Questão 1

MÉTODO DA NEGAÇÃO

↳ SUPONHA QUE H NÃO É UMA TAUTOLOGIA

Discord - EXERCÍCIOS LISTA

1-A) SE A É SATISFATÍVEL, ENTÃO $\neg A$ É SATISFATÍVEL

DEPENDE, PORQUE SE "A" FOR SATISFATÍVEL E TAUTOLOGIA AO MESMO TEMPO, "$\neg A$" É UMA CONTRADIÇÃO

E "$\neg A$" SÓ É SATISFATÍVEL SE A FOR APENAS SATISFATÍVEL

EXEMPLOS:

A	$\neg A$
T	F
F	T
T	F
F	T

→ SATISFATÍVEL

↳ SATISFATÍVEL

A	$\neg A$
T	F
T	F
T	F
T	F

↳ CONTRADIÇ

SATISFATÍVEL E TAUTOLOGIA

B) A é tautologia se $\neg A$ é contraditória

É VERDADE, PORQUE SE "$\neg A$" é contraditória "A" vai SER SEU INVERSO, QUE DA UMA TAUTOLOGIA

A	$\neg A$
T	F
T	F
T	F
T	F

C) A e tautologia se A é satisfatível

TODA TAUTOGIA É SATISFATÍVEL, MAS NEM TODA SATISFATÍVEL É UMA TAUTOLOGIA.

d) SE A é contraditória, então ¬A é SATISFATÍVEL

Sim porque sendo A contraditória, ¬A é tautologia e toda tautologia é satisfatível

e) SE A |= B e A é tautologia implica que B é tautologia

Significa que são fórmulas com implicação semântica igual

F) SE A |= B e B é tautologia implica que A é tautologia

Significa que A implica semânticamente em B

2 -

A) P -> P

P	P -> P
T	T
F	T
T	T
F	T

-> TAUTOLOGIA

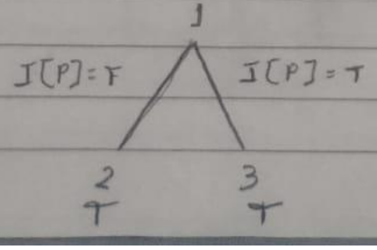
H = P -> P

[H] é tautologia para toda INTERPRETAÇÃO I[H] = T

SUPONHA QUE H não seja tautologia e e exista I[H] = F

H é F se somente se FOR T -> F

Para que isso OCORRA P TEM QUE SER T e F ao mesmo tempo, então encontramos um absurdo, concluo que é impossível que exista I[H] = F



Questão 2

d) SE A é contraditória, então 7A é SATISFATÍVEL
Sim porque sendo A contraditória, 7A é tautologia e
toda tautologia é satisfatível

e) SE A |= B e A é tautologia implica que B é tautologia
Significa que são formulas com implicação
semântica igual

F) SE A |= B e B é tautologia implica que A é tautologia
Significa que A implica semânticamente em B

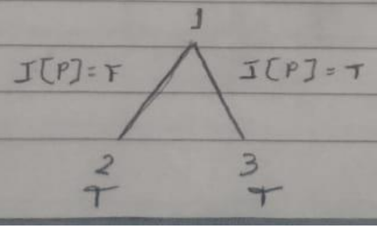
2 -
A) P -> P

P	P -> P
T	T
F	T
T	T
F	T

-> TAUTOLOGIA

H = P -> P
[H] é tautologia para toda INTERPRETAÇÃO I[H] = T
SUPONHA QUE H não seja tautologia e e exista I[H] = F
H é F se somente se FOR T -> F

Para que isso OCORRA P TEM QUE SER T e F ao
mesmo tempo, então encontramos um absurdo,
concluo que é impossível que exista I[H] = F



b) $P \to \neg P$

P	$\neg P$	$P \to \neg P$
T	F	F
F	T	T
T	F	F
F	T	T

$\to$ SATISFATÍVEL

$P \to \neg P = H$

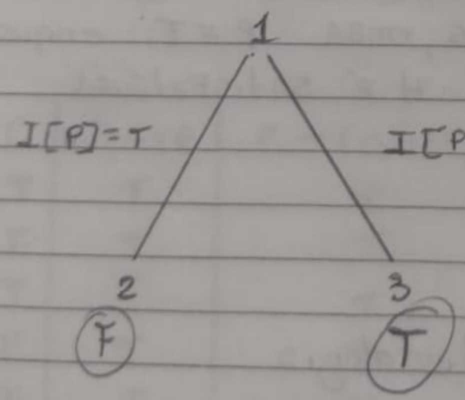
H É TAUTOLOGIA PARA TODA INTERPRETAÇÃ $I[H] = T$, SUPONHA QUE H NÃO SEJA TAUTOLOGIA E É EXISTA $I[H] = F$

PARA QUE ISSO ACONTEÇA $H = T \to F$

COM ISSO BASTA QUE $P = T$ para que $\neg P = F$ TORNANDO A FÓRMULA $H = F$

AGORA SUPONHA QUE H EXISTA $I[H] = T$, ISSO É POSSÍVEL SSE $P = F$ e $\neg P = T$, Concluo que minha FÓRMULA É SATISFATÍVEL.

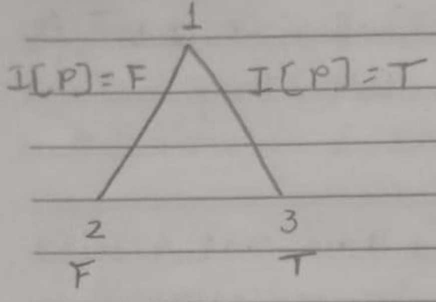
$H = P \to \neg P$



c) $\neg P \to P$

$\neg P$	P	$\neg P \to P$
T	F	F
F	T	T
T	F	F
F	T	T

$H = \neg P \to P$



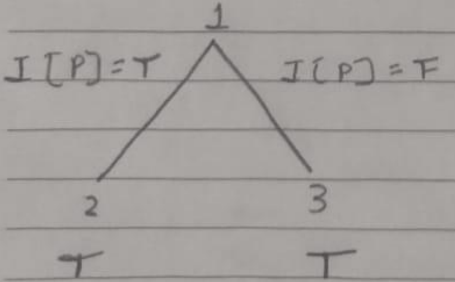
SATISFATÍVEL

H é tautologia para toda interpretação I[H] = T
SUPONHA QUE H não seja tautologia e exista I[H] = F
H = F SSE FOR T -> F

Para que isso ocorra basta que meu P = F e consequentemente ¬P = T. logo minha Fórmula existe I[H] = F
H = é uma contradição se para toda interpretação I[H] = F, SUPONHA QUE H NÃO seja uma contradição e exista I[H] = T
H = T SSE F -> T, T -> T ou F -> F

¬P e P não pode ser iguais, mas P = T enquanto ¬P = F logo H = T. Concluo que H é satisfatível

d) $P \leftrightarrow P$



tautologia

P	$P \leftrightarrow P$
T	T
F	T
T	T
F	T
T	T

Tautologia

/ /

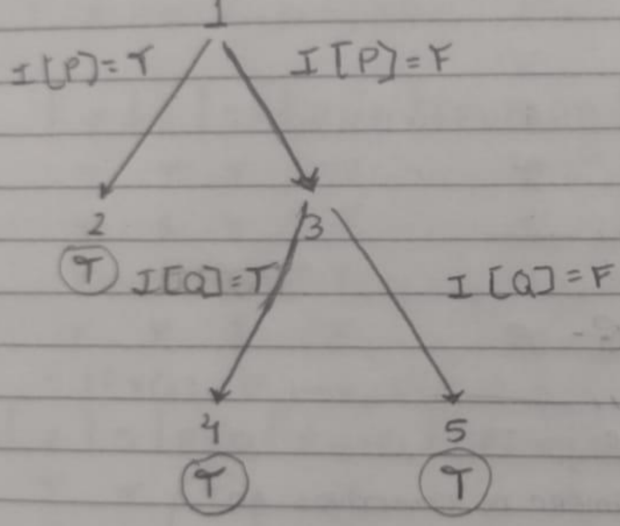
$H = P \leftrightarrow P$

H é uma tautologia para toda $I[H] = T$, SUPONHA QUE H não seja uma tautologia e exista $I[H] = T$

$H = F$ sse $P \neq P$

[P] jamais pode assumir valor diferente em uma mesma fórmula, então encontramos um absurdo.

e) $\overset{F}{P} \to (\overset{F}{Q} \to \overset{F}{P})$



Tautologia

P	Q	Q -> P	P -> (Q -> P)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
T	T	T	T
T	F	T	T

tautologia

f) $(P \to (Q \vee R)) \to (P \wedge (Q \to \neg R))$

Questão 3

Construa a árvore semântica associada à fórmula abaixo e diga se ela é tautologia, satisfatível ou contraditória. Se for possível, forneça uma interpretação I tal que I[H] = F

É tautologia

Questão 4

Determine, utilizando o método da negação, os casos em que:

a) $(P \land Q) \rightarrow G$ é tautologia

b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é tautologia

c) $(P \lor Q) \models G$

d) $(P \leftrightarrow Q) \models G$

a) $(P \land Q) \rightarrow G$ é tautologia

A negação de $(P \land Q) \rightarrow G$ é $(P \land Q) \land \neg G$.

Suponha que $(P \land Q) \land \neg G$ não seja uma contradição. Isso significa que existe uma atribuição de verdade para as proposições P, Q e G que torna a expressão verdadeira. Assim, temos:

Se P e Q são verdadeiras e G é falsa, então $(P \land Q) \rightarrow G$ é falsa, o que contradiz a suposição original.

Se P e Q são verdadeiras e G é verdadeira, então $(P \land Q) \rightarrow G$ é verdadeira, o que também contradiz a suposição original.

Se P é falsa, então $(P \land Q) \rightarrow G$ é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Se Q é falsa, então $(P \land Q) \rightarrow G$ é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Portanto, a afirmação $(P \land Q) \rightarrow G$ é uma tautologia.

b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é tautologia

A negação de $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é $(P \rightarrow Q) \land \neg G$.

Suponha que $(P \rightarrow Q) \land \neg G$ não seja uma contradição. Isso significa que existe uma atribuição de verdade para as proposições P, Q e G que torna a expressão verdadeira. Assim, temos:

Se P é verdadeira e Q é falsa, então $(P \rightarrow Q)$ é falsa, o que faz com que a expressão inteira seja verdadeira, contradizendo a suposição original.

Se P é falsa, então $(P \rightarrow Q)$ é verdadeira, o que faz com que a expressão inteira seja verdadeira, contradizendo a suposição original.

Se Q é verdadeira e G é falsa, então $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é falsa, o que contradiz a suposição original.

Se Q é verdadeira e G é verdadeira, então $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é verdadeira, o que também contradiz a suposição original.

Portanto, a afirmação $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é uma tautologia.

c) (P v Q) |= G

A negação de (P v Q) |= G é (P v Q) ∧ ¬G.

Suponha que (P v Q) ∧ ¬G não seja uma contradição. Isso significa que existe uma atribuição de verdade para as proposições P, Q e G que torna a expressão verdadeira. Assim, temos:

Se P é verdadeira e G é falsa, então (P v Q) é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Se Q é verdadeira e G é falsa, então (P v Q) é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Se P e Q são falsas, então (P v Q) é falsa, o que contradiz a suposição original.

Se G é verdadeira, então (P v Q)é verdadeira para qualquer valor de P e Q, portanto a negação não é uma contradição.

Portanto, a afirmação (P v Q) |= G não é necessariamente uma tautologia.

d) (P ↔ Q) |= G

A negação de (P ↔ Q) |= G é (P ↔ Q) ∧ ¬G.

Suponha que (P ↔ Q) ∧ ¬G não seja uma contradição. Isso significa que existe uma atribuição de verdade para as proposições P, Q e G que torna a expressão verdadeira. Assim, temos:

Se P é verdadeira e Q é falsa, ou P é falsa e Q é verdadeira, e G é falsa, então (P ↔ Q) é falsa, o que contradiz a suposição original.

Se P é verdadeira e Q é falsa, ou P é falsa e Q é verdadeira, e G é verdadeira, então (P ↔ Q) é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Se P e Q são verdadeiras e G é falsa, então (P ↔ Q) é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Se P e Q são falsas e G é falsa, então (P ↔ Q) é verdadeira, o que contradiz a suposição original.

Se P é verdadeira e Q é falsa, ou P é falsa e Q é verdadeira, e G é verdadeira, então (P ↔ Q) é falsa, o que contradiz a suposição original.

Portanto, a afirmação (P ↔ Q) |= G não é necessariamente uma tautologia.

Questão 5

Levando em conta o que aprendeu sobre equivalências e em particular sobre as Leis de De Morgan, escreva a negação das seguintes proposições compostas:

a) Se a comida é boa, então o serviço é excelente.

b) Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente.

c) Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.

d) Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.

e) Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente.

a) A negação da proposição "Se a comida é boa, então o serviço é excelente" é "A comida é boa e o serviço não é excelente" ou "Ou a comida não é boa, ou o serviço não é excelente".

b) A negação da proposição "Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente" é "A comida não é boa e o serviço não é excelente".

c) A negação da proposição "Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro" é "A comida não é boa ou o serviço não é excelente e não está caro" ou "A comida não é boa e o serviço não é excelente e está caro".

d) A negação da proposição "Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente" é "A comida é boa ou o serviço é excelente".

e) A negação da proposição "Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente" é "É caro e a comida não é boa ou o serviço não é excelente" ou "Não é verdade que, se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente".

Questão 6

Para as seguintes fórmulas, responda: Seja J uma interpretação que interpreta todas as fórmulas como sendo verdadeiras. Além disso, J[P] = T. O que se pode concluir a respeito de J[Q] e J[R], em cada um dos casos?

A) para que i[H]=T, i[Q]=T

B) não importar os valores de i[Q] e i[R]

C) o valor de i[Q]= T para a formula ser T

D) i[Q]=F pra i[H]=T

E) i[Q]= T e i[R] = T

F) e uma tautologia os valores de Q e R não importa

Questão 7

Faça a simplificação lógica das fórmulas abaixo utilizando as equivalências clássicas. Obs: Equivalências clássicas abaixo.

<u>a) (P ∧ (¬(¬ P ∨ Q))) ∨ (P ∧ Q)</u>

A lei de De Morgan para a negação de uma disjunção diz que "¬(A ∨ B)" é equivalente a "¬A ∧ ¬B".

A lei da absorção diz que "A ∧ (A ∨ B)" é equivalente a "A".

Assim, temos:

(P ∧ (¬(¬ P ∨ Q))) ∨ (P ∧ Q)

≡ (P ∧ (P ∧ ¬Q)) ∨ (P ∧ Q) (Lei de De Morgan)

≡ P ∧ ((P ∧ ¬Q) ∨ Q) (Distributividade da conjunção sobre a disjunção)

≡ P ∧ (P ∨ (¬Q ∨ Q)) (Distributividade da conjunção sobre a disjunção)

$\equiv P \land (P \lor \neg Q)$ (Idempotência da disjunção)

$\equiv P$ (Lei da absorção)

Portanto, a expressão $(P \land (\neg(\neg P \lor Q))) \lor (P \land Q)$ pode ser simplificada para P.

b) $((\neg (P \land \neg Q)) \land (\neg (Q \land \neg P)))$

A lei de De Morgan para a negação de uma conjunção diz que "$\neg(A \land B)$" é equivalente a "$\neg A \lor \neg B$".

A lei de De Morgan para a negação de uma disjunção diz que "$\neg(A \lor B)$" é equivalente a "$\neg A \land \neg B$".

Assim, temos:

$((\neg (P \land \neg Q)) \land (\neg (Q \land \neg P)))$

$\equiv ((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P))$ (Lei de De Morgan)

$\equiv (\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q)$ (Distributividade da conjunção sobre a disjunção)

Portanto, a expressão $((\neg (P \land \neg Q)) \land (\neg (Q \land \neg P)))$ pode ser simplificada para $(\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q)$.

Questão 8

Demonstre, com o auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes. Obs: Equivalências clássicas abaixo.

a)

$(R \to P) \land (R \to Q)$ e $(\neg P \lor \neg Q) \to \neg R$

A implicação "$A \to B$" é equivalente a "$\neg A \lor B$" (Lei de Implicação).

A lei de De Morgan para a negação de uma conjunção diz que "$\neg(A \land B)$" é equivalente a "$\neg A \lor \neg B$".

Assim, temos:

$(R \to P) \land (R \to Q)$

$\equiv (\neg R \lor P) \land (\neg R \lor Q)$ (Lei de Implicação)

$\equiv \neg R \lor (P \land Q)$ (Distributividade da conjunção sobre a disjunção)

$\equiv \neg R \lor (Q \land P)$ (Comutatividade da conjunção)

$\equiv (\neg P \lor \neg Q) \to \neg R$ (Lei de Implicação)

Portanto, podemos concluir que "$(R \to P) \land (R \to Q)$" é logicamente equivalente a "$(\neg P \lor \neg Q) \to \neg R$".

b) $\neg(P \to Q) \lor S) \land \neg P$ e $(P \lor S) \land ((Q \to S) \land \neg P)$

A implicação "$A \to B$" é equivalente a "$\neg A \lor B$" (Lei de Implicação).

A lei de De Morgan para a negação de uma conjunção diz que "$\neg(A \land B)$" é equivalente a "$\neg A \lor \neg B$".

Assim, temos:

$\neg(P \to Q) \lor S) \land \neg P$

$\equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor S) \land \neg P$ (Lei de Implicação)

$\equiv (P \land \neg Q) \lor S) \land \neg P$ (De Morgan)

$\equiv (P \land \neg Q \land \neg P) \lor (S \land \neg P)$ (Distributividade da conjunção sobre a disjunção)

$\equiv \neg P \land (P \land \neg Q) \lor (S \land \neg P)$ (Comutatividade da conjunção)

$\equiv \neg P \land (\neg Q \land P) \lor (S \land \neg P)$ (Comutatividade da conjunção)

$\equiv (P \lor S) \land (\neg Q \land \neg P \lor \neg P) \land (\neg Q \land \neg P \lor S)$ (Distributividade da conjunção sobre a disjunção)

$\equiv (P \lor S) \land (\neg P \lor \neg Q) \land (S \lor \neg P) \land (\neg Q \lor \neg P)$ (Comutatividade da conjunção)

$\equiv (P \lor S) \land ((Q \to S) \land \neg P)$ (Lei de Implicação)

Portanto, podemos concluir que as proposições $\neg(P \to Q) \lor S) \land \neg P$ e $(P \lor S) \land ((Q \to S) \land \neg P)$ são logicamente equivalentes.