichnungsweise) ein komplexer Brechungsexponent zukommt, die sich also dem Licht gegenüber wie Metalle verhalten. Die Diskussion werden wir durchführen und durch Zeichnungen erläutern, indem wir für Kugeln, die klein sind, im Vergleich mit der Wellenlänge des auftreffenden Lichtes eine Entwicklung nach Potenzen des Verhältnisses Durchmesser der Kugel durch Wellenlänge ansetzen, dagegen für Kugeln, die mit der Wellenlänge vergleichbar werden, die Formel (66) numerisch behandeln. Sobald indessen das oben erwähnte Verhältnis mit 1 vergleichbar wird, fängt die numerische Rechnung an praktisch undurchführbar zu werden, da man dann schon fünf Glieder der Reihe (66) mitnehmen muß, um eine genügende Näherung zu bekommen. Man

überzeugt sich andererseits leicht, daß die zugrunde gelegte Reihe für *alle* Werte des Verhältnisses Radius durch Wellenlänge konvergiert. Man wird demnach darauf ausgehen, dieselbe so umzuformen, daß die neue Form brauchbar wird für große Werte dieses Verhältnisses, welches in den Funktionen als Argument auftritt.

Die schlechte Konvergenz rührt, wie man ohne weiteres sieht, davon her, daß die in den einzelnen Termen der Reihe auftretenden Zylinderfunktionen bei großen (der kleinen Wellenlänge entsprechenden) Werten des Argumentes mit steigendem Index nur äußerst langsam abnehmen, so lange wenigstens, wie dieser kleiner als das Argument ist. Durch diese Bemerkung wird man also auf den Versuch geführt, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen zu konstruieren, die bei beliebig veränderlichem Index dieselben für große Werte des Argumentes ersetzen können. Solche Näherungsdarstellungen habe ich an an anderer Stelle¹⁾ abgeleitet, und es zeigt sich, daß es tatsächlich mit ihrer Hilfe gelingt, von der genauen Formel (66) aus den Übergang zu kleinen Wellen zu machen. Näher ausgeführt wird dieses in den Paragraphen 14 und 15 dieses Kapitels.

In § 16 schließlich werden die Besonderheiten der Lichtdruckkurve in Zusammenhang gebracht mit der Existenz von Eigenschwingungen.

§ 11. Die vollkommen reflektierende Kugel.

Wie schon am Ende des § 9 hervorgehoben wurde, nehmen die Größen α der Reihe (63), bzw. (66) in diesem Falle die besonders einfache Gestalt an:

$$(91) \quad \alpha_n^1 = \frac{\psi_n'(ka)}{\zeta_n'(ka)}, \quad \alpha_n^2 = \frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)}.$$

Zur Abkürzung werden wir im folgenden für das Argument $ka = 2\pi(a/\lambda)$ den Buchstaben ϱ benutzen und wollen nun zunächst eine Näherungsformel ableiten für das p. 92 definierte Verhältnis $M(\mathfrak{S})/W$ bei kleinen Werten von ϱ . Es empfiehlt sich sowohl hierfür wie für die numerische Rechnung die Größen α_n^1 und α_n^2 in Reelles und Imaginäres zu trennen und dann für $M(\mathfrak{S})/W$ die Darstellung (66') zu benutzen. Die

1) Vgl. die demnächst in den Math. Ann. erscheinende Abhandlung.

Trennung gelingt sofort unter Benutzung der Zusammenhangsformeln (14'). Man findet ohne weiteres aus (91) für die durch (59) definierten Größen a_n^1 , b_n^1 , a_n^2 und b_n^2

$$(92) \quad \begin{cases} a_n^1 = \frac{Y_n^2}{1 + Y_n^2}, & a_n^2 = \frac{Z_n^2}{1 + Z_n^2}, \\ b_n^1 = -\frac{Y_n}{1 + Y_n^2}, & b_n^2 = -\frac{Z_n}{1 + Z_n^2}, \end{cases}$$

wenn man abkürzend setzt:

$$(93) \quad Y_n = \frac{\psi_n'(\varrho)}{\chi_n'(\varrho)}, \quad Z_n = \frac{\psi_n(\varrho)}{\chi_n(\varrho)}.$$

Für kleine Werte von ϱ gilt nun nach § 3 in erster Näherung:

$$\begin{aligned} \psi_1(\varrho) &= \frac{\varrho^2}{3}, & \chi_1(\varrho) &= \frac{1}{\varrho}, \\ \psi_1'(\varrho) &= \frac{2\varrho}{3}, & \chi_1'(\varrho) &= -\frac{1}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

so daß man bekommt:

$$Y_1 = -\frac{2}{3}\varrho^3, \quad Z_1 = \frac{1}{3}\varrho^3,$$

und damit in derselben Näherung:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \frac{4}{9}\varrho^6, & b_1^1 &= \frac{2}{3}\varrho^3, \\ a_1^2 &= \frac{1}{9}\varrho^6, & b_1^2 &= -\frac{1}{3}\varrho^3. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in den Ausdruck (66') für $M(\mathfrak{R})/W$ ein, den wir unter Einführung von ϱ schreiben wollen:

$$(94) \quad \frac{M(\mathfrak{R})}{W} = \frac{4}{\varrho^2} [S_1 - S_2 - S_3]$$

mit

$$(95) \quad \begin{cases} S_1 = \Re \sum_1^\infty \frac{2n+1}{2} (\alpha_n^1 + \alpha_n^2) = \sum_1^\infty \frac{2n+1}{2} (a_n^1 + a_n^2), \\ S_2 = \Re \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} \bar{\alpha}_n^1 \alpha_n^2 = \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^1 a_n^2 + b_n^1 b_n^2), \\ S_3 = \Re \sum_1^\infty \frac{n(n+1)}{n+1} (\bar{\alpha}_n^1 \alpha_{n+1}^1 + \bar{\alpha}_n^1 \alpha_{n+1}^2) \\ \quad = \sum_1^\infty \frac{n(n+2)}{n+1} (a_n^1 a_{n+1}^1 + b_n^1 b_{n+1}^1 + a_n^2 a_{n+1}^2 + b_n^2 b_{n+1}^2). \end{cases}$$

so erhält man:

$$(96) \quad \frac{M(\mathcal{Q})}{W} = \frac{4}{\varrho^3} \left[\frac{5}{6} \varrho^6 + \frac{2}{6} \varrho^6 \right] = \frac{14}{3} \varrho^4,$$

indem die dritte Summe S_3 in dieser Näherung keinen Beitrag zum Resultat liefert. Dieselbe Näherungsformel wurde schon von Schwarzschild angegeben¹⁾; es hat gar keine Schwierigkeiten, sie durch weitere Potenzen von ϱ zu vervollständigen, indem man mehrere Glieder der Summen S und der Reihen für ψ_n und χ_n mitnimmt (allerdings ist die Rechnung etwas umständlich); ich finde so:

$$(97) \quad \frac{M(\mathcal{Q})}{W} = \frac{14}{3} \varrho^4 \left(1 + \frac{1}{21} \varrho^2 - \frac{1409}{8820} \varrho^4 \dots \right).$$

Die weiteren Glieder der Reihe haben indessen für die Rechnung nur eine ganz untergeordnete Bedeutung, weil die Zahlenkoeffizienten so langsam abnehmen, daß z. B. für $\varrho = 1$ das dritte Glied schon größer ist wie das zweite. Im übrigen kann man dieses Verhalten leicht ohne Ausrechnung vorher-sagen. Nach § 3 gilt nämlich:

$$\zeta_1(\varrho) = \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} (i - \varrho),$$

der Nenner von α_1^2 wird also Null für $\varrho = i$, was, da $\psi_1(i)$ endlich ist, zur Folge hat, daß die Reihenentwicklung für α_1^1 nur bis $\varrho = 1$ und damit die Reihe (97) höchstens bis $\varrho = 1$ konvergieren kann.

Für die weitere Diskussion ist man deshalb auf die numerische Rechnung angewiesen. Zu diesem Zwecke wurden zunächst die Funktionen $\psi_n(\varrho)$ und $\chi_n(\varrho)$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ und Werte von ϱ zwischen 0 und 12 ausgerechnet, wobei für kleine Werte von ϱ die unendlichen nach Potenzen von ϱ fortschreitenden Reihen, für größere dagegen die endlichen nach Potenzen von $1/\varrho$ fortschreitenden Ausdrücken des § 2 benutzt wurden. Das Resultat dieser Rechnung wird veranschaulicht durch die beigegebenen Figg. 2 und 3, in denen $\psi_n(\varrho)$ und $\chi_n(\varrho)$ als Funktionen von ϱ aufgetragen sind. Man sieht, wie $\psi_n(\varrho)$ sich mit wachsendem n für kleine Werte von ϱ

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. **31**. p. 293. 1901.

immer inniger an die Abszissenachse anschmiegt, während $\chi_n(\varrho)$ mit wachsendem n für $\varrho = 0$ immer schneller ins Unendliche steigt. Für größere Werte von ϱ unterscheiden sich die Funktionen ψ_n und χ_n qualitativ nicht mehr und werden

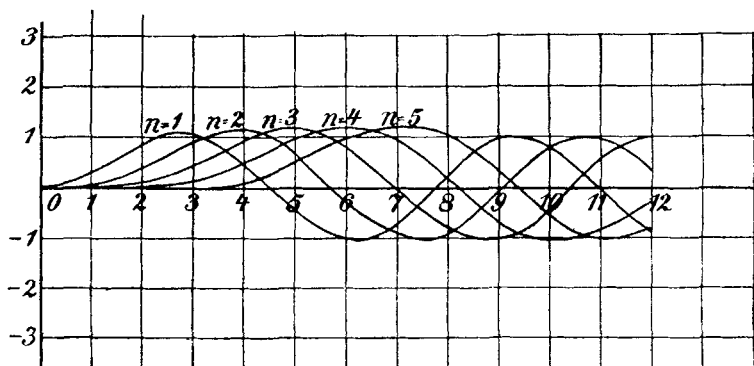


Fig. 2.

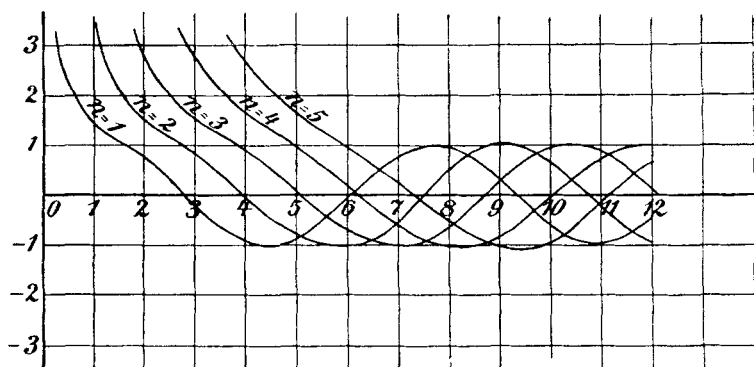


Fig. 3.

mit wachsendem ϱ immer mehr den gewöhnlichen periodischen Funktionen ähnlich. In den Figg. 4 und 5 sind weiterhin noch die Funktionen $\psi'_n(\varrho)$ und $\chi'_n(\varrho)$ eingetragen, wie sie aus den Werten von $\psi_n(\varrho)$ und $\chi_n(\varrho)$ durch Anwendung der Formeln (15) erhalten werden. Sie unterscheiden sich, wie man sieht, nicht wesentlich von den undifferentiierten Funktionen, wenn man das Verhalten der $\chi'_n(\varrho)$ für kleine Werte von ϱ ausnimmt.

Letztere zeigen hier ein eigenartiges einmaliges Auf- und Abwogen, das mit einer in Fig. 3 leicht bemerkbaren Ab- und Zunahme der Neigung korrespondiert. Unter Benutzung der so gefundenen Werte wurden nun die Größen a_n^1 , a_n^2 , b_n^1 , b_n^2

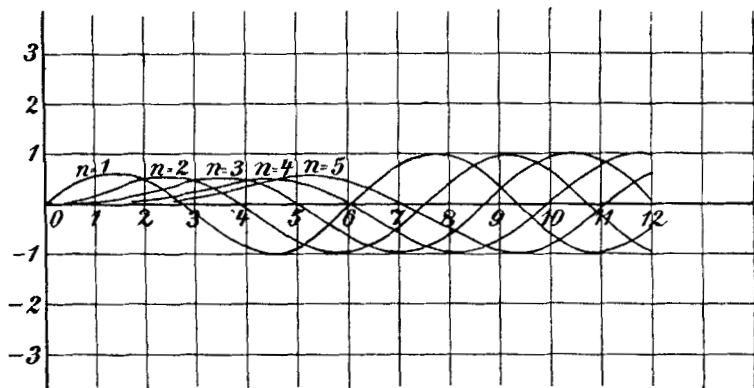


Fig. 4.

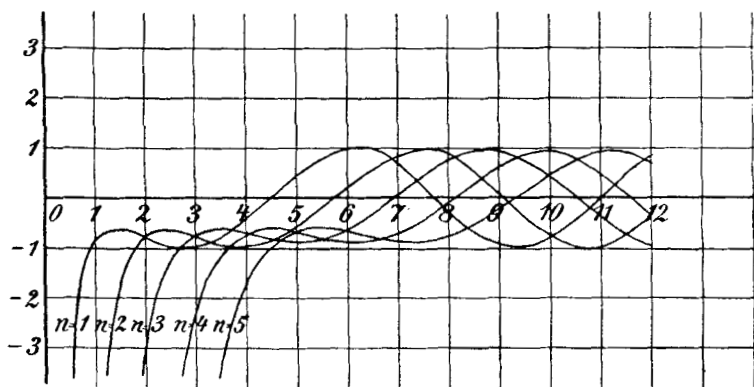


Fig. 5.

nach (92) berechnet, die dann durch Einsetzen in (94) und (95) die gesuchte Größe $M(\mathfrak{U})/W$ lieferten.

In Fig. 6 ist $M(\mathfrak{U})/W$ zur Abszisse $\varrho = 2\pi a/\lambda$ als ausgezogene Kurve eingetragen. Die eingezeichneten Kreuze bedeuten dabei die berechneten Punkte, während die punktierte Kurve den Verlauf der ersten Näherung (96) darstellt. Zum

Vergleich wurde in derselben Figur die von Schwarzschild erhaltene Kurve gestrichelt eingetragen. Sie stimmt, wie man sieht, in ihrem wesentlichen Verhalten mit der von uns berechneten überein, insbesondere ist das Maximum weder in Höhe noch in Lage von dem von Schwarzschild gefundenen verschieden. Für größere Werte von ϱ weichen indessen die beiden Kurven voneinander ab. In der Grenze für $\varrho = \infty$, d. h. also für Kugeln, die groß sind im Vergleich mit der Wellenlänge, soll sich die Kurve für $M(\varrho)/W$ der in der Höhe 1 mit

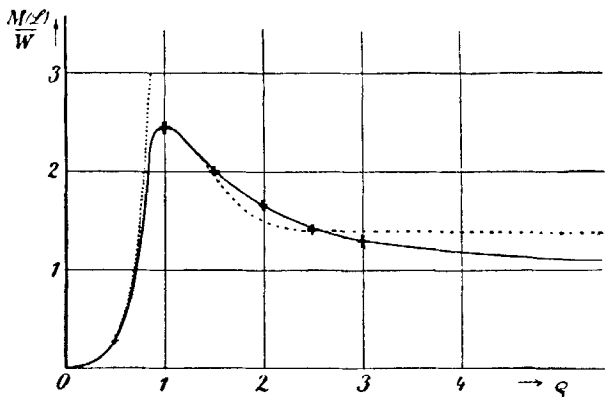


Fig. 6.

der Abszissenachse parallel laufenden Gerade asymptotisch anschmiegen, wie schon Schwarzschild fand durch die Berechnung des Lichtdruckes auf Grund der in diesem Falle ausreichenden Gesetze der geometrischen Optik, und wie wir in § 15 aus der allgemeinen gültigen Reihe (66') nachweisen werden. Währenddem nun die von uns vorgeschlagene Kurve diese Annäherung glatt vollbringt, scheint die Schwarzschild'sche noch längere Zeit mit der Asymptote parallel zu verlaufen (vgl. Fig. 6). Die unmittelbare Veranlassung für diese Abweichung ist der Unterschied der für $M(\varrho)/W$ im Punkte $\varrho=2$ gefundenen Werte (1,67 bei uns gegen 1,31 bei Schwarzschild). In Anbetracht des oben Gesagten über den Anschluß an die Asymptote und mit Berücksichtigung der Werte für $M(\varrho)/W$ in den Punkten $\varrho=2,5$ und $\varrho=3$, die sich besser in die ausgezogene wie in die gestrichelte Kurve einordnen, scheint uns,

daß die erstere korrekt ist, und daß bei Schwarzschild im Punkte $\varrho = 2$ ein Rechenfehler vorliegt. Das Endergebnis, das Schwarzschild auf p. 333 gesperrt gedruckt hat, finden wir nach dem Vorigen also vollständig wieder bis auf die eine Bemerkung, daß in der Nähe von $2 a/\lambda = \frac{2}{3}$ die Kurve „merkwürdig rapide anwächst“. Übrigens zeigt der genauere Vergleich, daß die Bequemlichkeit und damit auch die Sicherheit der Zahlenrechnungen bei unserem Verfahren erheblich größer ist wie bei Schwarzschild.

Für die Arrheniusschen Theorien ist es wesentlich, daß der Strahlungsdruck hochtemperierter Weltkörper unter geeigneten Umständen ihre Gravitationswirkung überwiegen kann, Wir wollen deshalb noch den mittleren Strahlungsdruck $M(\mathfrak{L})$ vergleichen mit der Newtonschen Anziehungskraft G . Wir fanden früher (Gleichung (64))

$$W = \pi a^2 \frac{S}{c},$$

wenn S die pro Zeiteinheit auf die Flächeneinheit auffallende Energie und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Spezialisieren wir nun unsere Überlegung für die Sonnenstrahlung und verstehen weiterhin unter S die Solarkonstante, an der Erdoberfläche gemessen, so gilt für ein Teilchen, das sich im Abstände d von der Sonne befindet

$$(98) \quad W = \pi a^2 \frac{S}{c} \frac{D^2}{d^2},$$

wenn der Radius der Erdbahn gleich D gesetzt wird.

Ist andererseits das spezifische Gewicht (d. h. das g -fache der spezifischen Masse oder Dichte) des Teilchenmaterials s , und nennen wir den Radius der Erdkugel r , während die Massen von Sonne und Erde bzw. mit M und m bezeichnet werden, so gilt

$$(99) \quad G = \frac{4}{3} \pi a^3 s \frac{M}{m} \frac{r^2}{d^2}$$

für die Gravitationswirkung der Sonne auf dasselbe Teilchen im Abstände d von der Sonne.

Setzen wir schließlich noch

$$(100) \quad \frac{M(\mathfrak{L})}{W} = \varrho \varphi(\varrho) \quad \left(\varrho = 2 \pi \frac{a}{\lambda} \right),$$

so daß die Funktion $\varrho \varphi(\varrho)$ den Ordinaten der Kurve in Fig. 6 oder der entsprechenden Kurven der folgenden Paragraphen gleichkommt, so erhalten wir aus (98), (99) und (100) für das Verhältnis des Lichtdruckes zur Gravitation:

$$(101) \quad \frac{M(\mathfrak{S})}{G} = \frac{3\pi}{2} \frac{D^2}{r^2} \frac{m}{M} \frac{S}{s e \lambda} \varphi(\varrho),$$

wobei λ die auffallende Wellenlänge ist. Nimmt man die Solarkonstante S zu $2,5 \frac{\text{cal.}}{\text{Min. cm}^2}$ an und denkt sich die ganze Strahlungsenergie der Sonne auf eine mittlere Wellenlänge $\lambda = 600 \mu\mu$ konzentriert, so kann man statt (101) auch schreiben

$$(101') \quad \frac{M(\mathfrak{S})}{G} = 8,0 \varphi(\varrho),$$

wenn überdies $s = 1$ gesetzt wird, wie das für Wasser zutreffen würde. Nach (96) ist bei vollkommen reflektierenden Kugeln $\varrho \varphi(\varrho) = \frac{14}{3} \varrho^4$ für kleine Werte von ϱ , für große Werte von ϱ gilt $\varrho \varphi(\varrho) = 1$; für ganz kleine, sowie für ganz große Kugeln (im Vergleich zur Wellenlänge) verschwindet also das Verhältnis (101'). Für mittlere Größen erreicht dasselbe einen Maximalwert von der Größe 20 bei $\varrho = (2\pi a/\lambda) \cong 1$. Nur ganz unbedeutend abweichende Zahlenwerte finden sich bei Schwarzschild (l. c.), wo auch noch auf Grund der gefundenen Werte für $M(\mathfrak{S})/W$ die der linken Seite von (101') im wesentlichen entsprechende Kurve in einer besonderen Figur dargestellt ist. Dieselbe entspricht der Kurve $v = \infty$ in Fig. 8 des folgenden § 12. Für gewisse Teilchengrößen für die $0,06 \mu < 2a < 1,5 \mu$ überwiegt der Lichtdruck der Sonne über ihre Gravitation tatsächlich, und zwar wie (101) oder (101') zeigt, für jede beliebige Entfernung, da das Verhältnis $M(\mathfrak{S})/G$ unabhängig ist von dem Abstand zwischen Teilchen und Sonne.

Anmerkung: So wichtig der Lichtdruck für die kleinen Teilchen ist, so unmaßgeblich ist sein Einfluß auf die Bewegung der großen Himmelskörper. Denkt man sich unseren Mond z. B. vollkommen absorbierend für die auffallenden Sonnenstrahlen, so erleidet er einen Lichtdruck von $6 \cdot 10^6$ kg. Diese für unsere irdischen Verhältnisse immerhin ziemlich große Zahl verschwindet ganz und gar gegenüber der Kraft, mit der z. B. Jupiter als gravitierender Weltkörper den Mond anzieht; dieselbe beträgt nämlich $2 \cdot 10^{15}$ kg, also $3 \cdot 10^8$ mal soviel wie der Lichtdruck der Sonne. Sogar die Anziehung von Neptun berechnet sich immer noch zu $3 \cdot 10^{12}$ kg, d. h. auch noch $5 \cdot 10^5$ mal größer wie der Lichtdruck der Sonne.

§ 12. Die dielektrische Kugel.

In diesem Paragraphen wollen wir den Verlauf der Kurve $M(\mathfrak{L})/W$ näher diskutieren für den Fall, daß die Eigenschaften des Kugelmateri als durch eine reelle Dielektrizitätskonstante ϵ beschrieben werden können, so daß der betrachtete Körper das Licht zwar durchlassen und zerstreuen, aber nicht absorbieren kann ($\sigma = 0$). Auch in diesem Falle ist es vorteilhaft, die Größen α_n^1 und α_n^2 in Reelles und Imaginäres zu trennen und mit Formel (63') bzw. (66') zu rechnen. Die Trennung geschieht wieder leicht unter Benutzung von (14'), und man erhält unter Beachtung der Definitionsformeln (61) und (62) das Resultat: Definiert man die reellen Größen Y_n und Z_n durch die Formeln:

$$(102) \quad \begin{cases} Y_n = \frac{\psi_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \nu \psi_n'(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)}{\chi_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \nu \chi_n(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)}, \\ Z_n = \frac{\nu \psi_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \psi_n'(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)}{\nu \chi_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \chi_n'(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)}, \end{cases}$$

wobei ebenso wie im vorigen Paragraphen $\varrho = 2\pi a/\lambda$ und weiterhin $\nu = \sqrt{\epsilon}$ gesetzt ist, so ist in formaler Übereinstimmung mit dem Fall der vollkommen reflektierenden Kugel:

$$(103) \quad \begin{cases} a_n^1 = \frac{Y_n^2}{1 + Y_n^2}, & b_n^1 = -\frac{Y_n}{1 + Y_n^2}, \\ a_n^2 = \frac{Z_n^2}{1 + Z_n^2}, & b_n^2 = -\frac{Z_n}{1 + Z_n^2}. \end{cases}$$

Sind die Größen $a_n^1, a_n^2, b_n^1, b_n^2$ berechnet, so ergibt sich das Verhältnis $M(\mathfrak{L})/W$ aus (94) und (95) des vorigen Paragraphen.

Die Abkürzung ν stimmt bekanntlich mit dem Brechungsexponenten überein; ν ist also keine Konstante, sondern von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung abhängig. Der durch $\nu = \sqrt{\epsilon}$ angedeutete Zusammenhang zwischen Brechungsexponent und Dielektrizitätskonstante ist bekanntlich im allgemeinen nicht erfüllt, dennoch kann man mit Hilfe der Größe ν die elektromagnetischen Vorgänge richtig beschreiben, wenn man ν als neue durch einen Versuch bei der betreffenden Schwingungszahl bestimmte Konstante einführt.

Wir heben noch die beiden Spezialfälle $\nu=1$ und $\nu=\infty$ hervor. Im ersten ist nach (102) sowohl Y_n wie Z_n und damit auch der Lichtdruck selbst gleich Null, ein sehr selbstverständliches Resultat, da die Annahme $\nu=1$ gleichbedeutend

ist mit der Aussage, daß die betrachtete Kugel nur reinen Äther enthält; sie kann also keine Störung in den auftreffenden Wellen zustande bringen und erleidet deshalb auch keinen Druck.

Der zweite Grenzfall $\nu = \infty$ führt auf

$$Y_n = \frac{\psi_n'(q)}{\chi_n'(q)}, \quad Z_n = \frac{\psi_n(q)}{\chi_n(q)},$$

Formeln, die mit den für die vollkommen reflektierenden Kugeln gültigen übereinstimmen. Statt die vollkommene Reflexion als Grenzfall für unendlich gut leitendes Material aufzufassen, kann man diesen Zustand also gleich gut durch einen unendlich großen Brechungsexponenten hervorgerufen denken, ohne daß man nötig hätte, dem Material noch obendrein ein Absorptionsvermögen zuzuschreiben, wie übrigens bei der Behandlung von elektrostatischen Aufgaben schon vielfach in der Literatur bemerkt worden ist. Die Frage, ob mit großem ν nicht stets auch ein großes Absorptionsvermögen verbunden ist, wird natürlich durch das Vorhergehende nicht berührt.

Es soll nun zunächst eine Gleichung (96) entsprechende Näherungsformel für $M(\mathfrak{L})/W$ abgeleitet werden; dabei wollen wir voraussetzen, daß sowohl q wie νq klein gegen 1 sind. Aus den im vorigen § 11 angegebenen Näherungen für ψ_1 und χ_1 folgt nach (102):

$$Y_1 = \frac{2}{3} q^3 \frac{1 - \nu^2}{2 + \nu^2};$$

die Größe Z_1 wird proportional q^5 und verschwindet also in erster Näherung. Hieraus ersieht man, daß von den in (94) auftretenden Summen S nur S_1 und darin nur das erste Glied berücksichtigt zu werden braucht; so findet man:

$$(104) \quad \frac{M(\mathfrak{L})}{W} = \frac{8}{3} \left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 1} \right)^2 q^4.$$

Der Faktor von q^4 steigt von dem Werte Null bei $\nu = 1$ stetig zum Werte $\frac{8}{3}$ bei $\nu = \infty$. Dieser letzte Wert steht in scheinbarem Widerspruch mit dem für vollkommen reflektierende Kugeln erhaltenen (der $\frac{1}{3}$ betrug). Man muß indessen bedenken, daß (104) nur so lange Gültigkeit beansprucht, wie das Produkt νq als klein gegen 1 vorausgesetzt wird. In zweiter Näherung wäre die rechte Seite von (104) noch mit

$$1 - \frac{q^2}{15} \frac{\nu^6 - 29\nu^4 + 34\nu^2 + 120}{(\nu^2 + 2)(2\nu^2 + 3)}$$

zu multiplizieren.

Um den weiteren Verlauf der Kurve für $M(\varrho)/W$ zu erhalten, ist man wieder auf die numerische Rechnung angewiesen. Ich habe die Rechnung genauer durchgeführt für die speziellen Fälle $\nu = 2$, $\nu = 1,5$ und $\nu = 1,33$; diese Kurven nebst der schon bekannten für vollkommen reflektierende Kugeln ($\nu = \infty$) zusammen mit der Näherung (104) für kleine Werte von ϱ und der Kenntnis der Asymptoten für $\varrho = \infty$ (vgl. § 15) ermöglichen es, ein Bild zu gewinnen über die Abhängigkeit des Lichtdruckes von den verschiedenen Umständen. Das Nähere möge an Hand der folgenden Fig. 7 erläutert werden, in welcher wieder $M(\varrho)/W$ als Funktion von $\varrho = 2\pi a/\lambda$

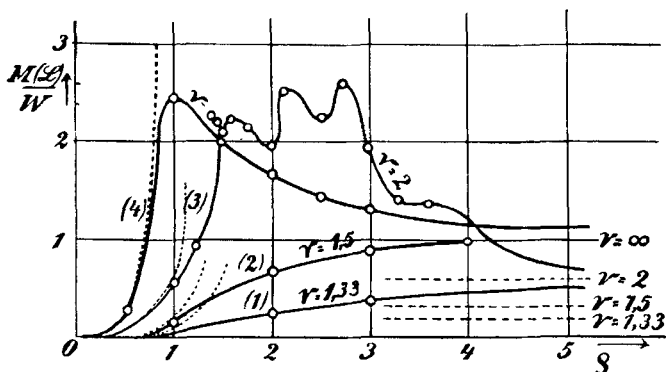


Fig. 7.

eingetragen wurde. Die Abszissenachse entspricht dem einen Grenzfall $\nu = 1$; Kurve (4), welche auch schon Fig. 6 gezeichnet wurde, dem anderen Grenzfall $\nu = \infty$. Kurve (1) gehört zu einem Wassertropfen mit $\nu = 1,33$, während Kurve (2) unter der Annahme $\nu = 1,5$ berechnet wurde. Beide Kurven verlaufen viel flacher wie die für vollkommene Reflexion gefundene, wie auch schon die in der Figur punktiert gezeichneten ersten Näherungen bei $\varrho = 0$ erwarten lassen. Andere Besonderheiten sind hier noch nicht erkenntlich. Beim Übergang zu $\nu = 2$ indessen tritt eine eigenartige Wellung der Kurve auf. Der Lichtdruck erreicht hier ein Hauptmaximum von der Größe $M(\varrho)/W = 2,6$, der ganze Bereich der Maxima ist im Vergleich mit der Kurve für $\nu = \infty$ nach größeren Werten von ϱ hin

verschoben.¹⁾ Natürlich sind solche Wellungen andeutungsweise schon bei den kleineren ν vorhanden, ihre geringere Stärke liegt an der größeren Dämpfung der zugehörigen in § 5 behandelten Eigenschwingungen (vgl. § 16). Für $\varrho = \infty$ verlaufen die Kurven der ϱ -Achse parallel in Höhen, die nach der in § 15 angegebenen Methode bestimmt wurden. Mit zunehmendem ν und entsprechend abnehmender Dämpfung der Eigenschwingungen werden die sekundären Maxima immer ausgeprägter und wandern zugleich nach dem Nullpunkt hin, so daß für $\nu = \infty$ der Nullpunkt selbst eine Häufungsstelle wird.

Um hier ebenso wie bei den vollkommen reflektierenden Kugeln den Vergleich des Lichtdruckes mit der Gravitationswirkung auszuführen, wurde in Fig. 8 noch die Größe $\varphi(\varrho)$

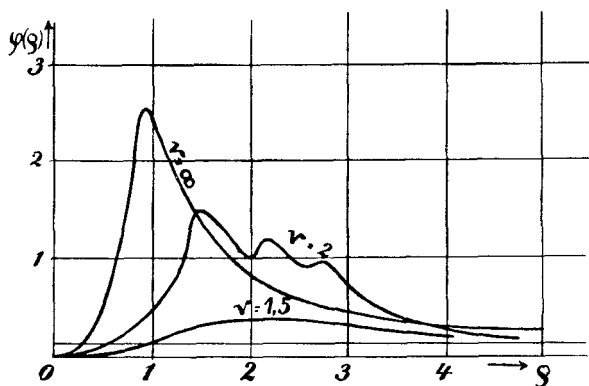


Fig. 8.

der Gleichung (101') aufgetragen, unter Zugrundelegung der Werte $M(\xi)/W = \rho \varphi(\varrho)$ nach Fig. 7. Die drei Kurven entsprechen den Werten $\nu = \infty$, $\nu = 2$ und $\nu = 1,5$; die horizontale Gerade gibt den Wert von $\varphi(\varrho)$ an, für den Gravitation und Lichtdruck gerade gleich sind bei Körpern mit dem spezifischen

1) In der Diss. hatte ich für $\nu = 2$ den Lichtdruck gerechnet bei $\varrho = 0,5, 1, 1,25, 2, 2,5$ und 3 und hatte diese Punkte durch eine glatte Kurve verbunden. Eine briefliche Bemerkung des Hrn. Cl. Schaefer, betreffend den in § 16 behandelten Zusammenhang des Lichtdruckes mit den Eigenschwingungen, veranlaßte mich, die Rechnung für einige Zwischenpunkte durchzuführen, wobei sich dann die obigen Wellungen ergaben.

Gewicht 1. Der maximale Lichtdruck selbst ist bei $\nu = 2$ noch etwas größer als bei $\nu = \infty$, das Verhältnis $M(\mathfrak{Q})/G$ im Gegenteil erreicht bei $\nu = 2$ einen Maximalwert, der nur den 0,66^{ten} Teil des entsprechenden Verhältnisses bei $\nu = \infty$ ist. Einen Überblick über die Verhältnisse liefert die folgende Zusammenstellung. Die erste Spalte enthält den Brechungsexponenten ν , die zweite das maximale Verhältnis von Lichtdruck zu Gravitation $(M(\mathfrak{Q})/G)_{\max.}$, die dritte und vierte die ungefähren Grenzen ϱ_0 und ϱ_1 ($\varrho = 2\pi a/\lambda$), zwischen welchen der Lichtdruck die Gravitation überwiegt.

ν	$\frac{M(\mathfrak{Q})}{G} \Big)_{\max.}$	ϱ_0	ϱ_1
∞	20	0,3	8
2,0	13	0,6	5
1,5	3	0,8	—

Bei $\nu = 1,33$ (Wasser) ist schon ungefähr die Grenze erreicht, für welche auch der maximale Lichtdruck durch die Gravitation im Gleichgewicht gehalten wird; für noch kleinere ν überwiegt letztere.

§ 13. Die absorbierende Kugel.

Setzt man, wie das für Lichtwellen bekanntlich gestattet ist, die Permeabilität $\mu = 1$ und definiert den „komplexen“ Brechungsexponenten durch die Formel (vgl. (36))

$$(105) \quad N = \sqrt{\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}},$$

so ergeben die Gleichungen (61) und (62) die Werte:

$$(106) \quad \begin{cases} \alpha_n^1 = \frac{\psi_n(\varrho) \psi_n'(\mathfrak{N} \varrho) - \mathfrak{N} \psi_n'(\varrho) \psi_n(\mathfrak{N} \varrho)}{\zeta_n(\varrho) \psi_n'(\mathfrak{N} \varrho) - \mathfrak{N} \zeta_n'(\varrho) \psi_n(\mathfrak{N} \varrho)}, \\ \alpha_n^2 = \frac{\mathfrak{N} \psi_n(\varrho) \psi_n'(\mathfrak{N} \varrho) - \psi_n'(\varrho) \psi_n(\mathfrak{N} \varrho)}{\mathfrak{N} \zeta_n(\varrho) \psi_n'(\mathfrak{N} \varrho) - \zeta_n'(\varrho) \psi_n(\mathfrak{N} \varrho)}. \end{cases}$$

Da jetzt die Argumente unserer Funktionen teilweise selbst komplex sind, empfiehlt es sich nicht mehr, die Trennung in Reelles und Imaginäres auszuführen, und man rechnet besser von vornherein mit der Reihe (66). Wir wollen diese zunächst wieder dazu benutzen, eine erste Näherung zu erhalten. Be-

rücksichtigt man nur die niedrigste Potenz von ϱ , so bekommt man

$$\alpha_1^1 = -i \frac{2}{3} \varrho^3 \frac{1 - N^2}{2 + N^2},$$

während α_1^2 mit ϱ^5 proportional wird. Man braucht deshalb von den drei Summen (66) in erster Näherung nur die erste und von dieser nur das erste Glied zu berücksichtigen; so erhält man:

$$(107) \quad \frac{M(\mathfrak{L})}{W} = 4 \varrho \Re \left[i \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right].$$

Setzt man dann in die Klammer den Wert N aus (105) ein und trennt Reelles und Imaginäres, so bekommt man:

$$i \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} = i \frac{(\varepsilon - 1) - i \frac{\sigma}{\omega}}{(\varepsilon + 2) - i \frac{\sigma}{\omega}} = \frac{3 \frac{\sigma}{\omega}}{(\varepsilon + 2)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} + i \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2) - \frac{\sigma^2}{\omega^2}}{(\varepsilon + 2)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}$$

und demnach

$$(107') \quad \frac{M(\mathfrak{L})}{W} = 12 \frac{\frac{\sigma}{\omega}}{(\varepsilon + 2)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \varrho,$$

wo man noch mittels (36) ε und σ durch ν und κ ersetzen kann.

Vergleicht man (107') mit den für vollkommen reflektierende und für dielektrische Kugeln erhaltenen Näherungsformeln, so sieht man, daß die absorbierenden Kugeln sich für kleine Werte von ϱ ganz anders verhalten wie jene. Während nämlich früher $M(\mathfrak{L})/W$ mit ϱ^4 proportional und demnach für kleine Werte von ϱ äußerst klein war, hat der Lichtdruck jetzt noch für ganz kleine Kugeln nach (107') einen im Vergleich mit jenem erheblichen Wert, sobald das Absorptionsvermögen (in der Formel durch die Leitfähigkeit σ gemessen) nicht einen extrem kleinen oder großen Wert hat. Da weiterhin W proportional mit a^2 und die Gravitationswirkung proportional mit a^3 ist, so erhält man für das Verhältnis von Lichtdruck zu Gravitation bei ganz kleinen vollkommen reflektierenden oder dielektrischen Kugeln nach (96) und (104) eine Größe, die proportional mit ϱ^3 ist, so daß die Gravitationswirkung für ganz kleine Kugeln den Lichtdruck überwiegt. Vgl. Fig. 8 des vorigen § 12.) Für absorbierende Kugeln dagegen ist sowohl der Lichtdruck wie die Gravitation (vgl.

(107')) mit ρ^3 proportional, ihr Verhältnis strebt also für kleine Kugeln einer endlichen Grenze zu. Diese Überlegungen sind natürlich in Übereinstimmung mit Formel (101), in der das Verhältnis $M(\mathfrak{L})/G$ proportional $\varphi(\rho)$ angegeben ist.

Bei gewissen mittleren Absorptionsverhältnissen existiert demnach keine untere Grenze für die Größe der Teilchen, die durch den Lichtdruck von der Sonne weggeschleudert werden können. (Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß die Teilchen nicht ein so hohes spezifisches Gewicht besitzen, daß überhaupt bei keiner Größe ein Überwiegen des Lichtdruckes über die Gravitationswirkung stattfindet.)

Um den weiteren Verlauf der Kurve für $M(\mathfrak{L})/W$ wenigstens in einem Falle zu untersuchen, wurde die ziemlich mühsame Rechnung ausgeführt unter der Annahme

$$N = \frac{\pi}{2}(1 - i) = 1,57(1 - i),$$

ein Wert, der bei Metallen leicht vorkommen kann; so hat z. B. Gold bei $\lambda = 450 \mu\mu$ den „Brechungsexponenten“

$$N = 1,72(1 - i).$$

Setzt man den obigen Wert für ν in die Näherungsformel (107) ein, so erhält man

$$\frac{M(\mathfrak{L})}{W} = 1,83 \rho;$$

dieser Formel entspricht die in Fig. 9 gestrichelt gezeichnete Tangente im Nullpunkt. Die weitere Rechnung ergab einen Verlauf, wie er durch die ausgezogene Kurve veranschaulicht wird. Auch in diesem Falle ist also ein Maximum vorhanden, das indessen niedriger ist und flacher verläuft wie das bei der vollkommen reflektierenden Kugel gefundene. Zum Vergleich ist die Kurve für letzteren Fall in die Fig. 9 punktiert mit eingezeichnet.

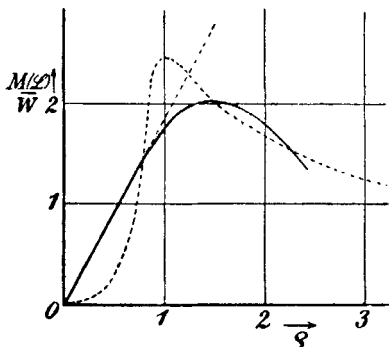


Fig. 9.

§ 14. Der Grenzwert des Lichtdruckes für kleine Wellenlängen bei vollkommen reflektierenden Kugeln.

In diesem und dem folgenden Paragraphen wollen wir zeigen, wie man mit Hilfe der in § 10 genannten Näherungsformeln für die Besselschen Funktionen auch den gewöhnlichen optischen Fall der kleinen Wellenlänge auf Grund der in Strenge gültigen Gleichungen (63) oder (63') erledigen kann. Für die vollkommen reflektierenden Kugeln gestaltet sich die Rechnung äußerst einfach, wir wollen diesen Fall zunächst betrachten.

Nach (67) gelten für die beiden in den Reihen für $M(\mathfrak{S})/W$ auftretenden Größen α_n^1 und α_n^2 die Formeln:

$$\alpha_n^1 = \frac{\psi_n'(\varrho)}{\zeta_n'(\varrho)}, \quad \alpha_n^2 = \frac{\psi_n(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)}.$$

Nun ist, wenn die Wellenlänge der auffallenden Strahlung klein ist gegen den Radius der Kugel, $\varrho = 2\pi a/\lambda$ eine große Zahl, die mit abnehmender Wellenlänge oder zunehmenden Dimensionen der Kugel ins Unendliche steigt. Das hat, wie im § 10 bemerkt wurde, und wie übrigens sofort aus den Reihen (12) und (13) ersichtlich ist, zur Folge, daß die Funktionen ψ_n und ζ_n und damit die Größen α_n^1 und α_n^2 für Werte von n , die noch nicht mit ϱ vergleichbar sind, alle von derselben Größenordnung werden. Wie sie sich verhalten, wenn n näher an ϱ heranrückt, wird man schwerlich aus den betreffenden Reihen an sich ansehen können: man hat in der vorhandenen Literatur nur wieder brauchbare Formeln, wenn man so viele Glieder der Reihen für $M(\mathfrak{S})/W$ übersprungen hat, daß der Stellenzeiger n inzwischen groß im Vergleich mit ϱ geworden ist. Dann kann man nämlich die gewöhnlichen Potenzreihen (10) und (11) benutzen, die mit Berücksichtigung der Zusammenhangsformeln (14') für den Fall $n \gg \varrho$ das Resultat ergeben:

$$\alpha_n^1 = i \frac{n+1}{n(2n+1)} \varrho^{2n+1} \frac{2^{2n} I^2(n+1)}{I^2(2n+1)},$$

$$\alpha_n^2 = -i \frac{\varrho^{2n+1}}{2n+1} \frac{2^{2n} I^2(n+1)}{I^2(2n+1)}.$$

(woraus beiläufig die unbedingte Konvergenz der betrachteten Reihen hervorgeht). Die vorhandene Lücke wird nun ausgefüllt durch die in § 10 genannten Formeln, die übrigens auch die obigen Fälle $n \ll \varrho$ und $n \gg \varrho$ als Spezialfälle in sich enthalten.

Es sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem der Index kleiner oder größer wie das Argument ist; beschränken wir uns auf eine erste Näherung, so kann man das Resultat für unsere Funktionen $\psi_n(\varrho)$ und $\zeta_n(\varrho)$ folgendermaßen aussprechen:

Solange $n + \frac{1}{2} < \varrho$ ist, hat man in der Grenze für unendlich große Werte von ϱ :

$$(108) \quad \zeta_n(\varrho) = \frac{e^{-i\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right)}}{(\sin \tau_0)^{1/2}}, \quad \psi_n(\varrho) = \frac{\cos\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{(\sin \tau_0)^{1/2}},$$

wenn man den reellen Winkel $\tau_0 \left(0 < \tau_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ definiert durch die Formel:

$$(109) \quad \cos \tau_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho}$$

und unter f_0 die Funktion

$$(110) \quad f_0 = \sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0$$

versteht.

Ist $n + \frac{1}{2} > \varrho$, so gilt für sehr große Werte von ϱ :

$$(111) \quad \zeta_n(\varrho) = i \frac{e^{-i\varrho f_0}}{(i \sin \tau_0)^{1/2}}, \quad \psi_n(\varrho) = \frac{e^{i\varrho f_0}}{(i \sin \tau_0)^{1/2}},$$

wenn man jetzt τ_0 definiert als negativ imaginäre Wurzel der mit (109) gleichlautenden Gleichung:

$$(109') \quad \cos \tau_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho}.$$

Den Übergangsfall $n + \frac{1}{2}$ nahe gleich ϱ kann man, solange nur eine erste Näherung angestrebt wird, ganz außer Betracht lassen.

Aus den Formeln (108) und (111) folgt jetzt durch Differentiation nach ϱ (oder vielleicht strenger unter Benutzung der Formeln (15)) in derselben Näherung wie oben:

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n'(\varrho) = e^{-i\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right)} (\sin \tau_0)^{1/2} \\ \psi_n'(\varrho) = \cos\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right) (\sin \tau_0)^{1/2} \end{array} \right\} \text{ für } \varrho > n + \frac{1}{2}$$

und

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n'(\varrho) = -i e^{-i\varrho f_0} (i \sin \tau_0)^{1/2} \\ \psi_n'(\varrho) = + e^{i\varrho f_0} (i \sin \tau_0)^{1/2} \end{array} \right\} \text{ für } \varrho < n + \frac{1}{2}.$$

Bilden wir nun zunächst für den zweiten Fall ($\varrho < n + \frac{1}{2}$) unsere Größen α_n^1 und α_n^2 :

$$(114) \quad \alpha_n^1 = \frac{\psi_n'(\varrho)}{\zeta_n'(\varrho)} = i e^{2i\varrho f_0}, \quad \alpha_n^2 = \frac{\psi_n(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)} = -i e^{2i\varrho f_0},$$

so sieht man, daß sie mit wachsendem ϱ durchweg wie eine Exponentialfunktion verschwinden. Schreibt man nämlich gemäß (109): $\tau_0 = -ib$, wo b eine reelle Zahl größer als 0 bedeutet, so wird:

$$i f_0 = i(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0) = -\operatorname{Co}f b (b - \Im g b);$$

der Exponent in (114) ist also tatsächlich negativ und damit:

$$\lim_{\varrho=\infty} \alpha_n^1 = \lim_{\varrho=\infty} \alpha_n^2 = 0 \quad \text{für } n + \frac{1}{2} > \varrho.$$

Im Falle $n + \frac{1}{2} < \varrho$ erhalten wir dagegen:

$$(115) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n^1 = \frac{\psi_n'(\varrho)}{\zeta_n'(\varrho)} = e^{i\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} (1 + i e^{2i\varrho f_0}), \\ \alpha_n^2 = \frac{\psi_n(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)} = e^{i\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} (1 - i e^{2i\varrho f_0}), \end{array} \right.$$

d. h. Werte, die durchweg endlich bleiben in der Grenze für $\varrho = \infty$. Spalten wir nun unsere Summen S_1, S_2, S_3 der Gleichung (94) je in zwei Teile, indem wir einmal von $n=1$ bis $n=N$ und dann von $n=N+1$ bis $n=\infty$ summieren, wobei N so gewählt ist, daß $N + \frac{1}{2} < \varrho < N + \frac{3}{2}$, so sind nach den obigen Überlegungen die zweiten von $n=N+1$ bis $n=\infty$ gehenden Teilsummen für große Werte von ϱ neben den ersten von $n=0$ bis $n=N$ gehenden zu vernachlässigen.¹⁾ In erster Näherung können demnach für S_1, S_2, S_3 die endlichen Summen:

1) Man überzeugt sich leicht durch eine Rechnung, die ganz analog verläuft wie die im folgenden angewandte, daß der vernachlässigte Rest der Reihen S_1, S_2, S_3 in der Lichtdruckformel Gliedern entspricht, die in der Grenze für $\varrho = \infty$ verschwinden wie $\varrho^{-2/3}$.

$$(116) \quad \begin{cases} S_1' = \Re \sum_1^N \left(n + \frac{1}{2} \right) (\alpha_n^1 + \alpha_n^2) \\ S_2' = \Re \sum_1^N \frac{2n+1}{n(n+1)} \bar{\alpha}_n^1 \alpha_n^2 \\ S_3' = \Re \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} (\bar{\alpha}_n^1 \alpha_{n+1}^1 + \bar{\alpha}_n^2 \alpha_{n+1}^2) \end{cases}$$

substituiert werden; diese wollen wir jetzt berechnen, indem wir für die Koeffizienten α_n die Werte (115) einsetzen.

Für S_1' erhält man einfach:

$$(117) \quad \begin{cases} S_1' = \sum_1^N \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (3 + 5 + 7 + \dots + (2N+1)) \\ \quad \quad \quad = \frac{N(N+2)}{2}, \end{cases}$$

oder in erster Näherung, indem wir noch N durch ϱ ersetzen:

$$(118) \quad S_1' = \frac{\varrho^2}{2}.$$

Weiterhin bekommt man:

$$(119) \quad \bar{\alpha}_n^1 \alpha_n^2 = \frac{1}{4} (1 - i e^{-2i\varrho f_0}) (1 - i e^{2i\varrho f_0}) = -\frac{i}{2} \cos 2\varrho f_0,$$

d. h. rein imaginär, so daß S_2' in erster Näherung keinen Beitrag zum Resultat liefert.

Schließlich muß noch S_3' berechnet werden, was ein wenig mehr Überlegung erfordert. Definieren wir vorübergehend einen Winkel τ_0' durch die Formel

$$(120) \quad \cos \tau_0' = \frac{n + \frac{3}{2}}{\varrho}$$

und analog mit (110) die Funktion f_0' durch die Gleichung

$$(121) \quad f_0' = \sin \tau_0' - \tau_0' \cos \tau_0',$$

so wird, wie der Vergleich mit (115) zeigt:

$$(122) \quad \alpha_{n+1}^1 = \frac{1}{2} (1 + i e^{2i\varrho f_0'}), \quad \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{2} (1 - i e^{2i\varrho f_0'}).$$

Unter Benutzung dieser Werte erhält man dann:

$$\bar{\alpha}_n^1 \alpha_{n+1}^1 = \frac{1}{4} (1 + i e^{2i\varrho f_0'} - i e^{-2i\varrho f_0} + e^{2i\varrho(f_0' - f_0)}),$$

$$\bar{\alpha}_n^2 \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{4} (1 - i e^{2i\varrho f_0'} + i e^{-2i\varrho f_0} + e^{2i\varrho(f_0' - f_0)}),$$

und demnach

$$(123) \quad \overline{\alpha_n^1} \alpha_{n+1}^1 + \overline{\alpha_n^2} \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{2} (1 + e^{2i\varrho(f'_0 - f_0)}).$$

Nun ist nach (120) und (109) für große Werte von ϱ der Wert von $\cos \tau_0'$ sehr wenig von $\cos \tau_0$ verschieden. Schreibt man deshalb

$$(124) \quad \tau_0' = \tau_0 + \Delta \tau_0,$$

so erhält man, indem man $\cos \tau_0'$ nach Potenzen von $\Delta \tau_0$ entwickelt:

$$\cos \tau_0' = \cos \tau_0 - \Delta \tau_0 \sin \tau_0 = \frac{n + \frac{3}{2}}{\varrho},$$

woraus mit Rücksicht auf (109) folgt:

$$(125) \quad \sin \tau_0 \Delta \tau_0 = -\frac{1}{\varrho}.$$

Entwickelt man ebenso f_0' nach Potenzen von $\Delta \tau_0$, so erhält man mit Rücksicht auf die eben angegebene Beziehung:

$$(126) \quad f_0' - f_0 = \tau_0 \sin \tau_0 \Delta \tau_0 = -\frac{\tau_0}{\varrho},$$

was, in (123) eingesetzt, diese Formel überführt in

$$(123') \quad \overline{\alpha_n^1} \alpha_{n+1}^1 + \overline{\alpha_n^2} \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{2} (1 + e^{-2i\tau_0}).$$

Setzt man diesen Wert in S_3' ein, so wird

$$(127) \quad S_3' = \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} \cos 2\tau_0.$$

Da N sehr groß ist, kann man für die erste Summe auch schreiben:

$$\frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} = \frac{1}{2} \sum_1^N n = \frac{1}{2} [1 + 3 + \dots + N] = \frac{N(N+1)}{4},$$

oder, indem man das letzte Resultat wieder nur in erster Näherung mitnimmt und N durch ϱ ersetzt:

$$(128) \quad \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} = \frac{\varrho^2}{4}.$$

In der zweiten Summe von S_3' heben wir zunächst wieder wie in der ersten den Nenner $n+1$ gegen den Faktor $n+2$ des Zählers weg und schreiben dann $n + \frac{1}{2}$ statt n , was alles gestattet ist, solange das Schlußresultat nur die höchste Potenz

von ϱ enthalten soll. Indem wir schließlich noch mit ϱ^2 multiplizieren und dividieren, erhalten wir mit Rücksicht auf (109)

$$(129) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} \cos 2\tau_0 &= \frac{\varrho^2}{2} \sum_1^N \frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho} \frac{\cos 2\tau_0}{\varrho} \\ &= \frac{\varrho^2}{2} \sum_1^N \frac{1}{\varrho} \cos \tau_0 \cos 2\tau_0. \end{aligned} \right.$$

Da nun τ_0 sich nach (109) wegen des vorausgesetzten großen Wertes von ϱ nur äußerst langsam mit wachsendem n ändert, so liegt es nahe, die letzte Summe als Integral aufzufassen. Bedenkt man, daß die kleine Größe $1/\varrho$ mit der Zunahme $\Delta\tau_0$, die τ_0 beim Übergang eines Reihengliedes zum nächsten erfährt, verknüpft ist durch die Formel (125), so erhält man in erster Näherung aus (129):

$$(129) \quad \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} \cos 2\tau_0 = \frac{\varrho^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\tau_0 \cos \tau_0 \sin \tau_0 d\tau_0,$$

da τ_0 nach (109) von einem Werte nahe gleich $\pi/2$, bis zu einem Werte nahe gleich 0 geht, während n von 1 bis N läuft. Das Integral verschwindet, so daß wir erhalten

$$(130) \quad S_3' = \frac{\varrho^2}{4},$$

und damit nach (124):

$$(131) \quad \frac{M(\mathfrak{L})}{W} = \frac{4}{\varrho^2} \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^2}{4} \right] = 1.$$

Dieses ist derselbe Wert, den man auf Grund der geometrischen Optik findet, und den auch Schwarzschild angibt. Es sei noch hervorgehoben, daß man in der obigen Rechnung die Näherung leicht weiter treiben und so das Resultat vervollständigen kann, was nach sonst üblichen Methoden eine mühsame Berechnung der Beugung an der Kugel auf Grund des Huyghensschen Prinzips erfordern würde.

§ 15. Der Grenzwert des Lichtdruckes für kleine Wellenlängen bei dielektrischen Kugeln.

Die Rechnung für dielektrische Kugeln verläuft nach demselben Schema wie im vorigen Paragraphen, ist aber um etwas weniger einfach, da ja das Schlußresultat keine Konstante, sondern eine Funktion des Brechungsexponenten ν werden muß.

Aus (61) folgen für den hier betrachteten Fall ($\sigma = 0$) die beiden Größen α_n^1 und α_n^2 zu

$$(132) \quad \begin{cases} \alpha_n^1 = \frac{\psi_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \nu \psi_n'(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)}{\zeta_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \nu \zeta_n'(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)} \\ \alpha_n^2 = \frac{\nu \psi_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \psi_n'(\varrho) \psi_n(\nu \varrho)}{\nu \zeta_n(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho) - \zeta_n'(\varrho) \psi_n'(\nu \varrho)} \end{cases} \quad (\nu = \sqrt{\varepsilon}),$$

in denen jetzt wieder wie im vorigen Paragraphen die Funktionen ψ_n , ψ_n' , ζ_n , ζ_n' durch ihre dort angegebenen Näherungen ersetzt werden sollen. Dem Umstande entsprechend, daß unsere Funktionen mit den zwei verschiedenen Argumenten ϱ und $\nu \varrho$ vorkommen, hat man drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich

1. $n + \frac{1}{2} < \varrho < \nu \varrho$,
2. $\varrho < n + \frac{1}{2} < \nu \varrho$,
3. $\varrho < \nu \varrho < n + \frac{1}{2}$.

Wir werden sehen, daß man für eine erste Näherung nur den Fall 1. näher in Betracht zu ziehen braucht.

Man definiere zwei Winkel τ_0 und τ_1 durch die Formeln:

$$(133) \quad \cos \tau_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho}, \quad \cos \tau_1 = \frac{n + \frac{1}{2}}{\nu \varrho},$$

die beide reell sind und zwischen $\pi/2$ und 0 angenommen werden sollen, solange $\frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho}$ bzw. $\frac{n + \frac{1}{2}}{\nu \varrho}$ kleiner als 1 ist, die andererseits *negativ* imaginär angenommen werden, sobald $\frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho}$ bzw. $\frac{n + \frac{1}{2}}{\nu \varrho}$ den Wert 1 übersteigt. Mit diesen Abkürzungen erhält man dann aus den in § 14 angegebenen Näherungen im Falle 1:

$$(134) \quad \alpha_n^1 = \frac{\sin \tau_1 \cos\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \nu \sin \tau_0 \cos\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \tau_1 e^{-i\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \nu \sin \tau_0 e^{-i\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

im Falle 2:

$$(134') \quad \alpha_n^1 = -i e^{2i\varrho f_0} \frac{\sin \tau_1 \cos\left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4}\right) - i \nu \sin \tau_0 \cos\left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \tau_1 \cos\left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4}\right) + i \nu \sin \tau_0 \cos\left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

und im Falle 3:

$$(134'') \quad \alpha_n^1 = -i e^{2i\varrho f_0} \frac{\sin \tau_1 - \nu \sin \tau_0}{\sin \tau_1 + \nu \sin \tau_0},$$

wenn man ähnlich wie früher die Abkürzungen benutzt:

$$(135) \quad f_0 = \sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0, \quad f_1 = \sin \tau_1 - \tau_1 \cos \tau_1.$$

Für die Größen α_n^2 gelten in den entsprechenden Fällen 1., 2., 3. die analogen Formeln:

$$136) \alpha_n^2 = \frac{\nu \sin \tau_1 \cos \left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \tau_0 \cos \left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4} \right)}{\nu \sin \tau_1 e^{-i \left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4} \right)} \cos \left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \tau_0 e^{-i \left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4} \right)} \cos \left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4} \right)},$$

$$(136') \quad \alpha_n^2 = -i e^{2i \varrho f_0} \frac{\nu \sin \tau_2 \cos \left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4} \right) - i \sin \tau_0 \cos \left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4} \right)}{\nu \sin \tau_1 \cos \left(\nu \varrho f_1 + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \tau_0 \cos \left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4} \right)},$$

$$(136'') \quad \alpha_n^2 = -i e^{2i \varrho f_0} \frac{\nu \sin \tau_1 - \sin \tau_0}{\nu \sin \tau_1 + \sin \tau_0}.$$

Im Falle 1. sind τ_0, τ_1 und damit f_0, f_1 reell, die Größen α_n^1 und α_n^2 also endlich und alle von derselben Größenordnung; im Falle 2. ist τ_1 und f_1 noch immer reell, τ_0 und f_0 dagegen imaginär, und zwar, wie auf p. 120 gezeigt wurde, so, daß $i f_0$ negativ reell ist; mit zunehmendem ϱ verschwinden also jetzt α_n^1 und α_n^2 exponentiell. Schließlich sind im Falle 3. beide Größen τ_0 und τ_1 negativ imaginär, so daß auch hier α_n^1 und α_n^2 exponentiell verschwinden für große Werte von ϱ . Wir schließen demnach wie in § 14, daß wir eine erste Näherung für den Lichtdruck erhalten werden, indem wir statt der unendlichen Reihen S die endlichen S' von 1 bis N gehenden substituieren (vgl. (116)), wobei $N + \frac{1}{2} < \varrho < N + \frac{3}{2}$.

Zunächst wollen wir nun die Formeln (134) und (136) für α_n^1 bzw. α_n^2 etwas übersichtlicher schreiben. Ersetzt man

$$\cos \left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4} \right)$$

durch

$$\frac{1}{2} \left(e^{i \left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4} \right)} + e^{-i \left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4} \right)} \right)$$

und

$$\cos \left(\nu \varrho f_1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ usw.,}$$

durch die entsprechenden Ausdrücke, so erhält man nach einigen leicht ersichtlichen Umstellungen im einzig in Betracht kommenden Falle 1:

$$(137) \quad \begin{cases} \alpha_n^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2i\varrho(f_0 - \nu f_1)} \frac{1 - i r_1 e^{2i\nu\varrho f_1}}{1 + i r_1 e^{-2i\nu\varrho f_1}}, \\ \alpha_n^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2i\varrho(f_0 - \nu f_1)} \frac{1 - i r_2 e^{2i\nu\varrho f_1}}{1 + i r_2 e^{-2i\nu\varrho f_1}}, \end{cases}$$

wenn man r_1 und r_2 definiert durch die Formeln:

$$(138) \quad r_1 = \frac{\nu \sin \tau_0 - \sin \tau_1}{\nu \sin \tau_0 + \sin \tau_1}, \quad r_2 = \frac{\sin \tau_0 - \nu \sin \tau_1}{\sin \tau_0 + \nu \sin \tau_1}.$$

Die Formeln (138) erinnern sofort an geometrisch-optische Verhältnisse; die Größen r_1, r_2 sind nämlich nichts anderes wie die bekannten Fresnelschen Reflexionskoeffizienten für senkrecht, bzw. parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht, das auf eine Platte vom Brechungsindex ν auffällt unter dem Einfallswinkel $\pi/2 - \tau_0$ (gegen die Normale gemessen). Man sieht dieses ohne weiteres ein, wenn man noch bedenkt, daß nach den Definitionsformeln (133) die Winkel τ_0 und τ_1 miteinander verknüpft sind durch die Beziehung:

$$(139) \quad \cos \tau_0 = \nu \cos \tau_1.$$

Unter Anwendung dieser Beziehung kann man den Reflexionskoeffizienten r_1 bzw. r_2 noch die geläufigere Form geben:

$$(138') \quad r_1 = \frac{\operatorname{tg}(\tau_0 - \tau_1)}{\operatorname{tg}(\tau_0 + \tau_1)}, \quad r_2 = \frac{\sin(\tau_0 - \tau_1)}{\sin(\tau_0 + \tau_1)}.$$

Bekanntlich sind beide Größen für das in Betracht kommende Intervall $\pi/2 \geq \tau_0 \geq 0$ stets dem absoluten Betrage nach kleiner wie 1; überdies verschwindet in diesem Intervall r_1 einmal, nämlich dann, wenn $\tau_0 + \tau_1 = \pi/2$, oder anders geschrieben, wenn $\operatorname{tg} \tau_0 = 1/\nu$ (Polarisationswinkel), während r_2 stets einen endlichen Wert hat. Kurven für die Abhängigkeit der Reflexionskoeffizienten vom Einfallswinkel finden sich z. B. bei M. E. Mascart.¹⁾

Das soeben über die absolute Größe von r_1 und r_2 Gesagte legt es nahe, unsere Koeffizienten α_n^1 bzw. α_n^2 nach Potenzen von $i r_1 e^{-2i\nu\varrho f_1}$ bzw. $i r_2 e^{-2i\nu\varrho f_1}$ zu entwickeln; man erhält:

$$(140) \quad \begin{cases} \alpha_n^1 = \frac{1}{2} + \frac{i r_1}{2} e^{2i\varrho f_0} \\ \quad - \frac{1 - r_1^2}{2} e^{2i\varrho(f_0 - \nu f_1)} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p (i r_1)^p e^{-2ip\nu\varrho f_1}, \end{cases}$$

1) M. E. Mascart, *Traité d'optique* 1. p. 404. Paris 1891.

$$(140') \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_n^2 &= \frac{1}{2} + \frac{i r_2}{2} e^{2i\varrho f_0} \\ &\quad - \frac{1 - r_2^2}{2} e^{2i\varrho(f_0 - r f_1)} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p (i r_2)^p e^{-2ip\varrho f_1}. \end{aligned} \right.$$

Für die weiteren Überlegungen eignet sich diese Form am meisten.

Wir schreiten jetzt zur Berechnung des Lichtdruckes auf Grund von (94), wobei die endlichen Summen S_1' , S_2' , S_3' , welche an Stelle der unendlichen S_1 , S_2 , S_3 getreten, durch (116) definiert sind.

Aus (140) und (140') folgt:

$$(141) \quad \alpha_n^1 + \alpha_n^2 = 1 + R,$$

wo der Rest R aus einer unendlichen Summe von Gliedern besteht, von denen jedes einzelne mit einer Exponentialfunktion der Form

$$(142) \quad e^{2i\varrho f_0} e^{-2ip\varrho f_1}$$

multipliziert ist. Da nun ϱ eine große Zahl bedeutet, schwankt der reelle Teil dieser Exponentialfunktion sehr oft zwischen +1 und -1, während der Summationsindex n unserer Summe (116) die vorgeschriebenen Werte von 1 bis N durchläuft, da währenddessen f_0 von 1 bis 0 und f_1 von 1 bis

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\nu^2}} - \frac{1}{\nu} \arccos \frac{1}{\nu}$$

geht, wie die Definition (135) von f_0 und f_1 ohne weiteres zeigt. Wir schließen daraus, ebenso wie bei der üblichen Abschätzung des Restes einer Fourierreihe, daß wir den Beitrag, den R zur Summe S_1' liefert, vernachlässigen können¹⁾, und erhalten wie in (118) als Grenzwert für sehr großes ϱ

$$(143) \quad S_1' = \sum_1^N n + \frac{1}{2} = \frac{\varrho^2}{2}.$$

Zunächst folgt jetzt die Summe S_2' , von der wir zeigen wollen, daß sie in der verlangten Näherung keinen Beitrag zum Resultat liefert. Aus (140) und (140') folgt:

1) Offenbar entspricht der Beitrag von R der Wirkung des gebeugten Lichtes, welcher also hier entgegen dem bei kleinen Kugeln gefundenen Verhalten erst in zweiter Ordnung in Betracht zu ziehen wäre.

$$(144) \quad \overline{\alpha_n^{-1}} \alpha_n^2 = \frac{1}{4} + \frac{r_1 r_2}{4} + \frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{4} \sum_{p=0}^{p=\infty} r_1^p r_2^p + R,$$

oder auch

$$(144') \quad \overline{\alpha_n^{-1}} \alpha_n^2 = \frac{1}{4} \frac{2-r_1^2-r_2^2}{1-r_1 r_2} + R,$$

wo R wieder einen Rest bedeutet, der nur aus Gliedern besteht, von denen jedes mit einer Exponentialfunktion der Form (142) multipliziert ist. Genau so wie oben schließen wir zunächst wieder, daß der Einfluß von R neben dem des ersten Termes von (144') verschwindet, und erhalten:

$$(145) \quad S_2' = \frac{1}{4} \sum_1^N \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2-r_1^2-r_2^2}{1-r_1 r_2}.$$

Da sowohl $|r_1|$ wie $|r_2|$ stets kleiner wie 1 bleiben, so ist der Ausdruck

$$\frac{2-r_1^2-r_2^2}{1-r_1 r_2}$$

für jeden beliebigen in Betracht kommenden Wert von n stets endlich, so daß (für große Werte von $N \cong \varrho$) die Summe S_2' von der Größenordnung ist

$$(146) \quad S_2' = C \sum_1^N \frac{1}{n} = C' \log \varrho,$$

wie man leicht einsehen kann.¹⁾ Neben der Summe S_1' , welche für große Werte von ϱ wie ϱ^2 unendlich wird, ist also S_2' zu vernachlässigen.

Schließlich kommen wir jetzt zur dritten Summe, die einen von ν abhängigen Beitrag liefern wird. Zunächst folgt wieder nach (140):

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\alpha_n^{-1}} \alpha_{n+1}^1 &= \frac{1}{4} + \frac{r_1^2}{4} e^{2i\varrho(f_0'-f_0)} \\ &+ \frac{(1-r_1^2)^2}{4} e^{2i\varrho(f_0'-f_0)} e^{-2i\nu\varrho(f_1'-f_1)} \sum_{p=0}^{p=\infty} r_1^{2p} e^{-2ip\nu\varrho(f_1'-f_1)}, \end{aligned} \right.$$

oder auch:

$$(147') \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\alpha_n^{-1}} \alpha_{n+1}^1 &= \frac{1}{4} + \frac{r_1^2}{4} e^{2i\varrho(f_0'-f_0)} \\ &+ \frac{(1-r_1^2)^2}{4} \frac{e^{2i\varrho(f_0'-f_0)} e^{-2i\nu\varrho(f_1'-f_1)}}{1-r_1^2 e^{-2i\nu\varrho(f_1'-f_1)}}, \end{aligned} \right.$$

1) C und C' bedeuten nicht näher bestimmte endliche Konstanten.

wenn wir einen Rest R von der in den beiden vorigen Fällen betrachteten Art überhaupt nicht mehr hinschreiben und die Funktionen f_0' und f_1' , bzw. die zugehörigen Winkel τ_0' und τ_1' analog mit (121) usw. definieren durch die Formeln:

$$(148) \quad \begin{cases} \cos \tau_0' = \frac{n + \frac{3}{2}}{\varrho}, & \cos \tau_1' = \frac{n + \frac{3}{2}}{\nu \varrho}, \\ f_0' = \sin \tau_0' - \tau_0' \cos \tau_0', & f_1' = \sin \tau_1' - \tau_1' \cos \tau_1'. \end{cases}$$

Für das Produkt $\alpha_n^2 \alpha_{n+1}^2$ findet man ebenso:

$$(149) \quad \begin{cases} \overline{\alpha_n^2} \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{4} + \frac{r_2^2}{4} e^{2i\varrho(f_0' - f_0)} \\ + \frac{(1 - r_2^2)^2}{4} \frac{e^{2i\varrho(f_0' - f_0)} e^{-2i\nu\varrho(f_1' - f_1)}}{1 - r_2^2 e^{-2i\nu\varrho(f_1' - f_1)}}. \end{cases}$$

Die Größen $f_0' - f_0$ bzw. $f_1' - f_1$ sind von der Größenordnung $1/\varrho$, wir mußten deshalb diejenigen Exponentialfunktionen, bei denen allein $f_0' - f_0$ bzw. $f_1' - f_1$ im Exponenten vorkam, beibehalten. Es ist nämlich, wenn wir setzen

$$(150) \quad \tau_0' = \tau_0 + \Delta \tau_0, \quad \tau_1' = \tau_1 + \Delta \tau_1,$$

nach (123)

$$(151) \quad \sin \tau_0 \Delta \tau_0 = -\frac{1}{\varrho}, \quad \sin \tau_1 \Delta \tau_1 = -\frac{1}{\nu \varrho}$$

und demnach (vgl. 126):

$$(152) \quad f_0' - f_0 = -\frac{\tau_0}{\varrho}, \quad f_1' - f_1 = -\frac{\tau_1}{\nu \varrho}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhalten wir schließlich:

$$(153) \quad \overline{\alpha_n^2} \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{4} + \frac{r_1^2}{4} e^{-2i\tau_0} + \frac{(1 - r_1^2)^2}{4} \frac{e^{2i(\tau_1 - \tau_0)}}{1 - r_1^2 e^{2i\tau_1}},$$

$$(153') \quad \overline{\alpha_n^2} \alpha_{n+1}^2 = \frac{1}{4} + \frac{r_2^2}{4} e^{-2i\tau_0} + \frac{(1 - r_2^2)^2}{4} \frac{e^{2i(\tau_1 - \tau_0)}}{1 - r_2^2 e^{2i\tau_1}}.$$

Mit diesen Ausdrücken gehen wir jetzt in S_3' ein und bekommen

$$(154) \quad \left\{ \begin{aligned} S_3' &= \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} \\ &+ \frac{1}{4} \Re \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} e^{-2i\tau_0} \left[r_1^2 + (1 - r_1^2)^2 \frac{e^{2i\tau_1}}{1 - r_1^2 e^{2i\tau_1}} \right] \\ &+ \frac{1}{4} \Re \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} e^{-2i\tau_0} \left[r_2^2 + (1 - r_2^2)^2 \frac{e^{2i\tau_1}}{1 - r_2^2 e^{2i\tau_1}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Für die erste Summe von S_3' ergibt sich ohne weiteres:

$$(155) \quad \frac{1}{2} \sum_1^N \frac{n(n+2)}{n+1} \cong \frac{1}{2} \sum_1^N n \cong \frac{Q^2}{4},$$

die zwei übrigbleibenden Summen formen wir wie in § 14 in Integrale um und erhalten so für die erste

$$(156) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Q^2}{4} J_1(\nu) &= \frac{Q^2}{4} \Re \int_0^{\pi/2} e^{-2i\tau_0} \\ &\quad \left[r_1^2 + (1 - r_1^2) \frac{e^{2i\tau_1}}{1 - r_1^2 e^{2i\tau_1}} \right] \sin \tau_0 \cos \tau_0 d\tau_0 \end{aligned} \right.$$

und ebenso für die zweite:

$$(156') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Q^2}{4} J_2(\nu) &= \frac{Q^2}{4} \Re \int_0^{\pi/2} e^{-2i\tau_0} \\ &\quad \left[r_2^2 + (1 - r_2^2) \frac{e^{2i\tau_1}}{1 - r_2^2 e^{2i\tau_1}} \right] \sin \tau_0 \cos \tau_0 d\tau_0. \end{aligned} \right.$$

Unter Benutzung der so definierten Abkürzungen $J_1(\nu)$ und $J_2(\nu)$ schreibt sich jetzt unsere Formel (94) für den Lichtdruck unter Berücksichtigung von (143) und (155):

$$(157) \quad \frac{M(Q)}{W} = 1 - J_1(\nu) - J_2(\nu).$$

An der endgültigen Formel (157) wollen wir nun zunächst die beiden Grenzfälle $\nu = 1$ und $\nu = \infty$ verifizieren.

Für $\nu = 1$ wird nach (133) $\tau_0 = \tau_1$, so daß die beiden Reflexionskoeffizienten r_1 und r_2 nach (138) oder (138') verschwinden. Aus (156) und (156') folgt dann

$$J_1(\nu) = J_2(\nu) = \int_0^{\pi/2} \sin \tau_0 \cos \tau_0 d\tau_0 = \frac{1}{2}$$

und damit nach (157)

$$\frac{M(Q)}{W} = 0, \dots (\nu = 1),$$

wie es sein muß.

Für $\nu = \infty$ werden sowohl r_1^2 wie r_2^2 beide gleich 1, wie z. B. die Formeln (138') ohne weiteres zeigen, wenn man für τ_1 den jetzt im ganzen Integrationsintervall gültigen Wert $\pi/2$ substituiert. So bekommt man:

$$J_1(\nu) = J_2(\nu) = \int_0^{\pi/2} \cos 2\tau_0 \sin \tau_0 \cos \tau_0 d\tau_0 = 0,$$

so daß

$$\frac{M(\infty)}{W} = 1 \dots (\nu = \infty),$$

ein Resultat, das in § 14 schon direkt für die vollkommen reflektierende Kugel erhalten wurde.

Um die Integrale $J_1(\nu)$ und $J_2(\nu)$ für beliebige Werte von ν zwischen 1 und ∞ zu bestimmen, scheint es am besten zu sein, dieselben graphisch auszuwerten; auch dieses Verfahren ist indessen nicht gerade elegant durchführbar. Ich habe in dieser Weise die betreffenden Integrale für einige Werte von ν berechnet und erhielt so die Kurve der Fig. 10, die unsere Größe $M(\infty)/W$ auf Grund von (157) in ihrer Abhängigkeit vom Brechungsexponenten ν veranschaulicht. Daß

auch die Rechnung nach den Gesetzen der geometrischen Optik schließlich die Näherung (157) liefern wird, scheint mir ohne Zweifel, es würde dabei das Resultat entsprechend den unendlich vielen zu berücksichtigenden Reflexionen und Brechungen zunächst in Form einer unendlichen Reihe er-

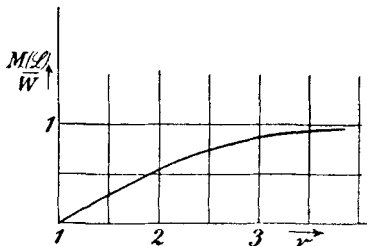


Fig. 10.

scheinen, die sich mit der Summe von (156) und (156') identisch erweisen dürfte. Einfacher wie die obige wird diese Rechnung kaum werden.

§ 16. Zusammenhang zwischen Lichtdruck und Eigenschwingungen.

In § 9 wurde gezeigt, daß der Lichtdruck auf einen Dipol ein Maximum erreicht, wenn die Schwingungszahl der auffallenden Welle übereinstimmt mit seiner Eigenschwingungszahl. Bekanntlich besitzen nun unsere den Rechnungen in den früheren Paragraphen zugrunde gelegten Kugeln auch das Vermögen, elektromagnetische Eigenschwingungen auszuführen, deren Periode und Dämpfung in § 5 einer genaueren Betrachtung unterzogen wurde. Es fragt sich nun, ob nicht ähnliche

Verhältnisse wie beim Dipol auch bei den Kugeln auftreten werden, und ob insbesondere das Auftreten der Maxima in den Kurven für $M(\vartheta)/W$ mit den Eigenschwingungen in Zusammenhang stehen könne.¹⁾ Wir werden sehen, daß dieser Zusammenhang im allgemeinen nur verwaschen hervortritt, daß er sich aber ausgesprochen bemerkbar macht, sobald die Eigenschwingungen nur wenig gedämpft sind, wie das bei dielektrischen Kugeln großer Dielektrizitätskonstante zutrifft. Überdies gestatten die betreffenden Überlegungen einen vorzüglichen Einblick in den Mechanismus der zur Lösung unserer Aufgabe benutzten Reihenentwicklungen.

Wir betrachten irgendeine mögliche Eigenschwingung unserer Kugel, die wir durch den Wert des zugehörigen Potentials Π charakterisieren wollen (aus dem ja nach (5) bzw. (5') die betreffenden Feldkomponenten durch Differentiation gewonnen werden können). Dasselbe ist dann gleich dem Produkte einer Funktion von r mit einer allgemeinen Kugelfunktion. Ist nun das Potential der auffallenden Welle auf unserer Kugel gemäß derselben Kugelfunktion verteilt, so werden wir auch noch das hinzukommende Streufeld proportional dieser Kugelfunktion setzen können. Dasselbe wird indessen nicht mehr wie bei der Eigenschwingung abklingen, sondern in demselben Tempo wie das auftreffende Feld schwingen, während seine Amplitude eine Funktion der Schwingungszahl wird, die für Frequenzen in der Umgebung der Eigenfrequenz einen maximalen Wert annimmt. Nach § 4 und 5 bringen die Formeln das folgendermaßen zum Ausdruck. Ist die auffallende Welle z. B. gegeben durch das Potential Π_1^e (vgl. (28)), so daß

$$(158) \quad r \Pi_1^e = \frac{i^{n-1}}{k_a^2} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(k_a r) P_n^1(\cos \vartheta) \cos \varphi,$$

so zeigen (29) und (33), daß das hinzukommende Streufeld im Außenraum bestimmt wird durch das Potential Π_1 der Gleichung:

$$(159) \quad r \Pi_1 = -i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\alpha_n^1}{k_a^2} \zeta_n(k_a r) P_n^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$$

mit (vgl. (61))

$$(160) \quad \alpha_n^1 = \frac{\alpha_1^a \psi_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \psi_n'(k_a a) \alpha_1^i \psi_n(k_i a)}{\alpha_1^a \zeta_n(k_a a) k_i \psi_n'(k_i a) - k_a \zeta_n'(k_a a) \alpha_1^i \psi_n(k_i a)}.$$

1) Vgl. die ähnlichen Überlegungen zur Frage der optischen Resonanz von F. Pockels, Physik. Zeitschr. 5. p. 152. 1904.

Die komplexe Größe α_n^1 bestimmt demnach Amplitude und Phase des Streufeldes. Nun fanden wir aber in § 5 als Bedingung für die Möglichkeit einer Eigenschwingung die, daß der Nenner von (160) verschwindet; aus dieser Gleichung folgte dann $k_a a$ als komplexe Größe, die mit ihrem reellen bzw. imaginären Teil Schwingungszahl bzw. Dämpfung der Eigenschwingung bestimmt. In unserem Falle ist nun $k_a a = 2\pi \frac{\alpha}{\lambda}$ durch die auffallende Welle bestimmt, und zwar als reelle Größe, da wir als auffallende Welle eine ungedämpfte Schwingung ansetzen; da wir andererseits in § 5 fanden, daß die betreffende Bedingungsgleichung nur komplexe Wurzeln hat, d. h. daß die Eigenschwingungen der Kugel stets gedämpft sind, so kann der Nenner in (160) für keinen einzigen reellen Wert von $k_a a$ verschwinden. Die Amplitude der erregten Schwingung bleibt also stets endlich. Je nachdem die Dämpfung klein oder groß ist, müssen die durch α gemessenen Maxima der erregten Amplitude bei Frequenzen liegen, die sehr nahe oder nur in der weiteren Umgebung der Eigenfrequenz zu suchen sind. Nach (66) ist der Lichtdruck unmittelbar durch die Koeffizienten α bestimmt, halten wir z. B. fest an (158) als Potential der einfallenden Welle, so würden wir einfach erhalten

$$(161) \quad \frac{M(\varrho)}{W} = \frac{\lambda^3}{\pi^2 a^2} \cdot \frac{2n+1}{2} \Re[\alpha_n^1];$$

Formel (161) zeigt demnach, wie unter den obliegenden Verhältnissen ein maximales Mitschwingen auch in gewissem Sinne einen maximalen Wert des Lichtdruckes bedingt. Haben wir beispielsweise als Potential der einfallenden Welle (158) mit $n=1$, und beschränken wir uns zunächst auf den Fall der vollkommen reflektierenden Kugel, so erhalten wir nach (67):

$$(162) \quad \alpha_1^1 = \frac{\psi_1'(\varrho)}{\zeta_1'(\varrho)} \quad \left(\varrho = 2\pi \frac{a}{\lambda} \right)$$

und nach (66)

$$(163) \quad \frac{M(\varrho)}{W} = \frac{6}{\varrho^2} \Re \left[\frac{\psi_1'(\varrho)}{\zeta_1'(\varrho)} \right] = \frac{6}{\varrho^2} \frac{[\psi_1'(\varrho)]^2}{[\psi_1'(\varrho)]^2 + [\chi_1'(\varrho)]^2}.$$

Die rechte Seite von (163) ist in Fig. 11 als Kurve (1) eingetragen; sie sieht in ihrem anfänglichen Verlauf der Kurve für den Lichtdruck bei einer ebenen einfallenden Welle (vgl. Fig. 6) ganz ähnlich. Für größere Werte von ϱ zeigt sie in-

dessen ein ganz abweichendes Verhalten, indem sie für solche Werte ϱ , für die $\psi_1'(\varrho) = 0$ ist, die Abszissenachse berührt, während zwischen zwei solchen Berührungen immer eine mit wachsendem ϱ abnehmende Erhebung folgt. Was weiter die Lage des Maximums betrifft, so gilt für dasselbe $\varrho = 1,1$, während nach Tab. I auf p. 75 die betreffende Eigenschwingungszahl der vollkommen reflektierenden Kugel gegeben wird durch $\varrho = 0,86$.

Bis jetzt haben wir noch immer vorausgesetzt, daß das Potential der einfallenden Welle durch (158) dargestellt wurde.

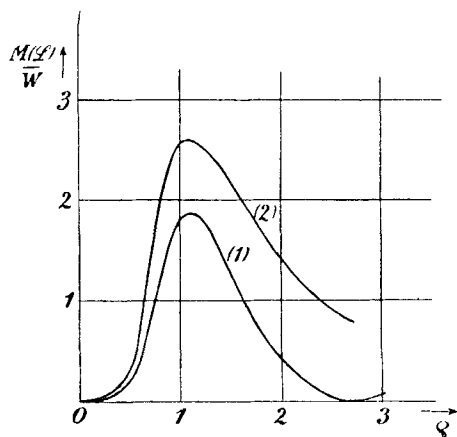


Fig. 11.

Fällt indessen eine ebene Welle auf unsere Kugel, so besteht das „elektrische“ Potential aus einer unendlichen Summe von Gliedern der Form (158) (vgl. (28)), während neben diesem Potential noch das ähnlich gebaute „magnetische“ (vgl. (28')) zu berücksichtigen ist. Beschränken wir uns in den betreffenden Reihen je auf das erste Glied, so gilt

$$(163') \quad \frac{M(\xi)}{W} = \frac{6}{\varrho^2} \Re [\alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \bar{\alpha}_1^1 \alpha_1^2],$$

wobei nach (67):

$$(164) \quad \alpha_1^1 = \frac{\psi_1'(\varrho)}{\zeta_1'(\varrho)} \quad \text{und} \quad \alpha_1^2 = \frac{\psi_1(\varrho)}{\zeta_1(\varrho)}.$$

Die rechte Seite von (163') ist in Fig. 6 als Kurve (2) eingetragen, auch diese zeigt in ihrem Anfangsverlauf das charak-

teristische Maximum. Wenn nun auch klar ist, daß bei wachsenden Werten von ρ die ersten Glieder der Reihen (28) und (28') zur Darstellung der „auffallenden“ Potentiale immer weniger ausreichen (ein Umstand, der bei $\rho = 1$ schon ziemlich stark hervortritt, so kann man doch das Maximum der Lichtdruckkurve wohl erklären durch die Annäherung der Schwingungszahl der auffallenden Welle an die Eigenfrequenz der ersten elektrischen Eigenschwingung. Viel deutlicher wie im eben betrachteten Falle vollkommener Reflexion wird der Einfluß der Eigenschwingungen bei den rein dielektrischen Kugeln. In § 5 erhielten wir schon für letzteren Fall das eigenartige Resultat, daß solche Kugeln Eigenschwingungen besitzen, welche um so weniger gedämpft sind, je größer der Brechungsexponent ν wird, währenddem zugleich die Eigenwellenlänge sich stetig der Null nähert. Offenbar liegen also bei großen Werten von ν die Verhältnisse sehr günstig für ein starkes Hervortreten der Eigenfrequenzen. Das erste Beispiel lieferte uns in § 12 die Lichtdruckkurve für $\nu = 2$. Obwohl ν nicht gerade groß ist, liegen doch die für die Lichtdruckkurve bei $\rho = 1,6$, $\rho = 2,2$ und $\rho = 2,8$ gefundenen drei ersten Maxima in unmittelbarer Nähe der nach Tab. II, p. 77 und Tab. III, p. 78 für die Eigenschwingungen gefundenen Werte von ρ . Für die drei magnetischen Eigenschwingungen kürzester Wellenlänge ist nämlich $\rho = 1,55$, $\rho = 2,25$, $\rho = 2,9$, während für die in Frage kommenden zwei elektrischen gilt $\rho = 2,25$ und $\rho = 2,85$.¹⁾ Viel ausgeprägter noch wird der Zusammenhang bei größeren Werten von ν . Nimmt man z. B. $\nu = 10$, so ist das erste Maximum nach Tab. III zu erwarten bei $\rho = 0,31$. Tatsächlich ist nun für kleine Werte von ρ nach § 2:

$$\frac{\chi_n(\rho)}{\chi_n'(\rho)} = \frac{\zeta_n(\rho)}{\zeta_n'(\rho)} = -\frac{\rho}{n},$$

so daß nach § 5 der Nenner von Y_n und Z_n in (102) in erster Näherung nicht von dem zur Berechnung der elektrischen Eigenschwingungen gleich Null zu setzenden Ausdruck verschieden ist. Dementsprechend wird $Z_1 = \infty$ bei $\rho = 0,31$ und damit nach (103) $a_1^2 = 1$, $b_1^2 = 0$. Vernachlässigen wir neben

1) Es ist nach dem obigen nicht unmöglich, daß sich das zweite und dritte Maximum noch als doppelt erweist.

a_1^2 die anderen Größen a_n und b_n , so erhalten wir demnach für $\varrho = 0,31$

$$\frac{M(L)}{W} = \frac{4}{(0,31)^2} \cdot \frac{3}{2} = 62,$$

d. h. sehr viel größer wie für vollkommene Reflexion. Zugleich wird die Breite dieser Erhebung der Lichtdruckkurve äußerst klein. In zweiter Näherung gilt nämlich für die Umgebung eines Punktes $\varrho = \varrho_0$ in dem der Nenner von Z_n verschwindet

$$Z_n = \frac{1}{\nu^2 - 1} \frac{1}{\chi_n^2(\varrho_0)} \frac{1}{\varrho - \varrho_0},$$

so daß wir in unserem Falle erhalten:

$$\frac{M(L)}{W} = \frac{6}{\varrho_0^2} [1 - (\nu^2 - 1)^2 \chi_1^4(\varrho_0)(\varrho - \varrho_0)^2] = 62 [1 - 10^6(\varrho - \varrho_0)^2].$$

Der Lichtdruck sinkt hiernach auf die Hälfte in dem Bereich von $\varrho = 0,31$ bis $\varrho = 0,31 + 0,7 \cdot 10^{-3}$. Auf diese erste Erhebung folgen neue Maxima, welche den folgenden Eigenschwingungen entsprechen. Steigt ν stetig weiter, so rücken die Maxima immer näher an den Nullpunkt heran, wobei sie zugleich enger und höher werden. Für $\nu = \infty$ bildet also der Nullpunkt eine Häufungsstelle, wie schon in § 12 hervorgehoben wurde. Die Schwarzschildsche Kurve für vollkommene Reflexion definiert in der Nähe des Nullpunktes sozusagen den Ort der unendlich vielen Minima. Ob den obigen extremen Werten für den Lichtdruck eine praktische Bedeutung zukommt, ist allerdings fraglich, da einerseits so große Brechungs-exponenten ohne gleichzeitige Absorption nach unseren bisherigen Erfahrungen in der Natur nicht vorkommen und andererseits die Absorption im Sinne einer starken Abflachung der betrachteten unregelmäßigen Erhebungen wirken wird.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Sommerfeld zu danken für die rege Anteilnahme, die er meiner Arbeit stets entgegenbringt.

München, Math.-phys. Sammlung.

(Eingegangen 30. Mai 1909.)