

# Теоремы Гёделя о неполноте арифметики

# Самоприменимость

## Определение

Пусть  $\xi$  — формула с единственной свободной переменной  $x_1$ . Тогда:  
 $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_1$ , если  $\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$  и  $p$  — номер доказательства.

## Определение

Отношение  $W_1$  рекурсивно, поэтому выражено в Ф.А. формулой  $\omega_1$  со свободными переменными  $x_1$  и  $x_2$ , причём:

1.  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства самоприменения  $\varphi$ ;
2.  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$  иначе.

## Определение

Определим формулу  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .

# Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Определение

Если для любой формулы  $\phi(x)$  из  $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$  выполнено  $\nvdash \exists x. \neg \phi(x)$ , то теория  $\omega$ -непротиворечива.

## Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- ▶ Если формальная арифметика непротиворечива, то  $\nvdash \sigma(\overline{\neg \sigma})$ .
- ▶ Если формальная арифметика  $\omega$ -непротиворечива, то  $\nvdash \neg \sigma(\overline{\neg \sigma})$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

Доказательство.

- Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства.

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

Доказательство.

- Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

Доказательство.

- Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ .  
Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .



## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ?

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ? Пусть нет. То есть  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$ ,  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$ , ...

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ? Пусть нет. То есть  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$ ,  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$ , ... По  $\omega$ -непротиворечивости  $\nvdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ? Пусть нет. То есть  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$ ,  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$ , ... По  $\omega$ -непротиворечивости  $\nvdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . Значит, найдётся натуральное  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ? Пусть нет. То есть  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$ ,  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$ , ... По  $\omega$ -непротиворечивости  $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . Значит, найдётся натуральное  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . То есть,  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ .



## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ? Пусть нет. То есть  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$ ,  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$ , ... По  $\omega$ -непротиворечивости  $\nvdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . Значит, найдётся натуральное  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . То есть,  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . То есть,  $p$  — доказательство самоприменения  $W_1$ :  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

## Доказательство теоремы Гёделя

Напомним:  $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$ .  $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$  —  $p$  есть доказательство самоприменения  $\xi$ .

### Доказательство.

- ▶ Пусть  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Значит,  $p$  — номер доказательства. Тогда  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . Тогда  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . Тогда  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.
- ▶ Пусть  $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть  $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .
  - ▶ Но найдётся ли натуральное число  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ ? Пусть нет. То есть  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$ ,  $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$ , ... По  $\omega$ -непротиворечивости  $\not\vdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . Значит, найдётся натуральное  $p$ , что  $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$ . То есть,  $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$ . То есть,  $p$  — доказательство самоприменения  $W_1$ :  $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Противоречие.



# Почему теорема о неполноте?

## Определение

*Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.*

*Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.*

# Почему теорема о неполноте?

## Определение

*Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.*

*Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.*

## Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью.

# Почему теорема о неполноте?

## Определение

*Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.*

*Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.*

## Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем  $\not\vdash \sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{1}})$ .

# Почему теорема о неполноте?

## Определение

*Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.*

*Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.*

## Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем  $\not\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

Рассмотрим  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ,  $p$ : нет числа  $p$ , что  $p$  — номер доказательства  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

# Почему теорема о неполноте?

## Определение

*Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.*

*Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.*

## Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем  $\not\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

Рассмотрим  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ ,  $p$ : нет числа  $p$ , что  $p$  — номер доказательства  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть,  $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p) \rrbracket = \text{И}$ .

# Почему теорема о неполноте?

## Определение

*Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.*

*Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.*

## Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем  $\not\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

Рассмотрим  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ ,  $p$ : нет числа  $p$ , что  $p$  — номер доказательства  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть,  $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p) \rrbracket = \text{И}$ . То есть,  $\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . □



# Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

## Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

# Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

## Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

## Определение

Пусть  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$ , если  $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ . Пусть  $\omega_2$  выражает  $W_2$  в формальной арифметике.

# Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

## Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

## Определение

Пусть  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$ , если  $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ . Пусть  $\omega_2$  выражает  $W_2$  в формальной арифметике.

## Теорема

Рассмотрим  $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$ .

# Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

## Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

## Определение

Пусть  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$ , если  $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ . Пусть  $\omega_2$  выражает  $W_2$  в формальной арифметике.

## Теорема

Рассмотрим  $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$ . Тогда  $\nVdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$  и  $\nVdash \neg \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ .

# Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

## Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

## Определение

Пусть  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$ , если  $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ . Пусть  $\omega_2$  выражает  $W_2$  в формальной арифметике.

## Теорема

Рассмотрим  $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$ . Тогда  $\nVdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$  и  $\nVdash \neg \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ .  $\rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ : «Меня легче опровергнуть, чем доказать»

## Формальное доказательство

Неполнота варианта теории, изложенной выше, формально доказана на Coq, Russell O'Connor, 2005:

“My proof, excluding standard libraries and the library for Pocklington’s criterion, consists of 46 source files, 7 036 lines of specifications, 37 906 lines of proof, and 1 267 747 total characters. The size of the gzipped tarball (gzip -9) of all the source files is 146 008 bytes, which is an estimate of the information content of my proof.”

```
Theorem Incompleteness : forall T : System,  
  Included Formula NN T ->  
  RepresentsInSelf T ->  
  DecidableSet Formula T ->  
  exists f : Formula,  
  Sentence f /\ (SysPrf T f \/ SysPrf T (notH f) -> Inconsistent LNN T).
```

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$



# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

## Определение

Формулой *Consis* назовём формулу  $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

## Определение

Формулой *Consis* назовём формулу  $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

Доказательство.

(неформально)

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ».

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ , — и это можно доказать, то есть  $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ , — и это можно доказать, то есть  $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Однако если формальная арифметика непротиворечива, то  $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .





## Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый  $\text{Consis}'$ :

$$\begin{aligned}\pi'(x) &:= \exists p. \psi(x, p) \ \& \ \neg \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \\ \text{Consis}' &:= \pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})\end{aligned}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то  $\llbracket \pi'(x) \rrbracket = \llbracket \pi(x) \rrbracket$ :
  - ▶ если  $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$  и  $\llbracket \psi(x, p) \rrbracket = \text{И}$ , то  $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$
  - ▶ если  $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ , то  $\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) = \text{Л}$  при любом  $p$ .
2. Но  $\vdash \text{Consis}'$ .

# Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

## Определение

Будем говорить, что формула  $\psi$ , выражающая отношение *Proof*, формула  $\pi$  и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы  $\alpha$ :

1.  $\vdash \alpha$  влечет  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha})$
2.  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha})})$
3.  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta})$

# Первая теорема Гёделя о неполноте ещё раз

## Лемма

*Лемма об автоссылках. Для любой формулы  $\phi(x_1)$  можно построить такую замкнутую формулу  $\alpha$  (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что  $\vdash \phi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \leftrightarrow \alpha$ .*

## Теорема

*Существует такая замкнутая формула  $\gamma$ , что если Ф.А. непротиворечива, то  $\not\vdash \gamma$ , а если Ф.А.  $\omega$ -непротиворечива, то и  $\not\vdash \neg\gamma$ .*

## Доказательство.

Рассмотрим  $\phi(x_1) \equiv \neg\pi(x_1)$ . Тогда по лемме об автоссылках существует  $\gamma$ , что  $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$ .

- ▶ Предположим, что  $\vdash \gamma$ . Тогда  $\vdash \gamma \rightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$ , то есть  $\not\vdash \gamma$
- ▶ Предположим, что  $\vdash \neg\gamma$ . Тогда  $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$ , то есть  $\vdash \exists p.\psi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner}, p)$ . Тогда по  $\omega$ -непротиворечивости найдётся  $p$ , что  $\vdash \psi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner}, \overline{p})$ , то есть  $\vdash \gamma$ .



## Доказательство второй теоремы Гёделя

1. Пусть  $\gamma$  таково, что  $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$ .
2. Покажем  $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0})$ .
  - 2.1 По условию 2,  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})})$ . По теореме о дедукции  $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})})$ ;
  - 2.2 Так как  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma$ , то по условию 1  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma})$ ;
  - 2.3 По условию 3,  $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma})$ ;
  - 2.4 Таким образом,  $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma})$ ;
  - 2.5 Однако  $\vdash \gamma \rightarrow \neg\gamma \rightarrow 1 = 0$ . Условие 3 (применить два раза) даст  $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0})$ .
3.  $\neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0}) \rightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$  (т. о дедукции, контрапозиция).
4.  $\vdash \neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0}) \rightarrow \gamma$  (определение  $\gamma$ ).

# Расширение на другие теории

## Определение

*Теория  $S$  — расширение теории  $T$ , если из  $\vdash_T \alpha$  следует  $\vdash_S \alpha$*

## Определение

*Теория  $S$  — рекурсивно-аксиоматизируемая, если найдётся теория  $S'$  с тем же языком, что:*

- 1.  $\vdash_S \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\vdash_{S'} \alpha$ ;*
- 2. Множество аксиом теории  $S'$  рекурсивно.*

## Теорема

*Если  $S$  — непротиворечивое рекурсивно-аксиоматизируемое расширение формальной арифметики, то в ней можно доказать аналоги теорем Гёделя о неполноте арифметики.*

# Сужение: система Робинсона

## Определение

*Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы  $0$ ,  $(+)$  и  $(\cdot)$ , нелогический предикатный символ  $(=)$  и следующие нелогические аксиомы, называется системой Робинсона.*

$$a = a$$

$$a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c$$

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

$$a = b \rightarrow a + c = b + c \ \& \ c + a = c + b$$

$$\neg a = 0 \rightarrow \exists b. a = b'$$

$$a + b' = (a + b)'$$

$$a \cdot b' = a \cdot b + a$$

$$a = b \rightarrow b = a$$

$$a = b \rightarrow a' = b'$$

$$\neg 0 = a'$$

$$a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c \ \& \ c \cdot a = c \cdot b$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Система Робинсона неполна: аксиомы — в точности утверждения, необходимые для доказательства теорем Гёделя. Система Робинсона не имеет схем аксиом.

# Арифметика Пресбургера

## Определение

*Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы  $0$ ,  $1$ ,  $(+)$ , нелогический предикатный символ  $(=)$  и следующие нелогические аксиомы, называется арифметикой Пресбургера.*

$$\neg(0 = x + 1)$$

$$x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$$

$$x + 0 = x$$

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

$$(\varphi(0) \ \& \ \forall x. \varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall y. \varphi(y)$$

## Теорема

*Арифметика Пресбургера разрешима и синтаксически и семантически полна.*

# Невыразимость доказуемости

## Определение

$$Th_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; Tr_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = I\}$$

## Лемма

Пусть  $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$  для любой формулы  $\alpha(x)$ . Тогда  $D$  представима в формальной арифметике.

## Теорема

Если расширение Ф.А.  $S$  непротиворечиво и  $D$  представима в нём, то  $Th_S$  невыразимо в  $S$

## Доказательство.

Пусть  $\delta(a, p)$  представляет  $D$ , и пусть  $\sigma(x)$  выражает множество  $Th_S$  (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть  $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$ . Верно ли, что  $\ulcorner \alpha \urcorner \in Th$ ?





# Теорема Тарского

## Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы  $\varphi(x)$ , что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$  (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда  $x \in Tr_{ФА}$ .*

### Доказательство.

Пусть теория  $\mathcal{S}$  — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что  $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$ . То есть  $Tr_{ФА}$  невыразимо в  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $\varphi$  таково, что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$  при  $x \in Tr$ . Тогда  $\vdash \varphi(x)$ , если  $x \in Tr$  и  $\vdash \neg \varphi(x)$ , если  $x \notin Tr$ .

Тогда  $Tr$  выразимо в  $\mathcal{S}$ . Противоречие.

