LOGICA PROPOSICIONAL

Conceitos Básicos

Projeto Novos Talentos – CAPES
Computação no Ensino Fundamental
Atividade 1 – Parte 2

Prof: João Bosco m. Sobral / Prof. Fernando Cruz

A Lógica e seu Contexto

✓ Lógica é um tema fascinante. Mas o que é Lógica?

✓ Qual a sua definição?

✓ Algumas delas poderiam ser:

- *estudo do raciocínio;*
- *estudo do pensamento correto e verdadeiro;*
- *regras para demonstração científica verdadeira;*
- *regras para pensamentos não-científicos;*
- *regras sobre o modo de expor o conhecimento;*
- *regras para verificação da verdade ou falsidade de um pensamento.*

E por que estudar Lógica?

✓Há inúmeras razões!

✓Uma delas, bem interessante:

✓É porque estamos numa era, na qual
os principais produtos da mente humana são as
idéias e a essência principal, de que se vale o mundo, é
a informação.

Ideias ... (do texto de João Nunes de Souza)

- "Estas idéias são frutos da criatividade,
  que é a capacidade do gênero humano dar saltos a lugares onde nunca ninguém esteve.

  Uma idéia criativa significa ver ou fazer antes dos outros, fazer ver aos outros algo marcado pela originalidade, unicidade e qualidade rara. ...

Ideias ... Criatividade ...

- ... Lá no lugar onde tal criatividade se exprime, segredos são revelados ou destruídos e o homem se libera das escolhas habituais e obrigatórias."

O uso da idéias

- Saber usar as idéias, ser criativo, é muito mais que ser inteligente.
- O uso das idéias depende e intervém em inúmeras capacidades mentais.

Lógica de Argumentação

- Entre tais capacidades, uma de destaque é aquela que trata da habilidade lógica de argumentação.

- E geralmente, após o surgimento de uma grande idéia, seus fundamentos serão criticados e analisados logicamente.

Natureza do Raciocínio

- Mas o que deve ser feito para aprender a raciocinar bem?

- É necessário estudar, por exemplo, a natureza do raciocínio e isso pode ser realizado estudando Lógica.

Ensino da Lógica

- O **ensino de Lógica**, significa uma melhor preparação dos indivíduos para os desafios da nova sociedade.

O que o professor deve fazer ?

- Ensinar Lógica e Argumentação Lógica passo a passo.

- Apresentar seus principais fundamentos de forma agradável e lúdica, utilizando uma linguagem simples e acessível.

"Belisca no mundo da Lógica"

- Autor: Prof. João Nunes de Souza (UFU).
- Os livros da série: "Belisca no mundo da Lógica" não requerem nenhum pré-requisito, nem mesmo maturidade matemática.
- Eles se destinam ao leitor de qualquer formação ou idade.

“As Aventuras de Belisca no mundo da Lógica"

- Utilizada como texto em disciplinas da escola básica, secundária e em cursos de reciclagem.
- Escola de Ensino Básico da Universidade Federal de Uberlândia e na Escola Colibri (ESTADO DE MINAS GERAIS) .

Metodologia de ensino

- A série: "Belisca no mundo da Lógica" é composta de quatro volumes.

- O primeiro pode ser adotado por alunos do sexto ano;

- O segundo, por alunos do sétimo ano, e assim por diante, até os alunos do nono ano.

Metodologia de ensino

- Ao longo de sua utilização, essa série de livros e sua metodologia têm como objetivo principal o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e de crítica dos alunos.

Desenvolvimento do Raciocínio

- O desenvolvimento do raciocínio é um tema cujo aprendizado requer, dos estudantes, um pensar adequado, um fazer com prazer, e uma forma positiva de ver os fatos a sua volta (tirar proveito dos fatos, no bom sentido de se chegar a alguma coisa).

Desenvolvimento do Raciocínio

- Seu desenvolvimento envolve, pelo menos, três elementos principais:
  - *Raciocínio;*
  - *Prática;*
  - *Atitude.*

Raciocínio

- Propõe um passo a ser dado: estudar Lógica e Argumentação Lógica.

Prática

- Para aprender a raciocinar bem, não basta apenas aprender Lógica e Argumentação Lógica.

- É necessário desenvolver habilidades que internalizem os conceitos adquiridos, bem como a capacidade de aplicá-los no dia-dia.

- Os conceitos aprendidos devem ser aplicados em contextos realistas.

Atitude

- Não bastam apenas raciocínio e prática.
- Como quase toda atividade, o desenvolvimento da capacidade cognitiva depende de sua atitude.
- E para aprender a raciocinar, é fundamental aprender a resolver problemas, refletir sobre questões postas e combinar as partes.

"Aventuras de Belisca no mundo da Lógica"

- "Aventuras de Belisca no mundo da Lógica" possui alguns tipos de personagens:

  - o narrador,
  - os indivíduos que compõem a história,
  - o professor de Lógica,
  - o pensador,
  - crítico do livro.

Personagens aqui utilizados

- Os indivíduos que compõem a história (Belisca e Cia)
- O professor de Lógica,

E os resultados esperados?

- *Estudantes com alguns dons criativos.*
- *Que percebam como é importante possuir, praticar e viver valores éticos;*
- *E também, raciocinar e ter atitudes adequadas a uma sociedade mais justa e fraterna.*

Ler o texto

- Neste ponto você deve ler o texto de
 "A Aventura de Belisca no Mundo da Lógica" ,
 de João Nunes de Souza (professor da Universidade Federal de Uberlândia).

 (Texto comentado pelo professor)

Lógica

- Palavra derivada do vocábulo grego “logos”, que significa “ideia”, “razão” e “regularidade”.

- Emprega-se para:

  Designar o conjunto de regras que representa o processo de pensar.

- É a ciência das regras de raciocínio e de suas formas.

Uma proposição é qualquer frase afirmativa da qual se pode decidir verdade ou falso, mas não ambos. As proposições simples são denotadas p , q , r ,...

Exemplos

a) Brasilia é a capital do Brasil.

b) Brasil e Chile são países limítrofes.

c) O cubo de 2 é impar.

d) Todo número inteiro é múltiplo de 1.

e) Algum número inteiro é divisor de 2.

f) Para qualquer par de números reais x , y , vale sempre que $2x + y = 2y + x$.

g) Se um número real é diferente de zero, então seu quadrado é positivo.

Lógica Proposicional

- É essencialmente um meio de formalizar o raciocínio lógico.

- Existem dois tipos de raciocínio lógico:

  – o raciocínio que envolve as propriedades dos dados;

  – o raciocínio que não envolve as propriedades dos dados.

Lógica Proposicional

- A Lógica Proposicional trata do tipo de raciocínio que não envolve dados, portanto não envolve propriedades dos dados.

- Se preocupa com verdade absolutas, ou seja não envolve variáveis que assumam dados e as propriedades dos dados.

Proposições independentes de dados

- a) Brasilia é a capital do Brasil. (V)
- b) Brasil e Chile são países limítrofes. (F)
- c) O cubo de 2 é impar. (F)

Propriedade dependentes dos dados

- d) Todo número inteiro i é múltiplo de 1.
- e) Algum número inteiro j é divisor de 2.
- f) Para qualquer par de números reais x, y, vale sempre que $2x + y = 2y + x$.
- g) Se um número real x é diferente de zero, então seu quadrado é positivo.

Propriedade dependente dos dados

- A veracidade ou falsidade das afirmações d), e), f), g) dependem dos valores (dados) assumidos pelas variáveis i, j, x, e y.
- Para tratar tais afirmações necessitamos de uma outra Lógica, que estenda a Lógica Proposicional.
- Esta será a Lógica dos Predicados.

Os <u>conectivos lógicos</u> geran proposicões compostas, aquelas que são combinações de proposições simples

Negação: ¬	¬p No p
Conjunção: ∧	p∧q p e q
Disjunção: ∨	p∨q p ou q
Disjunção exclusiva $\underline{\vee}$	p $\underline{\vee}$ q p ou q, mas não ambas
Condicional: →	p→q Se p então q
Bicondicional:↔	p↔q p se e somente se q

Negação

$\neg p$

Toma o valor de verdade contrário de p

Conjunção

$p \wedge q$

É verdade somente no caso em que p e q sejam verdadeiros

Disjunção

$p \vee q$

É falso somente no caso em que p e q sejam falsos

Disjunção exclusiva

$p \underline{\vee} q$

É verdadeiro somente se um e somente um é verdadeira

Condicional

$p \rightarrow q$

É falso somente no caso em que p seja verdadeiro e q seja falso

Bicondicional

$p \leftrightarrow q$

É verdadeiro se p e q tem os mesmos valores verdade

Exemplos em Aritmética

O cubo de −2 <u>não</u> é positivo.

2 é par <u>e</u> primo.

6 es múltiplo de 2 <u>ou</u> de 3.

A raíz quadrada de −2 é real <u>ou</u> imaginária, mas <u>não ambos.</u>

<u>Se</u> um número é divisor de 14 e também de 21 , <u>então</u> esse número é divisor de 14 . 2 + 21 . (−3).

Un número é par <u>se e somente se</u> é divisível por 2.

Caso particular de expressão lógica:

Raciocínios ou Argumentos

Un raciocínio é toda expressão lógica com a seguinte estrutura:

$$" H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C "$$

donde H_i são expressões lógicas chamadas hipóteses ou premissas e

C é outra expressão lógica chamada Tese ou Conclusão.

Exemplos

$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Classificação das Expressões Lógicas:

TAUTOLOGIAS

Expressões lógicas sempre verdaderas.

Exemplos: "$p \lor \neg p$" "$p \leftrightarrow p$" "$p \land q \rightarrow p$" "$p \rightarrow p \lor q$"

CONTRADIÇÕES

Expressões Lógicas sempre falsas.

Exemplos: "$p \land \neg p$" "$p \leftrightarrow \neg p$" "$p \lor \neg p \rightarrow F$" "$V \rightarrow p \land \neg p$"

CONTINGÊNCIAS

Expressões Lógicas que não são tautologías nem contradições.

Exemplos: "$p \rightarrow q$" "$p \lor \neg q$" "$p \leftrightarrow q \land r$" "$p \land q \rightarrow \neg r$" "$p \rightarrow p \lor q$"

Exemplo de Tautologia

- Na Lógica Proposicional, a setença (afirmação ou proposição):

- “Os macacos em Júpiter são vermalhos” (1)

  ou

- “Os macacos em Júpiter não são vermelhos” (2)

- É verdadeira sem a necessidade de uma investigação biológica.

- Por que ?

Exemplo de Tautologia

- A proposição é uma instância da proposição válida na Lógica Proposicional:

  P ou (não P)

  a qual é uma proposição abstrata.

- Tomando-se P como (1) e (não P) como (2),

  P ou (não P)

  é uma tautologia.

Exemplo de Tautologia

P	não P	P ou (não P)
V	F	V
F	V	V

Equivalencia lógica

- *Duas expressões lógicas A e B são equivalentes se possuem os mesmos valores verdade para cada combinação de valores verdade das proposições simples que a compõem.*
- *Se expressa como* $A \Leftrightarrow B$
- $A \Leftrightarrow B$ *se e somente se* $A \leftrightarrow B$ *é uma tautologia.*
- A importância das equivalências reside no fato de que as expressões podem ser substituídas uma por outra, dado que portam a mesma mensagem.

Las equivalencias más importantes reciben el nombre de LEYES LOGICAS. Ellas juegan un rol trascendente en las demostraciones. Éstas son algunas :

Doble Negación

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

"Es falso que 1 no es menor que 3" es equivalente a

"1 es menor que 3"

Distributividad

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

"3 es primo y , es divisor de 6 o es divisor de 9" es equivalente a

"3 es primo y divisor de 6 , o 3 es primo y divisor de 9"

Asociatividad

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

"6 es un número compuesto y 6 es múltiplo de 2 y de 3" es equivalente a

"6 es un número compuesto múltiplo de 2 y también de 3"

Más Leyes lógicas

Leyes de idempotencia

$p \vee p \Leftrightarrow p \qquad p \wedge p \Leftrightarrow p$

" 2 es par y par" es equivalente a "2 es par"

Leyes de Identidad

$p \wedge V \Leftrightarrow p \qquad p \vee F \Leftrightarrow p$

"13 y 20111 son primo s " es equivalente a "20111 es primo"

Leyes de Dominación

$p \vee V \Leftrightarrow V \qquad p \wedge F \Leftrightarrow F$

"13 o 20111 son primos" es Verdadero"

Leyes de los Inversos

$p \vee \neg p \Leftrightarrow V \qquad p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$

"20111 es primo o no es primo" es Verdadero

"20111 es primo y no es primo" es Falso

Leyes de De Morgan

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

"No es cierto que, 72024 es primo y múltiplo de 3" es equivalente a "
"72024 no es primo o no es divisible por 3"

....y las relacionadas con la condicional y bicondicional

Ley de la Contrarecíproca

$p \to q \;\Leftrightarrow\; \neg q \to \neg p$

" Si F es diferenciable en a entonces F es continua en a" es equivalente a

"Si F no es continua en a entonces no es diferenciable en a"

Eliminación de la condicional

$p \to q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$

Ejemplo: $[r \wedge s \to p \vee r] \Leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \vee p \vee r] \Leftrightarrow [\neg r \vee \neg s \vee p \vee r] \Leftrightarrow V$

Negación de la condicional

$\neg(p \to q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge \neg q$

“No es cierto que , 2002 es múltiplo de 4 como consecuencia de que sea par" es equivalente a " 2002 es par y no es múltiplo de 4"

Transformaciones de la bicondicional

$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Sea x un número entero , es equivalente afirmar

“x es múltiplo de 3 si y solo si la suma de sus cifras es divisible por 3" que

"Si x es múltiplo de 3 entonces la suma de sus cifras es múltiplo de 3 y , si la suma de las cifras de x es divisible por 3 entonces x es múltiplo de 3"

....y más sobre la Condicional

Ley de Exportación

$[p \wedge q \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

"Si x es múltiplo de 2 y de 3 , entonces es multiplo de 6"   es equivalente a

"Si x es múltiplo de 2, entonces es suficiente que sea múltiplo de 3 para que sea divisible por 6"

Ley del Absurdo

$[p \rightarrow q] \Leftrightarrow [p \wedge \neg q \rightarrow F]$

"Si x es múltiplo de 8 entonces es par" es equivalente a afirmar que

"Suponer que x es múltiplo de 8 y no es par es una contradicción”

Implicação Lógica

- *Se diz A implica lógicamente B se cada vez que A é verdadeira, B também o é.*
- *Se diz que a partir de A se conclui B , ou que B se infere de A: Se expressa $A \Rightarrow B$*

Implicação Lógica

- $A \Rightarrow B$ *si e somente se* $A \rightarrow B$ *é tautologia.*
- A importância das implicações lógicas reside no fato de que são indispensáveis nas demostrações de validade dos raciocínios.

Raciocínios ou Argumentos Válidos

Un raciocínio é válido se:

$$" H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow C "$$

Isto é: Se as premissas são verdadeiras, a conclusão também será; como uma consequência inevitável"

Se diz que a conclusão se infere das premissas.

Os raciocínios válidos básicos que intervém em qualquer demostração de validade se chamam REGRAS DE INFERÊNCIA.

REGLAS DE INFERÊNCIA BÁSICAS

H_1

H_2

.

.

___

$\therefore$ C

Lei de Simplifi-cação

p

q

$\therefore$ q

Lei de Adição

p

$\therefore$ p $\vee$ q

Lei de Combina-ção

p

q

$\therefore$ p $\wedge$ q

Lei da Contradi-ção

$\neg p \to F$

$\therefore$ p

Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{\therefore q}$$

Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

Silogismo Hipotético

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{\therefore p \rightarrow r}$$

Silogismo Disjuntivo

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{\therefore q}$$

Lei de Casos

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \end{array}}{\therefore r}$$

Métodos de Demonstração

Seja o raciocínio

$A \Rightarrow C$

donde $A = H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n$

Os métodos de classificação em Diretos e Indiretos.

Método Direto

$A \Rightarrow C$

Método Indireto: Redução ao absurdo

$A \land \neg C \Rightarrow F$

Método Indireto: pela Contra-Recíproca

$\neg C \Rightarrow \neg A$

Aplicações da Lógica Proposicional

Presença dos conectivos lógicos na lógica de programação.

Presença da Lógica Proposicional nas demostrações matemáticas.

Nos programas a presença dos conectivos lógicos é permanente e a avaliação dos valores verdade são imprescindíveis.

```
i:=1
if  i < 2   or  i > 0  then
x: = x +1
else
x:= x + 2
```

```
i:=3
if   0 < i < 2    or  i = 3   then
x: = x +1
else
x: = x +2
```

```
i:=1
j:=1
while (i < 2 and  j < 5)  or  i + j = 5
do
begin
x:= x + 1
i: = i + 2
j:= j + 1
end
```

Teorema:

Se um número inteiro divide a dois inteiros quaisquer, então divide a qualquer combinação linear deles:

$$\text{Se } a \mid b \wedge a \mid c \;\Rightarrow\; a \mid (b\,x + c\,y) \;, \text{ para qualquer } x , y \in Z$$

Demostración (Directa)

Se $a|b$, então $\exists\, n \in Z$ tal que $b = a \,.\, n$

Se $a|c$, então $\exists\, m \in Z$ tal que $c = a \,.\, m$

Logo, $bx + cy = a.n.x + a.m.y = a.(n.x + m.y)$

Se conclue que $a \mid (b\,x + c\,y)$ com que fica demonstrado o teorema.

Teorema de Euclides: Existem uma infinidade de números primos.

Demostração (Indireta, por absurdo)

Suponha o contrário que existe uma quantidade finita de primos, que ordenados de menor a maior simbolizamos como:

$$p_1 , p_2 , p_3 , \ldots, p_k$$

Seja $\beta = p_1 . p_2 . p_3 . \ldots . p_k + 1$, com $\beta > p_i$, $\forall i$.

Como $\beta > p_i$, $\forall i$, então β não é primo; composto, ou seja β tem outros divisores diferentes de 1. Então pelo lema anterior existe um primo p_j , $1 \leq j \leq k$ tal que $p_j \mid \beta$

Como $p_j \mid \beta$ e dado que $p_j \mid p_1 . p_2 . p_3 . \ldots . p_k$, então pelo lema anterior $p_j \mid (\beta - p_1 . p_2 . p_3 . \ldots . p_k)$.

Isto é $p_j \mid 1$. O que é um absurdo, pois p_j é primo.

Esta contradição surge por se fazer a suposição que existíe una quantidade finita de primos.

Por lo tanto queda demostrado que: Existe una cantidad infinita de primos.

Aplicações da Lógica Proposicional

Presença dos conectivos lógicos na Álgebra Booleana

Presença da Lógica Proposicional na construção dos circuitos lógicos.

- g) Existe um número real x tal que $x^2 < x$.