

Дифракция света.

(основную часть текста составляют описание задачи №403 практикума и Глава 4 из «Методики решения...»)

Определения из различных источников.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА - в узком, но наиболее употребительном смысле — огибание лучами света границы непрозрачных тел и, следовательно, проникновение света в область геометрической тени; в широком смысле — проявление волновых свойств света в предельных условиях перехода от волновой оптики к геометрической. — Физическая энциклопедия в 5 томах.

Волна с конечным поперечным сечением пучка не может распространяться строго в одном направлении, характеризуемом вектором k : имеется некоторый разброс направлений волновых векторов от среднего направления. Это явление называется дифракцией. — Матвеев.

До сих пор никому не удалось удовлетворительным образом определить разницу между дифракцией и интерференцией. Дело здесь только в привычке, а существенного физического различия нет. Единственное, что можно сказать по этому поводу, - это следующее: когда источников мало, например, два, то результат их совместного действия обычно называют интерференцией, а если источников много, то чаще говорят о дифракции. — Фейнман.

Арнольд Зоммерфельд определил дифракцию как «любое отклонение распространения света от прямолинейного, не связанное с отражением или преломлением». В более узком смысле дифракцией называют явление огибания волной препятствия. — Ахманов.

Дифракция (от лат. diffractus – разломанный) – неотъемлемое свойство волн любой природы стремиться распространяться во всех направлениях, заходя в область геометрической тени, огибая препятствия и т.д. – Алешкевич.

Под дифракцией света понимают всякое уклонение от прямолинейного распространения света, если оно не может быть истолковано как результат отражения, преломления или изгибания световых лучей в средах с непрерывно меняющимся показателем преломления – Сивухин.

Ландсберг – не дает ответа.

Дифракция света – это совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света, наблюдаемых при распространении ограниченных в пространстве пучков света, а также в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.). В более узком смысле этого слова под дифракцией понимают: огибание светом различных препятствий; проникновение волны в область геометрической тени; т.е. отклонение от законов геометрической оптики.

Для описания этого явления Гюйгенс, впервые обосновавший волновую теорию света, предложил следующее построение. Каждая точка волнового фронта принимается за источник вторичных волн, распространяющихся во все стороны, при этом волновой фронт

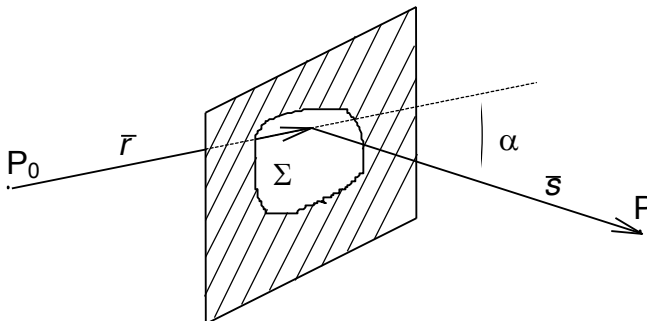


Рис. 1. Схема наблюдения дифракционных явлений.

в любой последующий момент времени есть огибающая этих вторичных волн.

Френель дополнил принцип Гюйгенса утверждением, что в любой момент времени световое поле в рассматриваемой точке есть результат интерференции вторичных волн. Это сочетание построения Гюйгенса с принципом интерференции называется **принципом Гюйгенса-Френеля**, который позволяет количественно описать дифракционные явления.

Пусть на пути сферической монохроматической световой волны, исходящей из точечного источника P_0 , находится плоский непрозрачный объект с отверстием Σ , размеры которого велики по сравнению с длиной волны (рис. 1). В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля напряженность поля в точке P за объектом определяется суперпозицией волн от вторичных источников, расположенных в плоскости отверстия Σ . При этом амплитуда и фаза вторичных сферических волн, приходящих в точку P , зависят как от расстояния \vec{r} (от источника P_0 до соответствующих участков объекта на поверхности Σ), так и от расстояния \vec{s} (от этих участков до точки P).

В соответствие с принципом Гюйгенса-Френеля комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью интегральной **формулы Френеля**:

$$U(P) = \iint_{\Sigma} \frac{A \exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot K(\alpha) \cdot dS \quad (1)$$

где λ - длина волны;

$k = 2\pi/\lambda$ - волновое число;

α - угол между векторами \vec{r} и \vec{s} ;

$K(\alpha)$ - коэффициент, описывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла α между направлениями распространения падающей и вторичных волн;

dS - элемент площади в плоскости отверстия Σ ;

A - константа, задаваемая мощностью излучения от источника P_0 ;

интегрирование ведется по поверхности Σ отверстия в объекте.

В этой формуле множитель $A \exp(ikr)/r$ описывает сферическую волну, распространяющуюся из точки P_0 до некоторого вторичного источника, расположенного на поверхности Σ , множитель $\exp(iks)/s$ - сферическую волну, идущую от вторичного источника до точки наблюдения P .

В общем случае комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью интегральной **формулы Френеля-Кирхгофа** (подробнее см. ниже):

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cdot dS \quad (1a)$$

где θ_0 и θ - углы, образованные векторами \vec{r} и \vec{s} с вектором нормали в поверхности Σ . Таким образом,

$$K(\alpha) = -\frac{i}{2\lambda} \cdot (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Наиболее интересным для рассмотрения является случай, когда характерный линейный размер отверстия мал по сравнению с расстояниями r и s от точек P_0 и P до объекта. В этом случае как множитель $K(\alpha)$, так и множитель $\frac{1}{r \cdot s}$ незначительно изменяются при интегрировании по отверстию Σ и основную роль в вычислении дифракционной картины по формуле (1) играет интеграл от быстро осциллирующего множителя вида $\exp[ik(r+s)]$. Разложение в ряд этого множителя позволяет существенно упростить формулу (1). Явления, описываемые в рамках такого приближения, носят название **дифракции Френеля**, или **дифракции в ближней зоне**. При $r \rightarrow \infty$ фронт падающей волны можно считать плоским. Если $s \rightarrow \infty$, то и вторичные волны, распространяющиеся под некоторым углом α к первоначальному направлению, образуют плоский волновой фронт. Дифракционные явления, наблюдаемые при этих условиях, носят название **дифракции Фраунгофера**, или **дифракции в дальней зоне**. Количественный критерий, позволяющий различать приближения Френеля и Фраунгофера, будет приведен ниже после введения понятия **зон Френеля**.

Дифракция Френеля на круглом отверстии.

Задача Между точечным источником P_0 монохроматического света и точечным приемником излучения P расположен непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса R , центр которого находится на линии P_0P (рис. 1.1). В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля найти комплексную амплитуду поля U в точке P , если расстояние от источника P_0 до экрана равно a , а расстояние от экрана до приемника P равно b .

Решение:

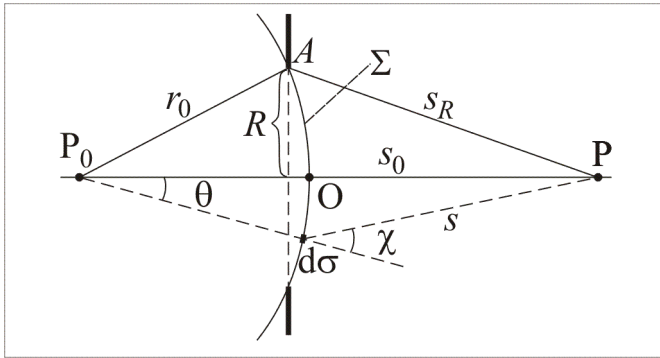


Рис. 1.1. Распространение световой волны от точечного источника P_0 через отверстие в экране радиуса R

Выберем в качестве вспомогательной поверхности сферу радиуса r_0 , где r_0 – расстояние от P_0 до крайних точек отверстия. Вторичные источники будут располагаться на части Σ сферы, ограниченной краями отверстия.

Комплексная амплитуда поля в любой точке поверхности Σ задается формулой

$$U_{\Sigma} = \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0}$$

где U_0 – амплитуда на единичном расстоянии от источника (загадочная фраза, присутствующая в учебниках !!!).

Вклад от произвольного элемента $d\sigma$, являющегося в соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля источником вторичных сферических волн, представим в виде

$$dU(P) = U_{\Sigma} \cdot \frac{e^{iks}}{s} d\sigma \cdot K(\chi), \quad (1)$$

где s – расстояние от элемента $d\sigma$ до т. P , $K(\chi)$ – угловой коэффициент, учитывающий изменение амплитуды вторичных волн от направления, χ – угол между нормалью к волновому фронту и направлением излучения от $d\sigma$ к т. P .

Амплитуда поля в т. P есть интеграл вида

$$U(P) = \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) d\sigma. \quad (2)$$

Подобный интеграл принято называть **интегралом Френеля**.

В сферических координатах

$$d\sigma = r_0^2 \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta. \quad (3)$$

По теореме косинусов:

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + s_0)^2 - 2r_0(r_0 + s_0)\cos \theta,$$

откуда

$$2s \cdot ds = -2r_0(r_0 + s_0) \cdot d(\cos \theta) = 2r_0(r_0 + s_0) \sin \theta \cdot d\theta. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получим:

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) \cdot \frac{r_0}{r_0 + s_0} s ds d\varphi = \\ &= \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{r_0}{r_0 + s_0} \cdot 2\pi \int_{s_0}^{s_R} K(\chi) \cdot e^{iks} ds, \end{aligned}$$

где учтена симметрия по φ .

В первом приближении можно считать, что $K(\chi) = K_0 = \text{const}$, поэтому

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot K_0 \cdot \frac{1}{ik} e^{iks} \Big|_{s_0}^{s_R} =$$

$$= U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot K_0 \cdot \frac{1}{ik} e^{iks_0} \cdot (e^{ik(s_R - s_0)} - 1)$$

Пусть $\Delta s = s_R - s_0$ – разность хода между крайним и центральным лучами, идущими соответственно из точек А и О. Так как $\psi = k \cdot \Delta s$ – разность фаз между этими же лучами в т. Р, то

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \cdot K_0 \cdot \frac{2\pi}{ik} \cdot e^{iks_0} \cdot (e^{i\psi} - 1) =$$

$$= U_0 \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0} \cdot K_0 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{e^{i\psi} - 1}{i} \right) = C \cdot \Gamma, \quad (5)$$

где $C = U_0 K_0 \cdot \lambda \cdot \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0}$ – множитель, физический смысл которого будет пояснен

ниже;

$\Gamma = \frac{e^{i\psi} - 1}{i} = i \cdot (1 - e^{i\psi})$ – комплексный множитель, который на комплексной плос-

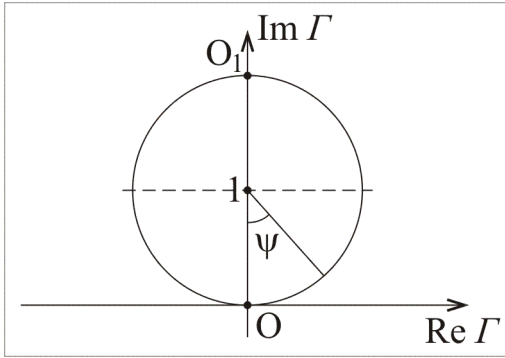


Рис. 1.2. Представление множителя Γ на комплексной плоскости

кости (рис. 1.2) описывает окружность единичного радиуса с центром в точке с координатами (0, 1) (угол ψ отсчитывается от вертикальной оси в направлении против часовой стрелки).

Из рисунка 1.2 видно, что при

$$\psi_{\max} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, 2\pi(2n+1)$$

$|\Gamma| = 2$ (вектор OO_1), а комплексная амплитуда волны будет максимальной и равной $U_{\max} = 2C$.

Значениям ψ_{\max} соответствует разность хода $\Delta s_{\max} = \frac{\psi_{\max}}{k} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots, \frac{\lambda}{2}(2n+1)$. С

другой стороны, при $\psi_{\min} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi n$ разность хода $\Delta s_{\min} = \frac{\psi_{\min}}{k} = \lambda n$, а амплитуда волны равна нулю.

С учетом полученных результатов можно выполнить следующее построение (рис. 1.3). Построим концентрические сферы с центром в т. Р и радиусами $s_0, s_0 + \frac{\lambda}{2}, s_0 + 2\frac{\lambda}{2}, \dots, s_0 + n\frac{\lambda}{2}$, которые разобьют сферическую поверхность Σ на кольцевые зоны, называемые зонами Френеля. Соответствующие границам зон Френеля значения разности фаз ψ будут равны $\psi = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, n\pi, \dots$. Если для т. Р отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда волны в т. Р будет максимальной, если же открыто четное число зон Френеля, то амплитуда равна нулю.

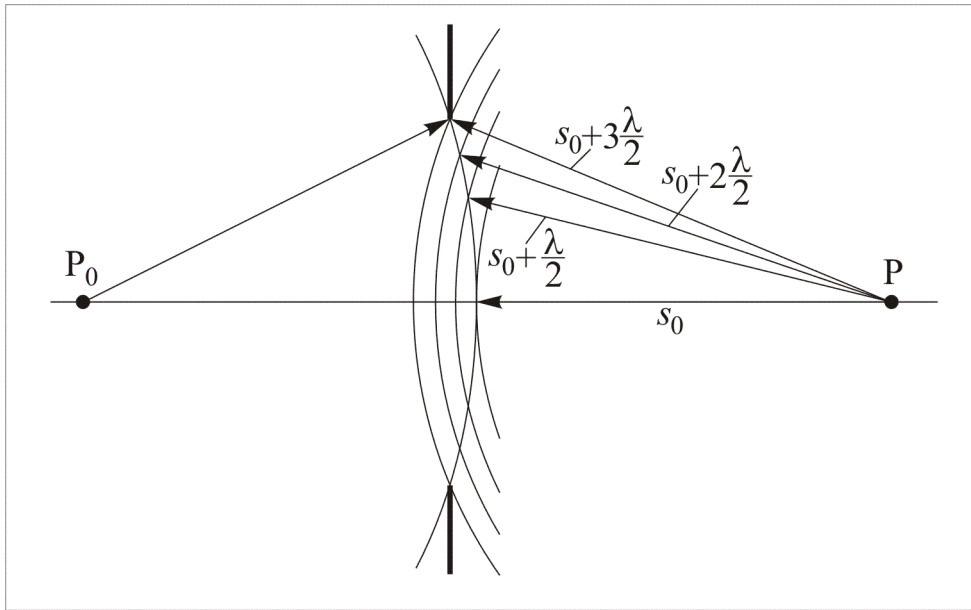


Рис. 1.3. Построение зон Френеля

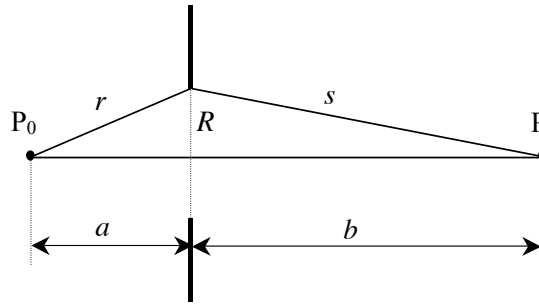


Рис. 1.4. К выводу формулы для радиуса зон Френеля

Найдем радиус R_n n -ой зоны Френеля (рис. 1.4) при заданных расстояниях a (от источника P_0 до объекта) и b (от объекта до приемника P). Полагая $R \ll a$ и $R \ll b$, получим:

$$r = \sqrt{R^2 + a^2} = a \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}} \approx a \left(1 + \frac{R^2}{2a^2} \right),$$

$$s = \sqrt{R^2 + b^2} \approx b \left(1 + \frac{R^2}{2b^2} \right),$$

$$\Delta s_R = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (6)$$

где r и s – соответственно расстояния от источника P_0 и от приемника P до вторичного источника, расположенного в плоскости экрана на расстоянии R от оси P_0P ; Δs_R – разность хода до точки P для крайнего и центрального лучей.

Для луча, идущего от внешней границы n -й зоны Френеля, $\Delta s_R = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, поэтому

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (7)$$

Площадь n -ой зоны Френеля равна:

$$S_n = \pi R_n^2 - \pi R_{n-1}^2 = \pi \left(\frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \frac{(n-1)\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) = \frac{\pi\lambda}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \text{const},$$

т.е. площади всех зон Френеля равны. С учетом (6):

$$\psi_R = k \cdot \Delta s_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (8)$$

т.е. разность фаз ψ_R между крайним и центральным лучами пропорциональна квадрату радиуса отверстия (запомним это!). Формулу (8) можно преобразовать к виду:

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}. \quad (9)$$

Выполним еще одно построение. Разобьем первую зону Френеля на m подзон

(рис. 1.5) так, чтобы разность фаз $d\psi_m$ между лучами, идущими от границ каждой подзоны, была равна

$$d\psi_m = \frac{\pi}{m}.$$

Из формулы (8) следует, что $d\psi \sim d(R^2) = R \cdot dR$, т.е. площади всех подзон одинаковы.

Построим векторную диаграмму для нахождения амплитуды поля в точке Р (рис. 1.5). Вклады от 1-й, 2-й, ..., m -й подзон отображаются векторами $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\overrightarrow{A_{m-1}O_1}$, которые имеют одну и ту же длину и повернуты друг относительно друга на один и тот же угол $d\psi_m$ (на рис. 1.5 это соответствует разбиению дуги OO_1 на m равных частей).

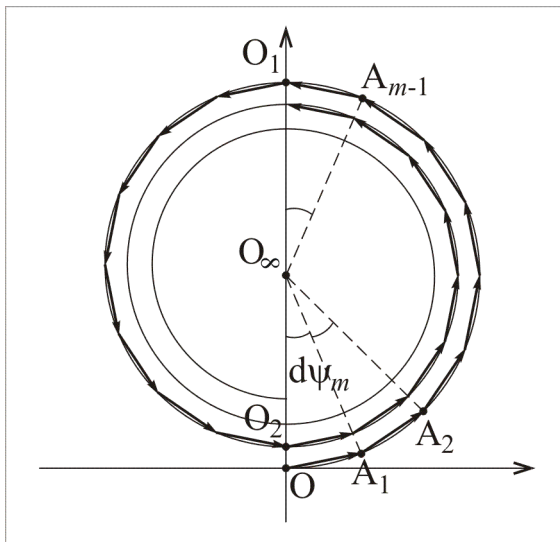


Рис. 1.5. Построение векторной диаграммы для нахождения амплитуды светового поля в точке Р

При увеличении m ломаная $OA_1A_2...A_{m-1}O_1$ все больше будет походить на дугу окружности.

Проводя аналогичные рассуждения для второй зоны, получим вторую ломаную, которая замкнула бы первую, если бы амплитуды складываемых элементарных векторов действительно были бы равны. Однако следует помнить о коэффициенте $K(\chi)$, который учитывает зависимость амплитуды излучаемых вторичных волн от угла χ между лучом, идущим от источника P_0 к вторичному источнику, и лучом, идущим от вторичного источника к точке наблюдения Р. Так как коэффициент $K(\chi)$ монотонно уменьшается с ростом угла χ , то конец ломаной, соответствующей второй зоне, попадает не в т. О, а в близкую к ней т. O_2 . Таким образом, вклад от второй зоны характеризуется вектором $\overrightarrow{O_1O_2}$, который по длине примерно равен вектору $\overrightarrow{OO_1}$, но направлен в противоположную сторону. В результате вклад в $U(P)$ от первой и второй зон Френеля пропорционален длине малого вектора $\overrightarrow{OO_2}$.

Учитывая третью, четвертую и все последующие зоны, получим векторную диаграмму в виде скручивающейся спирали $OO_1O_2O_3...O_\infty$, где точка O_∞ совпадает с центром спирали (вектор $\overrightarrow{OO_\infty}$ соответствует случаю, когда препятствие отсутствует и открыты все зоны Френеля). Полученную спираль называют спиралью Френеля. Как видно из рис. 1.5, вектор $\overrightarrow{OO_\infty}$ в два раза меньше вектора $\overrightarrow{OO_1}$. Следовательно, если для

точки Р открыта только первая зона Френеля, то напряженность поля в центре экрана будет в два раза больше, чем в отсутствие препятствия. А так как интенсивность пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, то для интенсивностей отношение будет равно четырем.

Поскольку в отсутствие препятствия амплитуда волны задается формулой:

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0 + s_0},$$

то предельный переход в формуле (5) позволяет найти коэффициент K_0 . Из спирали Френеля следует, что, так как при $R \rightarrow \infty$ коэффициент $\Gamma \rightarrow i$, то отсюда:

$$K_0 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}. \quad (10)$$

Теперь становится понятной роль коэффициента C в формуле (5): модуль $|C|$ равен амплитуде поля в точке наблюдения Р в отсутствие препятствия, а квадрат модуля $|C|^2$ (для упрощения расчетов) полагают равным интенсивности I_0 в отсутствие препятствия. Таким образом, длина вектора $\overrightarrow{OO_\infty}$ на рис. 1.5 равна $|C|$. Если число открытых зон Френеля невелико ($n \sim 5 \div 10$), то радиус спирали можно считать мало отличающимся от $|C|$, а интенсивность в точке наблюдения Р рассчитывать по формуле:

$$I = I_0 \cdot |\Gamma|^2$$

(см. формулу (5) и рис. 1.2).

Для заданных a , b и R по формуле (8) находим ψ_R . Как видно из рис. 1.2:

$$\operatorname{Re} \Gamma = \sin \psi;$$

$$\operatorname{Im} \Gamma = 1 - \cos \psi;$$

$$|\Gamma|^2 = \sin^2 \psi + (1 - \cos \psi)^2 = 2(1 - \cos \psi);$$

поэтому:

$$I(\psi) = 2I_0 \cdot (1 - \cos \psi) = 4I_0 \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (11)$$

Метод зон Френеля (и построение векторных диаграмм) позволяет упростить решение многих задач по дифракции на круглых отверстиях или дисках. Приведем еще раз важные для дальнейшего соотношения:

1. Радиус n -й зоны Френеля:

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (7)$$

2. Площади всех зон Френеля можно считать одинаковыми.

3. Разность фаз ψ_R между крайним и центральным лучами для отверстия радиусом R :

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}, \quad (8)$$

где R_1 и S_1 – радиус и площадь первой зоны Френеля.

4. При небольшом числе m открытых зон любая точка на спирали Френеля может быть задана с помощью только одной переменной – разности фаз ψ_R . Угол ψ (на рис. 1.2.) задается формулой

$$\psi = m\pi. \quad (12)$$

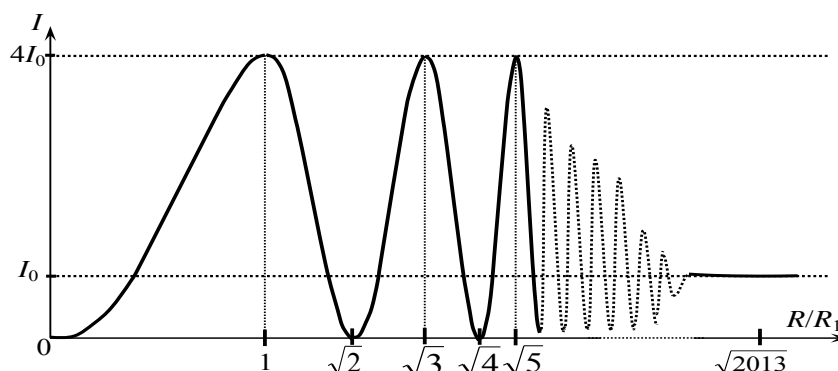


Рис. 4. Зависимость интенсивности в центре картины при дифракции на круглом отверстии от радиуса отверстия.

На рис. 4 приведен график зависимости интенсивности в центре экрана от радиуса R отверстия (интенсивность нормирована на интенсивность I_0 , регистрируемую в отсутствии препятствия; радиус нормирован на радиус R_1 первой зоны Френеля). Максимумы на нем соответствуют случаю, когда открыто нечетное число зон Френеля, минимумы - когда четное. Обратим внимание на то, что с ростом радиуса R расстояние между максимумами и минимумами уменьшается. Это связано с тем, что радиус n -ой зоны пропорционален квадратному корню из номера зоны n , т.е. при увеличении радиуса, например, в два раза число открытых зон увеличивается в четыре.

Следовательно, при изменении числа открытых зон Френеля в центре картины будет наблюдаться то темное, то светлое пятно. Из формулы (7) видно, что число открытых зон зависит не только от радиуса отверстия. Число зон изменяется и при перемещении точки наблюдения P , что легко осуществить экспериментально. Если определить положения точек P_i , для которых при дифракции на круглом отверстии в центре наблюдаются светлые и темные пятна, то можно рассчитать размер отверстия.

На рис. 5 приведен график зависимости интенсивности в центре экрана от расстояния b в случае падения плоской волны ($a \rightarrow \infty$) интенсивностью I_0 . Для наглядности по горизонтальной оси отложена величина $\frac{b\lambda}{R^2} = \frac{1}{m}$, где m - число открытых зон Френеля.

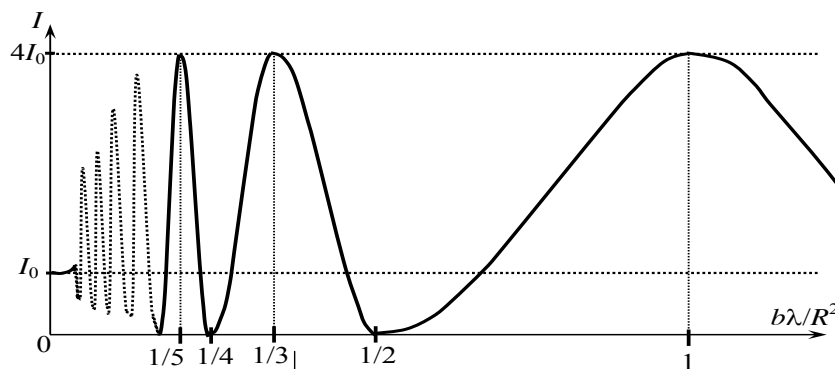


Рис.5. Зависимость интенсивности в центре картины при дифракции плоской волны на круглом отверстии от расстояния b .

С помощью спирали Френеля можно найти напряженность поля в центре картины при дифракции на непрозрачном диске. Если, например, диск закрывает лишь первую зону Френеля, то на спирали должен отсутствовать участок от точки O до точки O_1 , а результирующим будет вектор O_1O_∞ . Если диск закрывает две зоны Френеля, то результирующим будет вектор O_2O_∞ и т.д. В этом случае зависимость интенсивности в центре картины от радиуса непрозрачного диска является монотонно убывающей функцией (рис. 6).

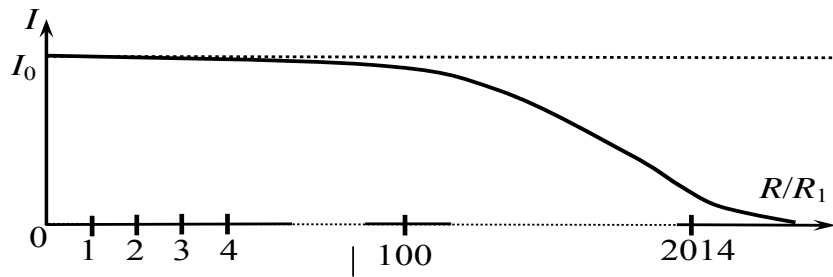


Рис.6. Зависимость интенсивности в центре картины при дифракции на непрозрачном диске радиуса R (R_1 - радиус первой зоны Френеля).

Отметим еще одну особенность дифракционной картины на непрозрачном диске – в центре картины всегда наблюдается небольшое светлое пятно, называемое **пятном Пуассона** (рис. 7). Именно это экспериментально наблюдаемое явление и стало одним из решающих фактов в пользу применимости принципа Гюйгенса-Френеля при расчете дифракционных картин.

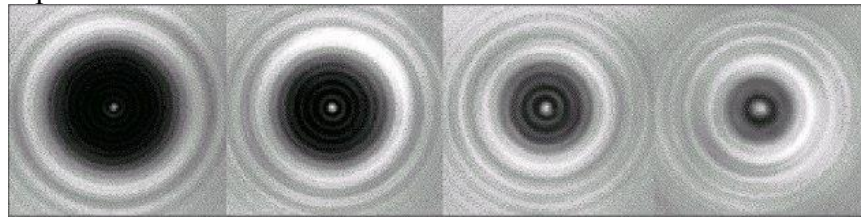


Рис.7. Пятно Пуассона.

Дифракция Френеля на круглом отверстии с использованием собирающей линзы.

Рассмотрим, как изменяется интенсивность в центре дифракционной картины, получаемой на круглом отверстии, если в отверстие поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием f .

Можно показать, что собирающая линза вносит дополнительную разность хода

$$\Delta s_{\text{л}}(r) = -\frac{r^2}{2f} < 0, \quad (13)$$

т.к. толщина собирающей линзы в центре больше, чем на периферии. С учетом этого факта для вторичного источника, находящегося в плоскости отверстия на расстоянии r от его центра, разность хода $\Delta s(r)$ равна:

$$\Delta s = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right). \quad (14)$$

Пусть фокусное расстояние линзы таково, что справедливо соотношение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Это означает, что в соответствии с законами геометрической оптики для точечного источника P_0 , находящегося на расстоянии a от линзы, его изображение окажется в точке P на расстоянии b за линзой. Таким образом, все лучи, вышедшие из источника и прошедшие через линзу в точку, где формируется изображение, проходят один и тот же оптический путь. Т.е., яркое изображение P точки источника P_0 с точки зрения волновой теории есть результат интерференции всех лучей, прошедших через линзу.

В рамках дифракционной теории это означает, что участок спирали Френеля, соответствующий круглому отверстию, с помощью линзы «раскрутится» и вытянется в прямую линию.

Пусть круглое отверстие открывало для точки наблюдения небольшое число зон Френеля m . Длина участка спирали равна $m \cdot \pi A_0$ где $A_0 = |OO_\infty|$ - радиус спирали. Таким образом, в случае установленной линзы интенсивность в точке наблюдения станет равной

$$I_l = (m\pi)^2 \cdot I_0 \gg I_0.$$

Если же точка наблюдения Р находится не в точке, где получается изображение с помощью линзы, то разность хода (14) может быть как больше, так и меньше нуля. В первом случае ($\Delta s > 0$) участок спирали Френеля не раскрутится до прямой линии, во втором ($\Delta s < 0$) – «перераскрутится» (подробнее см. зад.4.2.5 в Методике решения ...)

Оценка интенсивности в фокусе линзы

Полученный результат позволяет оценить интенсивность в фокусе линзы радиуса r_0 в случае падения на нее плоской волны интенсивностью I_0 . Пусть радиусу линзы соответствует очень большое число N зон Френеля:

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r_0^2}{\lambda f} \gg 1.$$

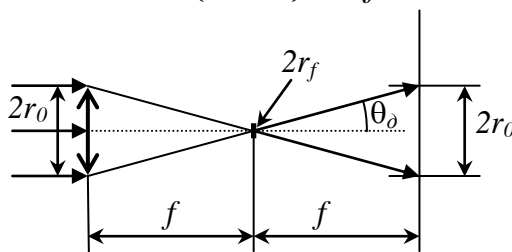


Рис. 8. Фокусировка плоской волны линзой

Комбинируя открытые зоны попарно (первую с последней, вторую – с предпоследней, и т.д.) и считая вклад от последней зоны равным нулю, длину всех получившихся пар будем считать одинаковой и равной πA_0 .

В результате для интенсивности в точке фокуса получим

$$I_f = \left(\frac{N}{2} \pi \right)^2 \cdot I_0 = \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0.$$

Оценка размера перетяжки в фокусе линзы

Из закона сохранения энергии получим оценку для поперечного размера r_f изображения, получаемого в фокусе линзы (перетяжки). Считая, что вся энергия, упавшая на линзу, будет сосредоточена в перетяжке:

$$\pi r_0^2 \cdot I_0 = \pi r_f^2 \cdot I_f,$$

получим

$$r_0^2 \cdot I_0 = r_f^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0 = r_f^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{r_0^2}{\lambda f} \right)^2 I_0;$$

$$r_f = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda f}{r_0} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda f}{d_0} \approx \frac{\lambda f}{d_0}, \quad (15)$$

где d_0 - диаметр линзы.

Из формулы следует, что для получения минимальной ширины перетяжки (и, следовательно, максимальной интенсивности), следует взять короткофокусную линзу и осветить ее максимально широким параллельным пучком. Отметим также, что, так как величины r_0 и f примерно одного порядка, то минимально возможный размер перетяжки сравним с длиной волны λ .

Формулу (15) легко запомнить, следуя правилу, сформулированному при запоминании формул интерференции в схеме Юнга. Все четыре величины, входящие в (15), имеют одинаковую размерность и входят в первой степени. Произведение самой маленькой из них λ на самую большую f равно произведению остальных r_f и d_0 . К тому же величины r_f и d_0 изображаются на рисунке вертикальными отрезками, а фокусное расстояние f - горизонтальным (длина волны λ на рисунке отсутствует). Чтобы избежать путаницы, в какой же из величин r_f и d_0 взять диаметр, а в какой радиус, следует вспомнить рисунок для схемы Юнга (рис. 9). На нем расстояние d между отверстиями аналогично диаметру d_0 линзы, а координата x на экране или ширина Δx интерференционной полосы аналогичны радиусу r_f перетяжки.

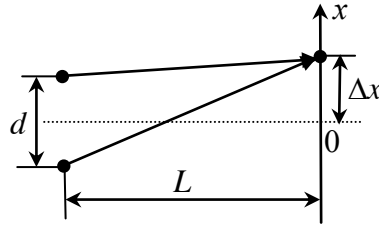


Рис. 9. Схема Юнга

Оценка дифракционной расходимости

После прохождения линзы плоская волна преобразуется в сходящуюся сферическую. По законам геометрической оптики изображение должно было бы быть точечным, но мы только что получили формулу (15) для поперечного размера «точки», теперь называемой перетяжкой. Поэтому будем считать, что фронт волны непосредственно в перетяжке становится *плоским*. Знание того, как распространяется пучок после линзы (по законам геометрической оптики), позволит довольно просто оценить расходимость параллельного пучка света диаметром $d_f = 2r_f$.

После перетяжки пучок расходится и, пройдя расстояние f , вновь будет иметь радиус r_0 (рис. 8). Оценим угловую (дифракционную) расходимость θ_θ пучка исходя из размера перетяжки (15):

$$\theta_\theta = \frac{r_0}{f} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{r_f} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{d_f} \approx \frac{\lambda}{d_f}. \quad (16)$$

Получилась простая и легко запоминаемая формула (из трех букв), определяющая дифракционную расходимость θ_θ монохроматического (длина волны λ) узкого пучка диаметром d_f . Подобный результат ранее уже был упомянут в случае гауссова пучка.

Оценка дифракционной длины

Пусть плоская волна падает на непрозрачное препятствие с отверстием диаметром d_f . Если экран для наблюдений установить непосредственно за препятствием, то мы в соответствии с законами геометрической оптики увидим изображение в виде освещенного круга такого же диаметра. Отодвигая экран от препятствия, мы перейдем в область наблюдения дифракции Френеля на круглом отверстии. Число зон Френеля, соответствующих отверстию, будет постепенно уменьшаться, в центре будут последовательно наблюдаться то светлое, то темное пятно. Но в целом, как показывает численное моделирование, размер дифракционной картины будет по-прежнему примерно равным диаметру отверстия.

Но при некотором расстоянии размер дифракционной картины вследствие дифракционной расходимости (16) превысит диаметр отверстия. Это расстояние, называемое *дифракционной длиной* l_d , можно оценить из простой геометрической модели (рис. 10).

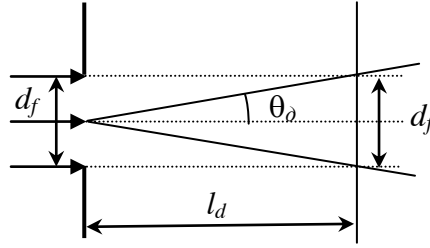


Рис. 8. К оценке дифракционной длины

Из центральной точки отверстия проведем два луча, угол между которыми равен удвоенному углу дифракционной расходимости θ_0 . На расстоянии l_d от плоскости отверстия лучи выйдут в область геометрической тени. Будем считать, что именно с данного момента и становится заметным уширение пучка. Из соотношения

$$l_d \cdot \operatorname{tg} 2\theta_0 \approx l_d \cdot 2\theta_0 = d_f$$

и формулы (16) получим:

$$l_d \approx \frac{d_f}{2\theta_0} = \frac{d_f^2}{2\lambda}. \quad (17)$$

Вспоминая формулу для числа зон Френеля

$$r_f^2 = \frac{d_f^2}{4} = m\lambda b$$

и подставляя вместо b величину l_d (17), получим

$$\frac{d_f^2}{4} = m\lambda \cdot \frac{d_f^2}{2\lambda}, \quad m = \frac{1}{2}$$

т.е. на расстоянии l_d (17) открыта половина первой зоны Френеля. Можно считать, что именно с этого момента и начинается дифракционное уширение пучка.

Мы получили оценку из простых геометрических соотношений. В литературе чаще встречаются несколько другие выражения (более простые) для дифракционной длины:

1) $l_d \approx \frac{r_f^2}{2\lambda}$, что соответствует открытой первой зоне Френеля. При этом указывается, что

дифракционная расходимость наблюдается при расстояниях $l \gg l_d$.

2) $l_d \approx \frac{rd_f^2}{2\lambda}$, что соответствует числу открытых зон Френеля $m = \frac{1}{4}$. Компьютерное

моделирование показывает, что именно с данного положения и начинается уширение.

Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана. Спираль Корню.

В случае дифракции Френеля на препятствии в виде полубесконечной непрозрачной плоскости с прямолинейным краем вторичные источники занимают полупространство, т.е. размер области интегрирования в интегральной формуле (1) не является малым по сравнению с расстоянием до источника или до точки наблюдения. Однако оказывается, что формальное применение принципа Гюйгенса-Френеля для такого объекта приводит к результатам, которые в значительной мере подтверждаются при экспериментальных исследованиях. Подробное теоретическое рассмотрение дифракции Френеля для такого класса объектов дается в литературе, в настоящем описании будут приведены основные результаты.

Пусть линия, соединяющая источник света P_0 и точку наблюдения P , проходит через точку A на крае экрана и перпендикулярна краю (на рис. 7 линия края перпендикулярна плоскости рисунка). Для удобства рассмотрения введем следующую систему координат. Ось абсцисс обозначим OZ , при этом точка $z=0$ будет соответствовать точке P_0 , тогда все точки в плоскости препятствия будут иметь координату $z=a$, а все точки в плоскости наблюдения - координату $z=a+b$. Ось OY направлена на нас - перпендикулярно плоскости

рисунка. В плоскости наблюдения ось ординат обозначим OX , при этом x -координата точки наблюдения P (как и точки P_0) будет равна нулю. X -координаты точек в плоскости препятствия будем обозначать ξ .

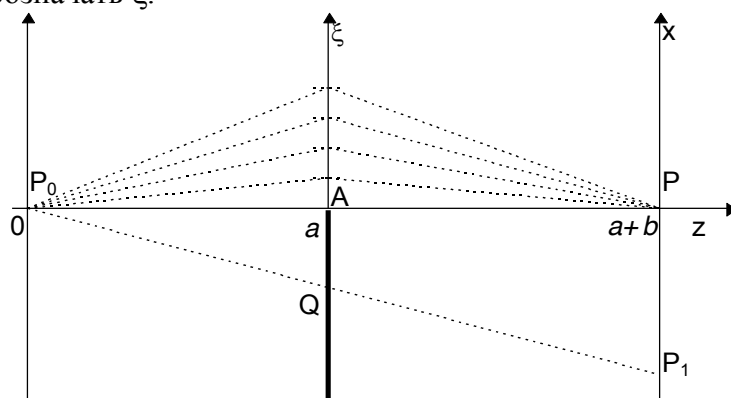


Рис 7. Схема дифракции на крае экрана.

Пусть непрозрачный экран закрывает полупространство $\xi < 0$. Разобьем область интегрирования $\xi > 0$, как и при рассмотрении дифракции на круглом отверстии, на равные по площади подзоны. В данном случае подзоны будут представлять собой узкие (ширина $\Delta\xi$ много меньше характерных размеров a и b) бесконечно длинные ($-\infty < y < \infty$) полоски, параллельные краю, причем ширина всех полосок должна быть одной и той же. Для нахождения поля в точке наблюдения построим векторную диаграмму, на которой будут суммироваться вклады от каждой подзоны. Отметим, что в данном случае независимо от ширины подзоны нельзя считать, что излучение от всех вторичных источников какой-либо подзоны приходит в точку наблюдения в одной и той же фазе. Чтобы найти фазу волны, приходящей от подзоны, необходимо проинтегрировать по координате y (длине подзоны).

Векторы, характеризующие вклад каждой подзоны, будут иметь одинаковую длину, однако разность фаз для соседних подзон уже не будет одной и той же, как при расчете дифракции на круглом отверстии. Эта разность фаз будет близкой к нулю для первых подзон, расположенных в центральной части, и расти по мере удаления от центра. В результате векторная диаграмма будет иметь вид спирали (рис. 8), называемой **спиралью Корню**. Эта спираль позволяет достаточно просто рассчитывать распределение поля при дифракции Френеля не только на крае экрана, но и на щели, проволоке. Поэтому остановимся подробнее на ее свойствах.

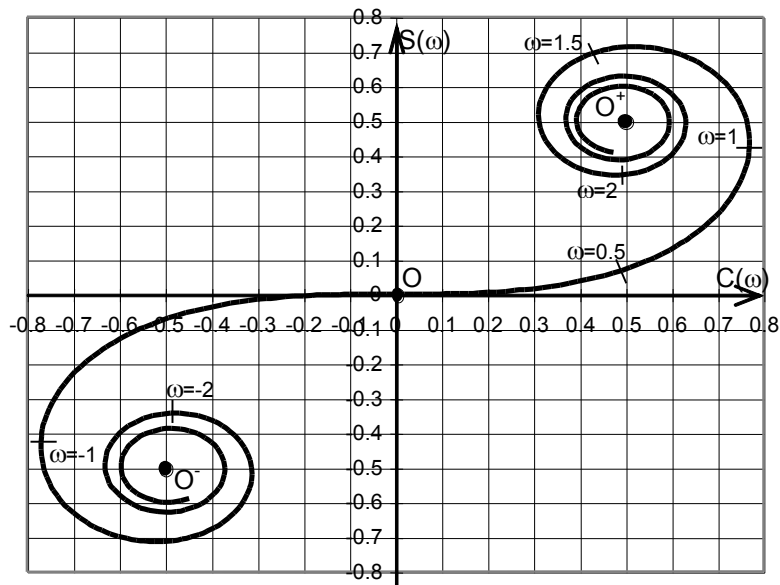


Рис. 8. Спираль Корню.

Спираль Корню задается в параметрическом виде с помощью **интегралов Френеля**:

$$C(\omega) = \int_0^{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau$$

$$S(\omega) = \int_0^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau$$

где ω - параметр спирали Корню (обоснованность применения этих формул для дифракции в данном случае можно найти в литературе). Интегралы Френеля не могут быть вычислены аналитически, для них существуют таблицы.

Так как спираль состоит из маленьких векторов, соответствующих вкладу от каждой подзоны, то ее длина от начала координат до любой ее точки пропорциональна координате ξ (см. рис. 7). Можно показать, что безразмерный параметр ω равен длине участка спирали, отсчитываемой от начала координат, при этом он связан с координатой ξ следующим соотношением (вывод этого соотношения можно найти в литературе):

$$\omega(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot \xi. \quad (3)$$

Это выражение можно преобразовать (см. формулу (2)) к виду

$$\omega(\xi) = \frac{\sqrt{2}\xi}{R_1}, \quad (3')$$

где R_1 – радиус первой зоны Френеля. Отметим, что длина спирали от начала координат до каждого из фокусов бесконечна.

Найдем с помощью спирали Корню поле в точке наблюдения Р. Если препятствие отсутствует, то “работают” все подзоны на обеих ветвях спирали, в этом случае поле в точке наблюдения соответствует вектору $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+$. Если же экран закрывает ровно половину пространства, то открытой является половина спирали (“работают” подзоны на положительной ветви спирали), поэтому суммарный вклад будет соответствовать вектору \mathbf{OO}^+ . Длина этого вектора в два раза меньше длины вектора $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+$, поэтому и поле будет в два раза меньше. Интенсивность же будет в четыре раза меньше, чем в случае отсутствия препятствия.

Спираль Корню позволяет найти поле для любой точки в плоскости наблюдения. Пусть, например, точка наблюдения P_1 лежит в области геометрической тени и имеет координату $x_1 < 0$ (рис. 7). Линия P_0P_1 пересекает плоскость препятствия в некоторой точке Q. Выберем эту точку в качестве начала координат оси $O\xi$, т.е. $\xi_Q = 0$. Тогда координата

края экрана ξ_1 может быть легко найдена из геометрического построения, в нашем случае $\xi_1 = -x_1 \cdot \frac{a}{a+b} > 0$. Таким образом, открытой является часть пространства $\xi > \xi_1$. Тогда на спирали Корню “работающей” будет часть спирали $\omega > \omega(\xi_1) > 0$, где значение $\omega(\xi_1)$ найдено по формуле (3). Вектор, характеризующий поле в точке $x_1 < 0$, будет начинаться с точки на положительной ветви спирали, соответствующей $\omega(\xi_1) > 0$, и заканчиваться в положительном фокусе спирали \mathbf{O}^+ .

Если точку наблюдения x_1 смещать дальше в область геометрической тени, то соответствующее значение $\omega(\xi_1)$ будет расти, точка на спирали, соответствующая этому значению, будет перемещаться по спирали ближе к положительному фокусу, длина вектора будет монотонно уменьшаться, а интенсивность монотонно падать. Если же точку x_1 смещать в другую сторону - к границе геометрической тени, то начальная точка на спирали “побежит” к началу координат и при $x_1 = 0$ поле будет характеризоваться вектором \mathbf{OO}^+ . При дальнейшем росте $x_1 > 0$ координата ξ_1 станет отрицательной, начнут открываться участки на отрицательной ветви спирали Корню, точка на спирали, соответствующая началу вектора, “побежит” к отрицательному фокусу. При этом конец вектора все время будет находится в точке \mathbf{O}^+ . Видно, что интенсивность в освещенной области будет осциллировать, при этом в максимумах интенсивность будет больше, чем интенсивность I_0 в случае отсутствия экрана (рис. 9). В первом, наибольшем максимуме $I = 1,37 I_0$, а в первом минимуме $I = 0,78 I_0$. Отметим, что данное построение хорошо работает в случае, когда модуль координаты точки наблюдения $|x_1|$ много меньше расстояний a и b .

На рис. 9 приведен график зависимости интенсивности в плоскости наблюдения от значения параметра ω .

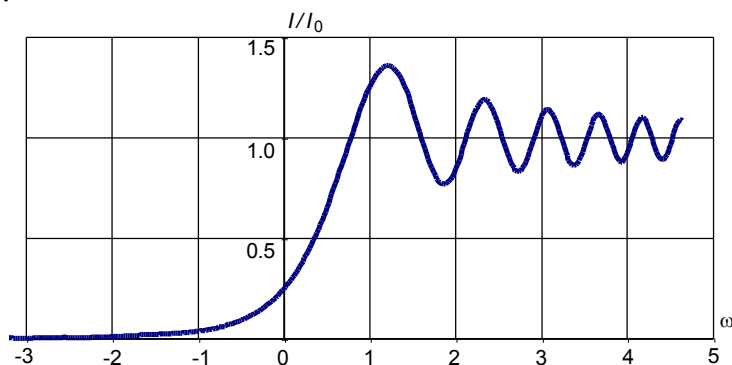


Рис. 9. График зависимости интенсивности в плоскости наблюдения от значения параметра ω при дифракции на крае экрана.

Дифракция Френеля на щели.

Спираль Корню позволяет находить распределение интенсивности при дифракции Френеля не только на крае, но и на щели и проволоке. Пусть, к примеру, на пути монохроматической волны, выходящей из точки P_0 , находится щель АВ (рис. 10). Нас интересует интенсивность в некоторой точке Р. Соединим точки P_0 и Р, найдем точку пересечения Q с плоскостью щели, координату которой примем за нуль, т.е. $\xi_Q = 0$. Найдем координаты краев щели ξ_1 и ξ_2 , рассчитаем по формуле (3) соответствующие значения $\omega_1 = \omega(\xi_1)$ и $\omega_2 = \omega(\xi_2)$ и найдем эти точки на спирали Корню (на рис. 11 пусть это будут точки \mathbf{O}_1 и \mathbf{O}_2). Тогда вектор $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ и будет характеризовать поле в точке наблюдения.

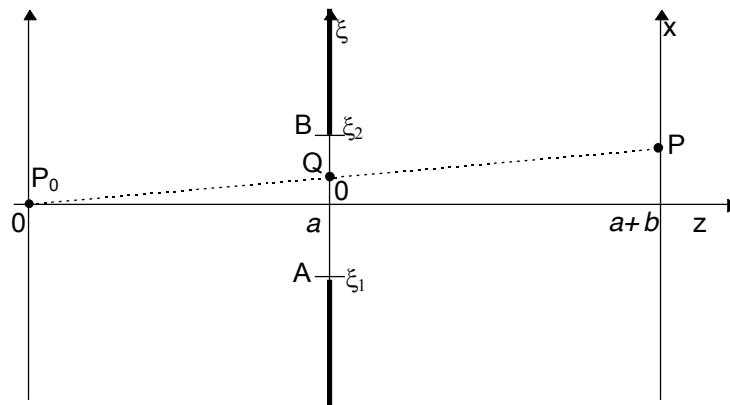


Рис 10. Схема дифракции на щели.

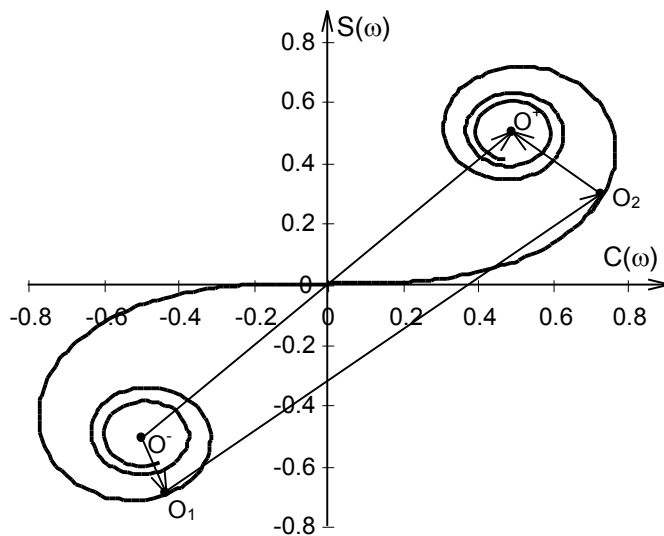


Рис. 11. Расчет зависимости поля в плоскости наблюдения при дифракции на щели с помощью спирали Корню.

Сместим точку наблюдения вдоль оси OX на небольшое расстояние $\Delta x > 0$. Тогда сместится вверх и точка пересечения Q , в результате чего координаты краев щели ξ_1 и ξ_2 изменятся на одну и ту же величину $\Delta \xi < 0$. Так как $\omega \sim \xi$, то и соответствующие значения ω_1 и ω_2 изменятся на одну и ту же величину $\Delta \omega < 0$. Это означает, что расположенные на спирали точки O_1 и O_2 сместятся на одинаковое расстояние в сторону к отрицательному фокусу, длина вектора $\mathbf{O_1O_2}$ изменится, следовательно, изменятся значения поля и интенсивности. При дальнейшем смещении точки наблюдения вверх точки O_1 и O_2 “побегут” по спирали в одну и ту же сторону и с одинаковой “скоростью”, так как, как уже отмечалось, параметр ω равен длине участка спирали от начала координат. Таким образом можно найти распределение интенсивности в плоскости наблюдения для произвольного расположения источника света и любой ширины щели.

Отметим, что “ширина” щели $|\omega_1 - \omega_2|$, выраженная как разность значений параметров ω_1 и ω_2 , остается неизменной для любой точки в плоскости наблюдения. Поэтому при построении графиков удобно измерять ширину щели в терминах параметра ω .

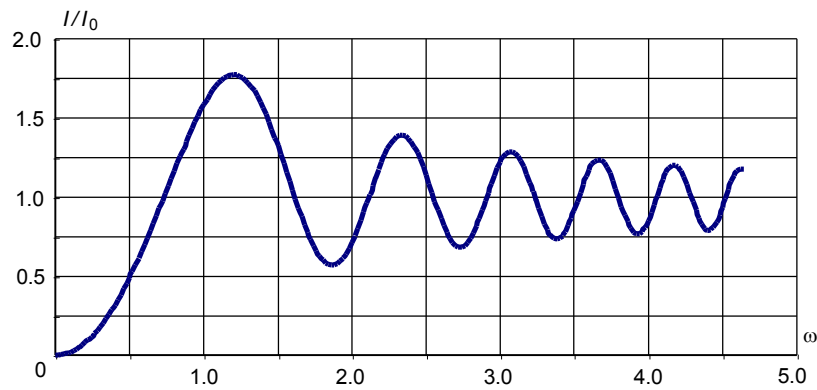


Рис. 12. График зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на щели от полуширины щели ω .

На рис. 12 приведен график зависимости интенсивности в центре картины от полуширины щели для случая, когда линия P_0P проходит через середину щели и перпендикулярна плоскости щели (ширина щели равна 2ω). Видны осцилляции интенсивности, что означает, что при изменении ширины щели в центре будет наблюдаться то светлая, то темная полоса.

Иногда разбиение волнового фронта на полосы линиями, параллельными краю щели, осуществляют на так называемые **зоны Шустера**. Координаты границ зон Шустера соответствуют значениям параметра ω_i , равным $\sqrt{2 \cdot 1}, \sqrt{2 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 3}, \dots, \sqrt{2 \cdot i}$, : в этих точках касательная к спирали Корню параллельна оси абсцисс. Иными словами, площади зон Шустера различны, а разности фаз при переходе от одной зоны к соседней одинаковы и равны π . Из рис. 12 видно, что координаты максимумов и минимумов не совпадают с этими значениями ω_i .

Обратим внимание на характер изменения интенсивности при небольших размерах щели $\omega \ll 1$. В этом случае открытым является участок спирали Корню, расположенный вблизи начала координат. Этот участок практически представляет собой горизонтальный отрезок, что означает, что излучение от всех вторичных источников приходит в точку наблюдения в одной фазе. С увеличением ширины щели напряженность поля растет пропорционально ширине, а интенсивность изменяется пропорционально квадрату ширины. Такой закон изменения сигнала характерен для дифракции Фраунгофера. В то же время параметр ω связан с числом зон Френеля, содержащихся в ширине щели, найденным выше соотношением. Следовательно, провести границу между приближениями Фраунгофера и Френеля для описания дифракции можно, пользуясь следующим критерием: **если характерный размер препятствия много меньше размера первой зоны Френеля, то справедливо приближение Фраунгофера; в противном случае следует использовать приближение Френеля** (подробнее - в следующей теме). Это означает, что в случае дифракции Фраунгофера для ширины щели d должны быть справедливы следующие ограничения:

$$d \ll \sqrt{\lambda \cdot a}, \quad d \ll \sqrt{\lambda \cdot b}.$$

Если на объект падает плоская волна ($a \rightarrow \infty$), то условие $d \ll \sqrt{\lambda \cdot b}$ позволяет определить дифракционную длину пучка $b_{\text{дифр}} = \frac{d^2}{\lambda}$, как границу между приближениями Фраунгофера и Френеля. Если $b \gg b_{\text{дифр}}$, то имеет место **дифракция в дальней зоне** (Фраунгофера), если $b \leq b_{\text{дифр}}$, то говорят о **дифракции в ближней зоне** (Френеля).

Если размер препятствия существенно (на 2-3 порядка) превышает размер первой зоны Френеля, то следует использовать приближение геометрической оптики.

§1.5. Дифракция Френеля на проволоке. Принцип Бабине.

Для того, чтобы найти дифракционную картину от проволоки, проведем следующие рассуждения. При расчете дифракционной картины от щели (той же ширины, что и толщина проволоки) ищется суммарный вклад от вторичных источников, расположенных на открытой части исследуемого объекта. Для проволоки, наоборот, данная часть объекта будет закрытой, а остальное пространство - открытым. Такие объекты, как бы дополняющие друг друга, носят название **дополнительных**.

Введем понятие комплексной **функции пропускания** препятствия $\alpha(x,y)$ как отношения комплексной амплитуды поля $E_2(x,y)$ падающей волны в точках, расположенных непосредственно сразу за препятствием, к комплексной амплитуде поля $E_1(x,y)$ волны в точках, расположенных непосредственно перед препятствием (толщина препятствия считается бесконечно малой). Тогда два объекта называют дополнительными, если для функций пропускания этих объектов справедливо соотношение:

$$\alpha_1(x,y) + \alpha_2(x,y) = 1$$

для всех точек (x,y) в плоскости препятствия.

С учетом введенного понятия функции пропускания интегральную формулу Френеля-Кирхгофа (1) можно переписать в виде:

$$U(P) = - \frac{iA}{2\lambda} \iint_{(x,y)} \alpha(x,y) \cdot K(\alpha) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot dx dy \quad (1')$$

где интегрирование ведется по всей плоскости (x,y) , на которой расположено препятствие.

Обозначим распределение поля на экране в случае дифракции на щели $U_{щ}(x)$, а на проволоке - $U_{п}(x)$, где x - координата в плоскости наблюдения. Тогда сумму полей $U_{щ}(x) + U_{п}(x)$ можно представить как сумму интегралов по открытым областям для каждого из этих объектов, или как интеграл от суммы открытых областей. Но отверстия для дополнительных объектов располагаются так, что полностью "открывают" весь волновой фронт падающего излучения, следовательно

$$U_{щ}(x) + U_{п}(x) = U_0(x),$$

где $U_0(x)$ - волновое возмущение на экране в случае отсутствия какого-либо препятствия.

Таким образом, сумма распределений полей от дополнительных объектов равна полю, наблюдаемому на экране при отсутствии препятствия. Полученный результат носит название **принципа Бабинне**.

Обратим внимание, что $U_0(x)$ есть волновое возмущение на экране в **отсутствии** какого-либо препятствия, а не для случая, когда на пути падающего излучения **одновременно установлены** и щель, и проволока (как нетрудно сообразить, свет через такую совокупность объектов не пройдет). Дело в том, что при рассмотрении принципа Бабинне суммировались вклады именно от открытых областей каждого из объектов, а при рассмотрении случая, когда на пути падающей волны устанавливаются несколько объектов, суммируются, наоборот, закрытые области.

Выше (см. рис. 11) мы рассматривали случай, когда поле в точке наблюдения при дифракции на щели соответствовало на спирали Корню вектору $\mathbf{O_1O_2} \sim U_{щ}(x)$. Найдем теперь поле в этой же точке при дифракции на проволоке того же размера. Если препятствие отсутствует, то поле в точке наблюдения характеризуется вектором $\mathbf{O^+O^+} \sim U_0(x)$. Тогда, применяя принцип Бабинне, получим, что для нахождения поля при дифракции на проволоке следует взять разность векторов $\mathbf{O^+O^+}$ и $\mathbf{O_1O_2}$, т.е.

$$U_{п}(x) \sim \mathbf{O^+O^+} - \mathbf{O_1O_2} = \mathbf{O^+O_1} + \mathbf{O_2O^+}$$

(обратим внимание, что вектор $\mathbf{O^+O_1}$ идет от т. $\mathbf{O^+}$ до т. $\mathbf{O_1}$, вектор $\mathbf{O_2O^+}$ идет от т. $\mathbf{O_2}$ до т. $\mathbf{O^+}$ и складывать их надо по правилу сложения векторов).

Отметим следующую особенность дифракции на проволоке. Если линия P_0P проходит строго через середину щели и перпендикулярна плоскости щели, т.е. точки $\mathbf{O_1}$ и

O_2 находятся на различных ветвях спирали симметрично относительно начала координат, то вектора O^*O_1 и O_2O^+ будут равны друг другу и сонаправлены. При смещении точки наблюдения на небольшую величину в любом направлении эти векторы, практически не изменяя своей длины, поворачиваются в разные стороны. Сумма векторов становится меньше, и, следовательно, поле уменьшается. Таким образом, в центре дифракционной картины при дифракции на проволоке всегда будет светлая полоса.

Если ширина щели значительно превышает размер первой зоны Френеля ($\omega \gg 1$), то точки O_1 и O_2 лежат ближе к фокусам спирали, чем к началу координат, следовательно, вблизи центра дифракционной картины будет довольно темный участок, на котором будут наблюдаться осцилляции, причем контрастность картины будет невелика. По мере приближения к границе геометрической тени, одна из точек, O_1 или O_2 , начнет приближаться к началу координат и на границе перейдет через нее, что приведет к увеличению освещенности в этой области и повышению контрастности картины. Такой переход позволяет примерно найти местоположение границ геометрической тени.

Понятие о теории дифракции Кирхгофа.

Подробнее см. Борн, Вольф §8.3

Принцип Гюйгенса-Френеля не позволяет получить выражение для коэффициента $K(\chi)$, входящего в интеграл Френеля. Кроме этого, фаза волны, приходящей в точку наблюдения в отсутствие препятствия, отличается на $\frac{\pi}{2}$ от фазы волны, идущей от вторичного источника, расположенного строго на оси (сравните на спирали Френеля комплексный вектор OO_∞ и начальный малый вектор спирали, выходящий из т. О).

Указанные вопросы решаются в теории дифракции Кирхгофа, основанной на преобразовании волнового уравнения с заданными условиями на границе в уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды (не зависящей от времени). Кроме этого, используется интегральная теорема Кирхгофа-Гельмгольца, позволяющая найти поле в некоторой точке Р, если известна комплексная амплитуда поля и ее производная по нормали на какой либо поверхности, охватывающей точку Р.

Другими словами, в теории Френеля в качестве вторичных источников берутся точки замкнутой поверхности, окружающей источник излучения. В теории Кирхгофа, напротив: поверхность вторичных источников окружает точку наблюдения.

В результате преобразований можно получить дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot dS \quad (1)$$

где θ_0 и θ - углы, образованные векторами \vec{r} и \vec{s} с нормалью к плоскости отверстия. Таким образом, выражение для коэффициента $K(\theta_0, \theta)$ имеет вид:

$$K(\theta_0, \theta) = -\frac{i}{2\lambda} (\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Напомним, что ранее из качественных соображений и спирали Френеля было получено выражение

$$K_0 = -\frac{i}{\lambda},$$

что соответствует значению $K(\theta_0, \theta)$ при условии $\theta_0 = 0$ и $\theta = \pi$.

Замечание 1.

Довольно часто в учебной литературе интеграл Френеля-Кирхгофа записывают в виде:

$$U(P) = \frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \cdot \frac{\exp(-ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(-iks)}{s} \cdot dS, \quad (1a)$$

т.е. изменяется знак и в коэффициенте $K(\theta_0, \theta)$ (перед интегралом), и в показателе экспоненты (под интегралом). Обе формы записи эквивалентны. Однако вспомним, что при построении спирали Френеля с увеличением оптического пути (т.е. r и s) фаза комплексной амплитуды увеличивалась, векторы dA_i поворачивались против часовой стрелки. Это соответствует форме записи сферической волны в виде $\frac{\exp(ikr)}{r}$.

При отсутствии препятствия соответствующий комплексный вектор OO_∞ повернут относительно самого первого вектора dA_1 , идущего из т. О, на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Спираль Френеля строилась без учета коэффициента $K(\theta_0, \theta)$, поэтому появление в этом коэффициенте множителя вида

$$-i = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

как раз и совмещает оба вектора.

При форме записи интеграла в виде (1a) спираль Френеля следует строить, поворачивая векторы dA_i по часовой стрелке (спираль уходит вниз). Для таким образом построенной спирали комплексный вектор OO_∞ повернут относительно первого вектора dA_1 на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке, и множитель

$$i = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

также совместит векторы.

Таким образом, обе формы записи эквивалентны. Но обычно спираль Френеля принято строить так, как это было сделано ранее. Поэтому предпочтительнее пользоваться записью интеграла Френеля-Кирхгофа в виде (1).

Отметим также, что в учебной литературе, говоря о рассматриваемой выше разности фаз $\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ употребляют термины «отстает (опережает) по фазе на $\frac{\pi}{2}$ ». На наш взгляд, в данном случае такая терминология только сбивает с толку. Ведь термины «отстает (опережает)» говорят о временной зависимости, а при записи комплексных амплитуд временную зависимость вида $\exp(i\omega t)$ исключают из рассмотрения. Поэтому правильнее говорить о разности фаз между волнами, прошедшими разные оптические пути. При разности хода Δr разность фаз $\Delta\phi$ находится как

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta r \text{ при форме записи } \frac{\exp(ikr)}{r} \text{ и}$$

$$\Delta\phi = -k \cdot \Delta r \text{ при форме записи } \frac{\exp(-ikr)}{r}.$$

Замечание 2.

Как отмечалось выше, в теории Кирхгофа поверхность вторичных источников окружает точку наблюдения, а не источник. Поэтому формально мы можем ничего не говорить про местоположение источников. Но тогда возникает проблема в определении

угла θ_0 , входящего в коэффициент $K(\theta_0, \theta)$. Принято выходить из такой ситуации следующим образом.

Говорят, что рассмотрение дифракции идет в параксиальном приближении (для приосевых пучков), тем самым, подразумевая, что источник излучения один. В таком приближении считают, что

$$K(\theta_0, \theta) = -\frac{i}{2}.$$

И интеграл Френеля-Кирхгофа записывают в виде:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} U_{\Sigma} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot dS,$$

где U_{Σ} - комплексная амплитуда поля на поверхности Σ , по которой ведется интегрирование.

Обоснование спирали Корню

Пусть расстояния от источника до плоскости объекта и от этой плоскости до экрана равны a и b соответственно (рис. 13). Если характерный размер объекта много меньше a и b , то в интеграле Френеля-Кирхгофа можно положить

$$\theta_0 \approx 0; \quad \theta \approx \pi;$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{a}; \quad \frac{1}{s} \approx \frac{1}{b}.$$

В результате получим:

$$U(P) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{1}{ab} \iint_{\Sigma} \exp(ik(r+s)) \cdot dS.$$

Введем в плоскости объекта систему координат $\{x, y\}$, в плоскости экрана - $\{x', y'\}$. Для величин r и s получим:

$$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \approx a \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2a^2} \right);$$

$$s = \sqrt{b^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \approx b \cdot \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2b^2} \right).$$

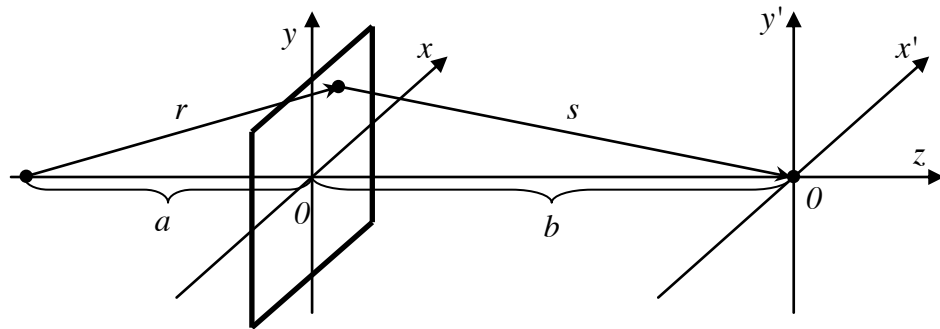


Рис. 13. К преобразованию интеграла Френеля-Кирхгофа.

Будем искать поле $U(P)$ в точке с координатами $\{x' = 0, y' = 0\}$:

$$U(0,0) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{\exp(ik(a+b))}{ab} \iint_{\Sigma} \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) \cdot dx \cdot dy.$$

Если область интегрирования, к примеру, прямоугольник:

$$x_1 \leq x \leq x_2; \quad y_1 \leq y \leq y_2;$$

то

$$U(P) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{\exp(ik(a+b))}{ab} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(ik \frac{x^2}{2f}\right) dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} \exp\left(ik \frac{y^2}{2f}\right) dy.$$

(здесь введено обозначение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$).

Так как

$$\exp\left(ik \frac{x^2}{2f}\right) = \cos\left(k \frac{x^2}{2f}\right) + i \cdot \sin\left(k \frac{x^2}{2f}\right),$$

то, делая замену переменных

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\lambda f}} \cdot x = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot x,$$

получим интегралы Френеля:

$$C(\omega) = \int_0^{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau;$$

$$S(\omega) = \int_0^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau,$$

в которых параметр ω связан с координатами x_j зависимостью

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot x_i.$$

В одномерном случае ($|y| < \infty$) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik \frac{y^2}{2f}\right) dy \sim (i+1),$$

остается только зависимость по x (объектом дифракции является узкая бесконечная щель). Выражение $(i+1)$ как раз и определяет положение фокусов на спирали Корню.

Комплексная амплитуда поля в точке наблюдения определяется прямой, проведенной из точки ω_1 в точку ω_2 на спирали Корню.

Приближения Френеля и Фраунгофера. Ближняя и дальняя зоны.

Как отмечалось выше, интеграл Френеля – Кирхгофа при условии, что характерный размер объекта много меньше a и b , преобразуется к виду

$$U(P) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{1}{ab} \iint_{\Sigma} \exp(ik(r+s)) \cdot dS,$$

где

$$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \approx a \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right);$$

$$s = \sqrt{b^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx b \cdot \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2b^2}\right);$$

$$r + s \approx (a + b) + \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{xx' + yy'}{b} + \frac{x'^2 + y'^2}{2b}\right).$$

Интегрирование ведется по переменным x и y , поэтому под знаком интеграла останется

$$U(x', y') \sim \iint_{(x, y)} \exp \left(ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{xx' + yy'}{b} \right) \right) dx dy.$$

Данное приближение есть **приближение Френеля**.

Первым слагаемым под знаком экспоненты можно пренебречь, если

$$k \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \ll \pi;$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \ll 1;$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \ll \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = R_1,$$

где R_1 – радиус первой зоны Френеля.

Таким образом, если для плоскости наблюдения размеры объекта меньше размеров первой зоны Френеля, то

$$\exp \left(ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \right) \approx 1$$

и интеграл Френеля-Кирхгофа можно записать в виде:

$$U(x', y') \sim \iint_{(x, y)} \exp \left(-ik \left(\frac{xx' + yy'}{b} \right) \right) dx dy.$$

Данное приближение называют **приближением Фраунгофера**. А получившийся интеграл есть пространственное преобразование Фурье по пространственным частотам

$$k_x = k \frac{x}{b} \approx k \sin \varphi_x,$$

$$k_y = k \frac{y}{b} \approx k \sin \varphi_y$$

где φ_x, φ_y - углы дифракции.

В случае плоской волны $\left(\frac{1}{a} \rightarrow 0 \right)$ для расстояния b , при котором приближение Френеля переходит в приближение Фраунгофера, получим:

$$b \gg \frac{r^2}{\lambda} = b_{дифр},$$

где $b_{\text{дифр}} = \frac{r^2}{\lambda}$ называют **дифракционной длиной**. Именно по этой длине и принято проводить границу между дифракцией **Френеля** (или в **ближней зоне**) и дифракцией **Фраунгофера** (или в **дальней зоне**). Однако подчеркнем условность данного перехода, обычно говорят, что приближение Фраунгофера «работает», когда число открытых зон много меньше единицы.

При выводе формул для дифракции Френеля использовалось приближение, что расстояния a от источника до объекта и b от объекта до экрана существенно превышают размеры объекта. Если же эти величины близки друг другу, то следует пользоваться законами **геометрической оптики**, в основном законом прямолинейного распространения света (рис. 14). Заметим, что в вышеприведенных формулах приближения Френеля переменные интегрирования x и y независимы, поэтому может оказаться, что при дифракции на двумерной структуре (например, на прямоугольном отверстии) по каждой их координат будет «свой» вид дифракции.

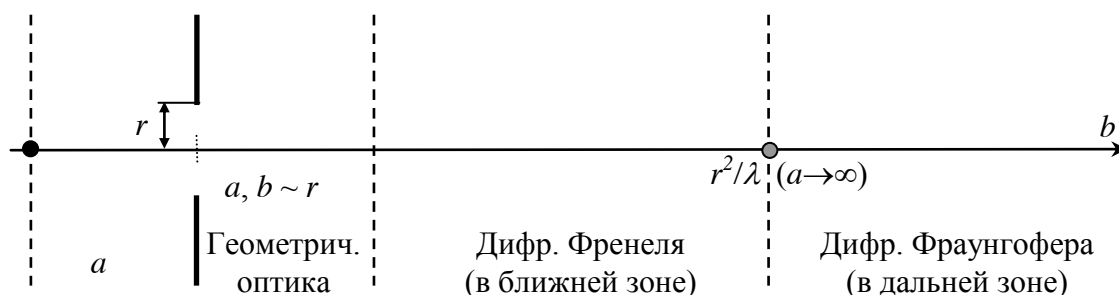


Рис. 14. Границы зон наблюдения.

Для бесконечной щели по одной из координат будет приближение Френеля или Фраунгофера (в зависимости от соотношения ширины щели и расстояний), а по другой – «работают» законы геометрической оптики. Напомним, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik \frac{y^2}{2f}\right) dy \sim (i+1),$$

т.е. геометрическая оптика «дает» непринципиальный сомножитель $(i+1)$.

Однако даже при условии примерного равенства размеров объекта и расстояний a и b , т.е. в области геометрической оптики, есть ситуации, когда необходимо пользоваться дифракционным приближением Френеля. Речь идет о точках экрана, соответствующих геометрической границе света и тени: там для точечного монохроматического источника всегда наблюдается картина, характерная для дифракции Френеля на крае экрана.