

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ И ЭКЗАМЕНУ.

ИТМО, группы М3232–М3239, весна 2023 г.

1. Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.
2. Теорема о полноте исчисления высказываний.
3. Интуиционистское исчисление высказываний. Вывод в Гильбертовском стиле и натуральный вывод. ВНК-интерпретация. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.
4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах. Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.
5. Топологическое пространство. Примеры. Открытые и замкнутые множества. Связность. Компактность. Непрерывные функции. Путь. Линейная связность. Теорема о том, что лес связан (является деревом) тогда и только тогда, когда связан в топологическом смысле.
6. Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний. Разрешимость интуиционистского исчисления высказываний.
7. Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.
8. Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.
9. Машина Тьюринга. Задача об останове, её неразрешимость. Доказательство неразрешимости исчисления предикатов.
10. Порядок теории $(0, 1, 2)$. Теории первого порядка, структуры и модели. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Доказательство коммутативности сложения. Формальная арифметика.
11. Прimitивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Прimitивная рекурсивность арифметических операций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике. Функция Аккермана. Доказательство того, что функция Аккермана не примитивно-рекурсивна.
12. Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.
13. Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности), ω -непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.
14. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, *Consis*. Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёфа. Теорема Тарского о невыразимости истины.
15. Теория множеств. Определения равенства. Парадокс брадобрея. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Конструктивные аксиомы (пустого, пары, объединения, множества подмножеств, выделения). Частичный, линейный, полный порядок. Ординальные числа, аксиома бесконечности. Конечные ординалы, существование ординала ω , операции над ординалами, доказательство $1 + \omega \neq \omega + 1$. Связь ординалов и упорядочений. Аксиомы фундирования и подстановки.
16. Кардинальные числа, мощность множеств. Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора.
17. Мощность модели. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма-Сколема, парадокс Сколема.
18. Аксиома выбора, альтернативные формулировки (лемма Цорна, теорема Цермело, существование частичной обратной), доказательство переходов (кроме доказательства леммы Цорна).

19. Применение аксиомы выбора: эквивалентность определений пределов (по Коши и по Гейне). Теорема Диаконеску. Ослабленные варианты (счётный выбор и зависимый выбор), универсум фон-Неймана. Аксиома конструктивности.
20. Индукция и полная индукция. Трансфинитная индукция. Система S_∞ . Сечение, устранение сечений. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.
21. Лямбда-исчисление. Пред-лямбда-термы и лямбда-термы. Альфа-эквивалентность, бета-редукция и бета-эквивалентность. Теорема Чёрча-Россера (формулировка). Комбинатор неподвижной точки. Комбинаторный базис SK . Чёрчевские нумералы. Просто-типизированное лямбда исчисление. Изоморфизм Карри-Ховарда.
22. Теорема Гёделя о компактности. Универсум Эрбрана. Унификация. Метод резолюции.