Программа курса «Математическая логика»

Вопросы к зачёту и экзамену.

ИТМО, группы M3232–M3239, весна 2023 г.

1. Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

2. Теорема о полноте исчисления высказываний.

3. Интуиционистское исчисление высказываний. Вывод в Гильбертовском стиле и натуральный вывод. BHK-интерпретация. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.

4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах. Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.

5. Топологическое пространство. Примеры. Открытые и замкнутые множества. Связность. Компактность. Непрерывные функции. Путь. Линейная связность. Теорема о том, что лес связен (является деревом) тогда и только тогда, когда связан в топологическом смысле.

6. Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний. Разрешимость интуиционистского исчисления высказываний.

7. Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.

8. Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.

9. Машина Тьюринга. Задача об останове, её неразрешимость. Доказательство неразрешимости исчисления предикатов.

10. Порядок теории (0, 1, 2). Теории первого порядка, структуры и модели. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Доказательство коммутативности сложения. Формальная арифметика.

11. Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Примитивная рекурсивность арифметических операций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике. Функция Аккермана. Доказательство того, что функция Аккермана не примитивно-рекурсивна.

12. Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.

13. Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности), ω-непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.

14. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, $Consis$. Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёба. Теорема Тарского о невыразимости истины.

15. Теория множеств. Определения равенства. Парадокс брадобрея. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Конструктивные аксиомы (пустого, пары, объединения, множества подмножеств, выделения). Частичный, линейный, полный порядок. Ординальные числа, аксиома бесконечности. Конечные ординалы, существование ординала ω, операции над ординалами, доказательство $1 + \omega \neq \omega + 1$. Связь ординалов и упорядочений. Аксиомы фундирования и подстановки.

16. Кардинальные числа, мощность множеств. Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора.

17. Мощность модели. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма-Сколема, парадокс Сколема.

18. Аксиома выбора, альтернативные формулировки (лемма Цорна, теорема Цермело, существование частичной обратной), доказательство переходов (кроме доказательства леммы Цорна).

19. Применение аксиомы выбора: эквивалентность определений пределов (по Коши и по Гейне). Теорема Диаконеску. Ослабленные варианты (счётный выбор и зависимый выбор), универсум фон-Неймана. Аксиома конструктивности.

20. Индукция и полная индукция. Трансфинитная индукция. Система S_∞. Сечение, устранение сечений. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.

21. Лямбда-исчисление. Пред-лямбда-термы и лямбда-термы. Альфа-эквивалентность, бета-редукция и бета-эквивалентность. Теорема Чёрча-Россера (формулировка). Комбинатор неподвижной точки. Комбинаторный базис SK. Чёрчевские нумералы. Просто-типизированное лямбда исчисление. Изоморфизм Карри-Ховарда.

22. Теорема Гёделя о компактности. Универсум Эрбрана. Унификация. Метод резолюции.