Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Obgleich das Problem der Reflexion von Lichtstrahlen an einer gegebenen Fläche längst die Aufmerksamkeit der Geometer in vielfacher Hinsicht auf sich gezogen hat, so ist doch niemals der Versuch gemacht worden, aus den Bewegungsgleichungen selbst die Gesetze dieser Erscheinungen zu deduciren, und so theoretisch eine sichere Basis für Untersuchungen dieser Art zu gewinnen. Der einzige Fall, den man betrachtete, war der einer unendlich ausgedehnten brechenden Ebene, auf welche ebene Wellen fallen; und so kam es, dass die geometrischen Sätze der Dioptrik und Katoptrik mit dem, was man heute eigentlich Optik zu nennen gewohnt ist, nur durch einige Betrachtungen der Enveloppentheorie lose und gewaltsam verknüpft sind.

In dem Folgenden ist ein Versuch gemacht, in dem einfachen Falle einer reflectirenden Kugel die reflectirten Bewegungen aus den Gleichungen für die Oscillationen eines elastischen Mediums abzuleiten. Mit Hülfe der Theorie der Kugelfunctionen kann man diese Aufgabe allgemein lösen, sobald man sich nur über die Grenzbedingungen, durch welche die Reflexion zu Stande kommt, bestimmte Vorstellungen bildet. Es ist dies bekanntlich ein Punkt, über den weder die Theorie noch die Erfahrung bisher genügenden Aufschluss zu geben vermocht hat. Um so mehr wird man es gerechtfertigt finden, wenn im Folgenden die möglichst einfache Hypothese benutzt ist, dass nämlich die Kugel *vollständig* reflectire, und dass, bei Abwesenheit gebrochener Wellen, die einfallenden und die reflectirenden Bewegungen an der Oberfläche der Kugel sich in ihrer Summe genau aufheben. Die Lösung des Problems erfordert dann wesentlich nur die Lösung des auch rein mathematisch interessanten Problems, *den Differentialquotienten einer Function von x, y, z nach einer dieser Veränderlichen in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln, wenn die entsprechende Reihe für die Function selbst bekannt ist.* Die Lösung erfolgt einfach und symmetrisch, wenn man sich statt der Kugelfunctionen der entsprechenden homogenen Functionen n^{ter} Ordnung bedient, deren Untersuchung von *Euler* herrührt, und auf welche ich an einem anderen Orte hingewiesen habe.

Die Resultate der ganzen Untersuchung sind sehr verwickelt, und namentlich für den in der Optik wichtigen Fall einer sehr kleinen Wellenlänge scheint es sehr schwer dieselben einfach in passender Form darzustellen. Der entgegengesetzte Fall eines gegen die Wellenlänge sehr kleinen Radius der reflectirenden Kugel ist dagegen für eine Annäherung sehr geeignet, und man findet eine genauere Discussion dieses Falles am Ende der Abhandlung.

---

§. 1.

Zurückführung der Gleichungen der Elasticität auf getrennte partielle Differentialgleichungen.

Die Gleichungen, von denen die kleinen Bewegungen eines uncrystallinischen Mittels abhängen, sind bekanntlich, wenn u, v, w die Componenten der Verschiebung eines Theilchens ausdrücken, von der Form:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}+b^2\varDelta^2 u, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}+b^2\varDelta^2 v, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}+b^2\varDelta^2 w. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet Θ die Verbindung

$$(2.)\qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

und $\varDelta^2$ stellt, nach *Lamé,* die Operation dar:

$$(3.)\qquad \varDelta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Es ist bekannt, dass in Folge dieser Gleichungen Θ der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = a^2\varDelta^2\Theta$$

genügt, und dass die drei Ausdrücke

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\varDelta^2\varphi$$

sind, wie dies z. B. Herr *Stokes* in seiner Abhandlung über die Beugung (Cambridge Transactions, vol. IX, p. 12) benutzt hat. Aber während so sich gewisse Combinationen der Differentialquotienten von u, v, w als Lösungen einfacher partieller Differentialgleichungen darstellen, scheint es vielmehr umgekehrt wünschenswerth und wird erst dadurch in Wahrheit eine Reduction der Gleichungen (1.) bewerkstelligt, dass man u, v, w selbst aus den Differentialquotienten neuer Functionen zusammensetze, die ihrerseits jenen einfachen Differentialgleichungen genügen. Denn nur in einem solchen Fall kann man behaupten, dass die neuen Gleichungen wirklich die Gleichungen (1.) ersetzen. Zu einer solchen Reduction aber gelangt man durch folgende Betrachtung.

Man kann immer setzen:

$$(4.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial P}{\partial x} + u', \\ v = \dfrac{\partial P}{\partial y} + v', \\ w = \dfrac{\partial P}{\partial z} + w', \end{cases}$$

und dann, da vier unbestimmte Functionen an die Stelle von dreien getreten sind, die Bedingung hinzufügen:

$$(5.)\quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen (4.), (5.) lassen sich in der That immer zusammen erfüllen, welches auch die Werthe der Functionen u, v, w sein mögen; und zwar auf unendlich viel Weisen, indem für P jede Lösung der Differentialgleichung, welche sich durch Elimination der u', v', w' ergiebt,

$$\varDelta^2 P = \Theta$$

gesetzt werden kann; während freilich, nachdem über P verfügt worden, u', v', w' völlig bestimmt sind.

Die Gleichungen (1.) gehen hierdurch über in:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = b^2 \varDelta^2 u' - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = b^2 \varDelta^2 v' - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = b^2 \varDelta^2 w' - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

wo Ω die Bedeutung hat:

$$(7.)\qquad \Omega = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 P.$$

Diese Function ist, wie man leicht sieht, indem man die Gleichungen (6.) mit Rücksicht auf (5.) differentiirt, eine Lösung der Gleichung

$$\Delta^2 \Omega = 0.$$

Aber wie auch den Werthen der u, v, w gemäss die Functionen P, u', v', w' zu bestimmen sein mögen, immer kann man zu denselben, ohne die Werthe von u, v, w zu verändern, solche Functionen Q, u'', v'', w'' respective addiren, welche den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + u'' = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} + v'' = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} + w'' = 0,$$
$$\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} = -\Delta^2 Q = 0.$$

Man kann daher, wegen der letzten Gleichung, Q immer so bestimmen, dass $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\Omega$; und da die Ausdrücke $\Delta^2 u''$, $\Delta^2 v''$, $\Delta^2 w''$ offenbar ebenfalls verschwinden, dann an Stelle von (6.) folgende Gleichungen setzen:

$$\frac{\partial^2 (u'+u'')}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 (u'+u''),$$
$$\frac{\partial^2 (v'+v'')}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 (v'+v''),$$
$$\frac{\partial^2 (w'+w'')}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 (w'+w''),$$

während die u, v, w die Formen annehmen:

$$u = \frac{\partial (P+Q)}{\partial x} + u' + u'',$$
$$v = \frac{\partial (P+Q)}{\partial y} + v' + v'',$$
$$w = \frac{\partial (P+Q)}{\partial z} + w' + w'',$$

während endlich aus der Gleichung (7.) sich noch ergiebt:

$$\frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 (P+Q).$$

Setzt man nun wieder die Buchstaben P, u', v', w' an Stelle von $P+Q$, $u'+u''$, $v'+v''$, $w'+w''$, so hat man offenbar den Satz bewiesen, dass die Gleichungen (4.), (5.) zusammen auch dann noch die allgemeinste Lösung der Gleichungen (1.) repräsentiren, wenn darin u', v', w' beliebige Lösungen der Gleichung

$$(8.) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 \varphi,$$

P eine beliebige Lösung der Gleichung

$$(9.) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \psi$$

bedeutet. Aber die drei ersten Lösungen sind durch die Bedingung (5.) noch verbunden. Um diese zu umgehen, setze man

$$u' = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v' = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

und lasse dann U, V, W abermals Lösungen der Gleichung (8.) bedeuten. Dann erhält man folgenden Satz:

Satz 1.

Die allgemeinsten Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + b^2 \Delta^2 u,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + b^2 \Delta^2 v,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + b^2 \Delta^2 w,$$

erhält man, indem man setzt:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wo P eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 P,$$

U, V, W aber Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = b^2 \Delta^2 \varphi$$

bedeuten.

§. 2.

Entwickelung von P, U, V, W nach Kugelfunctionen.

Die soeben angeführte Form der Lösung ist sehr geschickt um eine allgemeine Entwickelung nach Kugelfunctionen eintreten zu lassen.

Es ist bekannt, dass eine innerhalb eines gewissen Raumes endliche, eindeutige und stetige Function sich innerhalb desselben nach gewissen Functionen zweier Winkel entwickeln lässt, deren Coefficienten dann nur noch den Radius enthalten. Aber die Unsymmetrie, welche durch die Einführung zweier Winkel bedingt wird, drängt darauf hin, für allgemeinere Untersuchungen diese Entwickelung zu modificiren. Jene Functionen zweier Winkel haben die Eigenschaft, mit einer gewissen Potenz des Radius Vector multiplicirt, in ganze homogene Functionen der Coordinaten überzugehen; man kann daher an die Stelle einer Entwickelung nach jenen Functionen zweier Winkel eine Entwickelung nach gewissen ganzen homogenen Functionen der Coordinaten treten lassen, in deren Coefficienten nur der Radius Vector noch auftritt. Es sei mir erlaubt diese homogenen Functionen der Kürze wegen noch als Kugelfunctionen zu bezeichnen. In einer Entwickelung der angegebenen Art treten dann vier formell unabhängige Grössen auf: die Coordinaten x, y, z, so weit dieselben in den Kugelfunctionen vorkommen, und der Radius Vector, letzterer in doppelter Weise, einmal in den Coefficienten, sodann aber auch wohl in den Kugelfunctionen selbst, sofern etwa in diesen die Verbindung $x^2+y^2+z^2 = r^2$ den homogenen Functionen integrirend angehört. Im Folgenden werde ich auch durch die Bezeichnung diese beiden Arten des Vorkommens unterscheiden; und zwar soll der Radius Vector durch r bezeichnet werden, soweit er innerhalb der homogenen Functionen als Verbindung der Veränderlichen auftritt; durch $\mathfrak{r}$ aber, soweit er nur den Coefficienten jener Functionen angehört.

Jene homogenen Functionen werden dadurch charakterisirt, dass, wenn M_n eine solche bezeichnet, und n den Grad der Function ausdrückt, sowohl M_n als $\frac{M_n}{r^{2n+1}}$ der Gleichung

$$\Delta^2(\varphi) = 0$$

genügen. Und somit ist also die Aufgabe, die Grössen u, v, w nach Functionen M_n dergestalt zu entwickeln, dass nur noch $\mathfrak{r}$ in den Coefficienten dieser Entwickelung auftritt.

Betrachten wir zunächst etwa die Function P, welche der Gleichung genügt:

$$(10.)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 P.$$

In derselben bezieht sich die Operation Δ^2 sowohl auf die Veränderlichen x, y, z, soweit sie in die aus P entspringenden Kugelfunctionen explicite eingehen, als auf dieselben Veränderlichen, soweit sie in $\mathfrak{r}$ enthalten sind. Trennt man beides, und bezieht Δ^2 nur noch auf die explicite vorkommenden x, y, z, so muss man für $\Delta^2 P$ schreiben:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\mathfrak{r}^2 \frac{\partial P}{\partial \mathfrak{r}}\right) + \frac{2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \Delta^2 P.$$

In diesem Sinne aber verschwindet $\Delta^2 P$, da jedes einzelne Glied der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügt; und setzt man

$$(11.)\qquad P = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots$$

so ist ferner

$$x\frac{\partial M_n}{\partial x} + y\frac{\partial M_n}{\partial y} + z\frac{\partial M_n}{\partial z} = nM_n,$$

so dass die Gleichung (10.) übergeht in:

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right)\right\}.$$

Bemerken wir nun, dass die einzelnen Glieder dieser Entwickelung, da sie nur nach den in den Coefficienten enthaltenen Grössen t, $\mathfrak{r}$ differentiirt werden, selbst Kugelfunctionen sind, so löst sich die vorstehende Gleichung sofort in die einzelnen auf:

$$(12.)\qquad \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right) = 0,$$

welche die in der Entwickelung von P auftretenden Functionen M als Functionen der Zeit und des Radius Vector definiren.

Setzen wir ganz ebenso:

$$(13.)\qquad \begin{cases} U = M_0^u + M_1^u + M_2^u + \cdots, \\ V = M_0^v + M_1^v + M_2^v + \cdots, \\ W = M_0^w + M_1^w + M_2^w + \cdots, \end{cases}$$

so sind die Functionen M_n^u, M_n^v, M_n^w in gleicher Weise als Functionen von $\mathfrak{r}$, t definirt durch die gemeinsame Differentialgleichung:

$$(14.)\qquad \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} - b^2\left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right) = 0.$$

Hierdurch ist also die Entwickelung von P, U, V, W auf die Betrachtung der Differentialgleichungen (12.), (14.) zurückgeführt, welche nur noch zwei Veränderliche enthalten.

§. 3.
Sätze über die Functionen M_n.

Man sieht, dass die Functionen M_n noch gewisse Willkürlichkeiten enthalten. Aber die Formen, in welchen die willkürlichen Functionen in die verschiedenen M eingehen, stehen unter einander in einer bestimmten Verwandtschaft, so dass aus dem allgemeinsten M_n andere Functionen abgeleitet werden können, welche in Bezug auf die Veränderlichen x, y, z oder in Bezug auf die Veränderlichen $\mathfrak{r}$, t oder endlich in beiden Beziehungen den Character der Functionen M_{n-1} und M_{n+1} besitzen.

Betrachten wir zunächst eine beliebige homogene Function n^{ter} Ordnung φ_n von x, y, z, welche der Gleichung $\Delta^2(\varphi_n) = 0$ genügt. Dann genügt immer auch $\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}$ derselben Gleichung, aber auch, wie aus Differentiirung der Differentialgleichung sofort folgt, die Functionen:

$$\alpha\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi_n}{\partial z},$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}.$$

Nun ist der erste Ausdruck eine homogene Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von x, y, z, also eine Kugelfunction $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; der zweite ist eine Function $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, dividirt durch r^{2n+3}, aber mit der Eigenschaft begabt (wie eine kleine Rechnung sofort lehrt), dass sein Zähler für sich der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügt. Dieser Zähler ist also eine Kugelfunction $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und man hat demnach folgenden Satz:

Satz 2.

Ist φ_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung, so ist

$$\alpha\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}$$

eine Kugelfunction $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und

$$r^{2n+3}\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right\}$$

eine Kugelfunction $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Man kann selbst zeigen, dass die beiden letzten Functionen die allgemeinsten ihrer Art sind, wenn φ_n ganz allgemein vorausgesetzt wird.

Wenden wir nunmehr eine ähnliche Betrachtung auf die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 P$$

an. Ist P eine Lösung, so ist offenbar der Ausdruck

$$\delta P = \alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \frac{\partial P}{\partial z}$$

eine andere; oder, wenn man in P wieder die Veränderlichen $x, y, z, \mathfrak{r}$ unterscheidet:

$$\delta P = \alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\mathfrak{r}} \frac{\partial P}{\partial \mathfrak{r}}.$$

Setzt man nun für P die oben gefundene Entwickelung nach Kugelfunctionen:

$$P = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots,$$

so wird:

$$(15.)\quad \begin{cases} \delta P = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \left\{\alpha\left(\frac{\partial M_n}{\partial x} + \frac{x}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right) + \beta\left(\frac{\partial M_n}{\partial y} + \frac{y}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right) + \gamma\left(\frac{\partial M_n}{\partial z} + \frac{z}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right)\right\} \\ \quad = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\left\{\alpha \frac{\partial T_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial T_n}{\partial y} + \gamma \frac{\partial T_n}{\partial z}\right\}\right. \\ \qquad\qquad \left. + r^{2n+3}\left\{\alpha \frac{\partial}{\partial x}\frac{S_n}{r^{2n+1}} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\frac{S_n}{r^{2n+1}} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\frac{S_n}{r^{2n+1}}\right\}\right], \end{cases}$$

wo

$$(16.)\quad \begin{cases} T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}} \frac{\partial . \mathfrak{r}^{2n+1} M_n}{\partial \mathfrak{r}}, \\ S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \end{cases}$$

gesetzt ist, und wo bei den Differentiationen nach x, y, z die Grösse $\mathfrak{r}$ als constant angesehen wird.

Bemerkt man nun, dass T_n, S_n in Rücksicht auf x, y, z Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung sind, dass demnach in Folge des Theorems 2. auch die Ausdrücke

$$\alpha \frac{\partial T_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial T_n}{\partial y} + \gamma \frac{\partial T_n}{\partial z},$$

$$r^{2n+3}\left\{\alpha \frac{\partial}{\partial x}\frac{S_n}{r^{2n+1}} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\frac{S_n}{r^{2n+1}} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\frac{S_n}{r^{2n+1}}\right\}$$

Kugelfunctionen bezüglich der $(n-1)^{\text{ten}}$ und $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, so zeigt sich, dass der Ausdruck δP nach Kugelfunctionen geordnet ist, dass also die einzelnen Glieder des Ausdrucks auch in Bezug auf $\mathfrak{r}$, t den Charakter der M_n haben müssen. Da aber in der vorliegenden Form die T, S nur nach den x, y, z differentiirt vorkommen, welche in Bezug auf die $\mathfrak{r}$, t constant sind, so muss dieser Charakter den S, T an sich zukommen; es muss also S_n in Bezug auf die Veränderlichen $\mathfrak{r}$, t von der Art der M_{n+1}, T_n von der Art der M_{n-1} sein. Und dies giebt folgenden Satz:

Satz 3.

Ist M_n eine Function von $\mathfrak{r}$, t, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}\right\}$$

genügt, so ist

$$T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\frac{\partial \,.\, \mathfrak{r}^{2n+1} M_n}{\partial \mathfrak{r}}$$

eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_{n-1}}{\partial \mathfrak{r}}\right\},$$

und

$$S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}$$

eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+4}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_{n+1}}{\partial \mathfrak{r}}\right\}.$$

Und zwar erhält man in T_n, S_n offenbar die allgemeinsten Formen von M_{n-1}, M_{n+1}, wenn die zu Grunde gelegte Function M_n allgemeinster Natur war.

§. 4.

Entwickelung der Verschiebungen.

Aus der Formel (15.) aber ergiebt sich noch ein anderes Resultat, nämlich die Entwickelung der Differentialquotienten einer Function nach den Coordinaten, wenn die Entwickelung der Function selbst nach Kugelfunctionen vorliegt. In der That ist bei Ableitung der Gleichung (15.) der Umstand noch nicht benutzt, dass P einer gewissen Differentialgleichung genügen sollte; man kann daher in dieser Gleichung unter P jede Function der Coordinaten verstehen, und hat sodann folgenden Satz, indem man die Coefficienten von α, β, γ einzeln betrachtet:

Satz 4.

Sei P eine beliebige Function der Coordinaten, und sei, nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$P = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots;$$

setzt man dann in ähnlicher Weise:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots,$$

so wird

$$M_n^x = \frac{1}{2n+3}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial x} + \frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{S_{n-1}}{r^{2n-1}},$$
$$M_n^y = \frac{1}{2n+3}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial y} + \frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{S_{n-1}}{r^{2n-1}},$$
$$M_n^z = \frac{1}{2n+3}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial z} + \frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{S_{n-1}}{r^{2n-1}},$$

wo

$$T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\frac{\partial . \mathfrak{r}^{2n+1} M_n}{\partial \mathfrak{r}}, \qquad S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}},$$

und wo bei der Differentiation von S_n, T_n nach x, y, z die Grösse $\mathfrak{r}$ als constant gilt.

Dieser Satz führt nun sofort zur Entwickelung der Verschiebungen nach Kugelfunctionen. Bewahren wir die Buchstaben M, S, T für die aus P entspringenden Terme, und bezeichnen die analogen Grössen für U, V, W durch

$$M^u,\quad S^u,\quad T^u;\quad M^v,\quad S^v,\quad T^v;\quad M^w,\quad S^w,\quad T^w;$$

so erhalten wir Entwickelungen von der Form

$$(17.)\quad \begin{cases} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \\ v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots, \\ w = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots, \end{cases}$$

in denen die Terme u_n, v_n, w_n folgende Ausdrücke annehmen:

$$(18.)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2n+3}\left\{\dfrac{\partial T_{n+1}}{\partial x}+\dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial y}-\dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial z}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{r^{2n+1}}{2n-1}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S_{n-1}}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S^w_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S^v_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ v_n = \dfrac{1}{2n+3}\left\{\dfrac{\partial T_{n+1}}{\partial y}+\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial z}-\dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial x}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{r^{2n+1}}{2n-1}\left\{\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S_{n-1}}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S^u_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S^w_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ w_n = \dfrac{1}{2n+3}\left\{\dfrac{\partial T_{n+1}}{\partial z}+\dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial x}-\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial y}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{r^{2n+1}}{2n-1}\left\{\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S_{n-1}}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S^v_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S^u_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern nun allerdings die vollständige allgemeine Entwickelung von u, v, w nach Kugelfunctionen. Aber dieselbe hat nicht die einfachste Form, deren sie fähig ist, und führt namentlich auf grössere Rechnungen für die Bestimmung der M, wenn die Werthe der u, v, w für einen bestimmten Werth von r gegeben vorliegen. Beiden Bedenken entgeht man, wenn man den u_n, v_n, w_n, was sehr leicht ist, die Form giebt:

$$(19.)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\dfrac{\partial t_n}{\partial y}-y\dfrac{\partial t_n}{\partial z}, \\ v_n = \dfrac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\dfrac{\partial t_n}{\partial z}-z\dfrac{\partial t_n}{\partial x}, \\ w_n = \dfrac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\dfrac{\partial t_n}{\partial x}-x\dfrac{\partial t_n}{\partial y}, \end{cases}$$

wo q_{n-1}, t_n, p_{n+1} Kugelfunctionen respective der $(n-1)^{\text{ten}}$, n^{ten}, $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung bedeuten, und wo bei den Differentiationen immer r als constant anzusehen ist. Bemerkt man nämlich, dass in Folge der Eigenschaften der Kugelfunctionen:

$$(20.)\quad \Delta^2 p_{n+1}=0,\quad \Delta^2 q_{n-1}=0,\quad \Delta^2 t_n=0,$$

so ergiebt sich aus (19.) leicht:

$$(21.)\quad \begin{cases} n.2n+1.q_{n-1} = -\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial x}+\dfrac{\partial v_n}{\partial y}+\dfrac{\partial w_n}{\partial z}\right\}, \\ n+1.2n+1.p_{n+1} = -r^{2n+3}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u_n}{r^{2n+1}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{v_n}{r^{2n+1}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{w_n}{r^{2n+1}}\right\}, \\ n.n+1.t_n = x\left(\dfrac{\partial w_n}{\partial y}-\dfrac{\partial v_n}{\partial z}\right)+y\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial z}-\dfrac{\partial w_n}{\partial x}\right)+z\left(\dfrac{\partial v_n}{\partial x}-\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right),\text{*)} \end{cases}$$

*) Für $n=0$ verschwinden beide Seiten dieser Gleichung. Aber in der That ist der Werth von t_0 in den Gleichungen (19.) vollkommen gleichgültig, da die von demselben herrührenden Glieder in u_n, v_n, w_n identisch verschwinden.

und zwar sind die auf diese Weise erhaltenen Werthe von t_n, p_{n+1}, q_{n-1} wirklich mit den Gleichungen (20.) in Uebereinstimmung, da u_n, v_n, w_n Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung bedeuten sollten, und sind also auch wirklich p_{n+1}, q_{n-1}, t_n Kugelfunctionen der angegebenen Ordnung.

Substituirt man aber in den Ausdrücken (21.) rechts die Werthe von u_n, v_n, w_n, wie sie in den Gleichungen (18.) enthalten sind, so kommt:

$$(22.)\quad\begin{cases} q_{n-1} = \dfrac{S_{n-1}}{2n-1} - \dfrac{1}{n.2n-1}\Big\{x\Big(\dfrac{\partial S^w_{n-1}}{\partial y} - \dfrac{\partial S^v_{n-1}}{\partial z}\Big) \\ \qquad\qquad + y\Big(\dfrac{\partial S^u_{n-1}}{\partial z} - \dfrac{\partial S^w_{n-1}}{\partial x}\Big) + z\Big(\dfrac{\partial S^v_{n-1}}{\partial x} - \dfrac{\partial S^u_{n-1}}{\partial y}\Big)\Big\}, \\ p_{n+1} = \dfrac{T_{n+1}}{2n+3} + \dfrac{1}{n+1.2n+3}\Big\{x\Big(\dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial y} - \dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial z}\Big) \\ \qquad\qquad + y\Big(\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial z} - \dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial x}\Big) + z\Big(\dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial x} - \dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial y}\Big)\Big\}, \\ t_n = \dfrac{1}{n+1.2n+3}\Big(\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial y} + \dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial z}\Big) \\ \qquad\qquad - \dfrac{r^{2n+1}}{n.2n-1}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S^u_{n-1}}{r^{2n-1}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S^v_{n-1}}{r^{2n-1}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S^w_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big). \end{cases}$$

Erinnern wir uns nun der Gleichungen (16.), mit deren Hülfe sich die T und S durch die ursprünglich eingeführten Kugelfunctionen M ausdrückten, so kann man den ersten beiden Gleichungen auch die Gestalt geben:

$$(23.)\quad\begin{cases} q_{n-1} = -\dfrac{\partial}{\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}}\Big\{\dfrac{M_{n-1}}{2n-1} - \dfrac{M'_{n-1}}{n}\Big\}, \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\Big\{\mathfrak{r}^{2n+3}\Big(\dfrac{M_{n+1}}{2n+3} + \dfrac{M'_{n+1}}{n+1}\Big)\Big\}, \end{cases}$$

wo M'_n die Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet:

$$(24.)\quad M'_n = \frac{1}{2n+1}\Big\{x\Big(\frac{\partial M^w_n}{\partial y} - \frac{\partial M^v_n}{\partial z}\Big) + y\Big(\frac{\partial M^u_n}{\partial z} - \frac{\partial M^w_n}{\partial x}\Big) + z\Big(\frac{\partial M^v_n}{\partial x} - \frac{\partial M^u_n}{\partial y}\Big)\Big\}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Functionen M^u, M^v, M^w nur noch in zwei Verbindungen vorkommen, in den M'_n und in den t_n. Erwägt man zugleich, dass jene Functionen nur die Eigenschaft besitzen sollten, Kugelfunctionen zu sein, und in Bezug auf $\mathfrak{r}$, t den Gleichungen (14.) zu genügen, dass beide Eigenschaften aber den Functionen M'_n, t_n in gleicher Weise zukommen, so darf man offenbar statt der Functionenreihen M^u, M^v, M^w die beiden Functionenreihen M'_n, t_n unmittelbar einführen; mit der einzigen hinzutretenden Bedingung, dass, wie man aus (24.) sieht, die Function M'_0 verschwinde. Und so erhält man eine Form der Lösung, welche sich in folgendem Satze aussprechen lässt:

Satz 5.

Die Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x}+b^2\varDelta^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial y}+b^2\varDelta^2 v,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial z}+b^2\varDelta^2 w$$

lassen sich nach Kugelfunctionen in die Reihen

$$u = u_0+u_1+u_2+\cdots,$$

$$v = v_0+v_1+v_2+\cdots,$$

$$w = w_0+w_1+w_2+\cdots$$

entwickeln, d. h. nach homogenen Functionen, die einzeln der Gleichung $\varDelta^2\varphi=0$ *genügen, und in deren Coefficienten dann nur noch der Radius Vector* $\mathfrak{r}$ *eingeht; und zwar ist:*

$$u_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial t_n}{\partial y}-y\frac{\partial t_n}{\partial z},$$

$$v_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial t_n}{\partial z}-z\frac{\partial t_n}{\partial x},$$

$$w_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial t_n}{\partial x}-x\frac{\partial t_n}{\partial y},$$

wo

$$q_{n-1} = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left\{\frac{M_{n-1}}{2n-1}-\frac{M'_{n-1}}{n}\right\},$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left\{\mathfrak{r}^{2n+3}\left(\frac{M_{n+1}}{2n+3}+\frac{M'_{n+1}}{n+1}\right)\right\},$$

und wo M_n, M'_n, t_n *beliebige Kugelfunctionen* n^{ter} *Ordnung bedeuten; die Coefficienten der letzteren aber sind Functionen von* $\mathfrak{r}$, t, *und zwar genügen die Coefficienten von* M_n *der Gleichung:*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathfrak{r}^2}+\frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{r}}\right\},$$

die Coefficienten von M'_n, t_n *aber der Gleichung:*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathfrak{r}^2}+\frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{r}}\right\},$$

wozu noch die Bedingung tritt, dass M'_0 *verschwinde.*

§. 5.

Integration der Gleichungen, denen die M in Bezug auf $\mathfrak{r}$, t genügen. Einführung der Grenzbedingungen.

Die Integration der Gleichungen (12.), (14.) ist leicht und bekannt. Nimmt man in (12.) für M_n die Form an:

$$M_n = \frac{c}{\mathfrak{r}^{n+1}}\{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)\}+\frac{c'}{\mathfrak{r}^{n+2}}\{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)\}+\cdots$$
$$+\frac{c^{(n)}}{\mathfrak{r}^{2n+1}}\{f(\mathfrak{r}-at)+F(\mathfrak{r}+at)\},$$

wo die c constante Coefficienten, die Indices bei den Functionszeichen Differentialquotienten bedeuten, so findet sich aus der Differentialgleichung selbst für die c eine einfache Recursionsformel, so dass man

$$(25.)\quad \begin{cases} M_n = \dfrac{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+1}}-\dfrac{n.n+1}{2}\,\dfrac{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+2}} \\ \qquad +\dfrac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4}\,\dfrac{f^{(n-2)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-2)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+3}} \\ \qquad -+\cdots\pm\dfrac{1.2\ldots 2n}{2.4\ldots 2n}\,\dfrac{f(\mathfrak{r}-at)+F(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{2n+1}} \end{cases}$$

setzen darf. Der dritte Satz findet hierdurch eine directe Bestätigung; denn indem man S_n, T_n bildet, wird:

$$(26.)\quad \begin{cases} S_n = -\Big\{\dfrac{f^{(n+1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n+1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+2}}-\dfrac{n+1.n+2}{2}\,\dfrac{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+3}} \\ \qquad +\dfrac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}\,\dfrac{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+4}}-+\cdots \\ \qquad \mp\dfrac{1.2\ldots 2n+2}{2.4\ldots 2n+2}\,\dfrac{f(\mathfrak{r}-at)+F(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{2n+3}}\Big\}, \\ T_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n+1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n}}-\dfrac{n-1.n}{2}\,\dfrac{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+1}} \\ \qquad +\dfrac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\,\dfrac{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+2}}-+\cdots \\ \qquad \mp\dfrac{1.2\ldots 2n-2}{2.4\ldots 2n-2}\,\dfrac{f''(\mathfrak{r}-at)+F''(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{2n-1}}, \end{cases}$$

so dass S_n sofort, abgesehen vom Vorzeichen, die Form von M_{n+1} annimmt, und T_n die Form von M_{n-1}, wenn man nicht f und F sondern f'' und F'' als die willkürlichen Functionen betrachtet.

Es bleibt also nur die Aufgabe übrig, die in den M_n, M'_n, t_n vorkommenden willkürlichen Functionen von $\mathfrak{r}-at$ und $\mathfrak{r}+at$, welche ausserdem

Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung in Bezug auf x, y, z sein müssen, den etwa gegebenen Grenzbedingungen gemäss zu bestimmen. Die vorliegenden Entwickelungen sind immer anwendbar, wenn die Zustände des Mediums für irgend zwei Werthe von $\mathfrak{r}$, d. h. auf zwei concentrischen Kugelflächen, gegeben sind. Entwickelt man die Functionen, welche auf einer solchen Kugelfläche die Werthe von u, v, w angeben, nach den gewöhnlichen Functionen zweier Winkel, so werden die Coefficienten nur noch Functionen von t; und man verwandelt eine solche Entwickelung sofort in die hier benutzte Entwickelung nach homogenen Functionen, indem man das Aggregat aller Glieder n^{ter} Ordnung mit der n^{ten} Potenz des constanten Radius multiplicirt und dividirt. Indem man aber die so erhaltene Entwickelung mit der allgemeinen vergleicht, ergiebt sich eine Reihe von Bedingungen, welche ausdrücken, dass für den gegebenen Werth des Radius die homogenen Functionen n^{ter} Ordnung der allgemeinen Entwickelung von u, v, w mit den entsprechenden Gliedern der gegebenen Werthe identisch werden. Man erhält diese Bedingungen sofort aus (19.), indem man unter u_n, v_n, w_n die n^{ten} Glieder in der Entwickelung der *gegebenen* Functionen u, v, w versteht. Aber da bei dem Uebergange von (19.) zu (21.) nirgend nach dem hier als constant betrachteten Radius $\mathfrak{r}$ differentiirt ist, so kann man ohne Weiteres statt (19.) die Gleichungen (21.), (23.) benutzen, welche durch die einfache Weise, in der M_n, M'_n, t_n darin eingehen, grosse Vortheile darbieten. Man kann dies in folgende Regel zusammenfassen:

Sollen die allgemeinen Werthe von u, v, w für einen Werth von $\mathfrak{r}$ gegebenen Functionen $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ gleich werden, so bestimme man die diesen letzteren entsprechenden Functionen $\overline{p_n}$, $\overline{q_n}$, $\overline{t_n}$, durch welche die Entwickelung derselben nach Kugelfunctionen die Form (17.), (19.) *annimmt; dann ist die geforderte Gleichheit dadurch ausgedrückt, dass für den gegebenen Werth von $\mathfrak{r}$:*

$$p_n = \overline{p_n}, \qquad q_n = \overline{q_n}, \qquad t_n = \overline{t_n}.$$

Da nun in den allgemeinen Ausdrücken von p_n, q_n, t_n nur sechs willkürliche Functionen vorkommen, so scheint daraus hervorzugehen, dass die Bewegungen innerhalb einer Kugelschale vollkommen bestimmt sein müssen, wenn die Bewegungsgleichungen für keinen Punkt im Innern aufhören zu gelten, und wenn ausserdem die Bewegung auf beiden Begrenzungsflächen gegeben ist. Dies ist aber nicht ganz richtig; in der That würde daraus folgen, dass, wenn auf beiden Begrenzungsflächen absolute Ruhe herrscht, dieselbe auch im Innern der Schale herrschen müsste. In Wahrheit ist dies nicht nothwendig; vielmehr überzeugt man sich leicht, dass auch in einem solchen Zustande noch eine unendlich grosse Anzahl von Bewegungen im Innern herrschen könne; welche dann also auch bei anderweitig gegebenen Zuständen der Oberfläche begleitend auftreten können. Ein Beispiel hierfür werde ich im folgenden Paragraphen geben.

§. 6.

Vollständige Behandlung des Falles, wo eine, auf einer bestimmten Kugelfläche gegebene Bewegung sich ins Unendliche ausbreiten kann.

Ein besonderes Interesse bietet der Fall, wo die eine Kugelfläche ins Unendliche rückt. In diesem Falle ist es zugleich möglich, die vollständige Bestimmung der willkürlichen Functionen ganz allgemein auszuführen. Die Bedingung freilich, welche an der unendlich weit entfernten Kugelfläche erfüllt sein muss, ist nicht mehr in der im Vorigen angegebenen Weise zu benutzen. Dieselbe kann aber nach *Helmholtz* dadurch ausgedrückt werden, dass im Unendlichen, wo keine ausserhalb liegende Erregungsmittelpunkte mehr gedacht werden dürfen, nur noch Wellenbewegungen auftreten können, deren Gang von innen nach aussen gerichtet ist.

Denken wir uns, um die Vorstellungen zu fixiren, eine beliebige Reihe von Erregungscentren im Raume vertheilt; und denken wir uns, dass die von diesen ausgehenden Bewegungen an einer Kugel vom Radius ε reflectirt werden. Die Bewegungen an irgend einer Stelle des Raumes kann man dann durch die Componenten

$$u+U, \quad v+V, \quad w+W$$

ausdrücken, wo U, V, W die Bewegungen sind, welche in Abwesenheit der Kugel, lediglich in Folge der Erregungsmittelpunkte, allein vorhanden sein würden; u, v, w aber diejenigen Bewegungen, welche durch die Reflexion hinzutreten. Die Bewegungen U, V, W sind dann völlig bekannt; sie haben die Eigenschaft in verschiedenen einzelnen Punkten des Raumes, nämlich in den Erregungscentren selbst, unendlich gross zu werden, woraus sich denn weiter ergiebt, dass die Form ihrer Entwickelung nach Kugelfunctionen ganz verschieden sein wird innerhalb der verschiedenen Kugelflächen, welche vom Anfangspunkte als Mittelpunkt sich durch die verschiedenen Erregungspunkte legen lassen. Für die unbekannten und gesuchten Functionen u, v, w hingegen, welche die reflectirte Bewegung darstellen, findet offenbar eine solche

Unstetigkeit nicht statt; diese Functionen werden sich also im Allgemeinen auch überall durch dieselbe Entwickelung nach Kugelfunctionen darstellen lassen.

Dies vorausgesetzt werden also, nach dem Früheren, in der Unendlichkeit, ja selbst in dem Theile des Raumes, welcher jenseits der Erregungspunkte liegt, nur Wellen auftreten können, welche nach Aussen gerichtet sind; oder es werden in den u, v, w überhaupt nur Functionen von $\mathfrak{r}-at$, $\mathfrak{r}-bt$, nicht aber Functionen von $\mathfrak{r}+at$, $\mathfrak{r}+bt$ auftreten dürfen. Hierdurch reduciren sich die vorkommenden willkürlichen Functionen sofort auf die Hälfte. Aber noch ein wesentlicherer Vortheil wird erreicht: man kann den Grenzbedingungen sofort die Gestalt von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen geben, deren abhängige Veränderliche die gesuchten willkürlichen Functionen sind, während die unabhängige Veränderliche die Zeit wird.

Die Natur der Bedingungen, welche an der Grenze zweier elastischen Medien auftreten, ist bis jetzt noch nicht endgiltig festgestellt. Ich werde mich daher der möglichst einfachen Vorstellung bedienen, dass die Kugelfläche mit dem Radius ε die Bewegungen vollkommen reflectire, oder mit anderen Worten, dass die Summe der einfallenden und der reflectirten Bewegungen an der Oberfläche gleich Null sei. Man hat also für $\mathfrak{r}=\varepsilon$:

$$u=-U,\qquad v=-V,\qquad w=-W,$$

und hieraus folgt, wenn man sich U, V, W nach der Weise der Ausdrücke (17.), (19.) entwickelt denkt, gemäss der im vorigen Paragraphen aufgestellten Regel:

$$(27.)\qquad p_n=-\overline{p}_n,\qquad q_n=-\overline{q}_n,\qquad t_n=-\overline{t}_n.$$

Diese drei Gleichungen zusammen dienen zur Bestimmung der in M_n, M_n', t_n enthaltenen willkürlichen Functionen; und zwar nehmen nach (23.), (25.) diese Gleichungen folgende Gestalt an:

$$(28.)\quad\left\{\begin{aligned}
-\overline{p}_n &= \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^n}-\frac{n-1.n}{2}\,\frac{f^{(n)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+1}}+\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\,\frac{f^{(n-1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+2}}-\cdots\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n}\left\{\frac{\varphi^{(n+1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^n}-\frac{n-1.n}{2}\,\frac{\varphi^{(n)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+1}}+\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\,\frac{\varphi^{(n-1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+2}}-\cdots\right\};\\
-\overline{q}_n &= -\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+2}}-\frac{n+1.n+2}{2}\,\frac{f^{(n)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+3}}+\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}\,\frac{f^{(n-1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+4}}-\cdots\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\left\{\frac{\varphi^{(n+1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+2}}-\frac{n+1.n+2}{2}\,\frac{\varphi^{(n)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+3}}+\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}\,\frac{\varphi^{(n-1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+4}}-\cdots\right\},\\
-\overline{t}_n &= \frac{\psi^{(n)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+1}}-\frac{n.n+1}{2}\,\frac{\psi^{(n-1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+2}}+\frac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4}\,\frac{\psi^{(n-2)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+3}}-\cdots,
\end{aligned}\right.$$

wo durch f, φ, ψ respective die zu M_n, M'_n, t_n gehörigen willkürlichen Functionen bezeichnet sind. Man sieht, dass diese Gleichungen sich sofort scheiden, indem f, φ aus den ersten beiden gemeinschaftlich, ψ aber aus der letzten allein bestimmt wird.

Bezeichnen wir jetzt durch ξ, η, ζ folgende Functionen der Zeit, in deren Coefficienten noch x, y, z vorkommen:

$$(29.)\qquad \xi = f(\varepsilon - at),\quad \eta = \varphi(\varepsilon - bt),\quad \zeta = \psi(\varepsilon - bt),$$

so hat man auch:

$$\frac{d^k\xi}{dt^k} = (-a)^k f^{(k)}(\varepsilon - at),\quad \frac{d^k\eta}{dt^k} = (-b)^k \varphi^{(k)}(\varepsilon - bt),\quad \frac{d^k\zeta}{dt^k} = (-b)^k \psi^{(k)}(\varepsilon - bt);$$

und die Gleichungen (28.) gehen in folgende gewöhnliche Differentialgleichungen über:

$$(30.)\quad \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\overline{p}_n}{\varepsilon} = \dfrac{1}{2n+1}\left\{\left(\dfrac{a}{\varepsilon}\right)^{n+1}\dfrac{d^{n+1}\xi}{dt^{n+1}} + \dfrac{n-1.n}{2}\left(\dfrac{a}{\varepsilon}\right)^n\dfrac{d^n\xi}{dt^n} + \cdots\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{n}\left\{\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^{n+1}\dfrac{d^{n+1}\eta}{dt^{n+1}} + \dfrac{n-1.n}{2}\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^n\dfrac{d^n\eta}{dt^n} + \cdots\right\}, \\ (-1)^n \overline{q}_n.\varepsilon = -\dfrac{1}{2n+1}\left\{\left(\dfrac{a}{\varepsilon}\right)^{n+1}\dfrac{d^{n+1}\xi}{dt^{n+1}} + \dfrac{n+1.n+2}{2}\left(\dfrac{a}{\varepsilon}\right)^n\dfrac{d^n\xi}{dt^n} + \cdots\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{n+1}\left\{\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^{n+1}\dfrac{d^{n+1}\eta}{dt^{n+1}} + \dfrac{n+1.n+2}{2}\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^n\dfrac{d^n\eta}{dt^n} + \cdots\right\}, \\ (-1)^{n+1}\overline{t}_n.\varepsilon = \left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^n\dfrac{d^n\zeta}{dt^n} + \dfrac{n.n+1}{2}\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}\zeta}{dt^{n-1}} + \cdots. \end{cases}$$

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen zeigt dann, dass die allgemeinsten Werthe der ξ, η, ζ sich aus bekannten Gliedern zusammensetzen, die etwa durch Variation der Constanten erhalten werden, und aus Gliedern respective der Form

$$A.e^{mt\varepsilon},\qquad B.e^{mt\varepsilon},\qquad C.e^{\mu t\varepsilon},$$

wobei das Verhältniss $A:B$ und m sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$(31.)\quad \begin{cases} 0 = \\ \dfrac{A}{2n+1}\left\{(am)^{n+1} + \dfrac{n-1.n}{2}(am)^n + \cdots\right\} + \dfrac{B}{n}\left\{(bm)^{n+1} + \dfrac{n-1.n}{2}(bm)^n + \cdots\right\}, \\ 0 = \\ -\dfrac{A}{2n+1}\left\{(am)^{n+1} + \dfrac{n+1.n+2}{2}(am)^n + \cdots\right\} + \dfrac{B}{n+1}\left\{(bm)^{n+1} + \dfrac{n+1.n+2}{2}(bm)^n + \cdots\right\}, \end{cases}$$

während μ eine Wurzel der Gleichung

$$(32.)\qquad 0 = (b\mu)^n + \frac{n.n+1}{2}(b\mu)^{n-1} + \cdots$$

ist und C völlig willkürlich bleibt.

Die letzte Gleichung giebt n numerische Werthe für die Unbekannte $b\mu$; die ersten beiden Gleichungen führen, da die erste durch m^2 theilbar ist, neben der Doppelwurzel $m=0$ auf eine Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, deren Wurzeln noch von dem Verhältniss $a:b$ anhängen. Hiernach sind also noch, entsprechend einer Kugelfunction n^{ter} Ordnung, $3n$ verschiedene Bewegungen möglich, trotzdem dass auf der Oberfläche der Kugel ε absolute Ruhe herrscht. Aber es ist sehr wichtig zu bemerken, dass unter diesen Bewegungen keine isochron periodischen vorkommen, keine, welche sich durch einen Sinus oder Cosinus darstellen. In der That würde hierzu nöthig sein, dass die Gleichung (32.), sowie diejenige, welche die Elimination von A, B aus (31.) ergiebt, rein imaginäre Wurzeln zulasse. Dann zerfällt, $\mu=\mu'\sqrt{-1}$, $m=m'\sqrt{-1}$ gesetzt, jede dieser Gleichungen in zwei, nämlich (32.) in

$$(33.)\quad \begin{cases} (b\mu')^n-\frac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4}(b\mu')^{n-2}+-\cdots = 0,\\ \frac{n.n+1}{2}\cdot(b\mu')^{n-1}-\frac{n-2.n-1.n.n+1.n+2.n+3}{2.4.6}(b\mu')^{n-4}+-\cdots = 0 \end{cases}$$

und die aus (31.) hervorgehende Gleichung

$$(34.)\quad \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left\{(am)^{n+1}+\frac{n-1.n}{2}(am)^n+\cdots\right\}\left\{(bm)^{n+1}+\frac{n+1.n+2}{2}(bm)^n+\cdots\right\}\\ +\frac{1}{n}\left\{(am)^{n+1}+\frac{n+1.n+2}{2}(am)^n+\cdots\right\}\left\{(bm)^{n+1}+\frac{n-1.n}{2}(bm)^n+\cdots\right\}=0 \end{cases}$$

in die beiden:

$$(35.)\quad \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left[\begin{aligned} &\left\{(am')^{n+1}-\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(am')^{n-1}+-\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1}-\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(bm')^{n-1}+-\cdots\right\}\\ &-\left\{\frac{n-1.n}{2}(am')^n-\frac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(am')^{n-1}+-\cdots\right\}\left\{\frac{n+1.n+2}{2}(bm')^n-\frac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(bm')^{n-2}+-\cdots\right\}\end{aligned}\right]\\ +\frac{1}{n}\left[\begin{aligned} &\left\{(am')^{n+1}-\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(am')^{n-1}+-\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1}-\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(bm')^{n-1}+-\cdots\right\}\\ &-\left\{\frac{n+1.n+2}{2}(am')^n-\frac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(am')^{n-2}+-\cdots\right\}\left\{\frac{n-1.n}{2}(bm')^n-\frac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(bm')^{n-2}+-\cdots\right\}\end{aligned}\right]=0,\\ \frac{1}{n+1}\left[\begin{aligned} &\left\{(am')^{n+1}-\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(am')^{n-1}+-\cdots\right\}\left\{\frac{n+1.n+2}{2}(bm')^n-\frac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(bm')^{n-2}+-\cdots\right\}\\ &+\left\{\frac{n-1.n}{2}(am')^n-\frac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(am')^{n-2}+-\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1}-\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(bm')^{n-1}+-\cdots\right\}\end{aligned}\right]\\ +\frac{1}{n}\left[\begin{aligned} &\left\{(am')^{n+1}-\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(am')^{n-1}+-\cdots\right\}\left\{\frac{n-1.n}{2}(bm')^n-\frac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(bm')^{n-2}+-\cdots\right\}\\ &+\left\{\frac{n+1.n+2}{2}(am')^n-\frac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(am')^{n-2}+-\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1}-\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(bm')^{n-1}+-\cdots\right\}\end{aligned}\right]=0. \end{cases}$$

Von den Gleichungen (33.) ist leicht zu zeigen, was von vorn herein zu vermuthen ist, dass sie niemals zusammen bestehen können, oder dass ihre rein numerische Eliminationsresultante niemals Null ist. Der Beweis soll weiter unten gegeben werden. Die Gleichungen (35.), welche nach Elimination von m' auf eine Gleichung für $\frac{a}{b}$ führen, können, wie es scheint, für gewisse Werthe dieses Verhältnisses bestehen; die Beispiele aber, die man den niedrigsten Werthen von n entnimmt, scheinen für dies Verhältniss ausschliesslich negative Werthe zu geben, welche mit der oben gemachten Voraussetzung, dass a, b positiv seien, im Widerspruch stehen, und also nicht in Betracht kommen. Einen Beweis für die Allgemeinheit eines derartigen Verhaltens, der allerdings sehr wünschenswerth wäre, aufzufinden, ist mir bisher nicht gelungen.

Es folgt aber hieraus das wichtige Resultat, dass, wenn die durch U, V, W dargestellten Bewegungen, wie in den gewöhnlichen Wellen, isochron und periodisch sind, so dass die Ausdrücke links in (30.) aus Gliedern bestehen, welche den Sinus und Cosinus von Vielfachen der Zeit proportional sind, auch die reflectirten Bewegungen, auf welche die Variation der Constanten in Folge der Gleichungen (30.) führt, niemals die Zeit ausserhalb des sin. und cos. enthalten, also gleichfalls aus isochronen Schwingungen bestehen. Und von den unbestimmten Gliedern selbst, auf welche die Integration der Gleichungen (30.) führt, muss man folgerichtig abstrahiren, wenn man wirklich nur die reflectirten Bewegungen, d. h. solche aufsucht, welche, in Folge der einfallenden Bewegungen entstanden, gleichzeitig mit diesen verschwinden. Wenn man also, wie im Folgenden geschehen soll, die einfallenden Bewegungen einfach periodisch und isochron annimmt, so kann man einerseits die Aufgabe als völlig bestimmt ansehen, indem man die reflectirten Bewegungen von vorn herein in gleicher Weise isochron und periodisch annimmt, andererseits ist sie aber in dieser Form immer möglich, insofern nie ein unperiodisches Glied hinzutreten kann, d. h. indem die Nenner der linearen Gleichungen nicht verschwinden können, auf welche das in Frage stehende Problem führt. In der That, das Verschwinden jener Nenner würde nur anzeigen, dass die betrachteten Schwingungen identisch seien mit einer derjenigen, welche auch ohne alle einfallende Schwingungen in dem Medium existiren können, und diese eben sind es, bei welchen die Variation der Constanten auf ein unperiodisches Glied führt.

§. 7.

Einfachste Bewegungen. Einführung der Functionen f, φ.

Nehmen wir an, die einfallenden Bewegungen beständen aus einfachen Schwingungen von der Dauer $\frac{2\pi}{k}$; die Functionen U, V, W bestehen dann aus Gliedern, welche respective mit $\sin kt$ und $\cos kt$ multiplicirt sind. Für die Rechnung aber ist es sehr bequem, statt dessen imaginäre Exponentialgrössen einzuführen, so dass U, V, W mit $e^{kt\sqrt{-1}}$ proportional werden. Dann ist also auch, wenn man nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$\overline{p_n} = P_n e^{kt\sqrt{-1}}, \qquad \overline{q_n} = Q_n e^{kt\sqrt{-1}}, \qquad \overline{t_n} = T_n e^{kt\sqrt{-1}}.$$

Man darf nach dem Vorigen die reflectirten Bewegungen derselben Exponentialgrösse proportional annehmen, so dass eben jener Factor auch den Functionen p_n, q_n, t_n, M_n, M'_n zukommt. Da alsdann

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} = -k^2 M_n,$$

so gehen die partiellen Differentialgleichungen, denen M_n, M'_n, t_n genügten, in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen über:

$$(36.) \qquad a^2\left(\frac{d^2 M_n}{d\mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{dM_n}{d\mathfrak{r}}\right) + k^2 M_n = 0, \quad b^2\left(\frac{d^2 M'_n}{d\mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{dM'_n}{d\mathfrak{r}}\right) + k^2 M'_n = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen erhält man leicht durch Specialisirung aus (25.), oder auch direct. Denn die Gleichung

$$(37.) \qquad \frac{d^2\Omega}{ds^2} + \frac{2n+2}{s}\frac{d\Omega}{ds} + \Omega = 0$$

hat die beiden Lösungen, aus welchen sich die allgemeine sofort zusammensetzt:

$$(38.) \quad \begin{cases} \{f_n(s) + \varphi_n(s)\sqrt{-1}\}\, e^{s\sqrt{-1}} = F_n(s), \\ \{f_n(s) - \varphi_n(s)\sqrt{-1}\}\, e^{-s\sqrt{-1}} = \Phi_n(s), \end{cases}$$

wo f_n, φ_n die folgenden beiden ganzen Functionen von $\frac{1}{s}$ bedeuten:

$$(39.) \quad \begin{cases} f_n(s) = \dfrac{1}{s^{n+1}} - \dfrac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4.s^{n+3}} + \dfrac{n-3\ldots n+4}{2.4.6.8.s^{n+5}} - + \cdots, \\[2ex] \varphi_n(s) = \dfrac{n.n+1}{2s^{n+2}} - \dfrac{n-2\ldots n+3}{2.4.6.s^{n+4}} + \dfrac{n-4\ldots n+5}{2.4\ldots 10.s^{n+6}} - + \cdots. \end{cases}$$

Und so kann man also als die Werthe von M_n, M'_n, t_n folgende Ausdrücke betrachten:

$$(40.)\quad \begin{cases} M_n = A_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t+\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)\sqrt{-1}} \\ \qquad +B_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)\sqrt{-1}}, \\ M'_n = C_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t+\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}} \\ \qquad +D_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)-\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}}, \\ t_n = E_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t+\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}} \\ \qquad +F_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)-\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

in welchen A, B, C, D, E, F homogene Functionen n^{ter} Ordnung von x, y, z bezeichnen, welche der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügen, d. h. Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung.

Die beiden Functionen $F_n(s)$, $\Phi_n(s)$, deren zweite aus der ersten blos durch Aenderung im Vorzeichen des imaginären Theils entsteht, unterliegen einem einfachen Gesetze, welches Functionen F_{n+1}, F_{n-1} aus F_n, und ebenso Φ_{n+1}, Φ_{n-1} aus Φ_n abzuleiten gestattet. Es genügt eine von beiden Functionen zu betrachten. Da nach dem Frühern $-\frac{1}{s}\frac{dM_n}{ds}$ die Form von M_{n+1}, und $\frac{1}{s^{2n}}\frac{d}{ds}\left(s^{2n+1}M_n\right)$ die Form von M_{n-1} hat, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$F_{n+1} = -\frac{\alpha}{s}\frac{dF_n}{ds},$$
$$F_{n-1} = \frac{\beta}{s^{2n}}\frac{d}{ds}(s^{2n+1}F_n),$$

wo α, β constante Zahlen bezeichnen. Die Vergleichung irgend welcher Coefficienten giebt $\alpha = \sqrt{-1}$, $\beta = -\sqrt{-1}$, und es ist also

$$(41.)\quad \begin{cases} F_{n+1} = -\frac{\sqrt{-1}}{s}\frac{dF_n}{ds}, \\ F_{n-1} = -\frac{\sqrt{-1}}{s^{2n}}\frac{d}{ds}(s^{2n+1}F_n). \end{cases}$$

Führt man hier die Werthe der F aus (38.) ein, und sondert Reelles von Imaginärem, so erhält man die Gleichungen:

$$(42.)\quad \begin{cases} f_{n+1} = \dfrac{1}{s}\dfrac{d\varphi_n}{ds} + \dfrac{f_n}{s}, & \varphi_{n+1} = -\dfrac{1}{s}\dfrac{df_n}{ds} + \dfrac{\varphi_n}{s}, \\ f_{n-1} = \dfrac{1}{s^{2n}}\dfrac{d.s^{2n+1}\varphi_n}{ds} + sf_n, & \varphi_{n-1} = -\dfrac{1}{s^{2n}}\dfrac{d.s^{2n+1}f_n}{ds} + s\varphi_n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind für die Theorie der Functionen f, φ sehr wichtig. Zieht man die untereinanderstehenden Gleichungen von einander ab, nachdem man die untern mit s^2 dividirt hat, und eliminirt auf diese Weise die Differentialquotienten, so erhält man eine Recursionsformel, welche jedes Glied in einer der beiden Reihen:

$$f_0,\quad \varphi_1,\quad f_2,\quad \varphi_3,\quad f_4,\quad \dots$$
$$\varphi_0,\quad f_1,\quad \varphi_2,\quad f_3,\quad \varphi_4,\quad \dots$$

aus den beiden vorhergehenden Gliedern zu entwickeln gestattet:

$$(43.)\quad \begin{cases} f_{n+1} = \dfrac{f_{n-1}}{s^2} - \dfrac{(2n+1)\varphi_n}{s^2}, \\ \varphi_{n+1} = \dfrac{\varphi_{n-1}}{s^2} + \dfrac{(2n+1)f_n}{s^2}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen, verbunden mit den Werthen

$$f_0 = \frac{1}{s},\qquad \varphi_0 = 0,$$
$$\varphi_1 = \frac{1}{s^3},\qquad f_1 = \frac{1}{s^2},$$

sind sämmtliche Functionen f, φ vollständig gegeben. Setzt man an Stelle der Gleichungen (43.) die folgenden:

$$s^{n+1}.f_{n+1} = s^{n-1}.f_{n-1} - \frac{2n+1}{s}.s^n\varphi_n,$$
$$s^{n+1}.\varphi_{n+1} = s^{n-1}.\varphi_{n-1} + \frac{2n+1}{s}.s^n f_n,$$

so zeigt sich, dass die beiden Reihen:

$$-s.\varphi_0,\quad s^2.f_1,\quad -s^3.\varphi_2,\quad s^4.f_3,\quad \dots$$
$$s.f_0,\quad s^2.\varphi_1,\quad s^3.f_2,\quad s^4.\varphi_3,\quad \dots$$

Zähler und Nenner der auf einander folgenden Näherungswerthe des Kettenbruchs:

$$\operatorname{tg} s = -\frac{0}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{s} + \cfrac{1}{-\cfrac{3}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{s} + \cfrac{1}{-\cfrac{7}{s} + \text{etc.}}}}}$$

darstellen. Multiplicirt man aber die erste Gleichung (43.) mit φ_n, die zweite mit f_n, und addirt eine Gleichung zu der anderen, so kommt:

$$f_{n+1}\cdot\varphi_n+\varphi_{n+1}\cdot f_n = \frac{1}{s^2}(f_n\cdot\varphi_{n-1}+\varphi_n\cdot f_{n-1}),$$

so dass der Ausdruck links durch Erniedrigung des Index um 1 nur den Factor $\frac{1}{s^2}$ erhält. Durch fortgesetztes Erniedrigen ergiebt sich also, da $f_1\cdot\varphi_0+\varphi_1\cdot f_0=\frac{1}{s^4}$ ist:

$$(44.)\qquad f_{n+1}\cdot\varphi_n+\varphi_{n+1}\cdot f_n = \frac{1}{s^{2n+4}}.$$

Diese Gleichung enthält den im vorigen Paragraphen erwähnten Beweis, dass die Gleichungen (33.) niemals neben einander bestehen können; denn jene Gleichungen gehen nach der hier gewählten Bezeichnung über in:

$$f_n\left(\frac{1}{b\mu'}\right)=0,\qquad \varphi_n\left(\frac{1}{b\mu'}\right)=0,$$

was nach der Gleichung (44.) nicht bestehen kann, ohne dass $b\mu'=0$. Dieser Werth aber genügt jenen Gleichungen keineswegs. —

Setzt man in den Gleichungen (41.) $s=\frac{\mathfrak{r}a}{k}$ und $s=\frac{\mathfrak{r}b}{k}$, so dienen dieselben dazu, den Functionen q_{n-1}, p_{n+1}, welche mit Hülfe der Gleichungen (23.) sich aus den Functionen M, M', t zusammensetzen, eine einfachere Gestalt zu geben. Denn schreibt man die Gleichungen (40.) in der Form:

$$(45.)\qquad \begin{cases} M_n = \left\{A_nF_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+B_n\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \\ M'_n = \left\{C_nF_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+D_n\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \\ t_n = \left\{E_nF_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+F_n\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

so ergiebt sich aus (23.), (41.):

$$(46.)\qquad \begin{cases} q_{n-1} = -\frac{k^2\sqrt{-1}}{(2n-1)a^2}\left\{A_{n-1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+B_{n-1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}} \\ \qquad\qquad +\frac{k^2\sqrt{-1}}{nb^2}\left\{C_{n-1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+D_{n-1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \\ p_{n+1} = \frac{\sqrt{-1}}{2n+3}\left\{A_{n+1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+B_{n+1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}} \\ \qquad\qquad +\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\left\{C_{n+1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+D_{n+1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Und auf diese Weise erhält man durch Substitution der Werthe von q_{n-1}, p_{n-1}, t_n in (19.) die folgenden definitiven Ausdrücke für u_n, v_n, w_n:

$$(47.)\begin{cases}
u_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\left[\begin{aligned}
&F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial A_{n+1}}{\partial x}-\frac{k^2 r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{A_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\\
&\quad+F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial C_{n+1}}{\partial x}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{C_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial E_n}{\partial y}-y\frac{\partial E_n}{\partial z}\right)\\
&+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial B_{n+1}}{\partial x}-\frac{k^2 r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{B_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\\
&\quad+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial D_{n+1}}{\partial x}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial F_n}{\partial y}-y\frac{\partial F_n}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right],\\[2ex]
v_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\left[\begin{aligned}
&F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial A_{n+1}}{\partial y}-\frac{k^2 r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{A_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\\
&\quad+F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial C_{n+1}}{\partial y}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{C_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial E_n}{\partial z}-z\frac{\partial E_n}{\partial x}\right)\\
&+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial B_{n+1}}{\partial y}-\frac{k^2 r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{B_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\\
&\quad+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial D_{n+1}}{\partial y}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial F_n}{\partial z}-z\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right],\\[2ex]
w_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\left[\begin{aligned}
&F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial A_{n+1}}{\partial z}-\frac{k^2 r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{A_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\\
&\quad+F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial C_{n+1}}{\partial z}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{C_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial E_n}{\partial x}-x\frac{\partial E_n}{\partial y}\right)\\
&+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial B_{n+1}}{\partial z}-\frac{k^2 r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{B_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\\
&\quad+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial D_{n+1}}{\partial z}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{D_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial F_n}{\partial x}-x\frac{\partial F_n}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right].
\end{cases}$$

Die Aufsuchung der Functionen u, v, w ist hierdurch auf die Aufsuchung der Kugelfunctionen A, B, C, D, E, F zurückgeführt; und die letztere erfolgt in denjenigen Fällen, für welche diese Entwickelungen passend sind, mit Hülfe linearer Gleichungen, welche sich aus (46.) ergeben. In solcher Weise enthalten diese Gleichungen die Lösung aller Probleme, in welchen die Bewegungen auf zwei concentrischen Kugelschalen gegeben sind, oder auf einer Kugelschale, mit der Bedingung ins Unendliche frei verlaufen zu können. Da inzwischen die Lösungen dieser Aufgaben nach dem Vorigen auf der Hand liegen, so wird es nicht nöthig, im Einzelnen allgemeine Probleme solcher Natur eingehender zu verfolgen.

Mögen die Grenzbedingungen wieder gegeben sein, wie in §. 6; so dass eine Kugel vom Radius ε die einfallenden Bewegungen in den unendlichen Raum hinaus reflectirt. Dann müssen, da nur Functionen von $\mathfrak{r}-at$, $\mathfrak{r}-bt$ vorkommen dürfen, alle diejenigen Glieder verschwinden, welche mit den Functionen $F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)$, $F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)$ multiplicirt sind; es müssen also die Kugelfunctionen A, C, E sämmtlich gleich Null sein. Setzt man dann $\mathfrak{r}=\varepsilon$, und in (45), (46.) für q_n, p_n, t_n die Werthe

$$-P_n.e^{kt\sqrt{-1}},\quad -Q_n.e^{kt\sqrt{-1}},\quad -T_n.e^{kt\sqrt{-1}},$$

welche den aus der einfallenden Bewegung entspringenden Gliedern gleich und entgegengesetzt sind, so erhält man zur Bestimmung der B, D, F folgendes System von linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-\frac{k^2\sqrt{-1}}{2n+1.a^2}\cdot B_n\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{k^2\sqrt{-1}}{(n+1)b^2}\cdot D_n\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right) &= -Q_n,\\
\frac{\sqrt{-1}}{2n+1}\cdot B_n\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{n}\cdot D_n\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right) &= -P_n,\\
F_n\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right) &= -T_n,
\end{aligned}$$

aus deren Auflösung sich die Werthe ergeben*):

$$(48.)\quad\begin{cases}
B_n=(2n+1)\sqrt{-1}\,\dfrac{-\dfrac{b^2Q_n}{n}\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)+\dfrac{k^2P_n}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}{\dfrac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)+\dfrac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}\cdot\dfrac{a^2}{k^2},\\[2ex]
D_n=\sqrt{-1}\,\dfrac{a^2Q_n\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+k^2P_n\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}{\dfrac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)+\dfrac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}\cdot\dfrac{b^2}{k^2},\\[2ex]
F_n=-\dfrac{T_n}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}.
\end{cases}$$

Durch diese Gleichungen im Verein mit (47.) sind u, v, w völlig bestimmt; und es ist auch sehr leicht, von der imaginären Form zu den reellen Ausdrücken überzugehen.

---

*) Für $n=0$ muss mit M_0' auch D_0 verschwinden, und man hat also

$$B_0=\frac{a^2}{k^2\sqrt{-1}}\,\frac{Q_0}{\Phi_1\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}.$$

§. 8.

Betrachtung eines einzelnen Erregungspunktes.

Nach dem Beispiel von *Helmholtz* (dieses Journal Bd. 57) kann man, wenn es sich nur um Bewegungen handelt, deren Quellen in endlicher Entfernung liegen, und welche ins Unendliche frei verlaufen können, als einfachste Lösungen der Gleichung

$$(49.)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta^2\varphi$$

diejenigen betrachten, welche von der Form sind:

$$(50.)\qquad \frac{\sin\frac{k(R-at)}{R}}{R},\qquad \frac{\cos\frac{k(R-at)}{a}}{R},$$

und in welchen

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

die Entfernung von einem festen Punkte x_0, y_0, z_0 bedeutet. Diese Lösungen haben die Eigenschaft, nur für diesen Punkt unendlich gross zu werden, für alle anderen Punkte des Raumes aber endliche Werthe zu behalten. Man kann also die durch (50.) dargestellten Bewegungen so auffassen, als nähmen sie ihren Ursprung in einem Erregungspunkte, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind. Aus dem angeführten Aufsatz folgt sodann, dass beliebige in einem Medium vorhandene Erschütterungen sich entweder auf solche zurückführen lassen, welche von derartigen Erregungspunkten ausgehen, oder auf andere, welche aus Paaren unendlich nahe liegender Erregungspunkte entspringen, deren Intensität unendlich gross ist (a. a. O. p. 23, 24). Es wird also jedenfalls genügen, das im Vorigen behandelte Problem der Reflexion an einer Kugelfläche für den Fall zu untersuchen, wo die einfallenden Bewegungen von der Form (50.) sind und also von einem einzigen Punkte x_0, y_0, z_0 ausgehen. An Stelle der Lösungen (50.) aber werde ich der Bequemlichkeit der Rechnung wegen die imaginäre Lösung

$$\frac{e^{-\frac{k}{a}(R-at)\sqrt{-1}}}{R}$$

betrachten, aus welcher eine zweite sofort durch Aenderung des Vorzeichens von $\sqrt{-1}$ entsteht, während aus einer Combination beider die Lösungen (50.) erhalten werden.

Auf dieselbe Weise kann man bei der Behandlung der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\Delta^2\varphi$$

sich auf die Untersuchung der Lösung

$$\frac{e^{-\frac{k}{b}(R-bt)\sqrt{-1}}}{R}$$

beschränken; und indem man beides in die Ausdrücke einführt, welche nach dem Satz 1. für die Componenten der Bewegung gefunden waren, erhält man für die einfallenden Bewegungen von der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{k}$, welche von dem Erregungspunkte ausgehen, die einfachen Ausdrücke:

$$(51.)\quad \begin{cases} U = k\dfrac{x-x_0}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{a}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ V = k\dfrac{y-y_0}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{a}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ W = k\dfrac{z-z_0}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{a}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

und

$$(52.)\quad \begin{cases} U = \dfrac{C(y-y_0)-B(z-z_0)}{R}\cdot\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ V = \dfrac{A(z-z_0)-C(x-x_0)}{R}\cdot\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ W = \dfrac{B(x-x_0)-A(y-y_0)}{R}\cdot\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (51.) stellen longitudinale Schwingungen dar, da

$$(53.)\qquad U:V:W = x-x_0 : y-y_0 : z-z_0,$$

und ausserdem wird $U^2+V^2+W^2$ nur Function von R, t, so dass die Bewegung sich nach allen Seiten mit gleicher Intensität verbreitet. Die Ausdrücke (52.) hingegen, bei welchen

$$(54.)\quad \begin{cases} U(x-x_0)+V(y-y_0)+W(z-z_0) = 0, \\ UA+VB+WC = 0, \end{cases}$$

stellen geradlinige transversale Bewegungen dar, welche überdies einer bestimmten Ebene

$$(55.)\qquad Ax+By+Cz = 0$$

parallel sind. Auch wird

$$U^2+V^2+W^2 = \{(A^2+B^2+C^2)R^2-(A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0))^2\}.F(R,t),$$

so dass die Intensität nicht mehr in allen Punkten einer um x_0, y_0, z_0 beschriebenen Kugelfläche dieselbe ist, sondern in der gegen die Ebene (55.) senkrechten Richtung überall Null ist, und in den ihr parallelen Richtungen ihr Maximum erreicht. Liegt der Punkt x_0, y_0, z_0 in unendlich grosser Entfernung, so verwandeln beide Bewegungen sich in ebene Wellen, von denen die erste longitudinal, die zweite transversal und geradlinig polarisirt ist.

§. 9.

Entwickelung von $\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R}$ nach Kugelfunctionen.

Um diese Lösungen in die Formeln des §. 7 einführen zu können, ist es zunächst nothwendig, dieselben nach Kugelfunctionen zu entwickeln. Inzwischen setzen sich U, V, W aus den Differentialquotienten von Functionen zusammen, welche in dem Schema

$$\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R}$$

enthalten sind; und da nach Satz 4. die Entwickelungen der Differentialquotienten sich sofort angeben lassen, sobald die Entwickelung der Grundfunction bekannt ist, so genügt es, zunächst die obige Function nach Kugelfunctionen zu entwickeln.

Setzt man

$$R = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\mu},$$

wo also

$$\mu = \frac{xx_0+yy_0+zz_0}{rr_0},$$

und nimmt man $r < r_0$ an, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}+\frac{r}{r_0^2}P^{(1)}(\mu)+\frac{r^2}{r_0^3}P^{(2)}(\mu)+\cdots,$$

und die Functionen P sind durch die endliche Reihe definirt:

$$P^{(n)}(\mu) = \frac{1.3.5\ldots2n-1}{1.2.3\ldots n}\left(\mu^n-\frac{n.n-1}{2.2n-1}\mu^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}\mu^{n-4}-+\cdots\right).$$

Ueberhaupt folgt, wenn man irgend eine Function von r, r_0, μ nach Potenzen von μ entwickelt, sodann aber statt der Potenzreihe eine nach den $P^{(n)}$ fortschreitende Reihe bildet, dass jede derartige Function durch eine Entwickelung nach den P darstellbar ist, deren Coefficienten allein von r, r_0 abhangen.

An Stelle der Functionen $P^{(n)}$ benutze ich nun, den hier überall angewandten Operationen entsprechend, die Functionen

$$(56.)\quad Y_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\Big((xx_0+yy_0+zz_0)^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1}r^2 r_0^2 (xx_0+yy_0+zz_0)^{n-2} + - \cdots\Big);$$

und hält man auch wieder, den obigen Bezeichnungen gemäss, den Unterschied zwischen r, $\mathfrak{r}$, r_0, $\mathfrak{r}_0$ fest, so würde die Entwickelung von $\frac{1}{R}$ folgende Gestalt annehmen:

$$(57.)\qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{\mathfrak{r}_0} + \frac{Y_1}{\mathfrak{r}_0^3} + \frac{Y_2}{\mathfrak{r}_0^5} + \cdots;$$

während bei jeder anderen Function von R die Entwickelung ebenfalls auf die Y führt, multiplicirt mit gewissen Functionen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_0$.

Ebendies tritt also auch ein für die Entwickelung des vorliegenden Ausdrucks $\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R}$. Aber derselbe genügt ausserdem der Differentialgleichung

$$\varDelta^2\varphi + m^2\varphi = 0;$$

und setzt man also

$$(58.)\qquad \frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0 Y_0 + M_1 Y_1 + M_2 Y_2 + \cdots,$$

so sind die Coefficienten M Lösungen der Gleichungen (nach (36.))

$$\frac{d^2M_n}{d\mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\,\frac{dM_n}{d\mathfrak{r}} + m^2 M_n = 0,$$

sowie, wegen der Symmetrie des gegebenen Ausdrucks für $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_0$, Lösungen der Gleichungen:

$$\frac{d^2M_n}{d\mathfrak{r}_0^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}_0}\,\frac{dM_n}{d\mathfrak{r}_0} + m^2 M_n = 0;$$

oder, mit anderen Worten, M_n ist eine lineare Function, sowohl von

$$F_n(m\mathfrak{r}),\qquad \varPhi_n(m\mathfrak{r})$$

als von

$$F_n(m\mathfrak{r}_0),\qquad \varPhi_n(m\mathfrak{r}_0),\quad (38.),$$

so dass in M_n überhaupt nur vier constante Coefficienten zu bestimmen übrig bleiben.

Kehren wir, um diese Bestimmung zu leisten, zu der Form

$$R = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\mu}$$

zurück, nach welcher

$$\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = \frac{e^{-r_0 m\sqrt{-1}\sqrt{1+\frac{r^2}{r_0^2}-2\frac{\mu r r_0}{r_0^2}}}}{r_0\sqrt{1+\frac{r^2}{r_0^2}-2\frac{\mu r r_0}{r_0^2}}}$$

zu setzen ist. Man erhält die verlangte Entwickelung offenbar, wenn man nach Potenzen von $\frac{r^2}{r_0^2}$, $\frac{\mu r r_0}{r_0^2}$ entwickelt, und auf passende Weise ordnet. Aber man erkennt dann, dass erstlich nur $e^{-mr_0\sqrt{-1}}$, nicht aber $e^{mr_0\sqrt{-1}}$ vorkommen kann, und dass zweitens von r nur gerade Potenzen vorkommen, abgesehen von der Verbindung $\mu r r_0$, welche ausschliesslich in die Y eingeht. Das erstere zeigt, dass $F_n(m\mathfrak{r}_0)$ in die Entwickelung überhaupt nicht eingehen könne; das zweite lehrt, dass $\mathfrak{r}$ nur in einer der Verbindungen:

$$F_n(m\mathfrak{r})+\Phi_n(m\mathfrak{r}), \qquad F_n(m\mathfrak{r})-\Phi_n(m\mathfrak{r})$$

auftreten könne, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Und es wird also:

$$\begin{aligned} M_{2n} &= C_{2n}\,\Phi_{2n}(m\mathfrak{r}_0)\{F_{2n}(m\mathfrak{r})-\Phi_{2n}(m\mathfrak{r})\}\cdot m^{4n+1}, \\ M_{2n+1} &= C_{2n+1}\Phi_{2n+1}(m\mathfrak{r}_0)\{F_{2n+1}(m\mathfrak{r})+\Phi_{2n+1}(m\mathfrak{r})\}\cdot m^{4n+3}. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken ist eine Potenz von m als Factor hinzugesetzt, weil der Ausdruck (58.) durch Division mit m in eine Function von mx, my, mz, mx_0, my_0, mz_0 übergeht, ohne m weiter zu enthalten; daher denn die C hier reine Zahlen bedeuten. Eben deswegen kann man in diesen Ausdrücken m gegen Null convergiren lassen, wobei, wie man weiss, der Ausdruck (58.) in $\frac{1}{R}$ und M_n in $\frac{1}{r_0^{2n+1}}$ übergeht. Die obigen Gleichungen also, welche man in die eine:

$$M_n = C_n\,.\,\Phi_n(m\mathfrak{r}_0)\,.\,m^{2n+1}\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}$$

zusammenfassen kann, geben dann, indem $\Phi_n(m\mathfrak{r}_0)$ offenbar nach (39.) in

$$(-\sqrt{-1})^n\cdot\frac{1.2.3\ldots 2n-1}{(m\mathfrak{r}_0)^{2n+1}}$$

übergeht, für C_n den Ausdruck:

$$C_n = \frac{(\sqrt{-1})^n}{1.3\ldots 2n-1\,.\lim\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}_{m=0}}.$$

Es kommt also nur noch auf die Bestimmung des letzten Grenzwerthes an. Zu dieser führen die Gleichungen (43.). Denn aus denselben ergiebt sich sofort:

$$(58^a.)\quad \left\{\begin{aligned} F_{n+1}(s) &= \frac{F_{n-1}(s)+(2n+1)\sqrt{-1}\,.F_n(s)}{s^2}, \\ \Phi_{n+1}(s) &= \frac{\Phi_{n-1}(s)-(2n+1)\sqrt{-1}\,.\Phi_n(s)}{s^2}, \end{aligned}\right.$$

daher auch:

$$F_{n+1}(s)-(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}(s) =$$
$$\frac{2n+1}{s^2}\sqrt{-1}\{F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s)\}+\frac{1}{s^2}\{F_{n-1}(s)-(-1)^{n-1}\Phi_{n-1}(s)\}.$$

Lässt man nun s gegen Null convergiren, so kann man an Stelle dieser Gleichung die einfachere treten lassen:

$$(2n+1)\sqrt{-1}\,\{F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s)\}+\{F_{n-1}(s)-(-1)^{n-1}\Phi_{n-1}(s)\} = 0,$$

und durch wiederholte Anwendung derselben findet sich:

$$F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s) = \frac{(\sqrt{-1})^n}{1.3.5\ldots 2n+1}(F_0-\Phi_0) = \frac{2(\sqrt{-1})^{n+1}}{1.3.5\ldots 2n+1}.$$

Es ergiebt sich also endlich:

$$C_n = \frac{2n+1}{2\sqrt{-1}},$$

und die gesuchte Entwickelung wird:

$$(59.)\qquad \frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{2\sqrt{-1}}\cdot m^{2n+1}\cdot\Phi_n(m\mathfrak{r}_0)\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}\cdot Y_n.$$

Will man die Functionen f, φ einführen, so wird dies:

$$(60.)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} &= \sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1).m^{2n+1}.\{f_n(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_n(m\mathfrak{r}_0)\sqrt{-1}\}\,e^{-m\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}.Y_n\\ &\cdot\left\{f_n(m\mathfrak{r})\,\frac{e^{m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}-(-1)^n e^{-m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}+\varphi_n(m\mathfrak{r})\,\frac{e^{m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}+(-1)^n e^{-m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}}{2}\right\},\end{aligned}\right.$$

und wenn man das Reelle von dem Imaginären trennt:

$$(61.)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\cos mR}{R} = {} & m\,Y_0[f_0(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_0(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_0(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_0(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})]\\ & -3m^3Y_1[f_1(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_1(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_1(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_1(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})]\\ & +5m^5Y_2[f_2(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_2(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_2(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_2(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})]\\ & -7m^7Y_3[f_3(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_3(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_3(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_3(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})]\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\sin mR}{R} = {} & m\,Y_0[f_0(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_0(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_0(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_0(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})]\\ & +3m^3Y_1[f_1(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_1(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_1(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_1(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})]\\ & +5m^5Y_2[f_2(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_2(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_2(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_2(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})]\\ & +7m^7Y_3[f_3(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_3(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_3(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_3(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})]\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

In der ersten dieser Entwickelungen ist nothwendig $\mathfrak{r}_0 > \mathfrak{r}$ vorausgesetzt. Auch bei der zweiten war dies ursprünglich der Fall; da inzwischen die Entwickelung für $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_0$ symmetrisch ausgefallen ist, wird die Voraussetzung gleichgültig. Ein derartiges Verhalten wird übrigens von vorn herein klar, wenn man bemerkt, dass $\frac{\sin mR}{R}$ sich unmittelbar nach positiven Potenzen von R^2 entwickeln lässt.

§. 10.

Entwickelung der Verschiebungen für die einfallende Bewegung.

Um aus (59.) die Entwickelungen für die Componenten der einfallenden Bewegung abzuleiten, muss man zunächst die Differentialquotienten des Ausdrucks (59.) nach den Coordinaten in Reihen entwickeln, welche nach den Kugelfunctionen fortschreiten; was mit Hülfe des Satzes 4. geschieht. Ich bemerke zuvörderst, dass die Bildung der Ausdrücke T_n, S_n sich sehr einfach gestaltet, wenn man die Gleichungen (41.) benutzt, so wie die entsprechenden für die Φ, welche aus jenen durch Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-1}$ hervorgehen. Denn man erhält so:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\frac{\partial.\mathfrak{r}^{2n+3}\{F_{n+1}(m\mathfrak{r})-(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r})\}}{\partial\mathfrak{r}} = \sqrt{-1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial.\{F_{n-1}(m\mathfrak{r})-(-1)^{n+1}\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r})\}}{\partial\mathfrak{r}} = \sqrt{-1}\,.\,m^2\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0^x+M_1^x+M_2^x+\cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0^y+M_1^y+M_2^y+\cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0^z+M_1^z+M_2^z+\cdots,$$

so findet sich aus den Formeln des angeführten Satzes:

$$(62.)\quad\begin{cases} M_n^x = \frac{1}{2}m^{2n+1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\} \\ \qquad\cdot\left[m^2\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r}_0)\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}-\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r}_0)\,.\,r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right], \\ M_n^y = \frac{1}{2}m^{2n+1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\} \\ \qquad\cdot\left[m^2\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r}_0)\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}-\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r}_0)\,.\,r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right], \\ M_n^z = \frac{1}{2}m^{2n+1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\} \\ \qquad\cdot\left[m^2\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r}_0)\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z}-\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r}_0)\,.\,r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right]. \end{cases}$$

Aus diesen Functionen setzen sich nach (51.), (52.) die Verschiebungen der einfallenden Bewegung aufs Einfachste zusammen; es wird:

für einfallende Longitudinalbewegungen $m = \frac{k}{a}$ und:

$$(63.)\quad \begin{cases} U = Ke^{kt\sqrt{-1}}\{M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots\}, \\ V = Ke^{kt\sqrt{-1}}\{M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots\}, \\ W = Ke^{kt\sqrt{-1}}\{M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots\}, \end{cases} \quad \left(m = \frac{k}{a}\right)$$

für einfallende Transversalbewegungen $m = \frac{k}{b}$ und:

$$(64.)\begin{cases} U = e^{kt\sqrt{-1}}\{C(M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots) - B(M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots)\}, \\ V = e^{kt\sqrt{-1}}\{A(M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots) - C(M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots)\}, \\ W = e^{kt\sqrt{-1}}\{B(M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots) - A(M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots)\}, \end{cases} \left(m = \frac{k}{b}\right)$$

wodurch die in Rede stehenden Entwickelungen gegeben sind.

§. 11.

Reflectirte Bewegung für einfallende Longitudinalbewegungen.

Die reflectirten Bewegungen erhält man in den Gleichungen (47.), (48.) ausgedrückt durch die Functionen P_n, Q_n, T_n. Um diese letzteren zu bilden, hat man in den Ausdrücken der U, V, W zunächst $\mathfrak{r} = \varepsilon$ zu setzen, und den Factor $e^{kt\sqrt{-1}}$ auszulassen, sodann aber mit dem Reste diejenigen Operationen vorzunehmen, welche in den Formeln (21.) die Functionen p_n, q_n, t_n gegeben haben. Setzen wir der Kürze wegen

$$(65.)\quad \begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+3} \cdot \left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\} \Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right), \\ \beta_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1} \cdot \left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\} \Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right), \end{cases}$$

so hat man in (21.) also für u_n, v_n, w_n die Ausdrücke einzusetzen:

$$K\left(\alpha_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} + \beta_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right),$$

$$K\left(\alpha_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} + \beta_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right),$$

$$K\left(\alpha_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z} + \beta_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right),$$

um diejenigen reflectirten Bewegungen zu erhalten, welche aus den einfallenden Longitudinalbewegungen hervorgehen. Bemerken wir nun, dass

$$\Delta^2 Y_{n+1} = 0, \qquad \Delta^2\left(\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right) = 0,$$

dass ferner Y_{n+1} und $\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}$ homogene Functionen bezüglich von den Ordnungen $n+1$ und $-n$ sind; bemerken wir endlich, dass der Ausdruck

$$x\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

immer verschwindet, wenn

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}+f(r,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}+f(r,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}+f(r,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo φ, ψ beliebige Functionen bezeichnen, — so ergiebt sich sofort:

$$(65^a.)\qquad \begin{cases} Q_{n-1} = K.\beta_n.Y_{n-1}, \\ P_{n+1} = K.\alpha_n.Y_{n+1}, \\ T_n \quad = 0. \end{cases}$$

Hiernach verschwindet von den Ausdrücken B_n, D_n, F_n, welche durch (48.) bestimmt sind, der letzte vollständig, während die beiden anderen mit Y_n proportional werden. Setzt man sodann

$$(65^b.)\qquad B_n=(2n+1)\sqrt{-1}\,K\,Y_n\cdot\frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{N}_n},\qquad D_n=\sqrt{-1}\,K\,Y_n\cdot\frac{\Delta_n}{\mathrm{N}_n},$$

wobei die B, Δ, N constante Coefficienten sind, so erhalten die u_n, v_n, w_n die Form:

$$(66.)\qquad \begin{cases} u_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ v_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ w_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \end{cases}$$

die ϱ_n, σ_n sind Functionen von $\mathfrak{r}$ allein, nämlich:

$$(67.)\qquad \begin{cases} \varrho_n = \dfrac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\cdot\mathrm{B}_{n+1}+\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\cdot\frac{\Delta_{n+1}}{n+1}}{\mathrm{N}_{n+1}}, \\ \sigma_n = \dfrac{-\frac{k^2}{a^2}\cdot\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\cdot\mathrm{B}_{n-1}+\frac{k^2}{b^2}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\cdot\frac{\Delta_{n-1}}{n}}{\mathrm{N}_{n-1}}, \end{cases}$$

und die Constanten B, $\varDelta$, N haben die Bedeutungen:

$$(68.)\quad \begin{cases} \mathrm{B}_n = \tfrac{1}{2}\varPhi_n\left(\frac{k\mathrm{r}_0}{a}\right)\cdot\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\Big[\frac{b^2}{n}\left(F_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)-(-1)^{n+1}\varPhi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right)\varPhi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{a^2}{n+1}\left(F_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)-(-1)^{n-1}\varPhi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right)\varPhi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\Big], \\ \varDelta_n = \tfrac{1}{2}\varPhi_n\left(\frac{k\mathrm{r}_0}{a}\right)\cdot\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\cdot b^2\left\{F_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\varPhi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)-F_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\varPhi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\}, \\ \mathrm{N}_n = \frac{b^2}{n}\varPhi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\varPhi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)+\frac{a^2}{n+1}\varPhi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\varPhi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right). \end{cases}$$

Der zweite dieser Ausdrücke lässt sich inzwischen leicht noch in einer viel einfacheren Gestalt darstellen. Aus den Gleichungen (58^a.) ergiebt sich nämlich sofort:

$$F_{n-1}(s)\varPhi_{n+1}(s)-\varPhi_{n-1}(s)F_{n+1}(s) = -\frac{2n+1.\sqrt{-1}}{s^2}\left(\varPhi_n(s)F_{n-1}(s)+\varPhi_{n-1}(s)F_n(s)\right).$$

Aber aus denselben Gleichungen folgt auch:

$$F_{n+1}(s)\varPhi_n(s)+\varPhi_{n+1}(s)F_n(s) = \frac{1}{s^2}\{F_n(s)\varPhi_{n-1}(s)+\varPhi_n(s)F_{n-1}(s)\}$$

oder durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung auf sich selbst:

$$(68^a.)\qquad F_{n+1}(s)\varPhi_n(s)+\varPhi_{n+1}(s)F_n(s) = \frac{1}{s^{2n}}\{F_1(s)\varPhi_0(s)+\varPhi_1(s)F_0(s)\} = \frac{2}{s^{2n+4}},$$

und also auch:

$$F_{n-1}(s)\varPhi_{n+1}(s)-\varPhi_{n-1}(s)F_{n+1}(s) = -\frac{2.2n+1.\sqrt{-1}}{s^{2n+4}}.$$

Man erhält daher, indem man diesen Werth in $\varDelta_n$ einführt:

$$(69.)\qquad \varDelta_n = -(2n+1).\frac{b^2}{\varepsilon^{2n+4}}\cdot\left(\frac{a}{k}\right)^3\cdot\varPhi_n\left(\frac{k\mathrm{r}_0}{a}\right)\cdot\sqrt{-1}.$$

Die Gleichungen (66.) zeigen, dass die reflectirten Bewegungen, welche nach irgend einem Punkte x, y, z gelangen, in derjenigen Ebene enthalten sind, welche durch diesen Punkt selbst, durch den Erregungspunkt und durch den Kugelmittelpunkt gelegt wird; was von vorn herein wegen der Symmetrie zu erwarten war, welche in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden letztgenannten Punkte bei einfallenden Longitudinalbewegungen stattfindet. Um aus der Gleichung (66.) dies Verhalten abzuleiten, bemerke man nur, dass x, y, z in den Y nur in den beiden Verbindungen

$$(69^a.)\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad \tau = xx_0+yy_0+zz_0$$

enthalten sind. Setzt man also

$$\Pi_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial\tau}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\},$$

$$\Sigma_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{r\partial r}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{r\partial r}\frac{\partial Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\},$$

so nehmen u_n, v_n, w_n die Gestalt an:

$$u_n = x_0\Pi_n + x\Sigma_n,$$
$$v_n = y_0\Pi_n + y\Sigma_n,$$
$$w_n = z_0\Pi_n + z\Sigma_n,$$

und setzt man $\Pi = \Pi_0+\Pi_1+\cdots$, $\Sigma = \Sigma_0+\Sigma_1+\cdots$, so ist ebenso:

$$u = x_0\Pi + x\Sigma,$$
$$v = y_0\Pi + y\Sigma,$$
$$w = z_0\Pi + z\Sigma,$$

woraus die in Rede stehende Eigenschaft sich ohne Weiteres ergiebt.

Andererseits sondern sich die durch (66.) dargestellten Bewegungen sofort in zwei Theile, deren einer die Coefficienten B enthält, während der andere die Δ enthält. Die im ersten Theil enthaltenen Schwingungen haben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a *), führen Verdichtungen und Verdünnungen des Mediums mit sich, und lassen sich durch longitudinale Bewegungen ausdrücken. Für die anderen, welche mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit b begabt sind, verschwindet der Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$; es finden weder Verdichtungen noch Verdünnungen statt, und die Schwingungen dieses Theils sind in transversale Bewegungen auflösbar. Die letzte Art der Bewegung kann ebensowenig wie die erste Art jemals vollständig fehlen; und man erkennt daraus, *dass die Reflexion longitudinaler Wellen an einer Kugelfläche niemals geschehen kann, ohne dass, neben den reflectirten Longitudinalwellen,*

---

*) Da nämlich die $\Phi_n\left(\frac{kr}{a}\right)$ den Exponentialfactor $e^{-\frac{kr}{a}\sqrt{-1}}$ enthält, so haben die betreffenden Glieder den Factor $e^{k\left(t-\frac{r}{a}\right)\sqrt{-1}} = \cos\left(kt-\frac{rk}{a}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(kt-\frac{rk}{a}\right)$, welcher einer Welle mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a entspricht. Ebenso haben die anderen Glieder den Factor $e^{k\left(t-\frac{r}{b}\right)\sqrt{-1}}$.

auch reflectirte Transversalwellen sich bilden, welche sich mit der den Transversalwellen eigenthümlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausbreiten.

§. 12.

Reflexion einfallender Transversalbewegungen.

Um die reflectirten Bewegungen zu bestimmen, welche entstehen, wenn die einfallenden Bewegungen durch (64.) dargestellt sind, bemerke man zunächst, dass die n^{ten} Glieder der Ausdrücke (64.) die Gestalt haben:

$$U_n = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\alpha_n'\left(C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} - B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z}\right) + \beta_n'\left(C\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} - B\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\cdot r^{2n+1}\right\},$$

$$V_n = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\alpha_n'\left(A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z} - C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}\right) + \beta_n'\left(A\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} - C\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\cdot r^{2n+1}\right\},$$

$$W_n = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\alpha_n'\left(B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} - A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}\right) + \beta_n'\left(B\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} - A\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\cdot r^{2n+1}\right\},$$

wo die Coefficienten α, β, wenn man zugleich $r=\varepsilon$ setzt, die Bedeutungen annehmen:

$$(70.)\quad \begin{cases} \alpha_n' = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+3}\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right\}\Phi_{n+1}\left(\frac{kr_0}{b}\right), \\ \beta_n' = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right\}\Phi_{n-1}\left(\frac{kr_0}{b}\right); \end{cases}$$

dieselben unterscheiden sich von α_n, β_n in (65.) nur dadurch, dass b an die Stelle von a gesetzt ist. Um nun hieraus die Ausdrücke für P_n, Q_n, T_n zu bilden, hat man nur in den Werthen von U_n, V_n, W_n den Factor $e^{kt\sqrt{-1}}$ auszulassen und den Rest an Stelle von u_n, v_n, w_n in die Gleichungen (21.) einzuführen. Mit Rücksicht auf die bekannten Eigenschaften der Y ergiebt sich dann:

$$(71.)\quad \begin{cases} Q_{n-1} = -\frac{\beta_n'}{n}\cdot\Omega_{n-1}, \\ P_{n+1} = \frac{\alpha_n'}{n+1}\cdot\Omega_{n+1}, \\ T_n = \frac{\alpha_n'}{n+1}\Psi_n - \frac{\beta_n'}{n}X_n, \end{cases}$$

und Ω_n, Ψ_n, X_n bedeuten dabei die folgenden aus den Y_n abgeleiteten Functionen:

$$(72.)\begin{cases} \Omega_n = \begin{vmatrix} A & x & \frac{\partial Y_n}{\partial x} \\ B & y & \frac{\partial Y_n}{\partial y} \\ C & z & \frac{\partial Y_n}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial Y_n}{\partial \tau}, \qquad (\text{vgl. } (69^a.)) \\ \Psi_n = A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} + B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} + C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z} \\ \quad = (Ax+By+Cz)\frac{\partial Y_{n+1}}{r\partial r} + (Ax_0+By_0+Cz_0)\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \tau}, \\ X_n = r^{2n+1}\left(A\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + B\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + C\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right) \\ \quad = (Ax+By+Cz)r^{2n}\frac{\partial}{\partial r}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + (Ax_0+By_0+Cz_0)r^2\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial \tau}. \end{cases}$$

Führt man nun die Ausdrücke (71.) in die Gleichungen (47.), (48.) ein, welche die reflectirten Bewegungen angeben, so wird

$$(72^a.)\ B_n = (2n+1)\sqrt{-1}\cdot\Omega_n\cdot\frac{B'_n}{N'_n},\quad D_n = \sqrt{-1}\cdot\Omega_n\cdot\frac{\Delta'_n}{N_n},\quad F_n = -\frac{\frac{\alpha'_n}{n+1}\Psi_n - \frac{\beta'_n}{n}X_n}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

und es findet sich für u_n, v_n, w_n die Form:

$$(73.)\begin{cases} u_n = -e^{kt\sqrt{-1}}\Bigg\{\varrho'_n\frac{\partial \Omega_{n+1}}{\partial x} + \sigma'_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Omega_{n-1}}{r^{2n-1}} \\ \qquad + \frac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left[\frac{\alpha'_n}{n+1}\left(z\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \Psi_n}{\partial z}\right) - \frac{\beta'_n}{n}\left(z\frac{\partial X_n}{\partial y} - y\frac{\partial X_n}{\partial z}\right)\right]\Bigg\}, \\ v_n = -e^{kt\sqrt{-1}}\Bigg\{\varrho'_n\frac{\partial \Omega_{n+1}}{\partial y} + \sigma'_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Omega_{n-1}}{r^{2n-1}} \\ \qquad + \frac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left[\frac{\alpha'_n}{n+1}\left(x\frac{\partial \Psi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\right) - \frac{\beta'_n}{n}\left(x\frac{\partial X_n}{\partial z} - z\frac{\partial X_n}{\partial x}\right)\right]\Bigg\}, \\ w_n = -e^{kt\sqrt{-1}}\Bigg\{\varrho'_n\frac{\partial \Omega_{n+1}}{\partial z} + \sigma'_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Omega_{n-1}}{r^{2n-1}} \\ \qquad + \frac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left[\frac{\alpha'_n}{n+1}\left(y\frac{\partial \Psi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\right) - \frac{\beta'_n}{n}\left(y\frac{\partial X_n}{\partial x} - x\frac{\partial X_n}{\partial y}\right)\right]\Bigg\}. \end{cases}$$

Hier sind α'_n, β'_n die durch (70.) definirten Constanten; ϱ'_n, σ'_n sind Functionen von $\mathfrak{r}$, welche den ϱ_n, σ_n (67.) ganz analog sind; denn es ist:

$$(74.)\quad \begin{cases} \varrho'_n = \dfrac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\cdot \mathrm{B}'_{n+1} + \Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\cdot \frac{\Delta'_{n+1}}{n+1}}{\mathrm{N}_{n+1}}, \\[2ex] \sigma'_n = \dfrac{-\frac{k^2}{a^2}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\cdot \mathrm{B}'_{n-1} + \frac{k^2}{b^2}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\cdot \frac{\Delta'_{n-1}}{n}}{\mathrm{N}_{n-1}}. \end{cases}$$

Die Grössen B'_n, Δ'_n, N_n endlich sind constant, und zwar behält der Nenner N_n genau die Bedeutung, welche in den Gleichungen (68.) ihm beigelegt wurde, B'_n, Δ'_n aber erhalten die mit B_n, Δ_n in gewisser Weise analogen Ausdrücke:

$$(75.)\quad \begin{cases} \mathrm{B}'_n = \frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot \dfrac{\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot a^2}{n.n+1}\cdot\left[\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)F_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right) - \Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)F_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\right] \\[2ex] \quad = -\dfrac{2n+1}{n.n+1}\cdot\dfrac{a^2 b^3}{k^3\varepsilon^{2n+4}}\cdot\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\sqrt{-1}, \\[2ex] \Delta'_n = \frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot\dfrac{k^{2n+1}}{b^{2n+1}}\left\{\dfrac{b^2}{n}\left(F_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^{n-1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right. \\[2ex] \qquad\left. + \dfrac{a^2}{n+1}\left(F_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (73.)—(75.) enthalten vollständig die Lösung des Problems, die Bestimmung der reflectirten Bewegungen bei einfallenden Transversalwellen. Vergleicht man die Ausdrücke (73.) mit (66.), so erkennt man in den beiden ersten Theilen der rechten Seite eine formelle Aehnlichkeit. In der That bestehen auch hier diese Theile einerseits aus Gliedern, welche Schwingungen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a darstellen, und in Longitudinalwellen auflösbar sind — es sind die mit den Coefficienten B' behafteten Glieder —, während andere, die mit den Δ' multiplicirten, Bewegungen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit b geben, und in Transversalwellen auflösbar sind, Bewegungen, bei denen die Dichtigkeit nirgend geändert wird. Von der Art dieser letzteren sind auch die Bewegungen, welche durch die dritten Theile der rechten Seiten in (73.) dargestellt werden, denn auch sie enthalten den Factor $e^{k\left(t-\frac{r}{b}\right)\sqrt{-1}}$, und haben also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit b. Diese Schwingungen sind noch insbesondere dadurch characterisirt, dass der aus ihnen entspringende Theil des Ausdrucks $ux+vy+wz$ offenbar verschwindet, d. h.

dass dieselben an jeder Stelle senkrecht sind gegen den nach dem Kugelmittelpunkt gezogenen Radius.

Man sieht, dass auch hier im Allgemeinen immer neben den reflectirten Transversalwellen reflectirte Longitudinalwellen auftreten. Aber es giebt einen einzigen Fall, wo solche Wellen nicht hinzutreten; dieser Fall, welcher von besonderem Interesse ist, soll im Folgenden näher betrachtet werden.

§. 13.

Untersuchung des besonderen Falles, wo die einfallenden Transversalwellen keine reflectirten Longitudinalwellen hervorrufen.

Am Ende des §. 8 ist dann erinnert worden, dass die einfachen Transversalwellen, wie sie durch die Gleichungen (52.) dargestellt sind, die Bewegungen keineswegs nach allen Seiten gleichmässig verbreiten, sondern dass sogar eine bestimmte Richtung existirt, in welcher überhaupt gar keine Bewegung entsteht. Diese Richtung ist dadurch bestimmt, dass die Cosinus, welche sie gegen die Coordinatenaxen bildet, den Constanten A, B, C proportional sind. Es sei nun erlaubt, diese Richtung der Kürze wegen als *Axe der Bewegung* zu bezeichnen, eine Benennung, welche durch folgende geometrische Betrachtung gerechtfertigt wird. Denken wir uns nämlich eine Kugelfläche mit dem constanten Radius R um das Centrum der Bewegungen beschrieben, und betrachten die Bewegungen der auf dieser Kugelfläche befindlichen Punkte. Fällen wir von einem Punkte x, y, z dieser Fläche ein Loth ϱ auf die Axe und, nachdem der Punkt die kleinen Verschiebungen u, v, w erfahren hat, ein zweites; dasselbe liegt mit ϱ in einer Ebene, da nach (52.) wegen der Gleichung

$$uA+vB+wC = 0$$

die Verschiebungen gegen die Axe senkrecht geschehen; und sei φ der unendlich kleine Winkel beider Lothe gegen einander. Die absolute Grösse der Verschiebung ist also, da φ sehr klein ist, $\varrho.\varphi$, während

$$\varrho^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\frac{(A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0))^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Endlich sind die Cosinus, welche die Verschiebungsrichtung mit den Axen bildet:

$$\frac{C(y-y_0)-B(z-z_0)}{\varrho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\frac{A(z-z_0)-C(x-x_0)}{\varrho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\frac{B(x-x_0)-A(y-y_0)}{\varrho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und indem man also die Projectionen der Linie $\varrho.\varphi$ auf die Axen bildet, erhält man:

$$U = \frac{C(y-y_0)-B(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\varphi,$$

$$V = \frac{A(z-z_0)-C(x-x_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\varphi,$$

$$W = \frac{B(x-x_0)-A(y-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\varphi.$$

Vergleicht man dies endlich mit den Gleichungen (52.), so ergiebt sich:

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\,\frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}.$$

Die Grösse φ ist also für alle Punkte der Kugelfläche dieselbe, und *man darf sich daher die in Rede stehende Bewegung so vorstellen, als ob alle einer solchen Kugelfläche angehörigen Punkte eine feste Schale bildeten, welche um die oben als Axe bezeichnete Linie oscillirt.* Der ganze Raum erscheint dann in solche Schalen getheilt; die Schwingungsdauer ist für alle dieselbe, und die wellenartige Bewegung besteht darin, dass die äusseren Schalen immer später die Bewegungen der inneren Schalen, mit gleicher Schwingungsdauer aber abnehmender Amplitude, wiederholen.

Bemerkt man nun, dass in den Formeln für die reflectirte Bewegung die Functionen Ω sämmtlich mit dem Factor

$$\begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix}$$

behaftet sind, welcher verschwindet, wenn

$$A:B:C = x_0:y_0:z_0,$$

so ergiebt sich sofort, *dass alle aus den Ω entspringenden Terme der reflectirten Bewegung verschwinden, sobald die Axe durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel geht. In diesem besonderen Falle giebt es also unter den reflectirten Bewegungen keine longitudinalen. Und die Schwingungsrichtungen der reflectirten und einfallenden Bewegungen werden für jeden Punkt identisch,* da beide stets gegen die durch den betreffenden Punkt und durch die Axe gelegte Ebene senkrecht sind.

In der That, setzen wir

$$(76.)\qquad A = K\cdot\frac{x_0}{r_0},\qquad B = K\cdot\frac{y_0}{r_0},\qquad C = K\cdot\frac{z_0}{r_0},$$

so ergiebt sich aus (72.):

$$(77.)\qquad \begin{cases} \Psi_n = K\cdot\left\{\dfrac{\tau}{rr_0}\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial r} + r_0\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial \tau}\right\}, \\ X_n = K\cdot\left\{\dfrac{\tau . r^{2n}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + r_0 r^2\dfrac{\partial Y_{n-1}}{\partial \tau}\right\}; \end{cases}$$

und ferner, da Ψ, X nur noch von r, τ abhängen, die Differentiation nach r aber für die Ausdrücke (73.) offenbar nur verschwindende Terme giebt:

$$(78.)\qquad \begin{cases} u_n = -e^{kt\sqrt{-1}}.(zy_0 - yz_0)\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left\{\dfrac{\alpha_n'}{n+1}\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} - \dfrac{\beta_n'}{n}\dfrac{\partial X_n}{\partial\tau}\right\}, \\ v_n = -e^{kt\sqrt{-1}}.(xz_0 - zx_0)\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left\{\dfrac{\alpha_n'}{n+1}\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} - \dfrac{\beta_n'}{n}\dfrac{\partial X_n}{\partial\tau}\right\}, \\ w_n = -e^{kt\sqrt{-1}}.(yx_0 - xy_0)\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left\{\dfrac{\alpha_n'}{n+1}\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} - \dfrac{\beta_n'}{n}\dfrac{\partial X_n}{\partial\tau}\right\}; \end{cases}$$

Gleichungen, welche die Gleichungen

$$u_n x + v_n y + w_n z = 0,$$
$$u_n x_0 + v_n y_0 + w_n z_0 = 0$$

nach sich ziehen, und somit die oben erwähnte Eigenschaft darlegen.

Die Gleichungen (78.) lassen sich noch einfacher darstellen, indem die Functionen Ψ_{n+1}, X_{n-1} in der durch (77.) gegebenen Form sofort auf die Y zurückführen. Es ist zu diesem Ende nur nöthig, die partiellen Differentialgleichungen aufzustellen, welchen die Y genügen. Die erste derselben erhält man sofort, indem man bemerkt, dass Y_n eine homogene Function n^{ter} Ordnung von τ und r ist; man hat daher nach den allgemeinen Sätzen über homogene Functionen:

$$(79.)\qquad nY_n = r\frac{\partial Y_n}{\partial r} + \tau\frac{\partial Y_n}{\partial \tau}.$$

Ferner ist aber $\dfrac{Y_n}{r^n r_0^n} = P^{(n)}(\mu)$, wenn $\mu = \dfrac{\tau}{rr_0}$; und da die Function $P^{(n)}(\mu)$ der Gleichung

$$0 = n.n+1.P^{(n)}(\mu) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P^{(n)}(\mu)}{\partial\mu}\right]$$

genügt, so folgt für Y_n die Bedingungsgleichung:

$$(80.)\qquad n.\overline{n+1}.Y_n+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(r^2r_0^2-\tau^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\tau}\right] = 0.$$

Mit Hülfe der Gleichung (79.) giebt man derselben leicht mannigfaltige Formen, unter denen ich nur folgende anführe:

$$(81.)\quad\begin{cases}(n+1)r\dfrac{\partial^2 Y_n}{\partial r^2}+2n\tau\dfrac{\partial^2 Y_n}{\partial\tau\,\partial r}+(n-1)rr_0^2\dfrac{\partial^2 Y_n}{\partial\tau^2} = 0,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\dfrac{\tau}{rr_0}\dfrac{\partial Y_n}{\partial r}+r_0\dfrac{\partial Y_n}{\partial\tau}\right\}+\dfrac{n}{rr_0}\dfrac{\partial Y_n}{\partial r} = 0,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\dfrac{\tau r^{2n+2}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_n}{r^{2n+1}}+r_0r^2\dfrac{\partial Y_n}{\partial\tau}\right\}-\dfrac{(n+1)r^{2n+2}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_n}{r^{2n+1}} = 0.\end{cases}$$

Aus den beiden letzten Formen gehen mit Rücksicht auf (77.) sofort die Gleichungen hervor:

$$\frac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} = -K\cdot\frac{n+1}{rr_0}\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial\tau} = K\cdot\frac{nr^{2n}}{r_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}.$$

Wenn man jetzt diese Ausdrücke, so wie die von α'_n, β'_n einführt, so ergeben sich endlich für u_n, v_n, w_n die folgenden Werthe:

$$(81^a.)\quad\begin{cases}u_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(zy_0-yz_0).H_n,\\ v_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(xz_0-zx_0).H_n,\\ w_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(yx_0-xy_0).H_n,\end{cases}$$

wo

$$(82.)\quad\begin{cases}H_n = \frac{1}{2}\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\cdot\left\{F_n\left(\dfrac{\varepsilon k}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\dfrac{\varepsilon k}{b}\right)\right\}\\[2ex] \qquad\cdot\left\{\dfrac{k^2}{b^2}\Phi_{n+1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot\dfrac{\partial Y_{n+1}}{rr_0\,\partial r}-\Phi_{n-1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\dfrac{r^{2n}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}.\end{cases}$$

Ganz ähnlich wird für die einfallende Bewegung nach (62.), (64.)

$$(83.)\quad\begin{cases}U_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}(zy_0-yz_0).J_n,\\ V_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}(xz_0-zx_0).J_n,\\ W_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}(yx_0-xy_0).J_n,\end{cases}$$

wo

$$(84.)\quad\begin{cases}J_n = \frac{1}{2}\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot\left\{F_n\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}\\[2ex] \qquad\cdot\left\{\dfrac{k^2}{b^2}\Phi_{n+1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot\dfrac{\partial Y_{n+1}}{rr_0\,\partial r}-\Phi_{n-1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\dfrac{r^{2n}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\},\end{cases}$$

sobald $\mathfrak{r} < \mathfrak{r}_0$; und man sieht ohne Weiteres, wodurch die Rechnung verificirt wird, dass für $\mathfrak{r} = \varepsilon$ auch $J_n = H_n$ und also

$$u_n + U_n = 0, \qquad v_n + V_n = 0, \qquad w_n + W_n = 0.$$

Die Formeln (83.) gelten nicht mehr, wenn $\mathfrak{r} > \mathfrak{r}_0$. In diesem Falle hat man in der Entwickelung (59.) $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r}_0$ zu vertauschen; und indem man dann mit Hülfe des erhaltenen Ausdrucks und des vierten Theorems die Entwickelungen der Ausdrücke (52.) bildet, und zugleich für A, B, C die speciellen Werthe (76.) einführt, erhält man:

$$(85.) \quad \begin{cases} U_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(zy_0 - yz_0).J'_n, \\ V_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(xz_0 - zx_0).J'_n, \\ W_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(yx_0 - xy_0).J'_n, \end{cases}$$

wobei

$$(86.) \quad \begin{cases} J'_n = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\Big\{\frac{k^2}{b^2}\left(F_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right) - (-1)^{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\right)\frac{\partial Y_{n+1}}{rr_0\,\partial r} \\ \qquad - \left(F_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right) - (-1)^{n-1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\right)\frac{r^{2n}}{r_0}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big\}. \end{cases}$$

Die nothwendige Uebereinstimmung der Ausdrücke (83), (85.) für $r = r_0$ wird mit Hülfe der Gleichung (68^a.) leicht auf bekannte Relationen zwischen den $P^{(n)}(\mu)$ zurückgeführt.

§. 14.

Einführung von Erregungspunkten, welche, auf einer Kugelfläche gelagert, die reflectirten Bewegungen hervorrufen.

Die allgemeinen Lösungen, welche in den vorhergehenden Paragraphen enthalten sind, kann man noch unter einem anderen Gesichtspunkte darstellen, indem man statt der reflectirenden Kugel sich beliebige Oberflächen im Innern derselben gelegt denkt, und diese mit Erregungspunkten dergestalt belegt, dass die gewählten Erregungspunkte für sich genau dieselben Bewegungen hervorrufen würden, wie die reflectirende Kugel. In solcher Weise ersetzt man, wenn statt der Kugel eine spiegelnde Ebene gegeben ist, die Wirkung derselben durch Annahme eines einzigen Erregungspunktes, des Spiegelbildes. Ein solcher einzelner Punkt genügt nun im vorliegenden Falle nicht mehr; man bedarf deren unendlich viele, und weiss nur, dass alle diese Punkte, in welchen einzelne Theile der zu substituirenden Bewegungen unendlich werden können, sämmtlich im Innern der Kugel, d. h. ausserhalb des bewegten Mediums, anzunehmen sind. Durch eine solche Darstellung erlangt man den nicht unwesentlichen Vortheil, ein von vier Veränderlichen abhängiges Problem auf ein anderes zurückzuführen, welches nur zwei Variable enthält, die beiden Coordinaten, durch welche die specielle Lage eines Erregungspunktes auf der Oberfläche bestimmt ist. Wie man die Oberfläche, welche von solchen Punkten gebildet werden soll, annehmen will, ist von vorn herein beliebig; doch ist es durch den Charakter der obigen Entwickelungen, wenn man nicht in unabsehbare Rechnungen gestürzt werden will, bedingt, sie als eine Kugelfläche anzunehmen, welche der gegebenen concentrisch ist. Der Radius dieser Kugel ist dann im Allgemeinen noch willkürlich, doch so, dass eine unendlich grosse Anzahl discreter Werthe ausgeschlossen ist; diejenigen nämlich, für welche einer der Ausdrücke

$$F_n\left(\frac{kr}{a}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{kr}{a}\right), \qquad F_n\left(\frac{kr}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)$$

verschwindet. Auf einen Umstand ähnlicher Art hat schon *Helmholtz* (dieses Journal Bd. 57, p. 24) aufmerksam gemacht.

In den oben entwickelten Problemen bestanden die reflectirten Bewegungen zum Theil aus longitudinalen, zum Theil aus transversalen Schwingungen; oder, was dasselbe sagt, zum Theil aus Schwingungen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a, zum Theil aus anderen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit b. Ebenso werden also von den zu substituirenden Erregungspunkten beide Arten von Schwingungen ausgehen müssen; und man wird also von vorn herein die Aufgabe theilen können, indem man zuerst Erregungspunkte sucht, welche, Longitudinalschwingungen aussendend, im Stande sind, den ersten Theil der reflectirten Bewegungen hervorzurufen; sodann andere, welche füglich auf einer anderen Kugelfläche angenommen werden können, und welche, transversal schwingend, den anderen Theil der reflectirten Bewegungen darstellen.

Der erste Theil der Aufgabe ist immer sehr leicht zu lösen. Der von den longitudinalen Bewegungen herrührende Theil der Geschwindigkeiten hat ein Potential; sei dasselbe

$$M = M_1+M_2+M_3+\cdots.$$

Ein solches Potential kommt auch den zu substituirenden Erregungspunkten zu, und zwar ist dasselbe eine Summe von Gliedern wie

$$\frac{K.e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}.$$

Man hat also nur die Entwickelung der aus solchen Gliedern gebildeten Summe oder des entsprechenden Integrals dem gegebenen Geschwindigkeitspotentiale gleich zu setzen, um die Vertheilung der Erregungspunkte zu finden.

Der zweite Theil der Aufgabe fordert einige vorbereitende Betrachtungen. Die Transversalbewegungen, welche von den zu substituirenden Erregungspunkten ausgehen, haben immer die Form

$$(86^a.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial M^w}{\partial y} - \dfrac{\partial M^v}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial M^u}{\partial z} - \dfrac{\partial M^w}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial M^v}{\partial x} - \dfrac{\partial M^u}{\partial y}, \end{cases}$$

wo M^u, M^v, M^w (vgl. (52.)) Summen der Form

$$\frac{K.e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}$$

sind. Aber in dieser Form erscheinen die entsprechenden Theile der reflectirten Bewegungen noch keineswegs, obgleich sie immer, und zwar auf unendlich viele Arten, derselben fähig sind. Ich werde also zuerst zeigen, wie man eine, irgendwie gegebene, Transversalbewegung auf die angegebene Form bringt. Diese Aufgabe ist natürlich nicht vollständig bestimmt; ist sie aber auf die allgemeinste Art gelöst, so giebt sie sofort die allgemeinste Vertheilung der gesuchten Erregungspunkte, indem man die gefundenen Functionen M^u, M^v, M^w denjenigen gleichsetzt, welche durch die Einführung der Erregungspunkte sich ergeben.

Die reflectirten Bewegungen, deren transversaler Theil hier allein betrachtet werden soll, sind oben in der Form (19.) ausgedrückt, mit Hülfe der Functionen q_n, p_n, t_n; und es zeigt sich sofort aus (22.) — (24.), dass für die transversalen Theile diese Functionen die Werthe haben:

$$(87.)\quad \begin{cases} q_n = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{\partial M_n'}{\mathfrak{r}\partial \mathfrak{r}}, \\ p_n = \dfrac{1}{n\,\mathfrak{r}^{2n}}\,\dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}(\mathfrak{r}^{2n+1}M_n'), \\ t_n = \dfrac{1}{n+1.2n+3}\left(\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial y} + \dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial z}\right) \\ \qquad - \dfrac{r^{2n+1}}{n.2n-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,\dfrac{S^u_{n-1}}{r^{2n-1}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\dfrac{S^v_{n-1}}{r^{2n-1}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\dfrac{S^w_{n-1}}{r^{2n-1}}\right), \end{cases}$$

wo

$$(88.)\qquad M_n' = \frac{1}{2n+1}\left\{x\left(\frac{\partial M_n^w}{\partial y}-\frac{\partial M_n^v}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial M_n^u}{\partial z}-\frac{\partial M_n^w}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial M_n^v}{\partial x}-\frac{\partial M_n^u}{\partial y}\right)\right\},$$

wo endlich, für jeden der oberen Indices u, v, w:

$$(89.)\qquad T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\,\frac{\partial\,.\,\mathfrak{r}^{2n+1}M_n}{\partial\mathfrak{r}},\qquad S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\,\frac{\partial M_n}{\partial\mathfrak{r}}.$$

Die vorgesetzte Transformation besteht nun wesentlich darin, die allgemeinsten Werthe der Functionen M_n^u, M_n^v, M_n^w anzugeben, welche aus diesen Gleichungen hervorgehen, sobald q_n, p_n, t_n als bekannt angesehen werden. Hat man jene Werthe gefunden, so ist sofort

$$M^u = M_0^u+M_1^u+M_2^u+\cdots,$$
$$M^v = M_0^v+M_1^v+M_2^v+\cdots,$$
$$M^w = M_0^w+M_1^w+M_2^w+\cdots,$$

und die gesuchten Functionen sind damit, nach Kugelfunctionen entwickelt, gegeben.

Aus den beiden ersten Gleichungen (87.) erhält man zuvörderst, indem man den Differentialquotienten von M' eliminirt:

$$(90.)\qquad M_n' = \frac{np_n-\mathfrak{r}^2.\overline{n+1}.q_n}{2n+1}.$$

Da auf diese Weise M_n' bestimmt ist, so bleibt die letzte Gleichung (87.) mit (88.) zur Bestimmung von M_n^u, M_n^v, M_n^w übrig. Ich denke mir nun aber diese drei Functionen in die Form (19.) gebracht, welche drei Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung immer annehmen können, und setze:

$$(91.)\qquad \begin{cases} M_n^u = \dfrac{\partial H_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{J_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\dfrac{\partial G_n}{\partial y}-y\dfrac{\partial G_n}{\partial z},\\[2ex] M_n^v = \dfrac{\partial H_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{J_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\dfrac{\partial G_n}{\partial z}-z\dfrac{\partial G_n}{\partial x},\\[2ex] M_n^w = \dfrac{\partial H_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{J_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\dfrac{\partial G_n}{\partial x}-x\dfrac{\partial G_n}{\partial y},\end{cases}$$

wo J_{n-1}, G_n, H_{n+1} Kugelfunctionen respective der $(n-1)^{\text{ten}}$, n^{ten}, $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung bedeuten. Führt man diese Werthe in die erwähnten Gleichungen ein, so gehen diese in die höchst einfache Gestalt über:

$$(92.)\quad \begin{cases} M'_n = \dfrac{n.n+1}{2n+1}\cdot G_n, \\ t_n = -\dfrac{1}{\mathfrak{r}}\dfrac{\partial H_n}{\partial \mathfrak{r}} - \dfrac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\dfrac{\partial(\mathfrak{r}^{2n+3}J_n)}{\partial \mathfrak{r}}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ist G_n sofort vollständig bestimmt; und zwar wird nach (90.):

$$(93.)\quad G_n = \frac{p_n}{n+1} - \mathfrak{r}^2\cdot\frac{q_n}{n};$$

von den beiden Functionen J_n, H_n aber bleibt eine unbestimmt, während die andere sich linear durch diese und durch t_n, mit Hülfe einer nach $\mathfrak{r}$ auszuführenden Integration, ausdrückt.

Durch die Formeln (92.), (93.) ist das Hülfsproblem gelöst. Indess vereinfacht diese Lösung sich noch sehr wesentlich, wenn man die besondere Form berücksichtigt, in welcher die reflectirten Bewegungen auftreten. Vergleicht man nämlich die Formeln (45.), (46.), in denen die betreffende Gestalt der Functionen p_n, q_n, t_n bereits hervortritt, wenn man nur die A, C, E verschwinden lässt, so zeigt sich, dass die den Transversalbewegungen entsprechenden Theile dieser Functionen die Form haben:

$$(94.)\quad \begin{cases} p_n = \Phi_{n-1}\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)e^{kt\sqrt{-1}}\cdot D_n\cdot\dfrac{\sqrt{-1}}{n}, \\ q_n = \Phi_{n+1}\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)e^{kt\sqrt{-1}}\cdot D_n\cdot\dfrac{k^2\sqrt{-1}}{(n+1)b^2}, \\ t_n = \Phi_n\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)e^{kt\sqrt{-1}}\cdot F_n, \end{cases}$$

wo D_n, F_n Kugelfunctionen mit constanten, d. h. von $\mathfrak{r}$ unabhängigen Coefficienten sind. Eine ähnliche Form haben die Functionen M_n^u, M_n^v, M_n^w, welche durch Einführung der Erregungspunkte entstehen; denn dieselben setzen sich zusammen aus den n^{ten} Gliedern einer Summe von Entwickelungen der Ausdrücke

$$\frac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}}{R},$$

und eine solche Entwickelung wird, wenn der Index i sich immer auf den, im Innern der Kugel liegenden, Erregungspunkt bezieht, da $r_i < r$, nach (59.):

$$(94^a.)\ \frac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}.e^{kt\sqrt{-1}}}{R} = e^{kt\sqrt{-1}}\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}Y_n^{(i)}.$$

Also auch M_n^u, M_n^v, M_n^w bestehen offenbar aus einem Factor $e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)$, und einem anderen, von $\mathfrak{r}$ unabhängigen, welcher eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist. Nach den Gleichungen (91.) gilt dies sofort auch von G_n, H_{n+1}, J_{n-1}, nur dass die Kugelfunction immer von der Ordnung des Index wird, und man kann also setzen:

$$(95.)\quad \begin{cases} G_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot g_n, \\ H_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot h_n, \\ J_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot i_n. \end{cases}$$

Führt man nun die Ausdrücke (94.), (95.) in (92.), (93.) ein, so findet man:

$$(96.)\quad \begin{cases} \Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot g_n = \frac{\sqrt{-1}.D_n}{n.n+1}\left\{\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)-\frac{\mathfrak{r}^2k^2}{b^2}\cdot\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\right\}, \\ \Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot F_n = -h_n\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}}\,\frac{\partial\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)}{\partial\mathfrak{r}}-i_n\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\,\frac{\partial.\mathfrak{r}^{2n+3}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)}{\partial\mathfrak{r}}. \end{cases}$$

Jetzt bemerke man die Fundamentalgleichungen, welche sich für die Φ aus (41.) durch Verwandlung von $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ ergeben:

$$\Phi_{n+1}(s) = \frac{\sqrt{-1}}{s}\,\frac{d\Phi_n(s)}{ds},$$

$$\Phi_{n-1}(s) = \frac{\sqrt{-1}}{s^{2n}}\,\frac{d}{ds}\left(s^{2n+1}\Phi_n(s)\right);$$

so wie die hieraus oder aus (43.) folgende Gleichung (58^a.):

$$\Phi_{n+1}(s) = \frac{\Phi_{n-1}(s)-(2n+1)\sqrt{-1}\,\Phi_n(s)}{s^2}.$$

Durch diese Beziehungen gehen die Gleichungen (96.) in die einfachen Gleichungen über:

$$g_n = -\frac{2n+1}{n.n+1}D_n,$$

$$i_n+\frac{k^2}{b^2}h_n = -F_n\sqrt{-1}.$$

Und dies eingeführt, hat man nachstehende Ausdrücke für M_n^u, M_n^v, M_n^w:

$$(97.)\left\{\begin{aligned}
M_n^u &= -e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\Big\{r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{2n+1}{n.n+1}\left(z\frac{\partial D_n}{\partial y}-y\frac{\partial D_n}{\partial z}\right)\\
&\qquad -\frac{\partial h_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}.\frac{k^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big\},\\
M_n^v &= -e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\Big\{r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{2n+1}{n.n+1}\left(x\frac{\partial D_n}{\partial z}-z\frac{\partial D_n}{\partial x}\right)\\
&\qquad -\frac{\partial h_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}.\frac{k^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big\},\\
M_n^w &= -e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\Big\{r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{2n+1}{n.n+1}\left(y\frac{\partial D_n}{\partial x}-x\frac{\partial D_n}{\partial y}\right)\\
&\qquad -\frac{\partial h_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}.\frac{k^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big\},
\end{aligned}\right.$$

wo die h_n willkürliche Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten bedeuten. —

Um die entsprechenden Rechnungen für die Longitudinalbewegungen ebensoweit zu führen, braucht man nur die Gleichungen (23.) zu beachten. Für den longitudinalen Theil der Bewegungen folgt aus denselben:

$$q_n = -\frac{1}{2n+1}\frac{\partial M_n}{\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}},$$
$$p_n = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\frac{\partial.\mathfrak{r}^{2n+1}M_n}{\partial\mathfrak{r}};$$

und aus beiden Gleichungen zusammen:

$$M_n = p_n+q_n\mathfrak{r}^2.$$

Wendet man sich nun zu den Gleichungen (46.), indem man die A, C, E verschwinden lässt, und nur die den Longitudinalbewegungen entsprechenden Glieder beibehält, so bleibt:

$$q_n = -\frac{k^2\sqrt{-1}}{(2n+1)a^2}\cdot B_n\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)e^{kt\sqrt{-1}},$$
$$p_n = \frac{\sqrt{-1}}{2n+1}\cdot B_n\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)e^{kt\sqrt{-1}};$$

und man hat also:

$$M_n = \frac{\sqrt{-1}}{2n+1}\cdot B_n e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)-\frac{k^2\mathfrak{r}^2}{a^2}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)\right\}.$$

Aber die eingeklammerte Grösse ist nach (58^a.) nichts Anderes als

$$(2n+1)\sqrt{-1}\,.\,\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right);$$

und dies eingeführt giebt endlich:

$$(98.)\qquad M_n = -B_n.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)e^{kt\sqrt{-1}}.$$

§. 15.

Bestimmung der Vertheilung von Erregungspunkten auf der substituirten Kugelfläche.

Nachdem im vorigen §. die reflectirten Bewegungen in geeigneter Form dargestellt sind, bleibt nur übrig die Bewegungen der Form nach zu bestimmen, welche von den Erregungspunkten selbst herrühren sollen.

Bezeichnen wir durch do das Element der mit dem Radius r_i beschriebenen Kugelfläche, auf welcher die Erregungspunkte sich befinden. Man kann dann annehmen, dass die Intensität der von do ausgehenden Bewegungen einerseits mit do selbst proportional sei, andererseits aber eine Function der Lage von do auf der Kugelfläche werde. Mit anderen Worten, die von do ausgehenden Longitudinalbewegungen mögen durch die Ausdrücke dargestellt werden:

$$du = \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\cdot K^{(i)}do,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\cdot K^{(i)}do,$$

$$dw = \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\cdot K^{(i)}do,$$

die Transversalbewegungen aber durch:

$$du = \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot C^{(i)}do - \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot B^{(i)}do,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot A^{(i)}do - \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot C^{(i)}do,$$

$$dw = \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot B^{(i)}do - \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot A^{(i)}do;$$

wo $R=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$ die Entfernung des Elements do von dem äusseren Punkte x, y, z bedeutet, und wo A, B, C, K Functionen von x_i, y_i, z_i sind.

Um die Wirkung sämmtlicher Erregungspunkte zu finden, hat man jetzt nur über die Kugelfläche zu integriren, deren Element do ist; und dann wird offenbar das Potential der Longitudinalbewegungen:

$$(99.)\qquad M = e^{kt\sqrt{-1}}\int \frac{e^{-\frac{kR}{a}\sqrt{-1}}}{R}K^{(i)}do,$$

während für die Transversalbewegungen, deren Ausdrücke die Form (86^a.) annehmen, M^u, M^v, M^w die Bedeutungen erhalten:

$$(100.)\quad \begin{cases} M^u = e^{kt\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R}\cdot A^{(i)}\,do, \\ M^v = e^{kt\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R}\cdot B^{(i)}\,do, \\ M^w = e^{kt\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R}\cdot C^{(i)}\,do. \end{cases}$$

Die vier fundamentalen Functionen K, A, B, C, welche hier auftreten, und welche nun zu bestimmen sind, darf man wohl als *Dichtigkeiten der betreffenden Schichten von Erregungspunkten* bezeichnen. Die erste dieser Functionen, K, giebt das *Mass für die Intensität der Longitudinalbewegungen*, welche von dem Elemente do ausgehen. Um die anderen Functionen einfach zu deuten, erinnere man sich der Bemerkungen über die Natur der einfachen Schwingungen aus §. 13. Hiernach haben die von jedem Element do ausgehenden Transversalschwingungen eine bestimmte Axe, deren Lage zunächst willkürlich ist. Aber um die von den verschiedenen Elementen ausgehenden Schwingungen unter einander vergleichen zu können, ist es passend, die dem Element do entsprechenden Schwingungen in drei simultane Oscillationen zu zerlegen, deren Axen einzeln den Coordinatenaxen parallel sind. Dies heisst mit anderen Worten, man betrachtet die respective mit A, B, C multiplicirten Theile für sich; und so sieht man, *dass A, B, C einzeln das Mass abgeben für diejenigen Theile der von do herrührenden Oscillationen, deren Axen respective der X, Y, Z Axe parallel sind.*

Stellen wir uns nun vor, diese Dichtigkeiten seien (immer in dem hier festgehaltenen Sinne) nach Kugelfunctionen entwickelt, so dass:

$$\begin{aligned} K^{(i)} &= K_0^{(i)}+K_1^{(i)}+K_2^{(i)}+\cdots, \\ A^{(i)} &= A_0^{(i)}+A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots, \\ B^{(i)} &= B_0^{(i)}+B_1^{(i)}+B_2^{(i)}+\cdots, \\ C^{(i)} &= C_0^{(i)}+C_1^{(i)}+C_2^{(i)}+\cdots; \end{aligned}$$

wo denn $K_n^{(i)}$ etc. homogene Functionen n^{ter} Ordnung von $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$, den Coordinaten des Kugelelements do, sind. Untersuchen wir genauer, was etwa aus dem Ausdrucke (99.) wird, wenn wir diese Entwickelungen darin einführen.

Indem man noch (94^a.) zu Hülfe ruft, wird:

$$M = e^{kt\sqrt{-1}}.\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{a}\right)-(-1)^n.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{a}\right)\right\}.\int Y_n^{(i)}.K_m^{(i)}do.$$

Aber nach einer bekannten Eigenschaft der Kugelfunctionen, welche durch die hier angewandte leichte Modification keinesweges zerstört wird, verschwindet das Integral immer, sobald m von n verschieden ist, und reducirt sich für $m=n$ auf denjenigen Werth, den die Function $K_n^{(i)}$ für den Punkt x, y, z annimmt, multiplicirt mit $\frac{4\pi r_i^{2n+2}}{2n+1}$. Bezeichnet man also jenen Werth mit $\overline{K_n}$, so bleibt:

$$M = e^{kt\sqrt{-1}}.\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{a}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{a}\right)\right\}\cdot\overline{K_n}r_i^{2n+2}.$$

Ganz ebenso wird auch:

$$M^u = e^{kt\sqrt{-1}}.\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}\cdot\overline{A_n}r_i^{2n+2},$$

$$M^v = e^{kt\sqrt{-1}}.\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}\cdot\overline{B_n}r_i^{2n+2},$$

$$M^w = e^{kt\sqrt{-1}}.\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{b}\right)\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}\cdot\overline{C_n}r_i^{2n+2}.$$

Die n^{ten} Glieder dieser Entwickelungen sind die Functionen M_n, M_n^u, M_n^v, M_n^w. Vergleicht man dieselben mit den Ausdrücken (97.), (98.), so erhält man die gesuchten Bestimmungen, nämlich:

$$(101.)\qquad \overline{K_n} = -\frac{B_n\sqrt{-1}}{2\pi\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\mathfrak{r}_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{a}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{a}\right)\right\}},$$

$$(102.)\qquad \begin{cases}
\overline{A_n} = \dfrac{r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{2n+1}{n.n+1}\left(z\dfrac{\partial D_n}{\partial y}-y\dfrac{\partial D_n}{\partial z}\right)\sqrt{-1}+\left(\dfrac{\partial h_{n+1}}{\partial x}-r^{2n+1}\dfrac{k^2}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\sqrt{-1}}{2\pi\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}}, \\[2ex]
\overline{B_n} = \dfrac{r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{2n+1}{n.n+1}\left(x\dfrac{\partial D_n}{\partial z}-z\dfrac{\partial D_n}{\partial x}\right)\sqrt{-1}+\left(\dfrac{\partial h_{n+1}}{\partial y}-r^{2n+1}\dfrac{k^2}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\sqrt{-1}}{2\pi\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}}, \\[2ex]
\overline{C_n} = \dfrac{r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{2n+1}{n.n+1}\left(y\dfrac{\partial D_n}{\partial x}-x\dfrac{\partial D_n}{\partial y}\right)\sqrt{-1}+\left(\dfrac{\partial h_{n+1}}{\partial z}-r^{2n+1}\dfrac{k^2}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\sqrt{-1}}{2\pi\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_i}{b}\right)\right\}}.
\end{cases}$$

Man bemerkt, dass die Formel (101.) nur dann einen unendlich grossen, also unstatthaften Werth für $\overline{K_n}$ ergiebt, wenn $\frac{kr_i}{a}$ eine Wurzel der Gleichung

$$F_n(s)-(-1)^n \Phi_n(s) = 0$$

ist; die Formeln (102.) hingegen geben unendlich grosse Werthe, wenn $\frac{kr_i}{b}$ eine Wurzel derselben Gleichung ist. Man muss also von vorn herein Werthe von r_i ausschliessen, welche für irgend ein n eine dieser Bedingungen erfüllen, wie bereits oben angegeben ist.

In diese Ausdrücke hätte man endlich die Werthe der B, D, F, wie sie die oben aufgestellte Theorie ergiebt, einzuführen. Für einfallende Longitudinalschwingungen wird $F_n=0$, und B_n, D_n sind in den Formeln (65^b.) gegeben; für einfallende Transversalschwingungen sind B_n, D_n, F_n aus den Gleichungen (72^a.) zu entnehmen. Die Aufstellung der definitiven Formeln glaube ich um so eher übergehen zu dürfen, als keine nennenswerthe Vereinfachung der Ausdrücke dabei eintritt. Aber es darf wohl darauf hingewiesen werden, dass die erhaltenen Werthe der K, A, B, C von der Schwingungsdauer abhängen, und also die Vertheilung der Erregungspunkte für Schwingungen von verschiedener Dauer ganz verschieden wird.

§. 16.

Untersuchung des Falles, wo bei mässig grosser Wellenlänge der Radius der reflectirenden Kugel sehr klein ist.

Wenn man den für die Optik wichtigen Fall untersucht, in welchem der Radius der reflectirenden Kugel sehr gross gegen die Wellenlänge ist, d. h. wo $\frac{k\varepsilon}{a}$, $\frac{k\varepsilon}{b}$ sehr grosse Zahlen bedeuten, so findet sich bald, dass diese besondere Annahme dennoch keine wesentliche Vereinfachung in den allgemeinen Ausdrücken mit sich führt. Aber der entgegengesetzte Fall, wo der Radius sehr klein und die Wellenlänge mässig gross, wo also $\frac{k\varepsilon}{a}$, $\frac{k\varepsilon}{b}$ sehr kleine Zahlen sind, lässt sich mit grosser Einfachheit behandeln.

In diesem Fall kann man offenbar in den einfallenden Bewegungen für Punkte, welche in der Nähe der reflectirenden Kugel liegen, die Grössen

$$\frac{e^{-\frac{kR}{a}\sqrt{-1}}}{R}, \quad \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R}$$

bis auf Grössen höherer Ordnung ersetzen, durch

$$\frac{e^{-k\frac{\mathfrak{r}_0}{a}\sqrt{-1}}}{\mathfrak{r}_0},\quad \frac{e^{-k\frac{\mathfrak{r}_0}{b}\sqrt{-1}}}{\mathfrak{r}_0},$$

oder, mit anderen Worten, es genügt, in der Entwickelung der einfallenden Bewegungen das erste Glied zu berücksichtigen. So werden nach (51.), (52.), indem man longitudinale und transversale Schwingungen in eine Formel zusammenfasst, in der Nähe der reflectirenden Kugel die einfallenden Bewegungen dargestellt durch:

$$(102^a.)\quad \begin{cases} u = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-K\dfrac{x_0}{\mathfrak{r}_0}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}_0}\dfrac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{a}}}{\mathfrak{r}_0}+\dfrac{Bz_0-Cy_0}{\mathfrak{r}_0}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}_0}\dfrac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{b}}}{\mathfrak{r}_0}\right\}, \\ v = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-K\dfrac{y_0}{\mathfrak{r}_0}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}_0}\dfrac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{a}}}{\mathfrak{r}_0}+\dfrac{Cx_0-Az_0}{\mathfrak{r}_0}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}_0}\dfrac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{b}}}{\mathfrak{r}_0}\right\}, \\ w = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-K\dfrac{z_0}{\mathfrak{r}_0}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}_0}\dfrac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{a}}}{\mathfrak{r}_0}+\dfrac{Ay_0-Bx_0}{\mathfrak{r}_0}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}_0}\dfrac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{b}}}{\mathfrak{r}_0}\right\}. \end{cases}$$

Um zu sehen, welche Glieder in den reflectirten Bewegungen beizubehalten sind, ist es gut, dieselben zunächst in einer etwas veränderten Form darzustellen. Nach (19.) hatten die allgemeinen Glieder jener Entwickelung die Form:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial t_n}{\partial y}-y\frac{\partial t_n}{\partial z}, \\ v_n &= \frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial t_n}{\partial z}-z\frac{\partial t_n}{\partial x}, \\ w_n &= \frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial t_n}{\partial x}-x\frac{\partial t_n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nach (45.), (46.), (48.) hat man in diesen Gleichungen zu setzen:

$$\begin{aligned} p_n &= (-P_n\mu_n+Q_n\nu_n)e^{kt\sqrt{-1}}, \\ q_n &= (\ P_n\varrho_n-Q_n\sigma_n)e^{kt\sqrt{-1}}, \\ t_n &= -T_n\tau_n e^{kt\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

wo μ_n, ν_n, ϱ_n, σ_n, τ_n allein Functionen von $\mathfrak{r}$ sind, nämlich:

$$\mu_n = \frac{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\sigma_n = \frac{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\nu_n = \frac{\frac{a^2 b^2}{k^2 n}\left\{\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\varrho_n = \frac{\frac{k^2}{n+1}\left\{\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\tau_n = \frac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}.$$

Die Functionen Q_n, P_n, T_n sind, so weit sie von einfallenden Longitudinalbewegungen herrühren, durch (65^a.), soweit sie aus Transversalbewegungen entspringen, durch (71.) gegeben. Bemerken wir, dass bereits in §. 9. die Grenze für $F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s)$ bei abnehmendem s gleich

$$\frac{2(\sqrt{-1})^{n+1}}{1.3.5\ldots 2n+1}$$

gefunden wurde, so nehmen hiernach für ein sehr kleines ε die aus (65^a.), (71.) zusammengesetzten Werthe der Q, P, T folgende Ausdrücke an:

$$(103.)\quad \begin{cases} P_n = \frac{(\sqrt{-1})^n}{1.3\ldots 2n-1}\left\{K\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right)Y_n+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\Omega_n\right\}, \\ Q_n = \frac{(\sqrt{-1})^{n+2}}{1.3\ldots 2n+3}\left\{-K\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+3}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right)Y_n+\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+3}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\Omega_n\right\}, \\ T_n = \frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{1.3\ldots 2n+1}\left\{\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+3}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\Psi_n+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)X_n\right\}; \end{cases}$$

und die Functionen Ω_n, Ψ_n, X_n sind definirt durch die Gleichungen:

$$\Omega_n = \begin{vmatrix} A & x & \frac{\partial Y_n}{\partial x} \\ B & y & \frac{\partial Y_n}{\partial y} \\ C & z & \frac{\partial Y_n}{\partial z} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_n = A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}+B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}+C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z},$$

$$X_n = r^{2n+1}\left\{A\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}+B\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}+C\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}.$$

Aus diesen Formeln sieht man, dass für hinlänglich grosse Werthe der x, y, z die P_n, Q_n, T_n endliche Werthe annehmen, dass sie dagegen in der Nähe der reflectirenden Kugel, also für sehr kleine x, y, z, von der n^{ten} Ordnung sind.

Um die Ordnung der Coefficienten zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass Φ_n für ein sehr kleines Argument von der $-(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Hiernach werden für hinlänglich grosse Werthe von r die Ordnungen folgende:

$$\begin{array}{lll} \text{für} & \mu_n & : 2n-1 \\ - & \sigma_n & : 2n+3 \\ - & \nu_n & : 2n+3 \\ - & \varrho_n & : 2n-1 \\ - & \tau_n & : 2n+1. \end{array}$$

Es ist also die Ordnung von p_n zum Theil $2n-1$, zum Theil $2n+3$, ebenso bei q_n, und die Ordnung von t_n ist $2n+1$. Da aber p_0 nicht existirt, und ebenso in q_0 der Coefficient ν_n, welcher die -1^{te} Ordnung geben würde, verschwindet; da endlich t_0 aus der Rechnung geht, so bleiben nur diejenigen Terme von q_1 und p_1 als von der niedrigsten Ordnung übrig, welche von der ersten Ordnung sind. Und man darf also setzen:

$$(104.)\quad \begin{cases} u = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-\mu_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \varrho_1 r^5 \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{P_1}{r^3}\right\}, \\ v = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-\mu_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial y} + \varrho_1 r^5 \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{P_1}{r^3}\right\}, \\ w = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-\mu_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial z} + \varrho_1 r^5 \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{P_1}{r^3}.\right\}. \end{cases}$$

Ich werde zeigen, dass dieselben Terme übrig bleiben, wenn man den Punkt x, y, z in der Nähe der reflectirenden Fläche annimmt. Zu diesem Ende ist es nöthig, zuvor den Werth zu untersuchen, welchen der Zähler von ν_n und ϱ_n für sehr kleine Werthe der Argumente ε, r annimmt. Wenn man mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Phi_n}{ds^2} + \frac{2n+2}{s}\frac{\partial\Phi_n}{ds} + \Phi_n = 0$$

die Function Φ_n in eine Reihe entwickelt, welche nach Potenzen von s fortschreitet, so findet sich die Form:

$$(105.)\quad \begin{cases} \Phi_n(s) = a_n\left\{\dfrac{1}{s^{2n+1}} - \dfrac{1}{2.2n-1}\cdot\dfrac{1}{s^{2n-1}} + \dfrac{1}{2.4.2n-1.2n-3}\cdot\dfrac{1}{s^{2n-3}} - + \cdots\right\} \\ \qquad + b_n\left\{1 - \dfrac{s^2}{2.2n+3} + \dfrac{s^4}{2.4.2n+3.2n+5} - + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Hieraus findet sich für sehr kleine Werthe von r, ε:

$$(106.)\quad \begin{cases} \Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right) \\ = a_n^2\Big\{\Big[\left(\frac{b}{\varepsilon k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{b}{\varepsilon k}\right)^{2n-1}\Big]\Big[\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n-1}\Big] \\ \qquad -\Big[\left(\frac{a}{\varepsilon k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{a}{\varepsilon k}\right)^{2n-1}\Big]\Big[\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n-1}\Big]\Big\} \\ = -\frac{a_n^2}{2.2n-1}\left(\frac{b}{\varepsilon k}\right)^{2n-1}\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n-1}\frac{a^2-b^2}{k^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \end{cases}$$

Eine Ausnahme macht nur der Fall $n=0$, wo

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\Phi_0\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)=\left(\frac{a_0 b}{\varepsilon k}+b_0\right)\left(\frac{a_0 a}{\mathfrak{r}k}+b_0\right)-\left(\frac{a_0 a}{\varepsilon k}+b_0\right)\left(\frac{a_0 b}{\mathfrak{r}k}+b_0\right)$$
$$=\frac{a_0 b_0}{k}(a-b)\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Der betrachtete Ausdruck ist also im Allgemeinen von der Ordnung $-4n$, für $n=0$ aber von der -1^{ten} Ordnung. Sonach werden μ_n, σ_n, τ_n für sehr kleine Werthe von $\mathfrak{r}$ von der Ordnung 0, ϱ_n aber von der Ordnung -2, ν_n von der Ordnung $+6$ bis auf ν_1, welches von der fünften Ordnung ist. Nimmt man hinzu, dass in diesem Falle P_n, Q_n, T_n von der n^{ten} Ordnung sind, so besteht p_n aus Gliedern von den Ordnungen n und $n+6$, q_n aus Gliedern von den Ordnungen $n-2$ und n, t_n ist von der n^{ten} Ordnung. Bemerkt man noch, dass in u, v, w die Ordnung sämmtlicher p durch die Differentiation um 1 erhöht, die der q aber um 1 erniedrigt wird, so bleiben als Terme niedrigster Ordnung diejenigen Theile von q_1, p_1, welche von der respective 1^{ten} und -1^{ten} Ordnung sind, und in u, v, w Terme 0^{ter} Ordnung ergeben; t_0 geht aus der Rechnung, derjenige Theil von q_0, welcher die Glieder niedrigster Ordnung enthalten würde, fällt aus, und alle übrigen Glieder führen auf höhere Ordnungen. Es bleiben also nur die in (104.) beibehaltenen Glieder.

So kann man also zunächst in den Ausdrücken (103.) $\mathfrak{r}$ als endlich betrachten, und später dasselbe, in den ausgerechneten Formeln, sehr klein werden lassen, ohne dass dabei berechtigte Glieder vernachlässigt würden.

§. 17.

Darstellung der Formeln und Gesetze für Punkte, welche von der reflectirenden Kugel weit entfernt sind.

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, *dass bei mässiger Wellenlänge der Einfluss einer sehr kleinen reflectirenden Kugel nur in der unmittelbaren*

Nähe derselben von endlicher Grösse, in weiterer Entfernung aber von der Ordnung des Kugelradius ist. Ich werde jetzt die Formeln für diesen Einfluss vollständiger entwickeln.

Nach (103.) ist:

$$
(107.)\left\{\begin{aligned}
P_1 &= \sqrt{-1}\left\{\left(\frac{k}{a}\right)^3 \Phi_1\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right)\cdot KY_1+\left(\frac{k}{b}\right)^3 \Phi_1\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot\Omega_1\right\}\\
&= \sqrt{-1}\left\{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\sqrt{-1}}\left(\frac{k}{a}\right)^3\left(\left(\frac{a}{k\mathfrak{r}_0}\right)^2-\sqrt{-1}\left(\frac{a}{k\mathfrak{r}_0}\right)^3\right)K.(xx_0+yy_0+zz_0)\right.\\
&\qquad\left.+e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\sqrt{-1}}\left(\frac{k}{b}\right)^3\left(\left(\frac{b}{k\mathfrak{r}_0}\right)^2-\sqrt{-1}\left(\frac{b}{k\mathfrak{r}_0}\right)^3\right)\cdot\begin{vmatrix}A & x & x_0\\ B & y & y_0\\ C & z & z_0\end{vmatrix}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Da ferner $\Phi_n(s)$ sich für ein unendlich kleines s auf

$$\frac{(-\sqrt{-1})^n.1.3\ldots 2n-1}{s^{2n+1}},$$

$\Phi_0(s)$ aber auf $\frac{1}{s}$ reducirt, so findet sich

$$(108.)\qquad \mu_1 = \frac{k\varepsilon}{ab}\,\frac{b^3\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+2a^3\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{b^2+2a^2} = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{r}}\,\frac{b^2e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{a}\sqrt{-1}}+2a^2e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{b}\sqrt{-1}}}{b^2+2a^2},$$

und für sehr kleine Werthe von $\mathfrak{r}$:

$$(108^a.)\qquad \mu_1 = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{r}}.$$

Sodann hat man:

$$
(109.)\left\{\begin{aligned}
\varrho_1 &= \frac{k^3\varepsilon}{a^3b^3}\,\frac{b^5\Phi_2\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-a^5\Phi_2\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{b^2+2a^2}\\
&= \frac{k^3\varepsilon}{a^3b^3}\cdot\left\{\frac{b^5}{b^2+2a^2}e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{a}\sqrt{-1}}\left(\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^3-3\sqrt{-1}\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^4-3\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^5\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{a^5}{b^2+2a^2}e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{b}\sqrt{-1}}\left(\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^3-3\sqrt{-1}\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^4-3\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^5\right)\right\};
\end{aligned}\right.
$$

und für sehr kleine Werthe von $\mathfrak{r}$, indem man bemerkt, dass in (106.) nothwendig $a_2=-3$ zu setzen ist:

$$(109^a.)\qquad \varrho_1 = \frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Führt man die Werthe (107.), (108.), (109.) in die Gleichungen (104.) ein, so ergeben sich für Punkte, welche in grösserer Entfernung von der reflectirenden Kugel liegen, die Ausdrücke:

$$u = e^{k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{a}\right)\sqrt{-1}}\{\alpha K b^2 x_0 + \alpha' K(r^2 x_0 - 3x(xx_0+yy_0+zz_0))\}$$
$$+e^{k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{a}\right)\sqrt{-1}}\{2\alpha K a^2 x_0 - \alpha'' K(r^2 x_0 - 3x(xx_0+yy_0+zz_0))\}$$
$$+e^{k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{b}\right)\sqrt{-1}}\{\beta b^2(Cy_0-Bz_0)+\beta'(r^2(Cy_0-Bz_0)-3x\Delta)\}$$
$$+e^{k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{b}\right)\sqrt{-1}}\{2\beta a^2(Cy_0-Bz_0)-\beta''(r^2(Cy_0-Bz_0)-3x\Delta)\},$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix},$$

und wo die Grössen α, β folgende Bedeutungen haben:

$$\alpha = -\frac{\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{arr_0^2}\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\alpha' = \frac{b^2\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{ar_0^2 r^3}\left(1-\frac{3a\sqrt{-1}}{kr}-\frac{3a^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\alpha'' = \frac{a\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{r_0^2 r^3}\left(1-\frac{3b\sqrt{-1}}{kr}-\frac{3b^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\beta = -\frac{\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{brr_0^2}\left(1-\frac{b\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\beta' = \frac{b\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{r_0^2 r^3}\left(1-\frac{3a\sqrt{-1}}{rk}-\frac{3a^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{b\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\beta'' = \frac{a^2\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{br_0^2 r^3}\left(1-\frac{3b\sqrt{-1}}{rk}-\frac{3b^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right).$$

Die Ausdrücke für v, w erhält man leicht aus u durch Vertauschung der Buchstaben.

Der obige Werth von u erscheint sofort in vier Theile gesondert, die mit verschiedenen Exponentialgrössen multiplicirt sind. Der erste Theil enthält Longitudinalbewegungen, welche aus eben solchen, der zweite Transversalbewegungen, welche aus longitudinalen entstanden sind; der dritte Theil giebt longitudinale Schwingungen, und der vierte transversale, welche beide in transversalen Bewegungen ihren Ursprung haben. In der entsprechenden Weise deutet die Phase $\frac{r}{a}+\frac{r_0}{a}$ des ersten Theils auf einen Strahl, welcher die Strecke r_0 zur reflectirenden Kugel, und die Strecke r von da zum betrachteten Punkte mit der Geschwindigkeit a der Longitudinalwellen zurückgelegt hat, während beim zweiten Theil die zweite, beim dritten die erste

Strecke, beim letzten endlich beide mit der Geschwindigkeit b der Transversalwellen zurückgelegt erscheinen. Strenge genommen tritt überall eine Phasenveränderung, d. h. eine für die vier Theile verschiedene Verzögerung durch die Reflexion, deswegen ein, weil die den Exponentialgrössen anhaftenden Coefficienten complex sind; aber man bemerkt, dass die reellen Theile der Coefficienten für sehr grosse Werthe von r, r_0 von höherer Ordnung werden. Ist also der Erregungspunkt, so wie der betrachtete, weit entfernt, so werden die Coefficienten der verschiedenen Theile der reflectirten Bewegung, so wie auch die Coefficienten der einfallenden Bewegung rein imaginär; während daher in solchem Fall der reelle Theil der einfallenden Bewegung, welcher die wirkliche Schwingung darstellt, den trigonometrischen Factor $\sin k\left(t-\frac{R}{a}\right)$ erhält, besteht die reflectirte Bewegung aus vier Theilen, deren trigonometrische Factoren

$$\sin k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{a}\right),\ \sin k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{a}\right),\ \sin k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{b}\right),\ \sin k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{b}\right)$$

sind, und welche also die oben angegebenen Phasen zeigen.

Die Coefficienten, mit welchen diese vier trigonometrischen Ausdrücke dann in u, v, w multiplicirt sind, werden von der Form

$$\begin{array}{lllll}
\text{in } u: & mx, & nx_0+n'x, & px, & q(Cy_0-Bz_0)+q'x, \\
\text{in } v: & my, & ny_0+n'y, & py, & q(Az_0-Cx_0)+q'y, \\
\text{in } w: & mz, & nz_0+n'z, & pz, & q(Bx_0-Ay_0)+q'z;
\end{array}$$

und zwar hat man:

$$m = \frac{3(xx_0+yy_0+zz_0)K.k\varepsilon b^2}{r^3 r_0^2 a(b^2+2a^2)}, \qquad n = \frac{Kk\varepsilon}{arr_0^2},$$

$$n' = -\frac{3(xx_0+yy_0+zz_0)K.k\varepsilon a}{r^3 r_0^2 (b^2+2a^2)},$$

$$p = \frac{3\Delta k\varepsilon b}{r^3 r_0^2 (b^2+2a^2)}, \qquad q = \frac{k\varepsilon}{brr_0^2},$$

$$q' = -\frac{3\Delta k\varepsilon a^2}{br^3 r_0^2 (b^2+2a^2)}.$$

Aus diesen Formeln erkennt man Folgendes:

1. Die Amplituden der einzelnen Theile sind proportional dem Radius der reflectirenden Kugel, so wie umgekehrt proportional ihrem Abstande vom Erregungspunkt. Sie sind ferner, in einer bestimmten Richtung vom Mittelpunkt der reflectirenden Kugel aus, umgekehrt proportional dem Abstande von demselben.

2. Die Longitudinalschwingungen finden immer in der Richtung der Linie statt, welche den betrachteten Punkt mit dem Mittelpunkte der reflectirenden Kugel verbindet.

3. In den Longitudinalschwingungen, welche aus einfallenden Longitudinalwellen entstehen, ist auf einer der reflectirenden concentrischen Kugel die Amplitude proportional dem Cosinus des Winkels, welchen der nach dem Erregungspunkt gezogene Radius mit dem nach dem betrachteten Punkte gezogenen bildet. Sie ist also am grössten auf der Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Erregungspunkt, und Null auf der Ebene, welche, senkrecht gegen diese Linie, durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel gelegt wird.

4. Die aus den Longitudinalschwingungen hervorgehenden Transversalbewegungen bestehen aus zwei Componenten. Die eine ist nach dem Erregungspunkt gerichtet, und auf allen Punkteu der in 3. betrachteten Kugel von gleicher Amplitude; die andere ist nach dem Mittelpunkt der reflectirenden Kugel gerichtet, und verhält sich in Bezug auf ihre Amplitude genau wie die entsprechende Longitudinalbewegung 3.

5. Die aus Transversalwellen entspringenden Longitudinalwellen, deren Richtung in 2. angegeben ist, haben ihre Amplitude proportional mit dem Inhalt einer dreiseitigen Pyramide Π, deren Seitenkanten 1 sind, während ihre Richtungen durch die Verbindungslinien der reflectirenden Kugel mit dem betrachteten Punkte und dem Erregungspunkt, und durch die Axe der einfallenden Schwingungen (§. 13) gegeben sind. Diese Bewegungen sind also Null in der Ebene, welche durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel, durch den Erregungspunkt und die Axe geht, und am grössten in der Normale dieser Ebene, welche durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel geführt wird.

6. Die aus Transversalwellen entstehenden Transversalwellen endlich bestehen aus einer Componente, welche sich genau wie der vorige Theil der Bewegungen verhält, und aus einer zweiten, welche senkrecht ist gegen die Axe und gegen die Verbindungslinie des Erregungspunkts mit dem Mittelpunkt der reflectirenden Kugel. Die Amplitude ist auf allen Punkten einer um diesen letzten Punkt beschriebenen Kugel die gleiche.

Es verdient endlich bemerkt zu werden, dass wenn die einfallenden Bewegungen transversal sind und ihre Axe durch den Mittelpunkt geht, in der hier angewandten Annäherung überhaupt keine reflectirten Bewegungen existiren. Denn ist $K=0$ und $x_0:y_0:z_0=A:B:C$, so verschwinden die obigen Ausdrücke. Dies war zu erwarten; denn es fällt die reflectirende Kugel dann ganz in jenen Raum, innerhalb dessen auch die einfallenden Bewegungen ausserordentlich schwach sind.

§. 18.

Untersuchung derjenigen Punkte, welche der reflectirenden Kugel sehr nahe liegen.

Für Punkte in der Nähe der reflectirenden Kugel ergiebt sich mit Benutzung von (108^a.), (109^a.), indem man wieder den Erregungspunkt sehr weit entfernt annimmt:

$$u = e^{\left(t-\frac{r_0}{a}\right)k\sqrt{-1}}\cdot\frac{k\sqrt{-1}}{ar_0^2}K\left\{-\frac{\varepsilon}{r}x_0+\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left(x_0-\frac{3x(xx_0+yy_0+zz_0)}{r^2}\right)\right\}$$
$$+e^{\left(t-\frac{r_0}{b}\right)k\sqrt{-1}}\cdot\frac{k\sqrt{-1}}{br_0^2}\left\{-\frac{\varepsilon}{r}(Cy_0-Bz_0)+\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left((Cy_0-Bz_0)-\frac{3x\Delta}{r^2}\right)\right\},$$

$$v = \cdots, \qquad w = \cdots.$$

In diesen Formeln erscheint nicht jene Zerlegung in vier verschiedene Bewegungen, welche die vorhergehenden Formeln characterisirte; vielmehr sondern sich die u, v, w nur in je zwei Theile, deren reelle Theile die trigonometrischen Factoren $\sin k\left(t-\frac{r_0}{a}\right)$, $\sin k\left(t-\frac{r_0}{b}\right)$ erhalten. Vergleicht man daher die Formeln (102^a.) für die einfallenden Bewegungen, so erscheinen die beiden Theile der reflectirten Bewegungen den beiden Theilen der einfallenden Bewegungen ganz analog. Aber während in den letzteren Schwingungsrichtung und Amplitude in der Nähe der reflectirenden Kugel nahezu überall gleich ist, wird bei den reflectirten Bewegungen beides für verschiedene Punkte wesentlich verschieden. Was die Schwingungsrichtungen und die Vergleichung der Amplituden für Punkte einer der reflectirenden concentrischen Kugel betrifft, so verhält sich der erste Theil der reflectirten Bewegungen genau so wie der zweite im Früheren, und der zweite hier, wie im Vorigen der vierte, so dass die betreffenden Gesetze dem Obigen entnommen werden können.

Aber anders wie dort variirt hier die *Intensität* der Bewegungen in der Richtung einer vom Centrum der reflectirenden Kugel aus gezogenen Linie, da u, v, w zum Theil mit $\frac{1}{r}$, zum Theil aber mit r^2 proportional sind. Ich werde, statt die Intensität der reflectirten Bewegungen zu untersuchen, reflectirte und einfallende Bewegungen zusammenfassen, und die Amplituden der Gesammtbewegung betrachten. Man erhält dann, indem man die Ausdrücke (102^a.) zu den oben stehenden addirt:

$$u=e^{\left(t-\frac{r_0}{a}\right)k\sqrt{-1}}\cdot\frac{k\sqrt{-1}}{ar_0^2}K\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)x_0+\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left(x_0-\frac{3x(xx_0+yy_0+zz_0)}{r^2}\right)\right\}$$

$$+e^{\left(t-\frac{r_0}{b}\right)k\sqrt{-1}}\cdot\frac{k\sqrt{-1}}{br_0^2}\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)(Cy_0-Bz_0)+\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left((Cy_0-Bz_0)-\frac{3x\Delta}{r^2}\right)\right\},$$

$$v=\cdots,\qquad w=\cdots.$$

Diese Ausdrücke verschwinden, wie es sein muss, für $r=\varepsilon$; man darf also annehmen, dass jede der beiden Schwingungen, aus denen die u, v, w sich zusammensetzen, auf jeder von dem Mittelpunkt der reflectirenden Kugel aus gezogenen Geraden an einer gewissen Stelle ein Maximum der Amplitude erreicht, und man kann die Oberflächen aufsuchen, welche von diesen Maximumspunkten gebildet werden.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}=\mu,\qquad xx_0+yy_0+zz_0=rr_0\cos\vartheta,$$

so ist das Quadrat der Amplitude der durch die Reflexion modificirten Longitudinalbewegungen proportional mit:

$$\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}x_0-3\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{xr_0\cos\vartheta}{r}\right]^2$$

$$+\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}y_0-3\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{yr_0\cos\vartheta}{r}\right]^2$$

$$+\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}z_0-3\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{zr_0\cos\vartheta}{r}\right]^2$$

$$=r_0^2\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}^2-6\mu\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\cos^2\vartheta\right.$$

$$\left.+9\mu^2\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^2\cos^2\vartheta\right].$$

Differentiiren wir diesen Ausdruck nach r und setzen das Resultat gleich Null, so ergiebt sich diejenige Oberfläche, deren Punkte auf den verschiedenen Radien Vectoren Maxima der Amplitude für die Longitudinalbewegungen besitzen, ausgedrückt in den Polarcoordinaten r, ϑ. Die Oberfläche ist also eine Rotationsfläche, und ihre Drehungsaxe ist die Verbindungslinie des Erregungspunktes mit dem Mittelpunkte der reflectirenden Kugel. Die Gleichung der Fläche ist:

$$0=\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right)-6\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\cos^2\vartheta$$

$$+12\mu\frac{r}{\varepsilon}\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\cos^2\vartheta-36\mu^2\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{r}{\varepsilon}\cos^2\vartheta$$

oder, mit Hinweglassung des Factors $1-\frac{\varepsilon}{r}$:

$$(110.)\ 6\cos^2\vartheta = -\frac{\left\{\frac{\varepsilon}{r}-\mu\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)\right\}\left\{\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right\}}{\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)+2\mu\frac{r}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{r}-\mu\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)+6\mu^2\frac{r}{\varepsilon}\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)}.$$

In der Aequatorebene hat man $\cos\vartheta = 0$, also

$$\left(\frac{\varepsilon}{r}-\mu\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Von diesen Factoren giebt der erste für $\frac{r}{\varepsilon}$ zwei Werthe, deren einer negativ ist, während der zweite kleiner als 1 wird; so bleibt also nur der letzte Factor, welcher

$$r = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2\mu}}$$

giebt. Da man Grund hat, immer $a > b$ anzunehmen, so wird 2μ ein positiver echter Bruch, und also der obige Werth von r wirklich brauchbar zur Bestimmung des Kreises, an welchem in der gegen r_0 senkrechten Ebene die Longitudinalschwingungen ihr Maximum der Amplitude haben.

Für $\cos\vartheta = 1$, also auf der Rotationsaxe, hat man hingegen, da für diesen Werth der ursprünglich differentiirte Ausdruck ein vollständiges Quadrat wird:

$$0 = \left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)-2\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left\{\frac{\varepsilon^2}{r^2}+4\mu\frac{r}{\varepsilon}\right\}.$$

Keiner dieser Factoren liefert einen brauchbaren Werth. Bemerkt man aber, dass man aus (110.) für $r=\infty$ den Werth

$$6\cos^2\vartheta = \frac{2\mu}{1-2\mu} = \frac{a^2-b^2}{a^2+2b^2}$$

erhält, so erkennt man, dass die betrachtete Fläche, von ihrer Aequatorebene ausgehend, sich gegen den aus dieser Gleichung gezogenen Werth von ϑ ins Unendliche ausdehnt, während jenseits dieses Winkels kein ausserhalb der Kugel $r=\varepsilon$ gelegener Zweig existirt. Man darf daraus schliessen, dass in der unmittelbaren Nähe der reflectirenden Kugel Maxima der Longitudinalbewegungen nur für solche Richtungen auftreten, welche von der gegen r_0 senkrechten Ebene sich nicht sehr weit entfernen.

Auf ganz ähnliche Verhältnisse wird man geführt, wenn man die Maxima der Amplituden für die Transversalschwingungen aufsucht. Setzt man

$$F^2 = (A^2+B^2+C^2)(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-(Ax_0+By_0+Cz_0)^2,$$

so wird das Quadrat der Amplitude hier proportional mit:

$$\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right]F^2-6\mu\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{\varDelta^2}{r^2}+9\mu^2\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^2\frac{\varDelta^2}{r^2}.$$

Aber F und $\varDelta$ haben sehr einfache geometrische Bedeutungen. Zieht man durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel die Axe der Schwingungen und trägt auf derselben die Strecke $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ an, so bestimmt diese Linie mit r_0 zusammen ein Dreieck, dessen Fläche $\frac{F}{2}$ ist. Beide Linien zusammen mit r bestimmen eine dreiseitige Pyramide, deren Inhalt $\frac{\varDelta}{6}$ ist. Zieht man nun die Gerade, welche auf r_0 und der Schwingungsaxe senkrecht steht, und bezeichnet durch u den Winkel, welchen sie mit r bildet, so kann man den Inhalt der Pyramide doppelt ausdrücken, und hat also:

$$\frac{\varDelta}{6}=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{2}\cdot r\cos u,\quad \text{oder}\quad \varDelta=Fr\cos u.$$

Setzt man dies in den obigen Ausdruck ein, so erhält man, abgesehen von dem Factor $\frac{F^2}{r_0^2}$, genau den Ausdruck, welcher oben das Amplitudenquadrat der Longitudinalbewegungen darstellte, nur dass u an die Stelle von ϑ getreten ist. Hieraus folgt, *dass die Fläche der Maxima für die Transversalbewegungen von der entsprechenden für die Longitudinalbewegungen nur der Lage nach verschieden ist;* indem die Drehungsaxe der letzteren mit der Linie r_0 zusammenfällt, die der ersteren aber gegen diese Linie so wie gegen die Schwingungsaxe senkrecht gerichtet ist.

Es kann noch bemerkt werden, dass die Formeln für u, v, w ihre Ausdrücke durchaus nicht ändern, wenn man x, y, z gleichzeitig in $-x$, $-y$, $-z$ übergehen lässt. Es ergiebt sich also aus diesen Formeln keine Spur eines *Schattens.*

Carlsruhe, den 30. October 1861.