Faculdades FMU
FIAM FAAM
407948

49º PRÊMIO JABUTI 2007

LÓGICA PARA COMPUTAÇÃO

5113

Flávio Soares Corrêa da Silva
Marcelo Finger
Ana Cristina Vieira de Melo

Outras Obras

Algoritmos e Lógica de Programação

Marco Antonio Furlan de Souza, Marcelo Marques Gomes, Marcio Vieira Soares e Ricardo Concilio

Compiladores: Princípios e Práticas

Kenneth C. Louden

Comunicação entre Computadores e Tecnologias de Rede

Michael A. Gallo e William M. Hancock

Introdução aos Sistemas Operacionais

Ida M. Flynn e Ann McIver McHoes

Lógica de Programação

Irenice de Fátima Carboni

Modelos Clássicos de Computação

Flávio Soares Corrêa da Silva e Ana Cristina Vieira de Melo

Princípios de Sistemas de Informação – Tradução da 6ª edição norte-americana

Ralph M. Stair e George W. Reynolds

Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C – 3ª edição revista e ampliada

Nivio Ziviani

Lógica para Computação

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silva, Flávio Soares Corrêa da
Lógica para computação : Flávio Soares Corrêa da Silva, Marcelo Finger, Ana Cristina Vieira de Melo. - São Paulo : Cengage Learning, 2010.

1. reimpr. da 1. ed. de 2006.
Bibliografia.
ISBN 85-221-0517-0

1. Lógica 2. Lógica computacional 3. Lógica simbólica e matemática I. Finger, Marcelo. II. Melo, Ana Cristina Vieira de. III. Título.

06-5095 CDD-004.01

Índice para catálogo sistemático:

1. Lógica computacional 004.01

Lógica para Computação

Flávio Soares Corrêa da Silva
Marcelo Finger
Ana Cristina Vieira de Melo

biblioteca
118100
UniFMU
c.2

CENGAGE Learning

Austrália • Brasil • Japão • Coréia • México • Cingapura • Espanha • Reino Unido • Estados Unidos

CENGAGE Learning™

Lógica para computação

Flávio Soares Corrêa da Silva
Marcelo Finger
Ana Cristina Vieira de Melo

Gerente Editorial: Patricia La Rosa

Editora de Desenvolvimento: Tatiana Pavanelli Valsi

Supervisor de Produção Editorial: Fábio Gonçalves

Supervisora de Produção Gráfica: Fabiana Alencar Albuquerque

Produtora Editorial: Renata Siqueira Campos

Copidesque: Norma Gusukuma

Revisão: Gisele Múfalo
Andréa Vidal

Diagramação: Roberto Maluhy Jr.
Mika Mitsui

Capa: Eduardo Bertolini

Aquisição: Compra
Origem: Cia Livros
R$:
Data: 30/06/11
N.º de Chamada
005.1015113
S 586 1L

© 2006 Cengage Learning Edições Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro po
derá ser reproduzida, sejam quais forem os meios empregado
sem a permissão, por escrito, da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos
102, 104, 106 e 107 da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 199

Para informações sobre nossos produtos, entre em contato pelo telefone **0800 11 19 39**

Para permissão de uso de material desta obra, envie seu pedido para **direitosautorais@cengage.com**

© 2006 Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

ISBN-10: 85-221-0517-0

Cengage Learning
Condomínio E-Business Park
Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 04
Lapa de Baixo – CEP 05069-900 – São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900 – Fax: (11) 3665-9901
SAC: 0800 11 19 39

Para suas soluções de curso e aprendizado, visite
www.cengage.com.br

Impresso no Brasil.
Printed in Brazil.
1 2 3 4 5 11 10 09 08 07 06

Para Renata e Maria Clara. FCS
Para Diana e Michel. MF
Para Roger. ACVM

Sumário

Introdução, 1

Parte 1

Lógica Proposicional

1 Lógica Proposicional: Linguagem e Semântica, 7

1.1 Introdução, 7

1.2 A Linguagem Proposicional, 8

1.2.1 Fórmulas da Lógica Proposicional, 8

1.2.2 Subfórmulas, 10

1.2.3 Tamanho de Fórmulas, 11

1.2.4 Expressando Idéias com o Uso de Fórmulas, 11

1.3 Semântica, 13

1.4 Satisfazibilidade, Validade e Tabelas da Verdade, 16

1.5 Conseqüência Lógica, 22

1.6 Desafios da Lógica Proposicional, 28

1.7 Notas Bibliográficas, 30

2 Sistemas Dedutivos, 33

2.1 O Que É um Sistema Dedutivo?, 33

2.2 Axiomatização, 34

2.2.1 Substituições, 35

2.2.2 Axiomatização, Dedução e Teoremas, 36

2.2.3 Exemplos, 37
2.2.4 O Teorema da Dedução, 39
2.3 Dedução Natural, 41
2.3.1 Princípios da Dedução Natural, 41
2.3.2 Regras de Dedução Natural para Todos os Conectivos, 43
2.3.3 Definição Formal de Dedução Natural, 46
2.4 O Método dos Tableaux Analíticos, 48
2.4.1 Fórmulas Marcadas, 49
2.4.2 Regras de Expansão α e β, 50
2.4.3 Exemplos, 52
2.5 Correção e Completude, 57
2.5.1 Conjuntos Descendentemente Saturados, 58
2.5.2 Correção do Método dos Tableaux Analíticos, 60
2.5.3 A Completude do Método dos Tableaux Analíticos, 61
2.5.4 Decidibilidade, 61
2.6 Notas Bibliográficas, 63

3 Aspectos Computacionais, 65
3.1 Introdução, 65
3.2 Implementação de um Provador de Teoremas pelo Método dos Tableaux Analíticos, 66
3.2.1 Estratégias Computacionais, 66
3.2.2 Estruturas de Dados, 70
3.2.3 Famílias de Fórmulas Notáveis, 74
3.3 Formas Normais, 77
3.3.1 A Forma Normal Conjuntiva ou Forma Clausal, 78
3.3.2 Forma Normal Disjuntiva, 86
3.4 Resolução, 88
3.5 O Problema SAT, 93
3.5.1 O Método DPLL, 93
3.5.2 Aprendizado de Novas Cláusulas, 97
3.5.3 O Método Chaff, 100
3.5.4 O Método Incompleto GSAT, 106
3.5.5 O Fenômeno de Mudança de Fase, 108
3.6 Notas Bibliográficas, 109

Parte 2

Lógica de Predicados

4 Lógica de Predicados Monádicos, 113

4.1 Introdução, 113
4.2 A Linguagem de Predicados Monádicos, 115
4.3 Semântica, 117
4.4 Dedução Natural, 122
4.5 Axiomatização, 128
4.6 Correção e Completude, 132
4.7 Decidibilidade e Complexidade, 136
4.8 Notas Bibliográficas, 139

5 Lógica de Predicados Poliádicos, 141

5.1 Introdução, 141
5.2 A Linguagem de Predicados Poliádicos, 142
5.3 Semântica, 143
5.4 Dedução Natural, 146
5.5 Axiomatização, 146
5.6 Tableaux Analíticos, 147
5.7 Decidibilidade e Complexidade, 149
5.8 Notas Bibliográficas, 151

Parte 3

Verificação de Programas

6 Especificação de Programas, 155

6.1 Introdução, 155
6.2 Especificação de Programas, 157
6.2.1 Programas como Transformadores de Estados, 158
6.2.2 Especificação de Propriedades sobre Programas, 160
6.3 Lógica Clássica como Linguagem de Especificação, 165
6.3.1 Tipos de Dados e Predicados Predefinidos, 167
6.3.2 Invariantes, Precondições e Pós-condições, 169
6.3.3 Variáveis de Especificação, 173

6.4 Exemplo, 175
6.5 Notas Bibliográficas, 176

7 Verificação de Programas, 179
7.1 Introdução, 179
7.1.1 Como Verificar Programas?, 183
7.2 Uma Linguagem de Programação, 186
7.3 Prova de Programas, 191
7.4 Correção Parcial de Programas, 195
7.4.1 Regras, 195
7.4.2 Sistema de Provas, 199
7.4.3 Correção e Completude do Sistema de Provas, 213
7.5 Correção Total de Programas, 217
7.6 Notas Bibliográficas, 224

Conclusão, 227

Referências Bibliográficas, 229

Introdução

1 Die Welt ist alles, was der Fall ist.*[1]

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*

ESTE LIVRO SURGIU da necessidade de contarmos com um livro-texto em português para a disciplina métodos formais em programação, que faz parte do curso de bacharelado em Ciência da Computação da Universidade de São Paulo, sob responsabilidade do Departamento de Ciência da Computação daquela universidade. A mesma disciplina ocorre na quase totalidade dos cursos de graduação em Ciência da Computação, Engenharia da Computação e Sistemas de Informação nas universidades brasileiras, embora com nomes distintos: lógica para computação, lógica matemática, introdução à lógica etc.

Essa disciplina tem por objetivo apresentar, em caráter introdutório, os fundamentos e métodos da lógica matemática a estudantes de Ciência da Computação, permitindo-lhes apreciar a elegância desse ramo do conhecimento, os benefícios e dificuldades advindos da aplicação de métodos matemáticos rigorosos para a resolução de problemas e, acima de tudo, a enorme importância dos métodos formais – e mais especificamente dos métodos fundamentados em *lógica formal* – para as diversas facetas e ramificações da Ciência da Computação.

---

[1] N.A. "O mundo é tudo que é o caso."

Salvo raras exceções, os livros que encontrávamos para indicar aos nossos alunos se enquadravam em duas categorias:

- Livros que não mencionavam explicitamente os cientistas de computação como público-alvo e que, de fato, se dirigiam a estudantes de outras áreas, como, por exemplo, a matemática pura. Encontramos livros de excelente qualidade nessa categoria, que inclusive tratam de temas relevantes para os cientistas de computação (como, por exemplo, a indecidibilidade da satisfazibilidade da lógica de relações – veja o Capítulo 5), mas que, em geral, tratam com grande profundidade aspectos menos relevantes de forma mais direta para a ciência da computação e deixam de explorar, ou ao menos de evidenciar, outros aspectos que podem ser de interesse mais central para profissionais e estudiosos das ciências informáticas.
- Livros de lógica matemática "dirigidos" a cientistas de computação e engenheiros. Esses livros tendem a ser menos rigorosos e um pouco mais genéricos e superficiais.

Dentre os poucos livros que encontramos e que nos pareceram equilibrados no tratamento rigoroso da lógica e na informalidade para expor conceitos lógicos a um público de não-matemáticos, destacamos os livros de Huth e Ryan (2000) e de Robertson e Agustí (1999).

Nosso objetivo foi preparar um texto original em português que, sem perder o caráter de texto introdutório, apresentasse o rigor matemático e a profundidade que consideramos adequados para o nosso público-alvo.

Este livro tem três autores e está dividido em três partes. Os três autores são co-responsáveis por todos os capítulos. Entretanto, cada parte teve um dos autores como "autor responsável", o que contribuiu para aumentar nossa produtividade.

A Parte I, *Lógica Proposicional*, foi preparada por Marcelo Finger. Ela é composta por três capítulos. No Capítulo 1 são apresentados os fundamentos da lógica proposicional. No Capítulo 2 são apresentados, em detalhes, diferentes sistemas dedutivos para essa lógica. Finalmente, no Capítulo 3 são apresentados aspectos computacionais das deduções na lógica proposicional.

A Parte II, *Lógica de Predicados*, foi preparada por Flávio Soares Corrêa da Silva. Ela é composta por dois capítulos. No Capítulo 4 é apresentado um caso particular da lógica de predicados, em que cada predicado tem apenas

um argumento. Essa lógica é útil para modelar diversos problemas de ciência da computação, em especial da engenharia de linguagens de programação. Além disso, um caso restrito dessa lógica – a *lógica de predicados monádicos com assinatura pura* – apresenta uma propriedade formal notável, conforme é discutido no final do Capítulo 4. No Capítulo 5 é apresentada a lógica de predicados *completa*, na forma como ela é mais conhecida.

A Parte III, *Verificação de Programas*, foi preparada por Ana Cristina Vieira de Melo. Ela é composta por dois capítulos. No Capítulo 6 são apresentados aspectos lógicos e formais da especificação de programas. Finalmente, no Capítulo 7, são apresentados os aspectos lógicos da verificação de programas propriamente dita.

Agradecimentos

Os autores agradecem coletivamente aos estudantes do curso de bacharelado em Ciência da Computação da Universidade de São Paulo, que inspiraram este livro e ajudaram sobremaneira no refinamento e nas correções do texto.[2] Agradecemos também à Thomson Learning pelo apoio editorial.

Flávio agradece à sua esposa Renata e sua filha Maria Clara pelo estímulo para construir coisas que devam trazer benefícios para outras pessoas de alguma maneira – o que inclui escrever este livro.

Marcelo agradece à sua esposa Diana e ao filho Michel pelo total apoio e pela força recebida nas pequenas e nas grandes dificuldades.

Ana Cristina agradece ao seu marido Roger pelo apoio durante a preparação deste livro.

[2] N.A. Embora devamos ressaltar que todas as imperfeições ainda presentes no texto são de total responsabilidade dos autores.

Parte 1

Lógica Proposicional

1 Lógica Proposicional: Linguagem e Semântica

1.1 Introdução

A linguagem natural, com a qual nos expressamos diariamente, é muito suscetível a ambigüidades e imprecisões. Existem frases não-gramaticais que possuem sentido (por exemplo, anúncios de classificados no jornal) e frases perfeitamente gramaticais sem sentido ou com sentido múltiplo. Isso faz com que a linguagem não seja apropriada para o estudo das relações lógicas entre suas sentenças.

Portanto, no estudo da lógica matemática e computacional, utilizamo-nos de uma *linguagem formal*. Linguagens formais são objetos matemáticos, cujas regras de formação são precisamente definidas e às quais podemos atribuir um único sentido, sem ambigüidade.

Linguagens formais podem ter diversos níveis de expressividade. Em geral, quanto maior a expressividade, maior também a complexidade de se manipular essas linguagens. Iniciaremos nosso estudo da lógica a partir de uma *linguagem proposicional*, que tem uma expressividade limitada, mas já nos permite expressar uma série de relações lógicas interessantes.

Nesse contexto, uma *proposição* é um enunciado ao qual podemos atribuir um *valor verdade* (verdadeiro ou falso). É preciso lembrar que nem toda sentença pode possuir um valor verdade. Por exemplo, não podemos atribuir valor verdade a sentenças que se referem ao seu próprio valor verdade, com a sentença "esta sentença é falsa". Esse tipo de sentença é chamado de *auto-referente* e deve ser excluído da linguagem em questão, pois, se a sentença é verdadeira, então ela é falsa; por outro lado, se ela for falsa, então é verdadeira. A linguagem proposicional exclui sentenças auto-referentes.

Dessa forma, a *lógica proposicional clássica* nos permite tratar de enunciados aos quais podemos atribuir valor verdade (as *proposições*) e as operações que permitem compor proposições complexas a partir de proposições mais simples, como a *conjunção* ("E"), a *disjunção* ("OU"), a *implicação* ("SE ... ENTÃO ...") e a *negação* ("NÃO").

A linguagem proposicional *não* nos permite expressar relações sobre elementos de um conjunto, como as noções de "todos", "algum" ou "nenhum". Tais relações são chamadas de *quantificadoras*, e nós as encontraremos no estudo da *lógica de primeira ordem*, que será tratada na Parte 2.

A seguir, vamos realizar um estudo detalhado da lógica proposicional clássica (LPC).

1.2 A Linguagem Proposicional

Ao apresentarmos uma linguagem formal, precisamos inicialmente fornecer os componentes básicos da linguagem, chamados de *alfabeto*, para em seguida fornecer as *regras de formação* da linguagem, também chamadas de *gramática*.

No caso da lógica proposicional, o alfabeto é composto pelos seguintes elementos:

- Um conjunto infinito e contável de *símbolos proposicionais*, também chamados de *átomos*, ou de *variáveis proposicionais*: $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$.
- O *conectivo unário* $\neg$ (negação, lê-se: NÃO).
- Os *conectivos binários* $\wedge$ (conjunção, lê-se: E), $\vee$ (disjunção, lê-se: OU), e $\rightarrow$ (implicação, lê-se: SE ... ENTÃO ...).
- Os elementos de pontuação, que contêm apenas os parênteses: '(' e ')'.

1.2.1 Fórmulas da Lógica Proposicional

Os elementos da linguagem $\mathcal{L}_{LP}$ da lógica proposicional são chamados de *fórmulas* (ou fórmulas bem-formadas). O conjunto das fórmulas da lógica proposicional será definido *por indução*. Uma definição por indução pode possuir vários *casos*. O *caso básico* da indução é aquele no qual alguns elementos já conhecidos são adicionados ao conjunto que estamos definindo. Os demais casos, chamados de *casos indutivos*, tratam de adicionar novos elementos ao conjunto, a partir de elementos já inseridos nele.

Dessa maneira, o conjunto $\mathcal{L}_{LP}$ das fórmulas proposicionais é definido indutivamente como *o menor conjunto*, satisfazendo as seguintes regras de formação:

1. **Caso básico:** Todos os símbolos proposicionais estão em $\mathcal{L}_{LP}$; ou seja, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{LP}$. Os símbolos proposicionais são chamados de *fórmulas atômicas*, ou átomos.

2. **Caso indutivo 1:** Se $A \in \mathcal{L}_{LP}$, então $\neg A \in \mathcal{L}_{LP}$.

3. **Caso indutivo 2:** Se $A, B \in \mathcal{L}_{LP}$, então $(A \wedge B) \in \mathcal{L}_{LP}$, $(A \vee B) \in \mathcal{L}_{LP}$, $(A \rightarrow B) \in \mathcal{L}_{LP}$.

Se p, q e r são símbolos proposicionais, pelo item 1, ou seja, o caso básico, eles são também fórmulas da linguagem proposicional. Então, $\neg p$ e $\neg\neg p$ também são fórmulas, bem como $(p \wedge q)$, $(p \vee (p \vee \neg q))$, $((r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q)$ etc. Em geral, usamos as letras minúsculas p, q, r e s para representar os símbolos atômicos, e as letras maiúsculas A, B, C e D para representar fórmulas. Desse modo, se tomarmos a fórmula $((r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q)$, podemos dizer que ela é da forma $(A \rightarrow B)$, em que $A = (r \wedge \neg p)$ e $B = \neg q$; já a fórmula A é da forma $(A_1 \wedge A_2)$, onde $A_1 = r$ e $A_2 = \neg p$; similarmente, B é da forma $\neg B_1$, onde $B_1 = q$.

A definição de $\mathcal{L}_{LP}$ ainda exige que $\mathcal{L}_{LP}$ seja o menor conjunto satisfazendo as regras de formação. Essa condição é chamada de *cláusula maximal*. Isso é necessário para garantir que nada de indesejado se torne também uma fórmula. Por exemplo, essa restrição impede que os números naturais sejam considerados fórmulas da lógica proposicional.

De acordo com a definição de fórmula, o uso de parênteses é obrigatório ao utilizar os conectivos binários. Na prática, no entanto, usamos abreviações que permitem omitir os parênteses em diversas situações:

- Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos. Dessa forma, podemos escrever $p \wedge q$ em vez de $(p \wedge q)$, $(r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$ em vez de $((r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q)$.

- O uso repetido dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ dispensa o uso de parênteses. Por exemplo, podemos escrever $p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$ em vez de $((p \wedge q) \wedge \neg r) \wedge \neg s$; note que os parênteses aninham-se à esquerda.

- O uso repetido do conectivo $\rightarrow$ também dispensa o uso de parênteses, só que os parênteses aninham-se à direita. Dessa forma, podemos escrever $p \rightarrow q \rightarrow r$ para representar $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.
- Além disso, nas fórmulas em que há uma combinação de conectivos, existe uma precedência entre eles, dada pela ordem: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Dessa forma:
  - $\neg p \wedge q$ representa $(\neg p \wedge q)$ [e não $\neg(p \wedge q)$].
  - $p \vee q \wedge r$ representa $p \vee (q \wedge r)$.
  - $p \vee \neg q \rightarrow r$ representa $(p \vee \neg q) \rightarrow r$.

Em geral, deve-se preferir clareza à economia de parênteses e, na dúvida, é bom deixar alguns parênteses para explicitar o sentido de uma fórmula.

1.2.2 Subfórmulas

Definimos a seguir, por *indução sobre estrutura das fórmulas* (também chamada de *indução estrutural*), a noção do conjunto de *subfórmulas* de uma fórmula A, Subf(A). Na indução estrutural, o caso básico analisa as fórmulas de estrutura mais simples, ou seja, o caso básico trata das fórmulas atômicas. Os casos indutivos tratam das fórmulas de estrutura composta, ou seja, de fórmulas que contêm conectivos unários e binários. Assim, o conjunto Subf(A) de subfórmulas de uma fórmula A é definido da seguinte maneira:

1. **Caso básico:** $A = p$. $\text{Subf}(p) = \{p\}$, para toda fórmula atômica $p \in \mathcal{P}$
2. **Caso** $A = \neg B$. $\text{Subf}(\neg B) = \{\neg B\} \cup \text{Subf}(B)$
3. **Caso** $A = B \wedge C$. $\text{Subf}(B \wedge C) = \{B \wedge C\} \cup \text{Subf}(B) \cup \text{Subf}(C)$
4. **Caso** $A = B \vee C$. $\text{Subf}(B \vee C) = \{B \vee C\} \cup \text{Subf}(B) \cup \text{Subf}(C)$
5. **Caso** $A = B \rightarrow C$. $\text{Subf}(B \rightarrow C) = \{B \rightarrow C\} \cup \text{Subf}(B) \cup \text{Subf}(C)$

Os três últimos casos indutivos poderiam ter sido expressos da seguinte forma compacta: Para $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, se $A = B \circ C$ então $\text{Subf}(A) = \{A\} \cup \text{Subf}(B) \cup \text{Subf}(C)$.

Dessa forma, temos que o conjunto de subfórmulas da fórmula $A = (p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$ é o conjunto $\{A, p \vee \neg q, p, \neg q, q, r \wedge \neg q, r\}$. Note que não há necessidade de contabilizar subfórmulas "repetidas" mais de uma vez.

Pela definição anterior, uma fórmula sempre é subfórmula de si mesma. No entanto, definimos B como uma *subfórmula própria* de A se $B \in \text{Subf}(A) - A$, ou seja, se B é uma subfórmula de A diferente de A. Se $A = (p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$, as subfórmulas próprias de A são $\{p \vee \neg q, p, \neg q, q, r \wedge \neg q, r\}$.

1.2.3 Tamanho de Fórmulas

O *tamanho* ou *complexidade* de uma fórmula A, representado por $|A|$, é um número inteiro positivo, também definido por indução estrutural sobre uma fórmula:

1. $|p| = 1$ para toda fórmula atômica $p \in \mathcal{P}$
2. $|\neg A| = 1 + |A|$
3. $|A \circ B| = 1 + |A| + |B|$, para $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

O primeiro caso é a base da indução e diz que toda fórmula atômica possui tamanho 1. Os demais casos indutivos definem o tamanho de uma fórmula composta a partir do tamanho de seus componentes. O item 2 trata do tamanho de fórmulas com conectivo unário e o item 3, do tamanho de fórmulas com conectivos binários, tratando dos três conectivos binários de uma só vez. Note que o tamanho $|A|$ de uma fórmula A assim definido corresponde ao número de símbolos que ocorrem na fórmula, excetuando-se os parênteses. Por exemplo, suponha que temos a fórmula $A = (p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$ e vamos calcular sua complexidade:

$$\begin{aligned} |(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)| &= 1 + |p \vee \neg q| + |r \wedge \neg q| \\ &= 3 + |p| + |\neg q| + |r| + |\neg q| \\ &= 5 + |p| + |q| + |r| + |q| \\ &= 9 \end{aligned}$$

Note que se uma subfórmula ocorre mais de uma vez em A, sua complexidade é contabilizada cada vez que ela ocorre. No exemplo, a subfórmula $\neg q$ foi contabilizada duas vezes.

1.2.4 Expressando Idéias com o Uso de Fórmulas

Já temos uma base para começar a expressar propriedades do mundo real em lógica proposicional. Assim, podemos ter símbolos atômicos com nomes

mais representativos das propriedades que queremos expressar. Por exemplo, se queremos falar sobre pessoas e suas atividades ao longo da vida, podemos utilizar os símbolos proposicionais *criança, jovem, adulto, idoso, estudante, trabalhador* e *aposentado*.

Com esse vocabulário básico, para expressarmos que uma pessoa ou é criança, ou jovem, ou adulto ou idoso, escrevemos a fórmula:

$$\textit{criança} \vee \textit{jovem} \vee \textit{adulto} \vee \textit{idoso}$$

Para expressar que um jovem ou trabalha ou estuda, escrevemos

$$\textit{jovem} \rightarrow \textit{trabalhador} \vee \textit{estudante}$$

Para expressar a proibição de que não podemos ter uma criança aposentada, uma das formas possíveis é escrever:

$$\neg(\textit{criança} \wedge \textit{aposentado})$$

Iremos ver mais adiante que esta é apenas uma das formas de expressar essa idéia, que pode ser expressa de diversas formas equivalentes.

Exercícios

1.1 Simplificar as seguintes fórmulas, removendo os parênteses desnecessários:

(a) $(p \vee q)$

(b) $((p \vee q) \vee (r \vee s))$

(c) $(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$

(d) $\neg(p \vee (q \wedge r))$

(e) $\neg(p \wedge (q \vee r))$

(f) $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$

1.2 Adicionar os parênteses às seguintes fórmulas para que fiquem de acordo com as regras de formação de fórmulas:

(a) $\neg p \rightarrow q$

(b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$

(c) $p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r$

(d) $p \wedge \neg q \vee r \wedge s$

(e) $p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q$

1.3 Dar o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir. Notar que os parênteses implícitos são fundamentais para decidir quais são as subfórmulas:

(a) $\neg p \to p$

(b) $p \wedge \neg r \wedge r \wedge \neg s$

(c) $q \to p \to r \to p \wedge q \wedge r$

(d) $p \wedge \neg q \vee r \wedge s$

(e) $p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q$

1.4 Calcular a complexidade de cada fórmula do exercício anterior. Notar que a posição exata dos parênteses *não influencia* a complexidade da fórmula!

1.5 Definir por indução sobre a estrutura das fórmulas a função *átomos* (A), que retorna o conjunto de todos os átomos que ocorrem na fórmula A. Por exemplo, *átomos* $(p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q) = \{p, q\}$.

1.6 Baseado nos símbolos proposicionais da Seção 1.2.4, expressar os seguintes fatos com fórmulas da lógica proposicional.

(a) Uma criança não é um jovem.

(b) Uma criança não é jovem, nem adulto, nem idoso.

(c) Se um adulto é trabalhador, então ele não está aposentado.

(d) Para ser aposentado, a pessoa deve ser um adulto ou um idoso.

(e) Para ser estudante, a pessoa deve ser ou um idoso aposentado, ou um adulto trabalhador ou um jovem ou uma criança.

1.3 Semântica

O estudo da semântica da lógica proposicional clássica consiste em atribuir *valores verdade* às fórmulas da linguagem. Na lógica clássica, há apenas dois

valores verdade: *verdadeiro* e *falso*. Representaremos o *verdadeiro* por 1 e o *falso* por 0.

Inicialmente, atribuímos valores verdade para os símbolos proposicionais por meio de uma função de *valoração*. Uma valoração proposicional V é uma função $V : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$ que mapeia cada símbolo proposicional em $\mathcal{P}$ em um valor verdade. Essa valoração apenas diz quais são verdadeiros e quais são falsos.

Em seguida, estendemos a valoração para todas as formas da linguagem da lógica proposicional, de forma a obtermos uma valoração $V : \mathcal{L}_{LP} \rightarrow \{0, 1\}$. Essa extensão da valoração é feita por indução sobre a estrutura das fórmulas, da seguinte maneira[1]:

$V(\neg A) = 1$	se, e somente se,	$V(A) = 0$
$V(A \wedge B) = 1$	sse	$V(A) = 1$ e $V(B) = 1$
$V(A \vee B) = 1$	sse	$V(A) = 1$ ou $V(B) = 1$
$V(A \rightarrow B) = 1$	sse	$V(A) = 0$ ou $V(B) = 1$

A definição anterior pode ser detalhada da seguinte maneira. Para atribuirmos um valor verdade a uma fórmula, precisamos primeiro atribuir um valor verdade para suas subfórmulas, para depois compor o valor verdade da fórmula de acordo com as regras dadas. Note que o fato de a definição usar "se, e somente se" (abreviado de "sse") tem o efeito de, quando a condição à direita for falsa, inverter o valor verdade. Dessa forma, se $V(A) = 1$, então $V(\neg A) = 0$. Note também que, na definição de $V(A \vee B)$, o valor verdade será 1 se $V(A) = 1$ ou se $V(B) = 1$ ou se ambos forem 1 (e, por isso, o conectivo $\vee$ é chamado de *OU-Inclusivo*). Similarmente, $V(A \rightarrow B)$ terá valor verdade 1 se $V(A) = 0$ ou $V(B) = 1$ ou ambos. E $V(A \wedge B) = 0$ se $V(A) = 0$ ou $V(B) = 0$ ou ambos.

Podemos visualizar o valor verdade dos conectivos lógicos de forma mais clara por meio de *matrizes de conectivos*, conforme a Figura 1.1. Para ler essas matrizes, procedemos da seguinte maneira. Por exemplo, na matriz relativa a $A \wedge B$, vemos que, se A é 0 e B é 0, então $A \wedge B$ também é 0.

Nas matrizes da Figura 1.1 podemos ver que a única forma de obter o valor verdade 1 para $A \wedge B$ é quando ambos, A e B, são valorados em 1. Já

[1] N.A. "sse" é abreviatura de "se, e somente se".

$A \wedge B$	$B = 0$	$B = 1$
$A = 0$	0	0
$A = 1$	0	1

$A \vee B$	$B = 0$	$B = 1$
$A = 0$	0	1
$A = 1$	1	1

$A \to B$	$B = 0$	$B = 1$
$A = 0$	1	1
$A = 1$	0	1

	$\neg A$
$A = 0$	1
$A = 1$	0

Figura 1.1 *Matrizes de conectivos lógicos.*

na matriz de $A \vee B$, vemos que a única forma de obter 0 é quando A e B são valorados em 0. Similarmente, na matriz de $A \to B$, vemos que a única forma de obtermos 0 é quando A é valorado em 1 e B é valorado em 0.

Agora veremos um exemplo de valoração de uma fórmula complexa. Suponha que temos uma valoração V_1 tal que $V_1(p) = 1, V_1(q) = 0$ e $V_1(r) = 1$ e queiramos computar $V_1(A)$, onde $A = (p \vee \neg q) \to (r \wedge \neg q)$. Procedemos inicialmente computando os valores verdade das subfórmulas mais internas, até chegarmos no valor verdade de A:

$$V_1(\neg q) = 1$$
$$V_1(p \vee \neg q) = 1$$
$$V_1(r \wedge \neg q) = 1$$
$$V_1((p \vee \neg q) \to (r \wedge \neg q)) = 1$$

Por outro lado, considere agora uma valoração V_2 tal que $V_2(p) = 1$, $V_2(q) = 1$ e $V_2(r) = 1$ e vamos calcular $V_2(A)$, para A como anteriormente. Então:

$$V_1(\neg q) = 0$$
$$V_1(p \vee \neg q) = 1$$
$$V_1(r \wedge \neg q) = 0$$
$$V_1((p \vee \neg q) \to (r \wedge \neg q)) = 0$$

Ou seja, o valor verdade de uma fórmula pode variar, em geral, de acordo com a valoração de seus átomos. Pela definição dada, uma valoração atribui

um valor verdade a cada um dos infinitos símbolos proposicionais. No entanto, ao valorarmos uma única fórmula, só temos necessidade de valorar o seu conjunto de átomos, que é sempre finito. Dessa forma, se uma fórmula A possui um número N de subfórmulas atômicas, e cada valoração pode atribuir ou 0 ou 1 a cada um desses átomos, temos que pode haver 2^N distintas valorações diferentes para a fórmula A.

Veremos na Seção 1.4 que existem fórmulas cujo valor verdade não varia com as diferentes valorações.

Exercícios

1.7 Considerar duas valorações V_1 e V_2 tais que V_1 valora todos os átomos em 1 e V_2 valora todos os átomos em 0. Computar como V_1 e V_2 valoram as fórmulas a seguir:

(a) $\neg p \rightarrow q$

(b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$

(c) $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

(d) $(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$

(e) $p \wedge \neg(p \rightarrow \neg q) \vee \neg q$

(f) $p \vee \neg p$

(g) $p \wedge \neg p$

(h) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

1.8 Dar uma valoração para os átomos das fórmulas (b) e (c), no exercício anterior, de forma que a valoração da fórmula seja 1.

1.4 Satisfazibilidade, Validade e Tabelas da Verdade

Considere a fórmula $p \vee \neg p$. Como essa fórmula possui apenas um átomo, podemos gerar apenas duas distintas valorações para ela, $V_1(p) = 0$ e $V_2(p) = 1$. No primeiro caso, temos $V_1(\neg p) = 1$ e $V(p \vee \neg p) = 1$. No segundo caso, temos $V_1(\neg p) = 0$ e $V(p \vee \neg p) = 0$. Ou seja, em ambos os casos, independentemente da valoração dos átomos, a valoração da fórmula é sempre 1.

Por outro lado, considere a fórmula $p \wedge \neg p$. De maneira similar, temos apenas duas valorações distintas para essa fórmula, e ambas valoram $p \wedge \neg p$ em 0.

Por fim, temos fórmulas que podem ora ser valoradas em 0, em cujo caso a valoração *falsifica* a fórmula, ora ser valoradas em 1, em cujo caso a valoração *satisfaz* a fórmula. Por exemplo, a fórmula $p \rightarrow q$ é uma delas.

Esses fatos motivam a classificação das fórmulas de acordo com o seu comportamento diante de todas as valorações possíveis de seus átomos.

- Uma fórmula A é dita *satisfazível* se existe uma valoração V de seus átomos tal que $V(A) = 1$.
- Uma fórmula A é dita *insatisfazível* se toda valoração V de seus átomos é tal que $V(A) = 0$.
- Uma fórmula A é dita *válida* ou uma *tautologia* se toda valoração V de seus átomos é tal que $V(A) = 1$.
- Uma fórmula é dita *falsificável* se existe uma valoração V de seus átomos tal que $V(A) = 0$.

Há infinitas fórmulas em cada uma dessas categorias. Existem também diversas relações entre as classificações apresentadas, decorrentes diretamente das definições, notadamente:

- Toda fórmula válida é também satisfazível.
- Toda fórmula insatisfazível é falsificável.
- Uma fórmula não pode ser satisfazível e insatisfazível.
- Uma fórmula não pode ser válida e falsificável.
- Se A é válida, então $\neg A$ é insatisfazível; analogamente, se A é insatisfazível, então $\neg A$ é válida.
- Se A é satisfazível, $\neg A$ é falsificável, e vice-versa.
- Existem fórmulas que são tanto satisfazíveis como falsificáveis (por exemplo, as fórmulas p, $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$ e $p \rightarrow q$).

No caso de fórmulas grandes, a classificação de uma fórmula nas categorias apresentadas não é absolutamente trivial. Um dos grandes desafios da computação é encontrar métodos eficientes para decidir se uma fórmula é satisfazível/insatisfazível ou se é válida/falsificável.

Um dos primeiros métodos propostos na literatura para a verificação da satisfazibilidade e validade de fórmulas é o método da *tabela da verdade*.

A Tabela da Verdade é um método exaustivo de geração de valorações para uma dada fórmula A, a que é construída da seguinte maneira:

- A tabela possui uma coluna para cada subfórmula de A, inclusive para A. Em geral, os átomos de A ficam situados nas colunas mais à esquerda, e A é a fórmula mais à direita.
- Para cada valoração possível para os átomos de A, insere-se uma linha com os valores da valoração dos átomos.
- Em seguida, a valoração dos átomos é propagada para as subfórmulas, obedecendo-se a definição de valoração. Dessa forma, começa-se valorando as fórmulas menores até as maiores.
- Ao final desse processo, todas as possíveis valorações de A são criadas, e pode-se classificar A da seguinte maneira:
  - A é satisfazível se alguma linha da coluna A contiver 1.
  - A é válida se todas as linhas da coluna A contiverem 1.
  - A é falsificável se alguma linha da coluna A contiver 0.
  - A é insatisfazível se todas as linhas da coluna A contiverem 0.

Como primeiro exemplo, considere a fórmula $A_1 = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$. Vamos construir uma Tabela da Verdade para A_1. Para isso, inicialmente montamos uma lista de subfórmulas e as valorações para os átomos:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Note que as fórmulas estão ordenadas, da esquerda para a direita, em ordem de tamanho, e a fórmula A_1 é a última da direita. Em seguida, preenchemos as colunas de cada subfórmula, de acordo com a definição de valoração, indo da esquerda para a direita, até completar toda a tabela. Obtemos a seguinte Tabela da Verdade para A_1:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Podemos inferir dessa Tabela da Verdade que A_1 é satisfazível, devido ao 1 na segunda e terceira linhas, e falsificável, devido ao 0 na primeira e quarta linhas.

Como segundo exemplo, considere a fórmula $A_2 = p \vee \neg p$. A Tabela da Verdade para A_2 fica:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Nesse caso, vemos que A_2 é uma tautologia (ou uma fórmula válida), pois todas as valorações para A_2 geram 1 em todas as linhas.

Considere agora a Tabela da Verdade para a fórmula $A_3 = p \wedge \neg p$:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Donde inferimos que A_3 é uma fórmula inválida, pois todas as linhas da tabela da verdade contêm 0.

Do ponto de vista computacional, é importante notar que, se uma fórmula contém N átomos, o número de valorações possíveis para esses átomos é de 2^N e, portanto, o número de linhas da Tabela da Verdade será de 2^N. Isso faz com que o método da Tabela da Verdade não seja recomendado para fórmulas com muitos átomos.

Como exemplo final desta seção, gostaríamos de verificar se a fórmula $A_4 = ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$ é válida ou não. Para isso, construímos a seguinte Tabela da Verdade para A_4:

p	q	r	s	$\overbrace{p \to q}^{\alpha_1}$	$\overbrace{r \to s}^{\alpha_2}$	$\overbrace{p \vee r}^{\beta_1}$	$\overbrace{q \vee s}^{\beta_2}$	$\overbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_2}^{\alpha_3}$	$\overbrace{\beta_1 \to \beta_2}^{\beta_3}$	$\overbrace{\alpha_3 \to \beta_3}^{A_4}$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Por meio dessa Tabela da Verdade, podemos ver que A_4 é uma fórmula válida, pois todas as linhas contêm 1 na última coluna.

Nota-se também que, com o aumento de átomos, o método fica, no mínimo, desajeitado para a verificação manual e, na prática, 4 átomos é o limite de realização manual de uma Tabela da Verdade.

A automação da Tabela da Verdade também é possível, mas, por causa do crescimento exponencial, existe um limite não muito alto para o número de átomos a partir do qual mesmo a construção das Tabelas da Verdade por computador acaba levando muito tempo e as torna também inviáveis.

Exercícios

1.9 Classificar as fórmulas a seguir de acordo com sua satisfazibilidade, validade, falsificabilidade ou insatisfazibilidade:

(a) $(p \to q) \to (q \to p)$

(b) $(p \wedge \neg p) \to q$

(c) $p \to q \to p \wedge q$

(d) $\neg\neg \to p$

(e) $p \to \neg\neg p$

(f) $\neg(p \vee q \to p)$

(g) $\neg(p \to p \vee q)$

(h) $((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (p \vee r \to q)$

1.10 Encontrar uma valoração que satisfaça as seguintes fórmulas:

(a) $p \to \neg p$

(b) $q \to p \wedge \neg p$

(c) $(p \to q) \to p$

(d) $\neg(p \vee q \to q)$

(e) $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$

(f) $(p \to q) \wedge (q \to p)$

1.11 O *fragmento implicativo* é o conjunto de fórmulas que são construídas apenas usando o conectivo $\to$. Determinadas fórmulas desse fragmento receberam nomes especiais, conforme indicado a seguir. Verificar a validade de cada uma dessas fórmulas.

I	$p \to p$
B	$(p \to q) \to (r \to p) \to (r \to p)$
C	$(p \to q \to r) \to (q \to p \to r)$
W	$(p \to p \to q) \to (p \to q)$
S	$(p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r)$
K	$p \to q \to p$
Peirce	$((p \to q) \to p) \to p$

1.12 Dada uma fórmula A com N átomos, calcular o número máximo de posições (ou seja, células ocupadas por 0 ou 1) em uma Tabela da Verdade para A, em função de $|A|$ e N.

1.13 Seja $B \in \mathrm{Subf}(A)$. A *polaridade* de B em A pode ou ser + (positiva) ou ser − (negativa), e dizemos que essas duas polaridades são opostas. Definimos a polaridade de B em A por indução estrutural sobre A, da seguinte maneira:

- Se $B = A$, então a polaridade de B é +.
- Se $B = \neg C$, então a polaridade de C é oposta à de B.
- Se $B = C \circ D$, $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, então as polaridades de B, C e D são as mesmas.
- Se $B = C \to D$, então C tem polaridade oposta à de B, e D tem a mesma polaridade que B.

Notar que, em uma mesma fórmula A, uma subfórmula B pode ocorrer mais de uma vez, e as polaridades dessas ocorrências não são necessariamente as mesmas. Por exemplo, em $(p \to q) \to (p \to q)$ a primeira ocorrência de $p \to q$ tem polaridade negativa e a segunda, positiva.

Com base nessa definição, provar ou refutar as seguintes afirmações:

(a) Se A é uma fórmula em que todos os átomos têm polaridade positiva, então A é satisfazível.

(b) Se A é uma fórmula em que todos os átomos têm polaridade positiva, então A é falsificável.

(c) Se A é uma fórmula em que todos os átomos têm polaridade negativa, então A é satisfazível.

(d) Se A é uma fórmula em que todos os átomos têm polaridade negativa, então A é falsificável.

Dica: Dar exemplos de fórmulas em que todos os átomos têm polaridade só positiva e polaridade só negativa.

1.5 Conseqüência Lógica

Quando podemos dizer que uma fórmula é *conseqüência* de outra fórmula ou de um conjunto de fórmulas? Este é um dos temas mais estudados da lógica, e diferentes respostas a ele podem gerar diferentes lógicas. No caso da lógica proposicional clássica, a resposta é dada em termos de valorações.

Dizemos que uma fórmula B é *conseqüência lógica* de outra fórmula A, representada por $A \models B$, se toda valoração v que satisfaz A também satisfaz B.

Note que essa definição permite que B seja satisfeito por valorações que não satisfazem A. Nesse caso, também dizemos que A *implica logicamente* B.

Podemos usar as Tabelas da Verdade para verificar a conseqüência lógica. Por exemplo, considere a afirmação $p \vee q \rightarrow r \models p \rightarrow r$. Para verificar se essa afirmação é verdadeira, construímos simultaneamente as Tabelas da Verdade de $p \vee q \rightarrow r$ e $p \rightarrow r$:

Linha	p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1
3	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1	1	1	1
5	1	0	0	1	0	0
6	1	0	1	1	1	1
7	1	1	0	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Nesse caso, vemos que a fórmula $p \vee q \rightarrow r$ implica logicamente $p \rightarrow r$, pois toda linha da coluna para $p \vee q \rightarrow r$ que contém 1 (linhas 1, 2, 4, 6 e 8) também contém 1 na coluna para $p \rightarrow r$. Além disso, a terceira linha contém 1 para $p \rightarrow r$ e 0 para $p \vee q \rightarrow r$, o que é permitido pela definição.

Vejamos um segundo exemplo, em que vamos tentar determinar se $p \wedge q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ ou não. Novamente, construímos uma Tabela da Verdade simultânea para $p \wedge q \rightarrow r$ e para $p \rightarrow r$:

Linha	p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	1	1
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Concluímos que $p \wedge q \rightarrow r \not\models p \rightarrow r$ por causa da quinta linha, que satisfaz $p \wedge q \rightarrow r$ mas falsifica $p \rightarrow r$.

Além da conseqüência lógica entre duas fórmulas, podemos estudar quando uma fórmula A é a conseqüência lógica de um *conjunto* de fórmulas Γ.

Um conjunto de fórmulas é chamado de *teoria*, e essa definição nos permite dar um significado preciso para as conseqüências lógicas de uma teoria.

Dizemos que uma fórmula A é a *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ, representado por $\Gamma \models A$, se toda valoração v que satisfaz a *todas* as fórmulas de Γ também satisfaz A.

Como exemplo da verificação desse tipo de conseqüência lógica, vamos verificar a validade da regra lógica conhecida por *modus ponens*, ou seja, $p \to q, p \models q$.[2] Para tanto, construímos a Tabela da Verdade:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A única linha que satisfaz simultaneamente $p \to q$ e p é a última, e nesse caso temos também q satisfeita. Portanto, podemos concluir a validade do *modus ponens*.

Nesta altura, surge uma pergunta natural: qual a relação entre a conseqüência lógica ($\models$) e o conectivo booleano da implicação ($\to$)? A resposta a essa pergunta é dada pelo Teorema da Dedução.

Teorema 1.5.1 – teorema da dedução Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas. Então,

$$\Gamma, A \models B \text{ sse } \Gamma \models A \to B.$$

Demonstração: Vamos provar as duas partes do "se, e somente se" separadamente.

($\Rightarrow$) Primeiro, assuma que $\Gamma, A \models B$. Então, pela definição de conseqüência lógica, toda valoração que satisfaz simultaneamente Γ e A também satisfaz B. Para mostrar que $\Gamma \models A \to B$, considere uma valoração v que satisfaz todas as fórmulas de Γ (notação: $v(\Gamma) = 1$). Vamos verificar que $v(A \to B) = 1$. Para isso, consideramos dois casos:

[2] N.A. É usual representar o conjunto de fórmulas antes do símbolo $\models$ apenas como uma lista de fórmulas; além disso, em vez de escrevermos $\Gamma \cup \{A\} \models B$, abreviamos para $\Gamma, A \models B$.

- $v(A) = 1$. Nesse caso, como temos $\Gamma, A \models B$, temos necessariamente que $v(B) = 1$ e, portanto, $v(A \to B) = 1$.
- $v(A) = 0$. Nesse caso, é imediato que $v(A \to B) = 1$.

Portanto, concluímos que $\Gamma \models A \to B$.

($\Leftarrow$) Vamos assumir agora que $\Gamma \models A \to B$, ou seja, toda valoração que satisfaz Γ também satisfaz $A \to B$. Para mostrar que $\Gamma, A \models B$, considere uma valoração v tal que $v(\Gamma) = v(A) = 1$. Assuma, por contradição, que $v(B) = 0$. Nesse caso, temos que $v(A \to B) = 0$, o que contradiz $\Gamma \models A \to B$. Logo, $v(B) = 1$ e provamos que $\Gamma, A \models B$, como desejado. ■

O teorema da dedução nos diz que $A \to B$ e conseqüência lógica das hipóteses Γ se, e somente se, ao adicionarmos A às hipóteses, podemos inferir logicamente B. Dessa forma, a noção de implicação lógica e o conectivo implicação estão totalmente relacionados.

Além da conseqüência lógica, podemos também considerar a *equivalência lógica* entre duas fórmulas. Duas fórmulas A e B são *logicamente equivalentes*, representado por $A \equiv B$, se as valorações que satisfazem A são exatamente as mesmas valorações que satisfazem B. Em outras palavras, $A \equiv B$ se $A \models B$ e $B \models A$.

Para verificarmos a equivalência lógica de duas fórmulas A e B, construímos uma Tabela da Verdade simultaneamente para A e B e notamos se as colunas para A e para B são idênticas.

Por exemplo, considere a seguinte equivalência lógica: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$. Construímos a Tabela da Verdade simultânea para $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Como as colunas para $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ são idênticas, podemos concluir que $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$. A implicação $\neg q \to \neg p$ é dita a *contrapositiva* da implicação $p \to q$.

Existem diversas equivalências notáveis entre fórmulas, dentre as quais destacamos as seguintes.

Definição 1.5.1 – equivalências notáveis

(a) $\neg\neg p \equiv p$ (eliminação da dupla negação)

(b) $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (definição de $\rightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$)

(c) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (lei de De Morgan 1)

(d) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (lei de De Morgan 2)

(e) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$)

(f) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$)

Ao definirmos a linguagem da lógica proposicional, apresentamos três símbolos binários: $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$. Na realidade, precisamos apenas da negação e de um deles para definir os outros dois. Nesse exemplo, vamos ver como definir $\vee$ e $\rightarrow$ em função de $\wedge$ e $\neg$.

Definição 1.5.2 – definição de $\vee$ e $\rightarrow$ em função de $\wedge$ e $\neg$

(a) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$; note a semelhança com as leis de De Morgan

(b) $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Também é possível usar como básicos o par $\vee$ e $\neg$, ou o par $\rightarrow$ e $\neg$, e definir os outros conectivos binários em função deles. Veja os Exercícios 1.18 e 1.19.

Por fim, podemos definir o conectivo $\leftrightarrow$ da seguinte maneira: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. A fórmula $A \leftrightarrow B$ possui a seguinte Tabela da Verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ou seja, $p \leftrightarrow q$ é satisfeita sse o valor verdade de p e q é o mesmo. Desse modo, pode-se formular uma condição para a equivalência lógica de forma análoga ao teorema da dedução para a conseqüência lógica.

Teorema 1.5.2 $A \equiv B$ se, e somente se, $A \leftrightarrow B$ é uma fórmula válida.

A demonstração desse teorema será feita no Exercício 1.20.

Exercícios

1.14 Provar ou refutar as seguintes conseqüências lógicas, usando Tabelas da Verdade:

(a) $\neg q \rightarrow \neg p \models p \rightarrow q$

(b) $\neg p \rightarrow \neg q \models p \rightarrow q$

(c) $p \rightarrow q \models p \rightarrow q \vee r$

(d) $p \rightarrow q \models p \rightarrow q \wedge r$

(e) $\neg(p \wedge q) \models \neg p \wedge \neg q$

(f) $\neg(p \vee q) \models \neg p \vee \neg q$

1.15 Provar ou refutar a validade das seguintes regras lógicas, usando Tabelas da Verdade:

(a) $p \vee q, \neg q \models p$ (*modus tolens*)

(b) $p \rightarrow q, q \models p$ (abdução)

(c) $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$

1.16 Mostrar a validade das equivalências notáveis da Definição 1.5.1, usando Tabelas da Verdade.

1.17 Mostrar a validade das equivalências utilizadas na definição de $\vee$ e $\rightarrow$ em função de $\wedge$ e $\neg$ na Definição 1.5.2, usando Tabelas da Verdade.

1.18 Assumir agora que temos como básicos os conectivos $\neg$ e $\vee$. Mostrar como os conectivos $\rightarrow$ e $\wedge$ podem ser definidos em termos de $\neg$ e $\vee$ e provar as equivalências lógicas, usando Tabelas da Verdade.

1.19 Assumir agora que temos como básicos os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$. Mostrar como os conectivos $\vee$ e $\wedge$ podem ser definidos em termos de $\neg$ e $\rightarrow$ e provar as equivalências lógicas, usando Tabelas da Verdade.

1.20 Provar que:

(a) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$

(b) $A \equiv B$ se, e somente se, $A \leftrightarrow B$ é uma fórmula válida (Teorema 1.5.2)

1.21 Provar que, se $A \equiv B$, então:

(a) $\neg A \equiv \neg B$

(b) $A \rightarrow C \equiv B \rightarrow C$

(c) $C \rightarrow A \equiv C \rightarrow B$

(d) $A \wedge C \equiv B \wedge C$

(e) $A \vee C \equiv B \vee C$

Essas equivalências são chamadas de *congruências*.

1.22 Provar que:

(a) Se $A \models B$ e $B \models C$, então $A \models C$ (transitividade de $\models$)

(b) Se $A \equiv B$ e $B \equiv C$, então $A \equiv C$ (transitividade de $\equiv$)

1.23 Considerar a seguinte teoria:

$$criança \vee jovem \vee adulto \vee idoso$$
$$trabalhador \vee estudante \vee aposentado$$
$$jovem \rightarrow trabalhador \vee estudante$$
$$\neg(criança \wedge aposentado)$$
$$\neg(criança \wedge trabalhador)$$

Verificar quais das seguintes fórmulas são conseqüência lógica dessa teoria:

(a) $aposentado \wedge \neg jovem \rightarrow adulto \vee idoso$

(b) $criança \rightarrow \neg jovem$

(c) $criança \rightarrow estudante$

(d) $aposentado \vee jovem$

1.6 Desafios da Lógica Proposicional

A lógica proposicional clássica, apesar de estar situada no início do vasto estudo da lógica moderna, apresenta um dos maiores desafios à teoria da computação. Isso porque o problema SAT (a satisfazibilidade de uma fórmula) foi o primeiro a ser demonstrado pertencer a uma classe de problemas

chamados de NP-completos (**N**ão-determinísticos **P**olinomialmente completos). Esses problemas não possuem nenhuma solução eficiente conhecida e, no entanto, ninguém até o momento demonstrou que não *podem ter* uma solução eficiente.

Uma classe muito grande de problemas computacionais interessantes e muito freqüentes são problemas NP-completos. Pertencem a essa classe de problemas de quase todas as áreas da computação, como algoritmos de otimização do uso de recursos, criptografia e segurança de redes de computadores, inteligência artificial, especificação de sistemas, aprendizado computacional, visão computacional, entre muitos outros.

O nome NP-completo vem do seguinte fato: é muito fácil obter *não-deterministicamente*, ou seja, com um "chute", uma valoração para os átomos de uma fórmula, e é possível verificar eficientemente, ou seja, em tempo *polinomial* em relação à complexidade da fórmula, se essa valoração satisfaz ou não a fórmula. Todos os problemas que podem ser resolvidos com um "chute" não-determinístico, seguido de uma verificação em tempo polinomial da correção do "chute", são chamados de problemas *em* NP. Para serem *completos*, há ainda um requisito extra.

A classe de problemas NP-completos possui a propriedade de que, se um desses problemas tiver uma solução eficiente, todos os problemas da classe terão soluções eficientes. Por outro lado, se ficar demonstrado que um problema dessa classe não pode ter solução eficiente, nenhum problema da classe terá solução eficiente. Todos os problemas NP-completos estão em NP, mas nem todos os problemas em NP são NP-completos.

O problema de solução eficiente (ou seja, em tempo polinomial) para problemas NP-completos é o mais famoso problema em aberto na teoria da computação. É tão famoso que existe até um prêmio, envolvendo uma grande soma em dinheiro, para quem conseguir resolver o problema, ou seja, para quem conseguir mostrar se é possível ou impossível haver soluções eficientes para problemas NP-completos.

Existem ainda outros problemas em aberto e igualmente difíceis. Por exemplo, o problema de se determinar se uma fórmula é válida é um problema complementar da determinação da satisfazibilidade. Esse problema pertence à classe de problemas coNP-completos. Permanece em aberto até hoje se as classes NP e coNP são iguais ou se são distintas. Esses e outros problemas de *teoria da complexidade computacional* permanecem desafios em aberto que nasceram na lógica proposicional clássica.

1.7 Notas Bibliográficas

Os conectivos da lógica proposicional clássica são chamados de *conectivos booleanos*, em homenagem ao matemático inglês George Boole (1815-1864) (MacHale, 1985). Boole nunca estudou para a obtenção de um grau acadêmico, mas começou sua carreira como um professor auxiliar e, com o tempo, abriu sua própria escola e iniciou sozinho os estudos de matemática. Em 1853, publicou seu trabalho mais famoso, *An investigation into the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, o qual deu origem a um campo da matemática conhecido hoje como álgebra booleana (Monk, 1989), que possui aplicações em lógica, construção de computadores, e deu as bases para a construção de circuitos eletrônicos.

Boole se correspondeu intensamente com Augustus de Morgan (1806-1871), em cujas investigações algébricas aparecem pela primeira vez as consagradas leis de De Morgan (Rice, 1996).

A lógica proposicional moderna teve seu início com a publicação, em 1910, do livro *Principia mathematica*, de Russell e Whitehead (1910). Esse livro lançou as bases matemáticas do estudo da lógica como é feito nos dias de hoje, distinguindo-o do estudo da lógica como vinha sendo feito desde Aristóteles e diversos outros filósofos gregos e na Idade Média.

O método das Tabelas da Verdade, em sua forma seminal, pode ser encontrado nos trabalhos de fundamentos da matemática de Gottlob Frege e Charles Peirce na década de 1880. Na forma como o conhecemos, o método foi formulado por Emil Post (Stillwell, 2004) e Ludwig Wittgenstein. Wittgenstein utilizou esse método em sua obra *Tractatus logico-philosophicus* (1922) no estudo de funções verdade, e devido à grande influência desse trabalho, o uso de Tabelas da Verdade se espalhou.

A lógica proposicional voltou a atrair grande interesse com o início da construção de computadores e circuitos eletrônicos de chaveamento na década de 1960. Pouco tempo depois, começou a se desenvolver a teoria da complexidade computacional. A classe de problemas NP-completos foi definida por Cook (1971), que estudou a complexidade de métodos de provas de teoremas (que serão vistos no próximo capítulo). Uma lista de diversos problemas NP-completos, bem como um estudo detalhado de NP-completude, pode ser encontrada no livro clássico de Garey e Johnson (1979).

A relação entre problemas NP-completos e coNP-completos foi estudada por Cook e Reckhow (1979). Diversas outras classes de complexidade são também descritas no livro de Garey e Johnson (1979), bem como problemas em aberto envolvendo a relação entre essas classes.

2 Sistemas Dedutivos

2.1 O Que É um Sistema Dedutivo?

No Capítulo 1, vimos o que são fórmulas da lógica proposicional clássica e como atribuir valores verdade a essas fórmulas. Vimos também a noção de conseqüência lógica e como determinar se uma fórmula A é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas Γ.

No entanto, não vimos como, a partir de um conjunto de fórmulas Γ, podemos inferir novas fórmulas que sejam a conseqüência lógica de Γ. Essa é a tarefa de um *sistema dedutivo*.

Um sistema dedutivo nos permite inferir, derivar ou deduzir as conseqüências lógicas de um conjunto de fórmulas, chamado de teoria. Quando um sistema dedutivo infere uma fórmula A a partir de uma teoria Γ, escrevemos $\Gamma \vdash A$. O objeto $\Gamma \vdash A$ é chamado de *seqüente*, no qual Γ é o antecedente (ou hipótese) e A é o conseqüente (ou conclusão).[1]

Existem vários procedimentos distintos que nos permitem realizar uma inferência, e cada procedimento dá origem a um distinto sistema dedutivo (também chamado de sistema de inferência). Neste capítulo, iremos analisar três tipos de sistemas dedutivos: axiomatizações ($\vdash_{Ax}$), sistemas de dedução natural ($\vdash_{DN}$) e o método dos tableaux analíticos ($\vdash_{TA}$).

---

[1] N.A. Na sua formulação mais genérica, um seqüente é uma relação entre duas seqüências de fórmulas, $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$, com a leitura de que a seqüência de hipóteses $B_1, \ldots, B_n$ prova pelo menos uma das conclusões $A_1, \ldots, A_m$; ou seja, no antecedente a vírgula é lida como conjunção, enquanto no conseqüente ela é lida como disjunção.

Obviamente, não queremos que um sistema de dedução produza fórmulas que não sejam conseqüência lógica da teoria usada como hipótese. Dizemos que um sistema dedutivo $\vdash$ é *correto* se isso nunca ocorre, ou seja, se $\Gamma \vdash A$ somente se $\Gamma \models A$.

Por outro lado, queremos que um sistema dedutivo consiga inferir todas as possíveis conseqüências lógicas de uma teoria. Dizemos que um sistema dedutivo $\vdash$ é *completo* se ele for capaz de realizar todas essas inferências, ou seja, se sempre tivermos $\Gamma \vdash A$ se $\Gamma \models A$.

Todos os sistemas dedutivos que apresentaremos a seguir possuem as propriedades de *correção* e *completude*.

2.2 Axiomatização

Axiomatização é o sistema formal de dedução mais antigo que se conhece, tendo sido usado desde a apresentação da geometria euclidiana pelos gregos. Só que, naquele caso, tratava-se de axiomatizar uma *teoria* – no caso, a teoria geométrica. Mais modernamente, no final do século XIX, com os trabalhos de Frege, as axiomatizações foram usadas em tentativas de prover um fundamento seguro para a matemática.

Quando falamos em axiomatização, porém, estamos nos referindo a uma forma de inferência lógica. Portanto, estamos nos referindo aqui a uma *axiomatização da lógica clássica*. Falaremos sobre axiomatização de teorias mais adiante.

A apresentação da axiomatização segue o estilo utilizado por Hilbert, tanto que as axiomatizações de lógicas[2] são muitas vezes chamadas de sistemas de Hilbert. De acordo com essa forma de apresentação, uma axiomatização possui dois tipos de elementos:

- Os *axiomas*, que são fórmulas da lógica às quais se atribui um status especial de "verdades básicas".
- As *regras de inferência*, que permitem inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já inferidas.

[2] N.A. É importante deixar bem claro que existem várias lógicas, e não apenas "a" lógica. Na realidade, existe um número infinito de possíveis lógicas.

Antes de apresentarmos uma axiomatização da lógica proposicional clássica,[3] temos de mencionar o conceito de *substituição*.

2.2.1 Substituições

A *substituição* de um átomo p por uma fórmula B em uma fórmula A é representada por $A[p := B]$.[4] Intuitivamente, se temos uma fórmula $A = p \to (p \wedge q)$ e queremos substituir p por $(r \vee s)$, o resultado da substituição será $A[p := (r \vee s)] = (r \vee s) \to ((r \vee s) \wedge q)$. A definição formal de substituição se dá por indução estrutural sobre a fórmula A sobre a qual se processa a substituição, da seguinte maneira:

1. $p[p := B] = B$
2. $q[p := B] = q$, para $q \neq p$
3. $(\neg A)[p := B] = \neg(A[p := B])$
4. $(A_1 \circ A_2)[p := B] = A_1[p := B] \circ A_2[p := B]$, para $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg\}$

Note que os itens 1 e 2 tratam do caso básico de substituir em fórmulas proposicionais. Os itens 3 e 4 tratam dos casos indutivos.

Aplicando essa definição ao exemplo que foi visto intuitivamente, temos que:

$$\begin{aligned}(p \to (p \wedge q))[p := (r \vee s)] &= p[p := (r \vee s)] \to (p \wedge q)[p := (r \vee s)] \\ &= (r \vee s) \to (p[p := (r \vee s)] \wedge q[p := (r \vee s)]) \\ &= (r \vee s) \to ((r \vee s) \wedge q)\end{aligned}$$

Quando uma fórmula B é resultante da substituição de um ou mais átomos da fórmula A, dizemos que B é uma *instância* da fórmula A.

Com a noção de substituição bem definida, apresentaremos a seguir uma axiomatização da lógica proposicional clássica.

---

[3] N.A. Note que foi dito *uma* axiomatização, pois podem existir várias axiomatizações equivalentes.

[4] N.A. Existem inúmeras notações alternativas para substituição na literatura que causam uma certa confusão; por exemplo, para a mesma noção, podem-se encontrar na literatura as seguintes notações: $A(B/p)$, $A(p/B)$, $A(p/B)$ etc. No nosso caso, escolhemos uma notação que fosse a mais clara possível.

2.2.2 Axiomatização, Dedução e Teoremas

Antes de definir uma axiomatização para a lógica proposicional clássica, é importante frisarmos que pode existir mais de uma axiomatização possível, todas elas equivalentes. A axiomatização a seguir apresenta grupos de axiomas que definem o comportamento de cada um dos conectivos booleanos.

Definição 2.2.1 A axiomatização para a lógica proposicional clássica contém os seguintes axiomas:[5]

$$
\begin{array}{ll}
(\rightarrow_1) & p \rightarrow (q \rightarrow p) \\
(\rightarrow_2) & (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\
(\wedge_1) & p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \\
(\wedge_2) & (p \wedge q) \rightarrow p \\
(\wedge_3) & (p \wedge q) \rightarrow q \\
(\vee_1) & p \rightarrow (p \vee q) \\
(\vee_2) & q \rightarrow (p \vee q) \\
(\vee_3) & (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) \\
(\neg_1) & (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p) \\
(\neg_2) & \neg\neg p \rightarrow p
\end{array}
$$

e a seguinte regra de inferência:

Modus Ponens: A partir de $A \rightarrow B$ e A, infere-se B.

Os axiomas podem ser instanciados, ou seja, seus átomos podem ser uniformemente substituídos por qualquer fórmula da lógica. Nesse caso, dizemos que a fórmula resultante é uma *instância* do axioma. Com a noção de axiomatização, podemos definir a noção de *dedução*.

Definição 2.2.2 Uma *dedução* é uma seqüência de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ tal que cada fórmula na seqüência ou é uma instância de um axioma ou é obtida de fórmulas anteriores por meio das regras de inferência, ou seja, por *modus ponens*.

[5] N.A. Chamamos a atenção para o fato de os axiomas $(\rightarrow_1)$ e $(\rightarrow_2)$ serem, respectivamente, as fórmulas **K** e **S** do Exercício 1.11 da Seção 1.4.

Um *teorema* A é uma fórmula tal que existe uma dedução $A_1, \ldots, A_n = A$. Representaremos um teorema por $\vdash_{Ax} A$ ou simplesmente por $\vdash A$, quando o contexto deixar claro qual o método de inferência que está sendo usado.

A axiomatização apresentada possui a propriedade da *substituição uniforme*, ou seja, se A é um teorema e B é uma instância de A, então B é um teorema também. O motivo para isso é bem simples: se podemos aplicar uma substituição para obter B de A, podemos aplicar a mesma substituição nas fórmulas que ocorrem na dedução de A e, como toda instância de um axioma é uma fórmula dedutível, transformamos a dedução de A em uma dedução de B.

Iremos definir agora quando uma fórmula A segue de um conjunto de fórmulas Γ, também chamado de *teoria* ou de *conjunto de hipóteses*, o que é representado por $\Gamma \vdash_{Ax} A$. Nesse caso, trata-se de adaptar a noção de dedução para englobar os elementos de Γ.

Definição 2.2.3 Dizemos que a fórmula A é *dedutível* a partir do conjunto de fórmulas Γ se há uma *dedução*, ou seja, uma seqüência de fórmulas $A_1, \ldots, A_n = A$ tal que cada fórmula A_i na seqüência:

1) ou é uma fórmula $A_i \in \Gamma$
2) ou é uma instância de um axioma
3) ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de *modus ponens*

Note que, no caso de o conjunto Γ ser um conjunto vazio, $\Gamma = \varnothing$, temos que $\varnothing \vdash_{Ax} A$ implica que A é um teorema, o que é representado simplesmente por $\vdash$ AxA. Note também que *não* podemos aplicar a substituição uniforme nos elementos de Γ; a substituição uniforme só pode ser aplicada aos axiomas da lógica.

Também é costume representar o conjunto Γ como uma seqüência de fórmulas, sem o uso das chaves delimitadoras de conjuntos. Assim, se $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, em vez de escrevermos $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash A$, escrevemos simplesmente $A_1, \ldots, A_n \vdash A$. Similarmente, em vez de escrevermos $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, escrevemos simplesmente $\Gamma, A \vdash B$, representando a união das hipóteses pela concatenação de listas de hipóteses.

2.2.3 Exemplos

Vamos dar alguns exemplos de dedução de teoremas usando a axiomatização apresentada.

Exemplo 2.2.1

Vamos inicialmente mostrar a dedução do teorema $\mathbf{I} = A \to A$.

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	de $(\to_2)$, onde $p := A$, $q := A \to A$, $r := A$.
2.	$A \to ((A \to A) \to A)$	de $(\to_1)$, onde $p := A$, $q := A \to A$,
3.	$((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	por *modus ponens* 1, 2.
4.	$A \to (A \to A)$	de $(\to_1)$, onde $p := A$, $q := A$.
5.	$A \to A$	por *modus ponens* 3, 4.

Note que o exemplo anterior deixa claro que qualquer instanciação de $A \to A$ é dedutível dessa maneira, bastando substituir A pela fórmula desejada em todas as suas ocorrências na dedução.

Exemplo 2.2.2

Como um segundo exemplo, vamos mostrar que a dedução de duas fórmulas pode ser "composta", conforme expressa a fórmula $\mathbf{B} = (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

1.	$((C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))) \to ((A \to B) \to ((C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))))$	de $(\to_2)$, onde $p := (C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))$, $q := A \to B$.
2.	$(C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	de $(\to_1)$, onde $p := C$, $q := A$, $r := B$.
3.	$(A \to B) \to ((C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B)))$	por *modus ponens* 1, 2.
4.	$(((A \to B) \to ((C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B)))) \to (((A \to B) \to (C \to (A \to B))) \to ((A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))))$	de $(\to_1)$, onde $p := A \to B$, $q := C \to (A \to B)$, $r := (C \to A) \to (C \to B)$.
5.	$((A \to B) \to (C \to (A \to B))) \to (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	por *modus ponens* 4, 3.
6.	$(A \to B) \to (C \to (A \to B))$	de $(\to_2)$, onde $p := A \to B$, $q := C$.
7.	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	por *modus ponens* 5, 6.

De posse desse resultado, devido à propriedade da substituição uniforme, podemos sempre concatenar duas implicações, $A \to B$ e $C \to A$ para obter $C \to B$.

Esses dois exemplos também são interessantes para mostrar quão complexa pode ser uma dedução utilizando a simples axiomatização. Computacionalmente falando, essa complexidade torna a axiomatização de pouco uso em termos de implementação, sendo utilizada basicamente como uma ferramenta teórica.

Vamos agora ver um exemplo de dedução a partir de uma teoria. Antes disso, porém, para facilitar nossa tarefa, vamos apresentar o *teorema da dedução*.

2.2.4 O Teorema da Dedução

O Teorema da Dedução relaciona a relação entre o conectivo da implicação, $\to$, e a dedução lógica representada por $\vdash$.

Teorema 2.2.1 – teorema da dedução $\Gamma, A \vdash B$ *se, e somente se,* $\Gamma \vdash A \to B$.

A prova desse teorema, em termos de axiomatização, trata de transformar uma dedução de $\Gamma, A \vdash B$ em uma dedução de $\Gamma \vdash A \to B$ e, inversamente, transformar uma dedução $\Gamma \vdash A \to B$ em uma dedução de $\Gamma, A \vdash B$.

Não apresentaremos aqui uma demonstração desse teorema; veja, porém, o Exercício 2.5. No entanto, vamos utilizá-lo em alguns exemplos de dedução a partir de uma teoria.

Exemplo 2.2.3

Desejamos demonstrar que $p \to q, p \to r \vdash p \to q \wedge r$. Em vez de fazer uma dedução direta, vamos usar o Teorema da Dedução e provar a condição equivalente $p \to q, p \to r, p \vdash q \wedge r$. Dessa forma:

1.	$p \to q$	hipótese
2.	$p \to r$	hipótese
3.	p	hipótese
4.	q	*modus ponens* 1, 3
5.	r	*modus ponens* 2, 3
6.	$q \to (r \to (q \wedge r))$	instância de $(\wedge_1)$
7.	$r \to (q \wedge r)$	*modus ponens* 6, 4
8.	$q \wedge r$	*modus ponens* 7, 5

O Teorema da Dedução pode facilitar a prova de outros teoremas. Por exemplo, a dedução de $\vdash p \to p$ se torna trivial ao reformulá-la como $p \vdash p$.

Exemplo 2.2.4

Usando o Teorema da Dedução, vamos deduzir novamente a fórmula $\mathbf{B} = (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$, ou seja, vamos deduzir que $A \to B, C \to A, C \vdash B$.

1.	$A \to B$	hipótese
2.	$C \to A$	hipótese
3.	C	hipótese
4.	A	*modus ponens* 2, 3
5.	B	*modus ponens* 1, 4

A simplicidade dessa prova em relação à anterior é surpreendente, o que atesta a força do Teorema da Dedução.

Exercícios

2.1 Sem usar o Teorema da Dedução, apresentar demonstrações para as seguintes fórmulas:

(a) $\mathbf{C} = (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(b) $\mathbf{W} = (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

2.2 Repetir o exercício anterior, usando agora o Teorema da Dedução, e comparar a complexidade das provas.

2.3 Provar os seguintes teoremas, usando o Teorema da Dedução se for conveniente.

(a) $(\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p)$

(b) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

(c) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

(d) $(p \wedge \neg p) \to q$

(e) $p \to \neg\neg p$

2.4 Provar que a axiomatização possui a propriedade da substituição uniforme. Ou seja, provar que, se $\vdash_{Ax} A$, então, para qualquer fórmula B que seja uma instância de A, $\vdash_{Ax} B$.

Dica: Provar por indução no tamanho n da dedução de A: $A_1, \ldots, A_n = A$.

2.5 Mostrar que:

(a) Se há uma dedução para $\Gamma, A \vdash B$ então obtemos uma dedução para $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

(b) Se há uma dedução para $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ então obtemos uma dedução para $\Gamma, A \vdash B$.

(c) Concluir o teorema da dedução.

2.3 Dedução Natural

O método de inferência por axiomatização pode ter propriedades teóricas interessantes, mas é totalmente impraticável em termos de implementação prática. Isso pode ser visto nos exemplos da Seção 2.2.3, nos quais fica óbvio que identificar quais axiomas devem ser utilizados, em que ordem e com qual substituição é totalmente não-intuitivo e requer uma busca de grande complexidade computacional.

Por outro lado, o tipo de inferências que uma pessoa faz ao raciocinar sobre os conectivos lógicos está longe de seguir o método da axiomatização. Foi pensando nessa deficiência dos sistemas de axiomatização que Gerhard Gentzen propôs um método de inferência que se aproximasse mais da forma como as pessoas raciocinam, dando a esse método o nome de *dedução natural*.

2.3.1 Princípios da Dedução Natural

O método da Dedução Natural é um método formal de inferência baseado em princípios bem claros e simples:

- As inferências são realizadas por *regras de inferência* em que *hipóteses* podem ser introduzidas na prova e que deverão ser posteriormente *descartadas* para a consolidação da prova.

- Para cada conectivo lógico, duas regras de inferência devem ser providas, uma para a *inserção* do conectivo na prova e outra para a *remoção* do conectivo.

As fórmulas introduzidas como hipóteses serão representadas entre chaves e numeradas – por exemplo, $[A]^1$ – em que o número será usado para indicar o descarte dessa hipótese por uma regra de inferência em algum passo posterior. Além disso, é comum, em apresentações de Dedução Natural, utilizar a constante lógica $\perp$ (*falsum* ou falsidade), que não é satisfeita por nenhuma valoração. A Figura 2.1 apresenta as regras de inserção e eliminação do conectivo $\rightarrow$ (implicação) em Dedução Natural.

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\,(\rightarrow E) \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\,(\rightarrow I)^i$$

Figura 2.1 *Eliminação e inserção da $\rightarrow$ em dedução natural.*

A regra $(\rightarrow E)$ de eliminação da implicação nada mais é do que *modus ponens*. A regra $(\rightarrow I)$ da inserção da implicação expressa a seguinte idéia: para inferir $A \rightarrow B$, é necessário hipotetizar A e, a partir dessa hipótese, inferir B; o fato de A ser uma hipótese é indicado pela marcação $[A]$ e, como *toda hipótese deve ser descartada por uma regra*, utilizamos o índice numérico i, $[A]^i$, para indicar que a hipótese foi descartada pelo uso da regra $(\rightarrow -I)^i$.

Por exemplo, para provarmos que $\vdash_{DN} A \rightarrow A$ (ou seja, que $A \rightarrow A$ pode ser inferido por Dedução Natural), temos:

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^1\\ A\end{array}}{A \rightarrow A}\,(\rightarrow I)^1$$

onde a inserção da implicação descarta a hipótese $[A]^1$ e o segundo A nada mais é do que a cópia do primeiro.

Um segundo exemplo mostra que $\vdash_{DN} A \to (B \to A)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A}}{B \to A}\,(\to I)^2}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^2$$

Note que nessa dedução a segunda hipótese, $[B]^2$, é descartada primeiro, para em seguida descartar-se a primeira hipótese, $[A]^1$.

Um terceiro exemplo mostra que $\vdash_{DN} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^1 \quad [A]^3}{B \to C}\,(\to E) \qquad \dfrac{[A \to B]^2 \quad [A]^3}{B}\,(\to E)}{C}\,(\to E)}{A \to C}\,(\to I)^3}{(A \to B) \to (A \to C)}\,(\to I)^2}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\,(\to I)^1$$

Nesse exemplo, a hipótese $[A]^3$ foi usada duas vezes, mas descartada uma só vez. O exemplo apresenta o uso de várias inserções e eliminações do conectivo $\to$. Note que esses dois últimos exemplos mostram a dedução pelo método da dedução natural de dois axiomas, $(\to_1)$ e $(\to_2)$, do método da axiomatização.

2.3.2 Regras de Dedução Natural para Todos os Conectivos

A Figura 2.2 mostra as regras de Dedução Natural para todos os conectivos. Como é usual nas apresentações de Dedução Natural, introduzimos regras para a constante lógica $\bot$, cuja interpretação é $v(\bot) = 0$ para qualquer valoração v; seu dual é a constante lógica $\top$, onde $v(\top) = 1$ para qualquer valoração v.

O conectivo $\wedge$ possui uma regra de introdução e duas regras (simétricas) de eliminação, permitindo, de uma conjunção $A \wedge B$ inferir tanto A quanto B. Para exemplificar o uso destas regras, demonstramos a seguir

$\vdash_{DN} A \wedge B \to A$ e $\vdash_{DN} A \to (B \to A \wedge B)$:

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\,(\wedge E_1)}{A \wedge B \to A}\,(\to I)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{A \to (B \to A \wedge B)}\,(\to I) \times 2$$

Na dedução da direita, o último passo representa duas introduções de $\to$, descartando cada uma das hipóteses. Note que esses dois exemplos mostram a dedução pelo método da Dedução Natural dos axiomas, $(\wedge_1)$ e $(\wedge_2)$, do método da axiomatização.

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E_1) \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E_2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\,(\to I)^i \qquad \dfrac{A \to B \quad A}{B}\,(\to E)$$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\,(\vee I_1) \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,(\vee I_2) \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^j \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,(\vee E)^{i,j}$$

$$\dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\,(\bot I) \qquad \dfrac{\bot}{A}\,(\bot E)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,(\to I)^i \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\,(\to E)^i$$

Figura 2.2 *Regras de introdução e eliminação de conectivos em dedução natural.*

O conectivo $\vee$ possui duas regras de introdução e uma regra de eliminação. As regras de introdução de $\vee$ são duais das regras de eliminação de $\wedge$. Já a regra de eliminação $(\vee E)$ descarta duas hipóteses simultaneamente. Para exemplificar o uso destas regras, demonstramos a seguir $\vdash_{DN} A \to A \vee B$ e

$\vdash_{DN} (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}(\vee I_1)}{A \to A \vee B}(\to I)^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to C]^1 \quad [A]^3}{C}(\to E) \quad \dfrac{[B \to C]^2 \quad [B]^4}{C}(\to E) \quad [A \vee B]^5}{C}(\vee E)^{3,4}}{(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))}(\to I) \times 3}$$

Note que esses dois exemplos mostram a dedução pelo método da Dedução Natural dos axiomas, $(\vee_1)$ e $(\vee_3)$, do método da axiomatização.

O conectivo $\neg$ (negação) está intimamente ligado com a constante $\perp$ (falsidade). De fato, comparando a regra da inserção da implicação, $(\to I)$, e a regra da inserção da negação, $(\neg I)$, percebemos a semelhança entre $\neg A$ e $A \to \perp$. Isso não é coincidência, pois, se fizermos a Tabela da Verdade, verificaremos que $\neg A \equiv A \to \perp$.

A regra de introdução de $\perp$ indica que $\perp$ equivale a uma contradição; se encararmos $\neg A \equiv A \to \perp$, veremos que essa regra nada mais é que uma instanciação do *modus ponens*. A regra de eliminação de $\perp$ é o princípio da trivialização da lógica clássica[6] em que, a partir de uma contradição, qualquer fórmula é dedutível.

A regra de introdução da negação $(\neg I)$, como mencionado, se assemelha à introdução da implicação, expressando que, se assumimos uma fórmula como verdadeira e isso levar à contradição, então a fórmula deve ser falsa. Por outro lado, se assumimos que uma fórmula A é falsa (ou seja, sua negação $\neg A$ é verdadeira) e chegamos a uma contradição, a regra da inserção da negação nos daria uma dupla negação, $\neg\neg A$. No entanto, a regra de eliminação da negação, $(\neg E)$, nos permite inferir que a fórmula A é verdadeira, e portanto a regra $(\neg E)$ corresponde à inferência $\neg\neg A \vdash A$. Para ilustrar o uso dessas regras, mostramos a seguir a dedução de $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ e $\vdash \neg\neg A \to A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^1 \quad [A]^3}{B}(\to E) \quad \dfrac{[A \to \neg B]^2 \quad [A]^3}{\neg B}(\to E)}{\perp}(\perp I)}{\neg A}(\neg I)^3}{(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)}(\to I) \times 2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^1 \quad [\neg A]^2}{\perp}(\perp I)}{A}(\neg E)^2}{\neg\neg A \to A}(\to I)^1$$

[6] N.A. Esse princípio recebe o nome em latim de *Ex Contraditio Quodlibet* ou ECQ.

A dedução da esquerda tem a peculiaridade de assumir a hipótese $[A]^3$ e utilizá-la duas vezes (por meio de uma cópia), mas descartá-la uma única vez na introdução da negação $(\neg I)^3$. Esse comportamento é análogo ao de permitir o descarte de duas hipóteses idênticas por uma mesma regra. A dedução da direita mostra o que foi afirmado anteriormente sobre a equivalência entre $(\neg E)$ e a eliminação da dupla negação. Note que demonstramos, pelo método da Dedução Natural, os axiomas $(\neg_1)$ e $(\neg_2)$ do método da axiomatização. Com isso, demonstramos todos os axiomas do método de axiomatização por meio da Dedução Natural (ver Exercício 2.9).

Uma importante observação sobre as regras da dedução natural é que as regras de introdução e eliminação podem ser aplicadas a *qualquer instância* das fórmulas. De fato, fizemos isso várias vezes nas deduções apresentadas, por exemplo, quando deduzimos $\bot$ a partir de $\neg\neg A$ e $\neg A$, que podem ser vistas como instâncias de $\neg A$ e A pela substituição não-circular $A := \neg A$.

2.3.3 Definição Formal de Dedução Natural

Depois de vermos todos esses exemplos, estamos em condições de definir formalmente o que é uma dedução pelo método da Dedução Natural.

Definição 2.3.1 A dedução de $\Gamma \vdash_{DN} A$ pelo método da *dedução natural* é uma árvore cujos nós contêm fórmulas tais que:

a) A fórmula A é a raiz da árvore de dedução.

b) Os nós da folha da árvore de dedução são elementos de Γ ou hipóteses.

c) Cada nó intermediário é obtido a partir de nós superiores na árvore por meio da instanciação de uma regra de inserção ou remoção constante na Figura 2.2.

d) Todas as hipóteses devem ter sido descartadas por regras.

e) Uma regra pode descartar uma ou mais fórmulas idênticas ou, similarmente, as hipóteses podem ser copiadas para distintos pontos da árvore de dedução.

Note que, de acordo com essa definição, os *teoremas* da lógica proposicional clássica são as fórmulas que podem ser inferidas a partir de um conjunto de hipóteses $\Gamma = \varnothing$. Esse foi o caso de todos os exemplos vistos até agora.

Como um exemplo de dedução em que $\Gamma \neq \varnothing$, mostramos a seguir a dedução de $A \vdash \neg\neg A$, dual de $\neg\neg A \vdash A$ vista anteriormente:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad [\neg A]^1}{\bot}\,(\bot I)}{\neg\neg A}\,(\neg I)^1$$

Como exemplo final, mostramos a dedução não-trivial do teorema conhecido como *princípio do terceiro excluído*,[7] que exclui um terceiro valor verdade na lógica clássica, afirmando que toda fórmula ou é verdadeira ou é falsa: $A \vee \neg A$. Esse princípio é provado hipotetizando-se sua negação, $\neg(A \vee \neg A)$, e derivando uma contradição; por eliminação da negação, chega-se ao resultado desejado.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\,(\vee I) \quad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\bot}\,(\bot I)}{\neg A}\,(\neg I)^1}{A \vee \neg A}\,(\vee I) \quad [\neg(A \vee \neg A)]^2}{\bot}\,(\bot I)}{A \vee \neg A}\,(\neg E)^2$$

Note que a hipótese $[\neg(A \vee \neg A)]$ foi utilizada duas vezes e foi descartada no último passo da dedução.

Exercícios

2.6 Usando Dedução Natural, apresentar demonstrações para as seguintes fórmulas:

(a) $\mathbf{C} = (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(b) $\mathbf{W} = (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

[7] N.A. Em latim, *Tertio Non Datur*.

2.7 Deduzir os seguintes resultados pelo método da dedução natural.

(a) $(\neg p \to q) \vdash ((\neg p \to \neg q) \to p)$

(b) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

(c) $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

(d) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

(e) $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

(f) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

(g) $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

(h) $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(i) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

(j) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(k) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

2.8 Demonstrar o teorema da dedução, usando as regras da Dedução Natural. Ou seja, mostrar que

$$\Gamma, A \vdash_{DN} B \textit{ sse } \Gamma \vdash_{DN} A \to B.$$

2.9 Provar que toda dedução pelo sistema de axiomatização pode ser simulada pelo método da Dedução Natural.

Dica: Notar que já demonstramos todos os axiomas em exemplos anteriores. Notar também que a substituição e *modus ponens* fazem parte da Dedução Natural. Resta apenas mostrar, dada uma dedução axiomática, como compor uma Dedução Natural.

2.4 O Método dos Tableaux Analíticos

Os métodos de inferência vistos até agora permitem demonstrar quando uma fórmula pode ser a conclusão de um conjunto de hipóteses. No entanto, nenhum desses métodos provê, de maneira óbvia, um *procedimento de decisão*.

Um procedimento de decisão permite determinar a validade de um seqüente, ou seja, determinar se $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$ ou se $B_1, \ldots, B_n \nvdash A_1, \ldots, A_m$. No caso típico, estamos interessados em decidir seqüentes com o conseqüente unitário, da forma $\Gamma \vdash A$. Os métodos dos sistemas axiomáticos

e da dedução natural apenas nos permitiam demonstrar como A poderia ser inferido a partir de Γ. Mas esses métodos não nos permitiam inferir que $\Gamma \nvdash A$, ou seja, não permitiam inferir a falsidade de um seqüente.

É importante notar que $\Gamma \nvdash A$ *não implica* que $\Gamma \vdash \neg A$. Isso pode ser visualizado mais facilmente pela noção de conseqüência lógica. Considere a (in)conseqüência lógica $p \nvDash q$, em que claramente podemos ter uma valoração v que satisfaz p e contradiz q; com isso não podemos afirmar que $p \vDash \neg q$, pois podemos ter uma valoração v' que satisfaz p e q, falsificando $\neg q$. Dessa forma, temos que $p \nvDash q$ e $p \nvDash \neg q$.

Esse exemplo, aliás, é muito conveniente para ilustrar o fato de que os métodos baseados em Tabelas da Verdade são procedimentos de decisão. Porém, como já vimos, esses procedimentos têm um crescimento no número de linhas das Tabelas da Verdade exponencial com o número de símbolos proposicionais.

Apresentaremos agora um método de decisão baseado em um sistema de inferência, o qual não necessariamente gera provas de tamanho exponencial com o número de símbolos proposicionais. Tal método é chamado de método dos tableaux analíticos ou tableaux semânticos.[8]

Tableau analítico é um método de inferência baseado em *refutação*: para provarmos que $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$, *afirmaremos a veracidade* de $B_1, \ldots, B_n$ e *a falsidade* de $A_1, \ldots, A_m$, na esperança de derivarmos uma *contradição*. Se a contradição for obtida, teremos demonstrado o seqüente. Por outro lado, se não for obtida uma contradição, teremos obtido um *contra-exemplo* ao seqüente, ou seja, teremos construído uma valoração que satisfaz todas as fórmulas B_i do antecedente e falsifica todas as fórmulas A_j do conseqüente.

2.4.1 Fórmulas Marcadas

Para afirmar a veracidade ou a falsidade de fórmula, o método dos tableaux analíticos lida com *fórmulas marcadas* pelos símbolos T (de *true*, verdadeiro) e F (falso). Dessa forma, em vez de lidar com fórmulas puras, do tipo A, lidaremos com fórmulas marcadas, do tipo TA e FA. As fórmulas marcadas TA e FA são chamadas de *fórmulas conjugadas*.

[8] N.A. Tanto no singular, *tableau*, quanto no plural, *tableaux*, a palavra é pronunciada *tablô*; iremos usar a grafia tradicional em francês sem, no entanto, grafar a palavra em itálico.

O passo inicial na criação de um tableau para um seqüente $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$ é marcar todas as fórmulas da seguinte maneira: as fórmulas do antecedente (aquelas cuja veracidade queremos afirmar) são marcadas por T; as fórmulas do conseqüente, cuja finalidade em um processo de refutação queremos afirmar, são marcadas por F. Dessa forma, o seqüente $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$ dá origem ao tableau inicial:

$$\begin{array}{c} TB_1 \\ \vdots \\ TB_n \\ FA_1 \\ \vdots \\ FA_m \end{array}$$

Esse formato inicial do tableau indica que um tableau é uma árvore. Em seguida, o tableau é expandido por regras que podem simplesmente adicionar novas fórmulas ao final de um ramo (regras do tipo α) ou bifurcar um ramo em dois (regras do tipo β).

2.4.2 Regras de Expansão α e β

As fórmulas marcadas de um tableau podem ser de dois tipos: fórmulas do tipo α e fórmulas do tipo β. As fórmulas do tipo α se decompõem em fórmulas α_1 e α_2, conforme ilustrado na Figura 2.3. As fórmulas do tipo β se decompõem em fórmulas β_1 e β_2, conforme ilustrado na Figura 2.4.

α	α_1	α_2
$TA \wedge B$	TA	TB
$FA \vee B$	FA	FB
$FA \rightarrow B$	TA	FB
$T\neg A$	FA	FA

Figura 2.3 *Fórmulas do tipo α.*

β	β_1	β_2
$FA \wedge B$	FA	FB
$TA \vee B$	TA	TB
$TA \rightarrow B$	FA	TB
$F\neg A$	TA	TA

Figura 2.4 *Fórmulas do tipo* β.

Note que a escolha de classificar $T\neg A$ como fórmula do tipo α e $F\neg A$ como fórmula do tipo β é arbitrária e foi feita com o intuito de dar simetria ao conjunto de fórmulas marcadas. Assim, se uma fórmula é do tipo α, a fórmula conjugada é do tipo β, e vice-versa.

As regras de expansão de um tableau são as seguintes:

Expansão α: Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo α, adicionam-se α_1 e α_2 ao fim de todos os ramos que contêm α.

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Expansão β: Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo β, esse ramo é bifurcado em dois ramos, encabeçados por β_1 e β_2, respectivamente.

$$\begin{array}{c}\beta\\ /\ \backslash\\ \beta_1\ \ \beta_2\end{array}$$

Note que, se p é um átomo, Tp e Fp não são nem fórmulas do tipo α nem do tipo β e portanto não podem gerar expansões do tableau. Em cada ramo, uma fórmula só pode ser expandida uma única vez.

Um ramo que não possui mais fórmulas para serem expandidas é chamado de ramo *saturado*. Como as expansões α e β sempre geram fórmulas de tamanho menor, eventualmente todas as fórmulas serão expandidas até chegarmos ao nível atômico, quando todos os ramos estarão saturados. Portanto, o processo de expansão sempre termina.

Um ramo do tableau está *fechado* se este possui um par de fórmulas conjugadas do tipo TA e FA. Um ramo fechado não necessita mais ser expandido, mesmo que não esteja ainda saturado. Um tableau está *fechado* se todos os seus ramos estão fechados.

Definição 2.4.1 Um seqüente $B_1, \ldots, B_n \vdash_{TA} A_1, \ldots, A_m$ foi *deduzido pelo método dos tableaux analíticos* se existir um tableau fechado para ele.

No caso da dedução de um teorema $\vdash_{TA} A$ pelo método dos tableaux analíticos, devemos construir um tableau fechado para FA.

Vamos ver a seguir alguns exemplos de dedução e de decisão pelo método dos tableaux analíticos.

2.4.3 Exemplos

Como primeiro exemplo, vamos provar o teorema $\vdash p \vee \neg p$:

1.	$Fp \vee \neg p$	
2.	Fp	$\alpha, 1$
3.	$F\neg p$	$\alpha, 1$
4.	Tp	$\beta, 3$
	$\times$	$2, 4$

Nesse primeiro exemplo, não há bifurcações. Iniciamos aplicando uma expansão α em uma fórmula do formato $(F\vee)$, gerando as linhas 2 e 3. Em seguida, expandimos a fórmula $(F\neg)$ da linha 3, que, apesar de ser nominalmente do tipo β, não provoca bifurcação. As linhas 2 e 4 fecham o ramo e, como esse tableau tem apenas um ramo, o tableau está fechado, e o teorema foi demonstrado. Note que o único ramo está saturado.

Como segundo exemplo, vamos provar que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$:

$$
\begin{array}{c}
Tp \to q \\
Tq \to r \\
Fp \to r \\
Tp \\
Fr \\
\begin{array}{cc} / & \backslash \end{array} \\
\begin{array}{cc} Fp & Tq \\ \times & \\ & / \quad \backslash \\ & Fq \quad Tr \\ & \times \quad\quad \times \end{array}
\end{array}
$$

Nesse exemplo, primeiro aplicou-se uma α em $Fp \to r$; em geral, por motivos de eficiência, aplicam-se todas as expansões α antes de aplicar uma β. Em seguida, aplicou-se uma β em $Tp \to q$, fechando o ramo esquerdo; note que esse ramo foi fechado sem estar saturado. Em seguida, aplicou-se uma β em $Tq \to$, e os dois ramos foram imediatamente fechados.

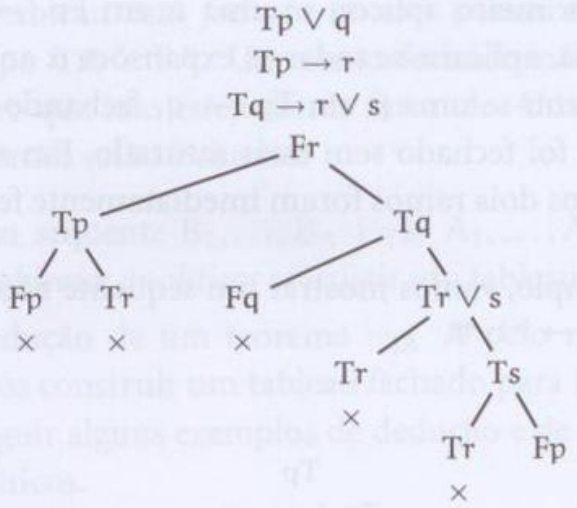
No próximo exemplo, vamos mostrar um seqüente não-dedutível. Vamos considerar $p, p \wedge q \to r \vdash r$:

$$
\begin{array}{c}
Tp \\
Tp \wedge q \to r \\
Fr \\
/ \quad \backslash \\
Fp \wedge q \quad Tr \\
/ \backslash \qquad \times \\
Tp \quad Fq \\
\times
\end{array}
$$

Nesse tableau, o ramo mais à direita e o ramo mais à esquerda estão fechados. No entanto, o ramo central está saturado e aberto. Nesse ramo, temos as seguintes fórmulas atômicas marcadas: Tp, Fq, Fr. Esse ramo fornece a valoração v tal que $v(p) = 1, v(q) = v(r) = 0$. Note que essa valoração demonstra que $p, p \wedge q \to r \nvDash r$ pois satisfaz p e $p \wedge q \to r$, e falsifica r. Ou seja, o ramo saturado e aberto nos deu um *contra-exemplo* do seqüente.

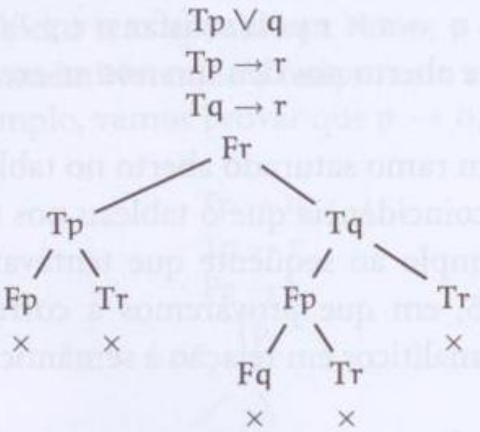
O fato de que há um ramo saturado aberto no tableau implica que $p, p \wedge q \to r \nvdash_{TA} r$. Não é coincidência que o tableau nos forneça uma valoração que é um contra-exemplo ao seqüente que tentávamos provar, conforme veremos na Seção 2.5, em que provaremos a correção e completude do método dos tableaux analíticos em relação à semântica de valorações.

Um segundo exemplo que demonstra a geração de contra-exemplos, a partir de um ramo saturado aberto, é o seqüente não-dedutível $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \vdash r$, que gera o seguinte tableau:

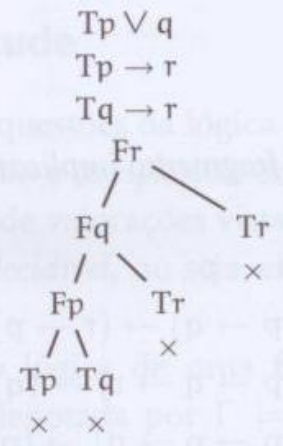


Nesse tableau, o ramo mais à direita está aberto e contém as fórmulas atômicas marcadas: Fr, Tq, Ts e Fp. Consideramos então uma valoração v tal que $v(r) = v(p) = 0$ e $v(q) = v(s) = 1$. Com isso, temos que $v(p \vee q) = v(p \to r) = v(q \to r \vee s) = 1$, satisfazendo o antecedente do seqüente, mas falsificando o conseqüente. Do tableau aberto inferimos $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \nvdash_{TA} r$ e da valoração contra-exemplo inferimos que $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \nvDash r$.

Por fim, vamos exemplificar o fato de que um seqüente pode ter mais de um tableau. Considere o seqüente $p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r$. Um primeiro tableau aplica as regras β nas fórmulas conforme sua ocorrência de cima para baixo, gerando o seguinte tableau:



Nesse tableau há quatro bifurcações e cinco ramos, todos fechados. Se, no entanto, aplicarmos as bifurcações nas fórmulas β de baixo para cima, teremos o seguinte tableau:



Nesse segundo tableau há apenas três bifurcações e quatro ramos. Isso mostra que a ordem em que as bifurcações são feitas pode afetar o tamanho do tableau. Um mesmo seqüente pode ter uma prova de tamanho linear ou exponencial, dependendo da ordem em que as regras são aplicadas.

No entanto, é importante notar que, se há um tableau fechado para um seqüente, qualquer outro tableau também irá fechar, independentemente da ordem de aplicação de regras.

Exercícios

2.10 Provar ou refutar os seguintes seqüentes pelo método dos tableaux analíticos:

(a) $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

(b) $\neg p \to \neg q \vdash p \to q$

(c) $p \to q \vdash p \to q \vee r$

(d) $p \to q \vdash p \to q \wedge r$

(e) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

(f) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \vee \neg q$

(g) $p \vee q, \neg q \vdash p$ (*modus tolens*)

(h) $p \to q, q \vdash p$ (*modus erronens*)

(i) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

2.11 Provar os axiomas do *fragmento implicativo* da lógica clássica:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{I} & p \to p \\
\mathbf{B} & (p \to q) \to (r \to p) \to (r \to p) \\
\mathbf{C} & (p \to q \to r) \to (q \to p \to r) \\
\mathbf{W} & (p \to p \to q) \to (p \to q) \\
\mathbf{S} & (p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r) \\
\mathbf{K} & p \to q \to p \\
\textbf{Peirce} & ((p \to q) \to p) \to p
\end{array}
$$

2.12 Considerar o conectivo $\leftrightarrow$ (*bi-implicação* ou *equivalência*), com a seguinte Tabela da Verdade:

$A \leftrightarrow B$	$B = 0$	$B = 1$
$A = 0$	1	0
$A = 1$	0	1

Dar regras de tableau para esse conectivo. Essas regras são do tipo α ou β?

2.13 Usando a regra definida no exercício anterior, provar as seguintes equivalências notáveis pelo método dos tableaux analíticos:

(a) $\neg\neg p \leftrightarrow p$ (eliminação da dupla negação)

(b) $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$ (definição de $\to$ em termos de $\vee$ e $\neg$)

(c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (lei de De Morgan 1)

(d) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (lei de De Morgan 2)

(e) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$)

(f) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$)

2.5 Correção e Completude

Nesta seção, abordaremos as questões da lógica dentro de um enfoque mais formal e provaremos a *correção* e *completude* do método de tableaux analíticos em relação à semântica de valorações vista no Capítulo 1. Provaremos também que esse método é *decidível*, ou seja, ele sempre termina com uma resposta.

Recorde que a implicação lógica de uma fórmula A, a partir de um conjunto de hipóteses Γ, é denotada por $\Gamma \models A$, que foi definida como verdadeira quando, para toda valoração v, se v satisfaz todas as fórmulas $B \in \Gamma$ ($v(\Gamma) = 1$), v satisfaz A ($v(A) = 1$). Ou seja:

$$\Gamma \models A \text{ sse } v(\Gamma) = 1 \text{ implica } v(A) = 1$$

Por outro lado, representamos por $\Gamma \vdash_{TA} A$ o fato de existir um tableau analítico fechado com hipóteses Γ e conclusão A.

Dessa forma, definimos que o método dos tableaux analíticos é *correto* se sempre que for possível obter uma prova de $\Gamma \vdash_{TA} A$ então será verdade que $\Gamma \models A$. Ou seja, a correção pode ser expressa por:

$$\Gamma \vdash_{TA} A \Longrightarrow \Gamma \models A.$$

Por outro lado, o método de tableaux analíticos é correto se sempre que uma implicação lógica for verdadeira, $\Gamma \models A$, então conseguiremos prová-la, obtendo $\Gamma \vdash_{TA} A$. Ou seja, a completude pode ser expressa por

$$\Gamma \vdash_{TA} A \Longrightarrow \Gamma \models A.$$

Note que, no caso de completude, o fato de existir um tableau fechado para $\Gamma \vdash_{TA} A$ não quer dizer, imediatamente, que haja um algoritmo que produza sempre esse tableau. Similarmente, se uma conseqüência lógica é falsa, isso não implica automaticamente que haja um algoritmo que sempre consiga um ramo aberto (e, portanto, uma *contra-valoração* ou um contra-exemplo) que falsifique a conseqüência lógica. Definimos, então, o método dos tableaux analíticos como sendo *decidível* se existir um algoritmo tal que:

- Se $\Gamma \models A$, então o algoritmo sempre gera um tableau fechado para $\Gamma \vdash_{TA} A$.

➡ Se $\Gamma \not\models A$, então o algoritmo gera um tableau com um ramo saturado aberto.

A seguir, veremos como demonstrar essas propriedades.

2.5.1 Conjuntos Descendentemente Saturados

Um conjunto de fórmulas marcadas Θ é dito *descendentemente saturado* se as seguintes condições forem respeitadas:

(a) Nenhuma fórmula marcada e seu conjugado estão simultaneamente em Θ.

(b) Se existe alguma fórmula marcada em Θ do tipo α, então $\alpha_1 \in \Theta$ e $\alpha_2 \in \Theta$.

(c) Se existe alguma fórmula marcada em Θ do tipo β, então $\beta_1 \in \Theta$ ou $\beta_2 \in \Theta$ (ou ambos).

Os conjuntos descendentemente saturados são às vezes chamados de *conjuntos de Hintikka* e são importantes para o estudo de tableaux devido ao seguinte fato.

Lema 2.5.1 Todo ramo saturado e aberto de um tableau é um conjunto descendentemente saturado.

Demonstração: Como o ramo é aberto, nenhuma fórmula e seu conjugado podem estar presentes no ramo, satisfazendo a primeira condição.
Em razão da saturação, se há uma fórmula do tipo α no ramo, então tanto α_1 como α_2 estão no ramo, satisfazendo a segunda condição.
Também devido à saturação, se há uma fórmula do tipo β no ramo, então ou β_1 ou β_2 estão no ramo, satisfazendo a terceira condição. ■

Nem todo conjunto descendentemente saturado é um ramo. Por exemplo, podemos ter um conjunto infinito de fórmulas que é descendentemente saturado, mas, como veremos na prova de decidibilidade, não é possível ter ramos infinitos em um tableau para a lógica proposicional clássica.

Por outro lado, esse resultado indica que a expansão de um ramo é uma tentativa de se construir um conjunto descendentemente saturado a partir de um conjunto qualquer de fórmulas. Note que isso é apenas uma tentativa, pois pode ser impossível a construção do conjunto descendentemente saturado exatamente nos casos em que todos os ramos do tableau fecham, e

a proibição de uma fórmula e seu conjugado pertencerem ao conjunto não pode ser respeitada.

O próximo passo é estender a noção de valoração para fórmulas marcadas. Isso pode ser facilmente obtido da seguinte maneira:

$$\nu(TA) = 1 \text{ sse } \nu(A) = 1$$
$$\nu(FA) = 1 \text{ sse } \nu(A) = 0$$

Dessa forma, podemos dizer que uma valoração ν satisfaz um conjunto Θ de fórmulas marcadas se para toda fórmula marcada $\psi \in \Theta$, $\nu(\psi) = 1$. Um conjunto de fórmulas marcadas Θ é *satisfazível* se existir um ν tal que $\nu(\Theta) = 1$, ou seja, tal que $\nu(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Theta$.

Provaremos agora dois lemas que nos fornecerão o caminho para as provas de correção e completude do método dos tableaux analíticos.

Lema 2.5.2 Seja Θ um conjunto satisfazível de fórmulas marcadas. Então:

(a) Se $\alpha \in \Theta$, então $\Theta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é satisfazível também.

(b) Se $\beta \in \Theta$, então $\Theta \cup \{\beta_1\}$ é satisfazível ou $\Theta \cup \{\beta_2\}$ é satisfazível.

Demonstração:

(a) Suponha que $\alpha \in \Theta$ é da forma $TA \wedge B$. Como Θ é satisfazível, existe ν tal que $\nu(\Theta) = 1$. Em particular, $\nu(\alpha) = 1$ e, portanto, $\nu(A) = \nu(B) = 1$; logo, $\nu(\Theta \cup \{TA, TB\}) = 1$.

A prova é totalmente análoga nos casos em que α é da forma $FA \vee B$, $FA \rightarrow B$ e $T\neg A$. Ver Exercício 2.14.

(b) Suponha que $\beta \in \Theta$ é da forma $FA \wedge B$. Como Θ é satisfazível, existe ν tal que $\nu(\Theta) = 1$. Em particular, $\nu(\beta) = 1$ e, portanto, $\nu(A) = 0$ ou $\nu(B) = 0$. Se $\nu(A) = 0$, temos que $\nu(\Theta \cup \{FA\}) = 1$ e, se $\nu(B) = 0$, temos que $\nu(\Theta \cup \{FB\}) = 1$.

A prova é totalmente análoga nos casos em que β é da forma $TA \vee B$, $TA \rightarrow B$ e $F\neg A$. Ver Exercício 2.15. ■

O segundo lema é conhecido como lema de Hintikka.

Lema 2.5.3 – Hintikka Todo conjunto descendentemente saturado é satisfazível.

Demonstração: Seja Θ um conjunto descendentemente saturado; logo, para um mesmo átomo p, não podemos ter $Tp \in \Theta$ e $Fp \in \Theta$. Vamos construir uma valoração ν da seguinte maneira:

- Se $Tp \in \Theta$, então $\nu(p) = 1$.
- Se $Fp \in \Theta$, então $\nu(p) = 0$.
- Se nem Tp nem Fp estão em Θ, então $\nu(p)$ pode ser qualquer valor.

É imediato que todo átomo marcado em Θ é satisfeito por ν. Vamos demonstrar por indução na complexidade da fórmula que, para toda fórmula marcada $\psi \in \Theta$, $\nu(\psi) = 1$. O caso básico foi coberto pela observação sobre átomos marcados. Resta analisar dois casos indutivos.

Se $\alpha \in \Theta$, então $\alpha_1, \alpha_2 \in \Theta$. Pela hipótese de indução, $\nu(\alpha_1) = \nu(\alpha_2) = 1$. É fácil verificar que para α da forma $TA \wedge B$, $FA \vee B$, $FA \rightarrow B$ ou $T\neg A$, isso implica que $\nu(\alpha) = 1$ (ver Exercício 2.14).

Se $\alpha \in \Theta$, então $\beta_1 \in \Theta$ ou β_2. Sem perda de generalidade, suponha que $\beta_1 \in \Theta$ e então, pela hipótese de indução, $\nu(\beta_1) = 1$. Para as quatro possíveis formas de β, $\nu(\beta_1) = 1$ implica que $\nu(\beta) = 1$ (Ver Exercício 2.15). A prova é totalmente análoga se $\beta_2 \in \Theta$.

Dessa forma, provamos que todas as fórmulas em Θ são satisfeitas por ν, como desejado. ■

Note que o lema de Hintikka vale tanto para conjuntos finitos quanto para conjuntos infinitos de fórmulas marcadas.

2.5.2 Correção do Método dos Tableaux Analíticos

Estamos em condições de provar a correção do método dos tableaux analíticos.

Teorema 2.5.1 – Correção O método dos tableaux analíticos é correto com relação à semântica de valorações. Ou seja, se $\Gamma \vdash_{TA} A$, então $\Gamma \models A$.

Demonstração: Vamos provar a *contrapositiva* do enunciado do teorema, ou seja, vamos assumir que $\Gamma \not\models A$ e provar que $\Gamma \not\vdash_{TA} A$.

De fato, suponha que $\Gamma \not\models A$. Então, existe uma valoração ν tal que $\nu(\Gamma) = 1$ e $\nu(A) = 0$. Seja Θ_0 o conjunto de fórmulas marcadas representando o tableau inicial para $\Gamma \vdash_{TA} A$; claramente, $\nu(\Theta_0) = 1$. Vamos provar que, a cada passo da expansão do tableau, haverá sempre um ramo Θ_i tal que $\nu(\Theta_i) = 1$.

Suponha que $v(\Theta_{i-1}) = 1$. Se o ramo Θ_{i-1} for expandido por uma fórmula α, então, pelo Lema 2.5.2(a), a expansão será satisfeita por v. Se o ramo Θ_{i-1} for expandido por uma fórmula β, então, pelo Lema 2.5.2(b), ao menos um dos dois ramos resultantes será satisfeito por v. Em ambos os casos, temos um ramo Θ_i tal que $v(\Theta_i) = 1$.

Logo, sempre haverá um ramo satisfeito que, após todas as expansões, será um conjunto descendentemente saturado e não poderá fechar. Portanto, $\Gamma \nvdash_{TA} A$. ■

Note que a prova do Teorema 2.5.1 mostra que, se $\Gamma \nvDash A$, *nenhum* tableau para essas hipóteses poderá fechar.

2.5.3 A Completude do Método dos Tableaux Analíticos

A completude do método é uma decorrência direta do lema de Hintikka, como podemos ver a seguir.

Teorema 2.5.2 – completude O método dos tableaux analíticos é completo com relação à semântica de valorações. Ou seja, se $\Gamma \vDash A$, então $\Gamma \vdash_{TA} A$.

Demonstração: Vamos também demonstrar usando a contrapositiva. Suponha que $\Gamma \nvdash_{TA} A$, pois temos um ramo Θ saturado e aberto. Sabemos pelo Lema 2.5.1 que este ramo é um conjunto descendentemente saturado; logo, pelo lema de Hintikka, Θ é satisfazível. Portanto, existe uma valoração que satisfaz Γ e falsifica A, ou seja, $\Gamma \nvDash A$. ■

Note que esse teorema também implica que, se $\Gamma \vDash A$, qualquer tableau para esses dados deve fechar, caso contrário teremos uma valoração que é um contra-exemplo para $\Gamma \vDash A$.

2.5.4 Decidibilidade

Para provar que o método dos tableaux é decidível, basta mostrar que um desenvolvimento qualquer de um tableau para a lógica proposicional clássica, independentemente da ordem em que as expansões são feitas, sempre gera tableaux finitos.[9]

[9] N.A. Note que essa propriedade deixará de ser verdade quando abordarmos a lógica de primeira ordem, na Parte 2 do livro.

Teorema 2.5.3 O método dos tableaux analíticos é um processo de decisão para a lógica proposicional clássica.

Demonstração: No processo de expansão de um tableau, notamos que:

1. Uma fórmula nunca é expandida mais de uma vez e
2. A expansão de uma fórmula gera sempre fórmulas de complexidade menor

Dessa forma, à medida que vai-se expandindo um tableau, qualquer que seja a ordem de expansão, as fórmulas não expandidas serão cada vez de complexidade menor, até que finalmente tenhamos apenas átomos, que não podem ser expandidos, e todos os ramos do tableau estejam saturados. Se todos os ramos estiverem fechados, então o seqüente inicial é uma conseqüência lógica. Caso contrário, temos um contra-exemplo do seqüente inicial. ■

Os tableaux analíticos são métodos muito mais amenos à manipulação que as tediosas Tabelas da Verdade, se bem que ambos os métodos são procedimentos de decisão para a lógica clássica. No entanto, as Tabelas da Verdade são métodos determinísticos, enquanto os tableaux dependem da ordem em que as fórmulas são escolhidas para serem expandidas. Fica a pergunta de caráter computacional: será que os tableaux são sempre melhores que as Tabelas da Verdade na demonstração de um teorema?

A resposta é: nem sempre. Em geral, quando o tamanho da fórmula não é muito maior que o número de átomos, a utilização de tableaux pode gerar deduções muito menores. No entanto, quando se trata de uma fórmula "gorda", em que o tamanho da fórmula é exponencial em relação ao número de átomos distintos, a situação pode se inverter. Veja o Exercício 2.16.

Exercícios

2.14 Mostrar, examinando cada um dos casos, que $v(\alpha) = 1$ se, e somente se, $v(\alpha_1) = v(\alpha_2) = 1$.

2.15 Mostrar, examinando cada um dos casos, que $v(\beta) = 1$ se, e somente se, $v(\beta_1) = 1$ ou $v(\beta_2) = 1$.

2.16 Considerar a seguinte família de tautologias:

$$H_1 = p \vee \neg p$$
$$H_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$
$$H_3 = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

(a) Dar a forma geral da tautologia H_n. Calcular a complexidade da fórmula H_n em função de n, o número de átomos.

(b) Fazer um tableau para H_1, H_2, H_3, H_n e contar o número de ramos utilizados em função de n.

(c) Fazer uma tabela da verdade para H_1, H_2, H_3, H_n e contar o número de células de sua tabela em função de n.

(d) Qual dos dois métodos é mais eficiente na prova dos teoremas na família H_n?

2.6 Notas Bibliográficas

David Hilbert foi um dos matemáticos mais influentes do final do século XIX e início do século XX. Em seu trabalho sobre os fundamentos da geometria de 1899 (Hilbert, 1899), ele propôs a primeira axiomatização correta e completa da geometria euclidiana. Esse conjunto de axiomas ficou conhecido como sistema de axiomas de Hilbert para geometria e, em geral, sistemas de axiomas ficaram conhecidos como sistemas de Hilbert. Em 1920, Hilbert apresentou uma proposta que ficou conhecida como Programa de Hilbert para a Matemática, que defendia que toda a matemática deveria ser fundada em sólidos e completos princípios da lógica (Hilbert, 1927). Ele pretendia mostrar que toda a matemática segue de um sistema de axiomas e que esse sistema é consistente (Gray, 2000). Essa proposta até hoje ainda é muito popular (Winskel, 1993), apesar de ter sido demonstrada impossível com os teoremas da incompletude de Gödel, em 1931 (Gödel, 1931).

Apesar de seu apelo formal, os sistemas de axiomatizações, segundo Hilbert, não espelham a forma como as pessoas em geral, e os matemáticos em especial, procedem suas deduções. No intuito de prover um sistema de dedução que melhor espelhasse esse procedimento, Gerhard Gentzen criou o sistema formal de dedução natural em um artigo de 1935. Tendo dificuldades

de provar a consistência de tal sistema (que veio a ser demonstrada diretamente por Prawitz em 1965 (Prawitz, 1965)), no mesmo artigo propôs um outro sistema, hoje conhecido como sistema de seqüentes de Gentzen, cuja consistência pôde provar pelo procedimento de eliminação do corte, que por sua vez levou à prova indireta da consistência da dedução natural (Szabo, 1969). O Sistema de Seqüentes de Gentzen com eliminação do corte está na base do método de provas dos tableaux analíticos.

Gerhard Gentzen tinha relações com instituições nazistas e chegou a ocupar uma posição em Praga, como parte do esforço de guerra nazista na Segunda Guerra. Ele foi preso com todo o corpo acadêmico alemão em Praga quando houve a revolta contra a ocupação nazista, em maio de 1945. Com a chegada do exército russo, foi internado em um campo de prisioneiros, onde veio a falecer de subnutrição em agosto de 1945 (Vihan, 1995).

O método dos tableaux analíticos possui diversos "pais". Por exemplo, temos o trabalho de Beth (1962), o trabalho de Hintikka (1962) e o trabalho de Smullyan. A nossa apresentação foi baseada no trabalho de Raymond Smullyan (1968), o qual influenciou também muito do que foi feito posteriormente sobre o método de provas por tableaux analíticos. Com o advento da dedução automática por computador, diversas críticas e adições foram feitas ao método dos tableaux analíticos, no que diz respeito à sua eficiência. Em particular, foi questionado se o método dos tableaux analíticos é sempre mais eficiente que Tabelas da Verdade (D'Agostino, 1992).

Raymond Smullyan, além de matemático, é também músico e mágico, tendo atuado profissionalmente em todas essas áreas. Além disso, é um grande escritor de livros de quebra-cabeças sobre xadrez e sobre os fundamentos da matemática, sendo o autor de *Qual é o nome deste livro? (What is the name of this book?)* e *Satan, cantor, infinitude e outros quebra-cabeças (Satan, Cantor, infinity and other mind-bogglin)*.

3 Aspectos Computacionais

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos diversos métodos que visam à implementação eficiente de provadores de teoremas automáticos em computador para a lógica clássica proposicional.

Inicialmente, na Seção 3.2, vamos apresentar uma forma de implementar um provador de teoremas pelo método dos tableaux analíticos. Apresentaremos também diversas famílias de teoremas de complexidade de prova crescente, que podem ser usadas para testar a eficiência do provador implementado.

Os provadores de teoremas usados na prática são baseados em tableaux analíticos. Isso se deve a uma característica intrínseca de ineficiência desse método.[1] Na segunda parte do capítulo, exploraremos os métodos mais usados na prática para prova de teoremas. Inicialmente nos concentraremos na representação de fórmulas usadas na prática, e para isso descreveremos na Seção 3.3 as formas normais conjuntiva (ou clausal) e disjuntiva. Os métodos mais difundidos na prática são todos baseados na forma clausal. Em especial, o importante método de prova de teoremas por resolução, apresentado na Seção 3.4, é capaz de detectar a inconsistência de teorias no formato clausal.

---

[1] N.A. O método dos tableaux analíticos é baseado em um cálculo lógico no qual a *regra do corte* foi eliminada, o que causa essa ineficiência; infelizmente, uma discussão mais profunda sobre isso está fora do escopo deste texto introdutório.

As implementações mais eficientes de provadores de teoremas para lógica proposicional clássica são baseadas em uma forma restrita de resolução. Esses provadores são conhecidos como resolvedores SAT e, em sua maioria, implementam a restrição da resolução conhecida como algoritmo DPLL. Para obter o ganho de eficiência, diversos métodos são acrescidos ao método DPLL. A Seção 3.5 discute o algoritmo DPLL e diversas formas de aumentar sua eficiência.

3.2 Implementação de um Provador de Teoremas pelo Método dos Tableaux Analíticos

Na Seção 2.4, foi apresentado o método dos tableaux analíticos como um método de inferência lógica e também como um método de decisão, capaz de decidir sobre a validade de uma fórmula ou a derivabilidade de um seqüente.

Nesta seção, indicaremos formas de implementar esse método, o que implica analisarmos dois pontos cruciais para a transformação da apresentação abstrata do método dos tableaux em uma realidade implementada. Esses dois pontos são as *estratégias computacionais* e as *estruturas de dados*.

Além disso, apresentaremos *famílias de fórmulas notáveis* de crescente complexidade que servem de teste para uma eventual implementação de um provador de teoremas.

3.2.1 Estratégias Computacionais

O algoritmo 3.1 apresenta, de forma genérica, um provador de teoremas pelo método dos tableaux analíticos. Uma das propriedades fundamentais do algoritmo 3.1 é que se trata de um algoritmo *não-determinístico*.

Algoritmo 3.1 Prova de Teoremas por Tableaux Analíticos

Entrada: Um seqüente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots B_n$.

Saída: `verdadeiro`, se $A_1, \ldots, A_n \models B_1, \ldots B_n$, ou um contra-exemplo, caso contrário.

1: Criar um ramo inicial contendo $TA_1, \ldots, TA_n, FB_1, \ldots FB_n$.
2: **enquanto** existir um ramo *aberto* **faça**
3: Escolher um ramo aberto θ.
4: **se** o ramo θ está saturado **então**
5: Encontrar todos os átomos marcados de θ.
6: **retorne** a valoração correspondente a estes átomos marcados.

7: **fim se**
8: Escolher R, uma das regras aplicáveis em θ.
9: Expandir o tableau, aplicando R sobre θ.
10: Verificar se θ ou seus sub-ramos fecharam.
11: **fim enquanto**
12: **retorne** `verdadeiro`

Em um algoritmo *determinístico*, ao final de cada passo de execução a próxima instrução a ser executada está totalmente definida. Por outro lado, um algoritmo *não-determinístico* é caracterizado pela realização de escolhas em determinados pontos do algoritmo. No caso do algoritmo 3.1, essas escolhas estão explicitadas nas linhas 3 e 8. A linha 3 contém uma escolha sobre qual ramo proceder a expansão do tableau. A linha 8 contém uma escolha sobre qual regra aplicar a um determinado ramo aberto.

Os computadores que temos a nosso dispor são máquinas determinísticas. Para que um algoritmo não-determinístico, possa ser implementado em um computador determinístico é preciso incorporar ao algoritmo uma *estratégia computacional* ou *estratégia de seleção*. Tal estratégia tem a função de implementar uma política determinística de escolha em cada passo não-determinístico do programa.

É importante notar que a escolha da estratégia pode ter conseqüências muito drásticas sobre a eficiência do provador de teoremas. Com a estratégia errada, um seqüente que possui um tableau linear poderia gerar, devido à seleção de regras que causam bifurcações, uma árvore larga, que só gera um tableau fechado depois de um tempo exponencial em relação ao tamanho das fórmulas contidas no seqüente inicial.

Vamos analisar a seguir as estratégias necessárias para o algoritmo 3.1.

Estratégias de Escolha de Ramos

A classe de estratégias utilizada na escolha do ramo do tableau a ser expandido é conhecida na literatura como *estratégia de busca em árvore*. O objetivo da busca é encontrar um ramo que seja aberto e saturado. Nesse caso, a busca se acaba. No caso em que essa busca falha, temos um tableau fechado.

Inicialmente, o tableau possui apenas um ramo. À medida que regras do tipo β vão sendo aplicadas, diversos ramos podem surgir, forçando o algoritmo a fazer uma escolha sobre qual ramo expandir.

Dentre as várias estratégias de busca em árvore conhecidas na literatura, destacamos as seguintes:

Busca em Profundidade. Esse tipo de busca tende a expandir um ramo até a saturação. No caso de tableaux, isso significa expandir um ramo até que ele esteja fechado ou saturado. Ao se aplicar uma regra-β, a busca procede no ramo contendo β_1. Caso o ramo seja fechado, a escolha retrocede para o ramo contendo β_2 da bifurcação mais recente. O fato de o ramo contendo β_1 ser escolhido primeiro para continuação da expansão é arbitrário, e poderíamos ter uma estratégia mais refinada que analisaria qual dos dois ramos deveria ser expandido primeiro, retornando ao outro, caso o escolhido venha a fechar.

Busca em Largura. Esse tipo de busca tende a aplicar em seqüência expansão em cada ramo aberto, fazendo com que todos os ramos abertos tenham o mesmo cumprimento (em termos de número de regras aplicadas a ele).

Por razões de eficiência e espaço, a busca em profundidade é a preferida na expansão de tableau. Esse método é mais eficiente pois, se o ramo for saturar sem fechar, atingiremos esse ponto antes do método em largura. Em termos de espaço, esse método também é mais econômico, pois a cada instante necessitamos armazenar apenas o ramo atual, mantendo somente uma pilha de pontos de retrocesso. Quando um ramo se fecha, o trecho final entre o fechamento e a última bifurcação pode ser descartado ao se reiniciar a expansão do ramo contendo β_2.

Mais adiante, detalharemos as estruturas de dados necessárias para que esse mecanismo de busca em profundidade possa ser implementado.

Estratégias de Seleção de Regras

Uma vez que temos um ramo aberto selecionado, precisamos escolher, dentre as possíveis regras que podem expandir aquele ramo, qual será aplicada. Diversas estratégias podem ser adotadas, e uma composição de estratégias muitas vezes é usada.

A primeira estratégia que apresentaremos, e que chamaremos de α-primeiro, é universalmente adotada. Trata-se da estratégia de aplicar inicialmente, em um determinado ramo, todas as expansões-α possíveis. Dessa forma, uma expansão-β somente será aplicada quando não houver mais nenhuma expansão-α aplicável.

A estratégia α-primeiro baseia-se no fato de que as expansões-α não criam novos ramos e podem levar um ramo ao fechamento, antes de qualquer bifurcação e, portanto, devem ser realizadas anteriormente.

Não há qualquer imposição de ordem nas α-expansões, pois se há várias candidatas à α-expansão, uma expansão não afetará o *status* de candidatas das fórmulas já existentes. Assim sendo, em qualquer ordem em que forem feitas as α-expansões, obteremos o mesmo conjunto de formas marcadas em um ramo. Para melhorar a eficiência, pode-se considerar que a transformação resultante da aplicação de todas as expansões α é apenas uma expansão e verificar o fechamento do ramo apenas após a saturação das expansões α.

Uma segunda estratégia, quase universal, é descartar a fórmula α ou β após sua expansão. Isso equivale a substituir uma fórmula por sua expansão, e como essa substituição é uma equivalência lógica válida, essa simplificação pode ser feita. A forma como essa simplificação é feita depende das estruturas de dados escolhidas, o que discutiremos mais adiante.

A ordem em que as β-expansões são feitas pode ter um grande efeito sobre o tamanho do tableau e, portanto, sobre a eficiência do provador de teoremas. Apresentamos a seguir algumas das estratégias possíveis, que ordenam as fórmulas β presentes em um ramo do tableau de acordo com a configuração do ramo.

Ordem Direta. Consiste em selecionar a primeira fórmula β que ocorre no ramo para expansão. Essa estratégia não envolve nenhuma inteligência e depende da ordem em que as fórmulas são apresentadas no tableau.

Ordem Reversa. Consiste em selecionar a última fórmula β que ocorre no ramo para expansão. Possui as mesmas desvantagens que o caso anterior.

Menor Tamanho. Consiste em selecionar a menor das fórmulas β. A idéia é que, quanto menor a fórmula, mais fácil fechar o ramo.

Contém Subfórmula. Consiste em dar preferência para uma fórmula se houver subfórmulas suas presentes no ramo. A idéia também é a de facilitar o fechamento do ramo. Essa estratégia pode ser refinada, verificando-se a polaridade das subfórmulas. Nesse caso, contabilizam-se apenas as subfórmulas que ocorrem no ramo com a polaridade oposta à sua ocorrência na fórmula β.

Combinações. Podemos ter uma estratégia que combina as anteriores. Inicialmente, encontramos as fórmulas que contêm subfórmulas de polaridade oposta no ramo. Se houver empate, selecionamos a de menor tamanho. Se ainda houver empate, selecionamos a ordem direta ou inversa (a que for mais rapidamente computável).

3.2.2 Estruturas de Dados

Vamos descrever aqui as estruturas de dados para uma implementação possível do provador de teoremas. Diversas melhorias e alterações são possíveis nessas estruturas de dados para gerar provadores mais sofisticados e eficientes.

Estamos assumindo que o tableau será implementado segundo a estratégia de busca em profundidade, em que apenas um ramo do tableau é armazenado. O ramo do tableau é armazenado em um vetor de fórmulas marcadas, `ramo`. O tamanho do vetor é igual à soma dos tamanhos das fórmulas contidas no seqüente de entrada. Dessa forma, toda a expansão do ramo pode ser contida no vetor.

Por exemplo, suponha que queiramos demonstrar o seqüente $p \to q, q \to r \vdash p \to r$. O tamanho máximo do vetor será de $|p \to q| + |q \to r| + |p \to r| = 3 + 3 + 3 = 9$, ilustrado a seguir.

`ramo`:

$Tp \to q$	$Tq \to r$	$Fp \to r$						
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Além disso, é importante registrar o tamanho atual do ramo em uma variável `TamAtual`, que no exemplo é dada por `TamAtual` $= 3$.

Uma segunda estrutura de dados trata da marcação de todas as fórmulas β ainda por expandir no ramo atual. Representamos essa estrutura como um vetor de variáveis booleanas do mesmo comprimento que o vetor que armazena o ramo. No exemplo anterior, inicialmente teríamos o vetor `betas` da seguinte maneira:

`betas`:

X	X							
1	2	3	4	5	6	7	8	9

O primeiro passo de cada iteração do algoritmo 3.1, segundo a estratégia adotada, é a aplicação de todas as expansões-α. No exemplo, isso se aplica apenas sobre a posição 3:

`ramo:`

$Tp \to q$	$Tq \to r$	$Fp \to r$	Tp	Fr				
1	2	3	4	5	6	7	8	9

com a respectiva alteração de `TamAtual` $= 5$.[2]

Com a saturação de todas as expansões-α, verificamos se o ramo não está fechado. Como essa verificação falha, passamos então a uma nova iteração do algoritmo 3.1, procedendo à seleção da fórmula β sobre a qual bifurcar. Suponha por simplicidade que, nesse exemplo, estamos realizando a bifurcação usando a estratégia ascendente, que seleciona a última fórmula marcada no vetor `betas`, ou seja, seleciona a posição 2. Nesse caso, temos que $\beta_1 = Fq$ e $\beta_2 = Tr$. Isso acarreta a alteração do vetor `betas` para:

`betas:`

X								
1	2	3	4	5	6	7	8	9

O ramo será expandido com a fórmula $\beta_1 = Fq$. Porém, antes disso precisamos armazenar o ponto em que o ramo estava antes da bifurcação, de onde reiniciaremos a expansão, caso o ramo atual seja fechado. Para isso, utilizamos uma pilha de entradas, chamada de `PilhaDeRamos`. A entrada dessa pilha é uma tripla composta dos seguintes elementos: $\langle \beta_2, \texttt{TamAtual}, \texttt{betas} \rangle$. Esses dados serão desempilhados da `PilhaDeRamos`, caso o ramo atual

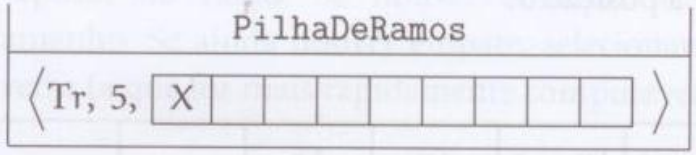
[2] N.A. Alternativamente, poderíamos efetivamente apagar a fórmula α expandida, resultando em um vetor em que `TamAtual` $= 4$:

`ramo:`

$Tp \to q$	$Tq \to r$	Tp	Fr					
1	2	3	4	5	6	7	8	9

No restante desse exemplo, não consideraremos mais o apagamento de fórmulas-α expandidas.

fechar. Dessa forma, a `PilhaDeRamos` do exemplo que estamos seguindo, que sempre se inicia vazia, passa a ter o seguinte conteúdo:



Nesse ponto, continuamos a expansão do ramo, cuja configuração atual após a inserção de $\beta_1 = Fq$ fica

`ramo:`

$Tp \to q$	$Tq \to r$	$Fp \to r$	Tp	Fr	Fq			
1	2	3	4	5	6	7	8	9

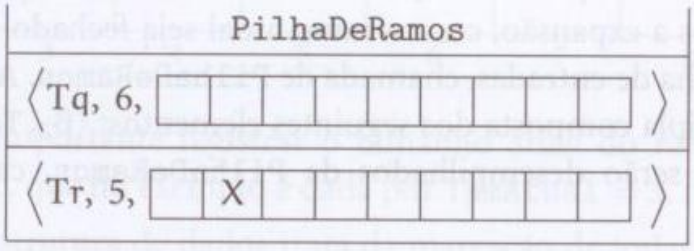
e `TamAtual` = 6. Procede-se à verificação do fechamento do ramo, que falha.

Na iteração seguinte, não há nenhuma expansão-α possível. A seleção da expansão-β é imediata, pois só há um candidato no vetor `betas`: $\beta = Tp \to q$. Nesse caso, $\beta_1 = Fp$ e $\beta_2 = Tq$. O vetor `betas` é alterado e torna-se totalmente vazio:

`betas:`

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antes de expandir o ramo, é necessário empilhar uma nova entrada na `PilhaDeRamos`, cuja configuração se torna:



O ramo expandido assume a configuração

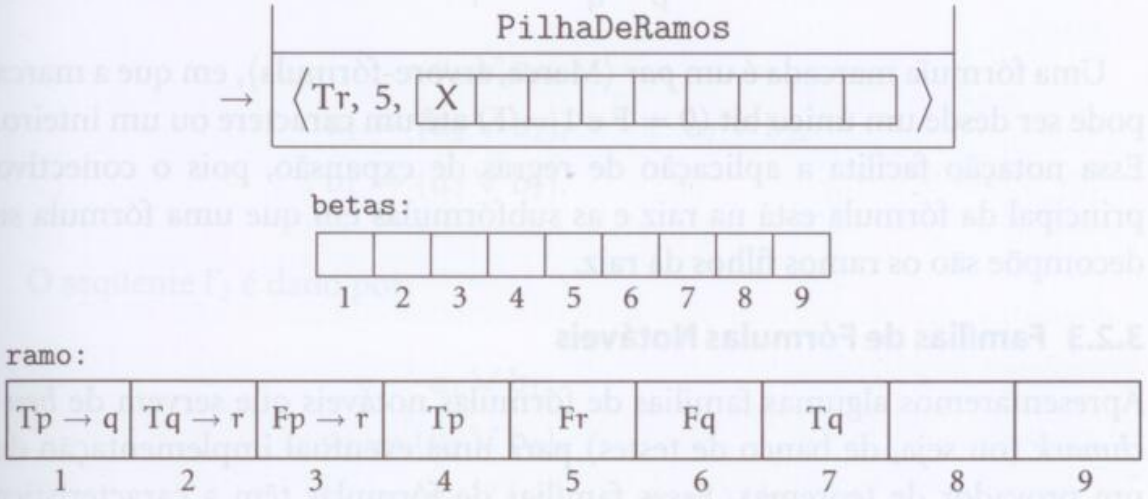
`ramo:`

$Tp \to q$	$Tq \to r$	$Fp \to r$	Tp	Fr	Fq	Fp		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

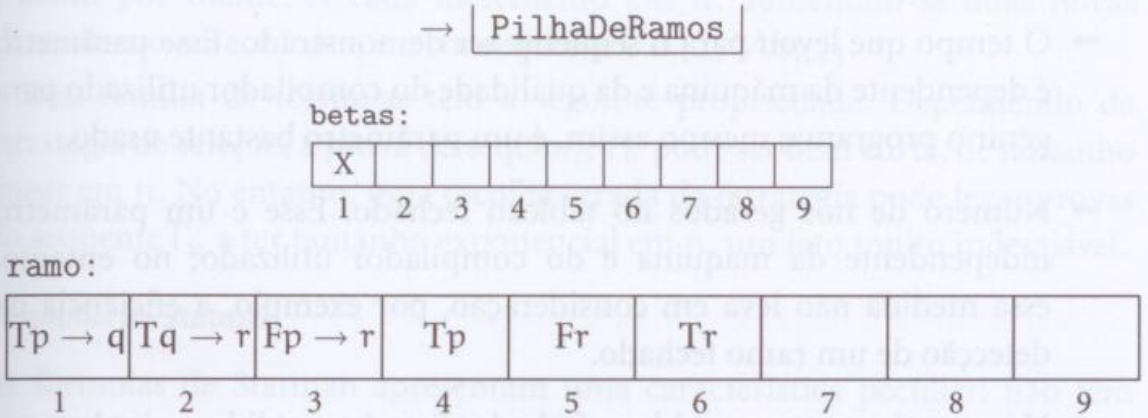
e `TamAtual` = 7. Nesse caso, a verificação de fechamento do ramo sucede, devido à presença de Tp e do recém-inserido Fp. O fato de que apenas os nós

recém-inseridos podem causar o fechamento de um ramo pode ser usado para aumentar a eficiência da verificação de fechamento.

Com o fechamento do ramo, antes de proceder à próxima iteração, devemos desempilhar o topo da `PilhaDeRamos` e reconstituir o ramo. Ao desempilharmos o topo da pilha, obtemos um valor de β_2, de `TamAtual` e do vetor `betas`. Todas as posições do vetor atual além do valor `TamAtual` são apagadas, e o valor de β_2 é inserido no final do ramo. Além disso, o vetor `betas` é substituído pelo que estava na pilha. Ao processarmos essas alterações, as estruturas de dados de nosso exemplo se tornam:



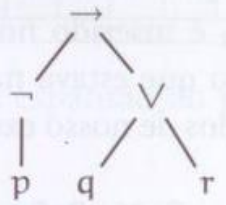
e `TamAtual` = 7. Uma nova verificação de fechamento sucede, então desempilhamos a próxima posição da `PilhaDeRamos`. Ao reconstruirmos o ramo, obtemos as seguintes estruturas de dados:



e `TamAtual` = 6. Esse ramo também está fechado, e como a `PilhaDeRamos` está vazia, não há como reconstruir o ramo. Isso indica que todos os ramos possíveis do tableau foram fechados e o tableau foi fechado. Nesse ponto, o

algoritmo deve retornar `verdadeiro`, indicando que o seqüente de entrada foi provado.

Uma palavra final sobre a implementação é necessária, para explicar a representação de fórmulas. Uma fórmula pode ser representada como uma árvore. Por exemplo, a fórmula $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ pode ser representada por:



Uma fórmula marcada é um *par* ⟨Marca, árvore-fórmula⟩, em que a marca pode ser desde um único bit (0 = F e 1 = T) até um caractere ou um inteiro. Essa notação facilita a aplicação de regras de expansão, pois o conectivo principal da fórmula está na raiz e as subfórmulas em que uma fórmula se decompõe são os ramos filhos da raiz.

3.2.3 Famílias de Fórmulas Notáveis

Apresentaremos algumas famílias de fórmulas notáveis que servem de *benchmark* (ou seja, de banco de testes) para uma eventual implementação de um provador de teoremas. Essas famílias de fórmulas têm a característica de serem todas teoremas, parametrizados, em geral por algum inteiro n, e à medida que n cresce, aumenta o tamanho da prova do teorema.

Para cada fórmula dessas famílias, podem-se medir os seguintes parâmetros:

- O tempo que levou para o seqüente ser demonstrado. Esse parâmetro é dependente da máquina e da qualidade do compilador utilizado para gerar o programa; mesmo assim, é um parâmetro bastante usado.

- Número de nós gerados no tableau fechado. Esse é um parâmetro independente da máquina e do compilador utilizado; no entanto, essa medida não leva em consideração, por exemplo, a eficiência na detecção de um ramo fechado.

- Número de ramos no tableau fechado. Essa é a medida mais abstrata, ignorando quantos nós existem em cada ramo do tableau e se concentrando apenas na característica geradora da exponencialidade da implementação, que é o número de ramos.

Uma boa implementação é capaz de medir todos esses parâmetros.

A Família Γ_n

A primeira família de que iremos tratar é a família Γ_n, dada por:

$$\Gamma_n = \{a_i \to (a_{i+1} \vee b_{i+1}), b_i \to (a_{i+1} \vee b_{i+1}) | 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

E o seqüente Γ_n é dado por: $a_1 \vee b_1, \Gamma_n \vdash a_{n+1} \vee b_{n+1}$.

Por exemplo, o seqüente Γ_1 é dado por:

$$\begin{array}{ll} a_1 \vee b_1, & \\ a_1 \to (a_2 \vee b_2), & \vdash a_2 \vee b_2, \\ b_1 \to (a_2 \vee b_2). & \end{array}$$

O seqüente Γ_2 é dado por:

$$\begin{array}{ll} a_1 \vee b_1, & \\ a_1 \to (a_2 \vee b_2), & \\ b_1 \to (a_2 \vee b_2), & \vdash a_3 \vee b_3, \\ a_2 \to (a_3 \vee b_3), & \\ b_2 \to (a_3 \vee b_3). & \end{array}$$

e assim por diante. A cada incremento em n, aumentam-se duas novas cláusulas no antecedente, e o conseqüente é $a_{n+1} \vee b_{n+1}$.

Essa família de fórmulas tem a seguinte propriedade. Dependendo da estratégia de seleção, a prova do seqüente Γ_n pode ser bem curta, de tamanho linear em n. No entanto, uma escolha errada da estratégia pode levar provas do seqüente Γ_n a ter tamanho exponencial em n, um fato muito indesejável.

Fórmulas de Statman

As fórmulas de Statman apresentam uma característica peculiar: não têm provas eficientes pelo método dos tableaux analíticos, mas possuem provas curtas em outros métodos, como o da dedução natural.

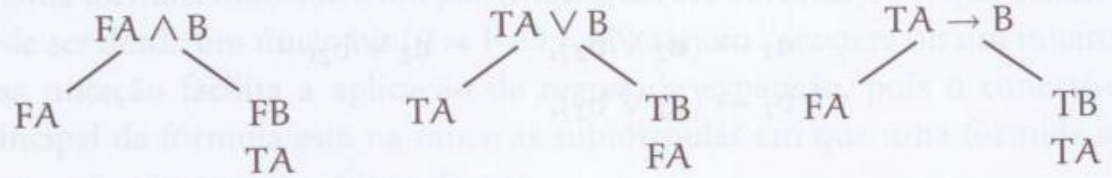
Considere variáveis proposicionais p_i e q_i, com $i \geqslant 1$. Para todo $i \geqslant 1$, definimos indutivamente:

$$A_1 = p_1$$
$$B_1 = q_1$$
$$A_{i+1} = (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p_i \vee q_i) \rightarrow p_{i+1}$$
$$B_{i+1} = (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p_i \vee q_i) \rightarrow q_{i+1}$$

E um seqüente Statman de ordem n é o seqüente:

$$A_1 \vee B1, A_2 \vee B_2, \ldots, A_n \vee B_n \vdash p_n \vee q_n$$

É interessante verificar que, se alterarmos as regras β para as seguintes regras β':



podemos obter provas eficientes para os seqüentes da família de Statman.

O Princípio do Escaninho

O princípio do escaninho (em inglês, *pigeonhole principle*, ou princípio do buraco de pombo) diz que, se tivermos $n + 1$ cartas para inserir em n escaninhos, algum escaninho receberá mais de uma carta. É curioso notar que um princípio tão simples assim pode levar a provas de complexidade tão elevada.

As fórmulas atômicas de um problema de ordem n (PHP_n) são da forma p_{ij}, indicando que a carta i é depositada no escaninho j, onde $1 \leqslant i \leqslant n+1$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Um seqüente PHP_n tem o formato $\Gamma_n \vdash \Delta_n$, onde

$$\Gamma_n = \bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij}$$

representando o fato de que cada carta é inserida em um escaninho (buraco), e a fórmula Δ_n é da forma

$$\Delta_n = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{k=i+1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij} \wedge p_{kj}$$

representando o fato de que algum escaninho recebe mais de uma carta.

Sabe-se que existe uma forma intrincada pelo método da axiomatização que é capaz de gerar provas de tamanho polinomial em n para o PHP_n. No entanto, nenhum dos métodos automáticos mais conhecidos na literatura é capaz de gerar provas do PHP_n que não sejam exponenciais em n, inclusive o método dos tableaux analíticos.

Observação: Se o leitor conseguir algum método de prova genérico e computacional capaz de resolver o PHP_n em tempo polinomial, por favor entre em contato com os autores deste livro.

Exercícios

3.1 Considerar um conjunto de estratégias de seleção de regras e busca por profundidade. Reescrever um algoritmo determinístico que seja equivalente ao algoritmo 3.1.

3.2 Alterar o algoritmo do exercício anterior, incorporando-lhe a remoção do ramo de fórmulas α ou β que já foram expandidas.

3.3 Implementar um provador de teoremas pelo método dos tableaux analíticos em sua linguagem de programação preferida.

Incentiva-se o uso de alguma linguagem orientada a objetos, como C++, Java ou Python. Nesse caso, recomenda-se usar bibliotecas preexistentes na manipulação de listas, pilhas ou árvores.

Quem decidir realizar a implementação em Prolog deverá usar em seu favor a estrutura de *backtracking* (retrocesso) da linguagem. Isso é capaz de gerar um provador bem enxuto e elegante.

3.4 Mostrar que as regras β' são corretas, ou seja, se elas forem usadas, apenas os seqüentes válidos geram tableaux fechados.

Encontrar uma estratégia para tableaux que gera provas curtas (polinomiais, não-exponenciais) para as fórmulas da família de Statman para os tableaux analíticos, usando as regras β' em vez das regras β.

3.3 Formas Normais

Diversos algoritmos de manipulação de fórmulas da lógica proposicional assumem que as fórmulas são apresentadas em um formato predefinido,

chamado de *forma normal*. São duas as principais formas normais: a *forma normal conjuntiva* (FNC) e a *forma normal disjuntiva* (FND).

3.3.1 A Forma Normal Conjuntiva ou Forma Clausal

A forma normal conjuntiva (FNC) também é chamada de *forma clausal*. Ela é empregada no método de inferência chamado de *resolução*, que serve de base à programação lógica e à linguagem de programação Prolog (ver Seção 3.4). A FNC também é usada como formato de entrada da maioria dos algoritmos de verificação de satisfazibilidade, como os descritos na Seção 3.5.

O elemento básico na formação da FNC é o *literal*. Um literal é uma fórmula atômica p ou a negação de uma fórmula atômica $\neg p$. No caso de o literal ser da forma p, ele é chamado de *positivo*, e o literal da forma $\neg p$ é chamado de *negativo*.

Uma *cláusula* é a disjunção de literais

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n,$$

onde n é o tamanho da cláusula. Se $n = 1$, a cláusula é dita unitária. Se $n = 0$, a cláusula é dita *vazia*, e nesse caso convenciona-se que a cláusula vazia é idêntica à constante falsa, $\bot$.

Note que uma cláusula da forma

$$\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k \vee p_1 \vee \ldots \vee p_l,$$

onde q_i, p_j são átomos, pode ser equivalentemente reescrita na forma implicativa

$$(q_1 \wedge \ldots \wedge q_k) \rightarrow (p_1 \vee \ldots \vee p_l).$$

Uma fórmula A está na *forma mormal conjuntiva* ou *forma clausal* se for uma conjunção de cláusulas,

$$A = \bigwedge_{k=1}^{m} L_1 \vee \ldots \vee L_{n_k}$$

Por convenção, no caso de a fórmula A ser a conjunção de zero cláusulas, então $A = \top$, a constante verdadeira.

Qualquer fórmula da lógica proposicional clássica pode ser reduzida a uma outra fórmula equivalente que está na FNC, conforme mostra o resultado a seguir.

Teorema 3.3.1 Para toda fórmula da lógica proposicional clássica B, existe uma fórmula A na FNC que é equivalente a B, $A \equiv B$.

Demonstração: A prova é obtida fornecendo-se o algoritmo 3.2 de conversão de uma fórmula B em uma fórmula equivalente na FNC. Note que todas as transformações do algoritmo são, na realidade, equivalências notáveis listadas na Definição 1.5.1 e, portanto, a fórmula A obtida ao final de todas as substituições é equivalente à fórmula B.

No algoritmo 3.2, a linha 2 nos garante que A não possui o símbolo $\rightarrow$. As linhas 3 e 4 nos garantem que, em A, a negação só pode estar aplicada aos átomos. Uma fórmula nesse formato é dita na forma normal da negação (FNN).

Por fim, a distributividade na linha 5 nos assegura que A possui apenas conjunções de cláusulas e, portanto, A está na FNC. ■

Algoritmo 3.2 Transformação na FNC Sem Novos Átomos

Entrada: Uma fórmula B.

Saída: Uma fórmula A na FNC, $B \equiv A$.

1: **para todas** as subfórmulas X, Y, Z de B **faça**

2: Redefinir "$\rightarrow$" em termos de "$\vee$" e "$\neg$":

$$(X \rightarrow Y) \mapsto (\neg X \vee Y)$$

3: Empurrar as negações para o interior por meio das leis de De Morgan:

$$\neg(X \vee Y) \mapsto \neg X \wedge \neg Y$$
$$\neg(X \wedge Y) \mapsto \neg X \vee \neg Y$$

4: Eliminação da dupla negação:

$$\neg\neg X \mapsto X$$

5: Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$:

$$X \vee (Y \wedge Z) \mapsto (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

6: **fim para**

7: A fórmula A é obtida quando não há mais substituições possíveis.

O algoritmo 3.2, apesar de sempre gerar uma fórmula na FNC, pode gerar fórmulas exponencialmente maiores que a fórmula de entrada. As substituições dos passos 2, 3 e 4 não causam aumento no tamanho da fórmula. Porém, o passo 5, o da distributividade, causa a duplicação da subfórmula X, que por sua vez poderá ser do formato $(X_1 \wedge X_2)$, que poderá gerar nova duplicação. Essa duplicação, se repetida diversas vezes, pode gerar uma explosão exponencial no tamanho da fórmula.

Infelizmente, sem aumentar o número de átomos em uma fórmula, a conversão de B para a FNC sempre poderá gerar uma fórmula A equivalente a B exponencialmente maior que a fórmula original B. No entanto, se permitirmos a inserção de novos símbolos proposicionais, podemos gerar uma fórmula A equivalente a B cujo tamanho será apenas uma função linear do tamanho inicial da fórmula B. Essa nova conversão para a FNC é feita pelo algoritmo 3.3.

Algoritmo 3.3 Transformação Linear para FNC com Adição de Novos Átomos

Entrada: Uma fórmula B.

Saída: Uma fórmula A na FNC, $B \equiv A$.

1: **para todas** as subfórmulas X, Y, Z de B **faça**

2: Redefinir "$\rightarrow$" em termos de "$\vee$" e "$\neg$":

$$(X \rightarrow Y) \mapsto (\neg X \vee Y)$$

3: Empurrar as negações para o interior por meio das leis de De Morgan:

$$\neg(X \vee Y) \mapsto \neg X \wedge \neg Y$$
$$\neg(X \wedge Y) \mapsto \neg X \vee \neg Y$$

4: Eliminação da dupla negação:

$$\neg\neg X \mapsto X$$

5: Inserção de **novo** átomo p:

$$X \vee (Y \wedge Z) \mapsto (X \vee p) \wedge (\neg p \vee X) \wedge (\neg p \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee p)$$

6: **fim para**

7: A fórmula A é obtida quando não há mais substituições possíveis.

Note que a única diferença entre o algoritmo 3.3 e o algoritmo 3.2 está na linha 5. Na segunda versão, introduzimos um novo símbolo atômico p, ou seja, um símbolo atômico p que não ocorre na fórmula, de forma que $p \leftrightarrow (Y \wedge Z)$. A fórmula $p \leftrightarrow (Y \wedge Z)$, segundo o exemplo a seguir, quando posta na forma clausal, gera $(\neg p \vee Y) \wedge (\neg p \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee p)$. Se essa substituição for feita apenas quando X, Y e Z já estiverem no formato clausal, ela não gerará duplicação de fórmulas, mas somente apenas um aumento linear no tamanho da fórmula.

Como exemplo, iremos decompor a fórmula $p \leftrightarrow (Y \wedge Z)$ no formato clausal. Inicialmente, desmembramos o conectivo $\leftrightarrow$ em dois, gerando a fórmula

$$(p \rightarrow (Y \wedge Z)) \wedge (Y \wedge Z \rightarrow p).$$

O próximo passo é a eliminação do conectivo $\rightarrow$, obtendo

$$(\neg p \vee (Y \wedge Z)) \wedge (\neg(Y \wedge Z) \vee p).$$

Em seguida, por meio das leis de De Morgan, empurramos a negação adentro, obtendo

$$(\neg p \vee (Y \wedge Z)) \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee p).$$

O segundo elemento já está no formato clausal, e podemos nos concentrar agora no primeiro elemento. Nesse caso, não há dupla negação e aplicaremos a distribuição de $\vee$ sobre $\wedge$, obtendo a fórmula final contendo três cláusulas

$$(\neg p \vee Y) \wedge (\neg p \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee p).$$

Note que as duas primeiras cláusulas correspondem a $p \rightarrow Y$ e $p \rightarrow Z$, enquanto a terceira cláusula corresponde a $Y \wedge Z \rightarrow p$.

Para satisfazer uma fórmula no formato clausal, basta satisfazer um literal em cada uma de suas cláusulas. Por outro lado, para falsificar uma fórmula no formato clausal, basta falsificar todos os literais de uma única cláusula. Esses fatos tornam o formato clausal bastante útil para a representação e solução de problemas envolvendo fórmulas proposicionais. É freqüente considerar uma fórmula como um *conjunto* de cláusulas, e não uma conjunção delas. Para satisfazer o conjunto C de cláusulas, é necessário satisfazer cada cláusula $c \in C$.

Existem fragmentos importantes das fórmulas em formato clausal que iremos mencionar a seguir: as cláusulas de Horn e as k-cláusulas.

Cláusulas de Horn

Cláusulas de Horn são cláusulas contendo, no máximo, um literal positivo. Por exemplo, a fórmula que obtivemos pela decomposição de $p \leftrightarrow (Y \wedge Z)$ no formato clausal, assumindo que Y e Z sejam fórmulas atômicas, gerou um conjunto de três cláusulas, $\neg p \vee Y$ $\neg p \vee Z$ e $\neg Y \vee \neg Z \vee p$, todas elas cláusulas de Horn com exatamente um literal positivo cada.

Em geral, as cláusulas de Horn podem ser de três tipos:

Fatos: são cláusulas unitárias, em que o único literal é positivo. São usadas para realizar afirmações sobre a veracidade de algum átomo.

Regras: são cláusulas da forma

$$\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q$$

ou, equivalentemente,

$$p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q.$$

Nesse caso, q é chamado de *cabeça* da regra e $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ é chamado de *corpo da regra*.

Fatos e regras são os componentes principais das bases de conhecimento, uma generalização dos bancos de dados relacionais.

Consultas ou Restrições: são cláusulas de Horn sem nenhum átomo positivo, ou seja, do formato

$$\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_n \text{ ou, equivalentemente, } \neg(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n).$$

No caso de bases de conhecimento, as consultas à base possuem esse formato, pois são computadas por refutação. Em bases de conhecimento com restrições de integridade, cláusulas sem átomos positivos indicam uma conjunção de fatores indesejável, que pode levar o sistema como um todo a um estado inconsistente.

As cláusulas de Horn possuem as seguintes propriedades, que fazem com que a sua manipulação seja muito mais simples do que a manipulação de cláusulas genéricas.

Lema 3.3.1 Seja C um conjunto de cláusulas de Horn sem nenhum fato (ou seja, sem nenhuma cláusula unitária positiva). Então, C é satisfazível.

Demonstração: Basta fazer todos os átomos de C falsos. Como cada cláusula de C possui pelo menos um literal negativo, esse literal estará satisfeito, e assim todas as cláusulas estão satisfeitas. ■

Lema 3.3.2 Seja C um conjunto de cláusulas de Horn contendo um fato p. Seja C' o conjunto de cláusulas obtidas a partir de C removendo-se $\neg p$ do corpo de todas as cláusulas. Então, $C \equiv C'$.

Demonstração: É fácil notar que $C \models c$ para todo $c \in C'$. Se $c \in C$, a demonstração é trivial. Por outro lado, se $c = L_1 \vee \ldots \vee L_n$ e $A = L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee \neg p \in C$, é imediato que $A, p \models c$. Logo, $C \models C'$.

Para provar que $C' \models C$, seja ν uma valoração tal que $\nu(C) = 0$. Então, há uma cláusula $c \in C$ tal que $\nu(c) = 0$. Se $c \in C'$, é imediato que $\nu(C') = 0$. Caso contrário, $c \vee \neg p \in C'$; nesse caso, se $\nu(p) = 1$, então $\nu(c \vee \neg p) = \nu(C') = 0$, e se $\nu(p) = 0$, temos a cláusula unitária $p \in C \cap C'$ falsificada por ν. Em ambos os casos, temos que $\nu(C') = 0$. Então, toda valoração que falsifica C também falsifica C', o que equivale a dizer que $C' \models C$. ■

A partir dessas propriedades, obtemos uma forma eficiente de decidir a satisfazibilidade/insatisfazibilidade de um conjunto de cláusulas de Horn, apresentado no algoritmo 3.4.

Algoritmo 3.4 HornSAT(C)

Entrada: Um conjunto C de cláusulas.
Saída: `verdadeiro` se C é satisfazível, ou `falso` caso contrário.

se $\perp \in C$ **então**
  retorne `falso`
fim se
se C não contém fatos **então**
  retorne `verdadeiro`
fim se

Seja $p \in C$ um fato.
Seja C' obtida de C removendo $\neg p$ de suas cláusulas.
/* Note que se houver uma cláusula $\neg p \in C$, ela se transformará na cláusula vazia $\perp \in C'$. */
retorne *HornSAT*(C')

Se N é o número de átomos em C, o algoritmo HornSAT será chamado recursivamente, no máximo, N vezes, e portanto o método decide a satisfazibilidade de um conjunto de cláusulas de Horn em tempo linear como número de átomos. Isso é uma sensível melhora no algoritmo de tabelas da verdade, que pode precisar de 2^N passos.

k-Cláusulas

Um conjunto de cláusulas no qual todas as cláusulas possuem, no máximo, k literais é chamado de um conjunto de k-cláusulas.

Conjuntos de 1-cláusulas são triviais de se lidar. Conjuntos de 2-cláusulas são conjuntos cuja satisfazibilidade pode ser decidida eficientemente, e nesse caso, o problema é chamado de 2SAT. O algoritmo 3.5 apresenta uma solução do problema 2SAT. Esse algoritmo tem a seguinte propriedade: uma vez escolhida uma valoração de um átomo que não falsifica nenhuma cláusula após a propagação (simplificação) de seus efeitos, não há mais necessidade de se alterar a valoração desse átomo.

Algoritmo 3.5 2SAT(C)

Entrada: Um conjunto C de 2-cláusulas
Saída: `verdadeiro` se C é satisfazível, ou `falso`, caso contrário.

C := Simplifica(C)
enquanto $\perp \notin C$ e $C \neq \varnothing$ **faça**
  Escolha um átomo p qualquer em C
  $C' :=$ Simplifica$(C \cup \{p\})$
  se $\perp \in C'$ **então**
    $C :=$ Simplifica$(C \cup \{\neg p\})$
  senão
    $C := C'$
  fim se
fim enquanto
se $\perp \in C$ **então**

```
    retorne falso
senão
    retorne verdadeiro
fim se
```

O algoritmo 2SAT utiliza uma função de simplificação apresentada no algoritmo 3.6. Essa simplificação é conhecida como BCP (*boolean constraint propagation*) e consiste na propagação de cláusulas unitárias (positivas ou negativas). Dado um conjunto C de cláusulas com uma cláusula unitária u, para que C seja satisfeito é necessário que u seja satisfeito. Portanto, podemos simplificar C de duas maneiras:

1. Eliminando de C todas as cláusulas contendo u, pois estas já estão satisfeitas
2. Apagando $\neg u$ das demais cláusulas, pois $\neg u$ é falso

Com isso, temos um conjunto de cláusulas menor, com pelo menos um átomo a menos. Note que essa simplificação se aplica a *qualquer* conjunto de cláusulas, não apenas a k-cláusulas.

Conjuntos de k-cláusulas, com $k \geqslant 3$, não possuem nenhum algoritmo eficiente conhecido para decidir sua satisfazibilidade. Uma propriedade importante é que todo conjunto de k-cláusulas, com $k > 3$, pode ser transformado em um conjunto equivalente de 3-cláusulas por meio da introdução de novos átomos. Essa transformação será deixada como um exercício para o leitor.

Algoritmo 3.6 Simplifica(C)

Entrada: Um conjunto C de cláusulas (quaisquer)
Saída: Um conjunto de cláusula C', $C' \equiv C$, sem cláusulas unitárias.

```
C' := C
enquanto Existe uma cláusula unitária u ∈ C faça
    C' := C' − {c|u é literal em c}
    para toda cláusula c = ¬u ∨ c' faça
        C' := C' ∪ {c'} − c
    fim para
fim enquanto
retorne C'
```

3.3.2 Forma Normal Disjuntiva

A forma normal disjuntiva (FND) é muito utilizada no projeto de circuitos booleanos lógicos. Em particular, o método de Quine-McCluskey de minimização de funções booleanas para otimização de circuitos lógicos requer que sua entrada esteja na FND.

A FND é definida como uma disjunção de conjunções de literais:

$$\bigvee_{i=1}^{N} L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_{n_i}.$$

Uma conjunção de literais da forma $L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_{n_i}$ é muitas vezes chamada de *cláusula dual*. É também usual representar fórmulas na FND como *polinômios*, em que a conjunção é representada pela multiplicação $(\cdot)$, a disjunção pela adição $(+)$ e a negação por uma barra sobre o átomo $(\bar{x})$.

Dessa forma, a fórmula na FND $(\neg p1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$ pode ser representada pelo polinômio $\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$.

Como no caso da forma clausal, toda fórmula pode ser transformada em uma fórmula equivalente na FND. A FND pode ser obtida de forma muito similar à obtenção da FNC, conforme o algoritmo 3.7.

Algoritmo 3.7 Transformação na FND Sem Novos Átomos

Entrada: Uma fórmula B.

Saída: Uma fórmula A na FND, $B \equiv A$.

1: **para todas** as subfórmulas X, Y, Z de B **faça**

2: Redefinir "$\rightarrow$" em termos de "$\vee$" e "$\neg$":

$$(X \rightarrow Y) \mapsto (\neg X \vee Y)$$

3: Empurrar as negações para o interior por meio das leis de De Morgan:

$$\neg(X \vee Y) \mapsto \neg X \wedge \neg Y$$
$$\neg(X \wedge Y) \mapsto \neg X \vee \neg Y$$

4: Eliminação da dupla negação:

$$\neg\neg X \mapsto X$$

5: Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$:

$$X \wedge (Y \vee Z) \mapsto (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

6: **fim para**

7: A fórmula A é obtida quando não há mais substituições possíveis.

Note que a única diferença entre o algoritmo 3.7 e o algoritmo 3.2 utilizado para transformar fórmulas no formato clausal está no passo 5, em que a distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$ é aplicada para obter a FND. Esse algoritmo não introduz novos átomos e, devido à distributividade, possui o mesmo problema do algoritmo 3.2, ou seja, o tamanho da fórmula produzida na FND ser exponencialmente maior que o tamanho da fórmula original. Para evitar esse problema, pode-se utilizar a mesma técnica do algoritmo 3.3 de introdução de novos átomos, a qual será deixada como exercício.

Exercícios

3.5 Transformar no formato clausal, introduzindo, se necessário, novos átomos.

(a) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(b) $\neg(p \wedge \neg p)$

(c) $(p \vee q) \rightarrow \neg(q \vee r)$

3.6 Verificar qual das fórmulas anteriores, no formato clausal, é uma cláusula de Horn.

3.7 Apresentar uma fórmula cuja forma clausal sem adição de novos átomos seja exponencialmente maior no tamanho. Apresentar, em seguida, a mesma fórmula no formato clausal com adição de novos átomos.

3.8 Verificar se as fórmulas a seguir são satisfazíveis.

(a) $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3$
$p_2 \vee \neg p_4$
$p_3 \vee \neg p_4$
$p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
$p_5 \vee \neg p_7$
$p_6 \vee \neg p_7$

(b) $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3$
$p_2 \vee \neg p_4$
$p_3 \vee \neg p_4$
$p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6$
$p_5 \vee \neg p_7$
$p_6 \vee \neg p_7$
$\neg p_7 \vee \neg p_1$
$p_7 \vee p_4$

3.9 Expandir a fórmula a seguir no formato em 2-cláusulas e verificar sua satisfazibilidade.

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{3} \bigvee_{j=1}^{2} p_{ij}\right) \wedge \neg \left(\bigvee_{i=1}^{2} \bigvee_{k=i}^{3} \bigvee_{j=1}^{2} p_{ij} \wedge p_{kj}\right)$$

3.10 Fornecer um algoritmo que transforma uma cláusula qualquer de tamanho $k > 3$ em um conjunto de 3-cláusulas, introduzindo novos átomos.

Aplicar o seu algoritmo na transformação da seguinte cláusula:

$$p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4 \neg p_5.$$

3.11 Fornecer um algoritmo que transforme uma fórmula qualquer na FND sem aumentar exponencialmente o tamanho da fórmula, introduzindo eventualmente novos átomos.

3.4 Resolução

Resolução é uma regra de inferência que requer que as fórmulas estejam no formato clausal. Nesse caso, consideramos uma *teoria* um conjunto de

cláusulas. A ordem dos literais dentro das cláusulas não é considerada importante, e portanto podemos reordenar as cláusulas da forma mais conveniente, sem que isso incorra em "custos" computacionais ou lógicos.

Quando queremos ressaltar a presença de um literal L em uma cláusula C, podemos escrever $C = L \vee C'$, em que C' representa os literais restantes na cláusula; essa representação também engloba o caso limite em que $C = L$, onde C' seria a cláusula vazia $\perp$. Como a ordem não é importante, podemos supor que o literal L ocorre em qualquer posição em C e, em particular, na primeira posição.

Com essa notação, podemos definir a regra auxiliar da *contração* de cláusulas, sendo

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C} \text{ (Contração)}$$

Essa regra permite inferir novas cláusulas simplesmente apagando ou *contraindo* literais que ocorram mais de uma vez na cláusula.

A *regra da resolução* é uma regra de inferência envolvendo duas cláusulas que contenham literais sobre o mesmo átomo, mas de polaridade oposta. Dessa forma, a regra da resolução é dada por

$$\frac{A \vee p \qquad \neg p \vee B}{A \vee B} \text{ (Resolução)}$$

As fórmulas $A \vee p$ e $\neg p \vee B$ são chamadas de *resolventes*, e a fórmula inferida $A \vee B$ é chamada de *resoluta*. Esse passo de inferência *não* provoca a eliminação de suas premissas, ou seja, uma fórmula pode ser usada mais de uma vez como resolvente.

Para definirmos a *inferência por resolução*, precisamos inicialmente de uma notação. Dada uma cláusula C, representamos por $\sim C$ a negação de C transformada no formato clausal. Ou seja, se $C = p$, $\sim C = \{\neg p\}$, e se, por exemplo, $C = \neg p \vee q \vee \neg r$, $\sim C$ é o conjunto de cláusulas unitárias $\sim C = \{p, \neg q, r\}$.

Dizemos que uma cláusula C pode ser inferida por resolução de um conjunto de cláusulas Γ, o que é representado por $\Gamma \vdash_{res} C$, se a partir do conjunto $\Gamma \cup \{\sim C\}$, por operações de resolução e contração, pudermos obter a cláusula vazia $\perp$. Portanto, o método de inferência por resolução é chamado de um método de inferência por refutação, pois podemos inferir C de Γ se, a partir de Γ e a negação de C, obtivermos uma inconsistência.

Como primeiro exemplo de inferência por resolução, apresentamos a inferência $\vdash_{res} p \vee \neg p$. Para tanto, computamos $\sim (p \vee \neg p) = \{\neg p, p\}$ e em apenas um passo de resolução obtemos:

$$\frac{\neg p \qquad p}{\bot}.$$

Como segundo exemplo, considere a inferência $p \vee s \vee r, \neg s \vee r \vdash_{res} p \vee r$. Inicialmente, computamos $\sim (p \vee r) = \{\neg p, \neg r\}$ e então procedemos a diversos passos de resolução sobre o conjunto $\{p \vee s \vee r, \neg s \vee r, \neg p, \neg r\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee s \vee r \qquad \neg p}{s \vee r} \qquad \neg s \vee r}{r \vee r}}{r} \qquad \neg r}{\bot}$$

O primeiro passo de resolução entre $p \vee s \vee r$ e $\neg p$ gera $s \vee r$, que é resolvido com $s \vee r$, obtendo-se $r \vee r$. Essa fórmula é então contraída e resolvida com $\neg r$, chegando-se finalmente à contradição, $\bot$.

Por causa da sua simplicidade, o método de resolução tem sido um dos preferidos para automatização, sendo o método utilizado pela linguagem de programação em lógica Prolog e por provadores de teoremas como o OTTER. Em ambos os casos, na realidade, o método é aplicado mais genericamente à lógica de primeira ordem, o que será discutido na segunda parte deste livro.

No entanto, a resolução apresenta dois grandes desafios computacionais:

- A escolha dos resolventes a cada passo de resolução.
- A diminuição do espaço de busca.

A escolha dos resolventes gera distintas *estratégias computacionais*. Uma das estratégias mais usadas é tentar utilizar a *resolução unitária* o máximo possível. A resolução unitária é aquela em que ao menos um dos resolventes é uma cláusula unitária. A resolução unitária tem a vantagem de sempre gerar fórmula de tamanho menor que o resolvente não-unitário.

O exemplo anterior da inferência de $p \vee s \vee r, \neg s \vee r \vdash_{res} p \vee r$ poderia ser realizado apenas com resoluções unitárias:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee s \vee r \qquad \neg p}{s \vee r} \qquad \neg r}{s} \qquad \neg s \vee r}{r} \qquad \neg r}{\bot}$$

Note que a cláusula unitária $\neg r$ foi utilizada duas vezes, o que corresponde à utilização da regra da contração sobre $r \vee r$ na prova anterior. Infelizmente, nem toda inferência por resolução pode ser feita apenas com resoluções unitárias. Ver exercícios a seguir sobre isso.

Em algumas referências na literatura, a resolução unitária é descrita como uma resolução em que a cláusula unitária deve ser negativa. O método apresentado também é conhecido na literatura como *propagação unitária* ou BCP (*boolean constraint propagation*).

Outra estratégia possível é o uso de *resoluções lineares*. Em uma resolução linear, a fórmula resoluta em um passo deve ser usada como resolvente no passo seguinte, de forma que a árvore de prova é degenerada em uma linha, de forma que os ramos à direita são sempre constituídos de uma única fórmula. O exemplo anterior de resolução unitária também consiste em uma resolução linear.

O segundo desafio computacional é a diminuição do espaço de busca. O fato de uma fórmula ter sido usada como resolvente em um determinado passo de resolução não descarta a possibilidade de essa fórmula ser utilizada como resolvente em algum outro passo de resolução. Como a própria fórmula resoluta também é uma candidata a resolvente, o espaço de busca de resolventes pode aumentar muito após vários passos de resolução. Além disso, muitos possíveis resolventes geram fórmulas que não serão nunca utilizadas na derivação final da contradição, tornando-se fórmulas inúteis. Faz-se necessário uma estratégia de restrição desse espaço de busca para aumentar a eficiência da resolução.

A principal estratégia utilizada é o descarte de fórmulas por *englobamento* (traduzido do inglês, *subsumption*). Dadas duas cláusulas C_1 e C_2, dizemos que C_1 engloba C_2 se todos os literais que ocorrem em C_1 também ocorrerem em C_2, o que é representado por $C_1 \subset C_2$.

A estratégia de diminuição do espaço de busca de resolventes diz que, se temos cláusulas C_1 e C_2 tais que $C_1 \subset C_2$, então podemos eliminar a cláusula englobada C_2. Essa estratégia é correta, pois temos que, se $C_1 \subset C_2$, então $C_1 \models C_2$ e, ao descartarmos C_2, não estamos perdendo nenhuma informação.

Por exemplo, se o espaço de busca contém as fórmulas $a \vee b \vee c, a \vee \neg p, b \vee p$, a resolução das duas últimas gera $a \vee b$, que engloba a primeira fórmula, e portanto essa fórmula será descartada, gerando o novo espaço de busca que contém apenas $a \vee b, a \vee \neg p, b \vee p$.

No caso da resolução unitária, a fórmula resoluta sempre engloba o resolvente não-unitário, como pode ser visto no exemplo anterior. Assim, a resolução unitária descarta um resolvente em favor de um resoluto, e dessa forma ela não aumenta o número de fórmulas no espaço de busca, além de diminuir o tamanho das fórmulas nesse espaço.

Exercícios

3.12 Mostrar que o passo de resolução é correto, ou seja, mostrar para toda valoração v que, se $v(A \vee p) = v(B \vee \neg p) = 1$, então necessariamente $v(A \vee B) = 1$.

Analogamente, provar a correção da regra de contração.

3.13 Provar pelo método da resolução todos os axiomas da axiomatização da Seção 2.2.

3.14 Concluir, a partir dos dois exercícios anteriores, que a resolução é correta e completa em relação às funções de valoração.

3.15 Verificar quais dos seqüentes a seguir podem ser resolvidos por resolução linear. Dos restantes, identificar quais podem ser resolvidos ou não por resolução.

(a) $\neg p \vee q, \neg q \vee s \vdash \neg p \vee s$

(b) $\neg s \vee p, s \vee p, \neg s \vee r, s \vee r, \neg r \vee t \vee \neg p \vdash t$

(c) $\neg p \vee q, \neg q \vee s \vdash s$

(d) $\neg s \vee p, s \vee p, \neg p \vee t \vee r, \neg p \vee t \vee \neg r \vdash t$

3.5 O Problema SAT

Os maiores avanços recentes na área de provadores de teoremas proposicionais não foram feitos na proposta de algum método de inferência, mas na melhoria da eficiência de um velho algoritmo para verificar a satisfazibilidade de uma fórmula. Este é conhecido como problema SAT e foi o primeiro problema NP-completo da literatura.

Diversos algoritmos têm sido usados para essa tarefa, os quais se dividem em duas categorias. Os algoritmos *completos* são aqueles que sempre conseguem decidir corretamente se um conjunto de cláusulas é decidível ou não. Os algoritmos *incompletos* são aqueles que, se a fórmula for satisfazível, então sempre conseguem apresentar uma valoração; porém, se a fórmula for insatisfazível, o programa é capaz de não terminar. A vantagem dos algoritmos incompletos é que eles são capazes de ser muito mais rápidos que os algoritmos completos.

3.5.1 O Método DPLL

O algoritmo DPLL – muitas vezes chamado de método Davis-Putnam – data de 1962 e vem sendo implementado com as mais diferentes heurísticas desde então, o que demonstra que é um algoritmo que aceita muito bem novas heurísticas, e já ganhou diversas competições de implementações na resolução de problemas como SAT, planejamento e outros problemas NP-completos que podem ser traduzidos no problema SAT.

A idéia básica do algoritmo é a de construir uma valoração para uma fórmula fornecida como um conjunto de cláusulas. Inicialmente, todos os átomos recebem a valoração "*", representando um valor indefinido. A cada iteração do algoritmo, um literal L é escolhido, e faz-se $\nu(L) = 1$; note que, se esse literal for negativo, da forma $\neg q$, isso significa fazer $\nu(q) = 0$. Com essa nova valoração, procede-se à simplificação da fórmula. Se essa valoração satisfizer todas as cláusulas, o que significa que a simplificação levou ao conjunto vazio de cláusulas, tem-se uma valoração que satisfaz a fórmula inicial. Se alguma cláusula for falsificada pela valoração, altera-se a escolha para $\nu(L) = 0$. Se nenhuma cláusula foi falsificada, nem todas as cláusulas foram satisfeitas, procede-se à próxima escolha de literal. O processo pára quando uma valoração foi encontrada, em cujo caso a fórmula é satisfazível, ou quando não há mais átomos para serem testados, em cujo caso a fórmula é insatisfazível. Esse procedimento está ilustrado no algoritmo 3.8.

Algoritmo 3.8 DPLL(F)

Entrada: Uma fórmula F na forma clausal (FNC).
Saída: `verdadeiro`, se F é satisfazível, ou `falso`, caso contrário.

Fazer $v(p) =$ "*" para todo átomo p
$F' =$ Simplifica(F)
se $F' = \varnothing$ **então**
  retorne `verdadeiro`
senão se F' contém uma cláusula vazia (falsa) **então**
  retorne `falso`
fim se

/* Escolha não-determinística */
Escolha um literal L com $v(L) =$ "*"

/* Chamadas recursivas */
se DPLL($F' \cup \{L\}$) = `verdadeiro` **então**
  retorne `verdadeiro`
senão se DPLL($F' \cup \{\neg L\}$) = `verdadeiro` **então**
  retorne `verdadeiro`
senão
  retorne `falso`
fim se

Esse algoritmo também é um algoritmo não-determinístico, pois não especifica qual o método para escolher o literal indefinido que será instanciado a cada passo. O algoritmo 3.8 é apresentado de forma recursiva, pois, uma vez escolhido o literal a ser instanciado, o procedimento se auto-invoca.

O método DPLL é um método chamado de SAT-completo, ou seja, ele sempre é capaz de decidir corretamente se um conjunto de cláusulas é satisfazível ou não.

Quando a seleção de um literal gera uma falha (ou seja, uma valoração que falsifica alguma cláusula), ocorre um *retrocesso* ou *backtracking*. Em termos de eficiência, é sempre melhor que esse retrocesso ocorra quando um menor número de átomos já foi selecionado, pois isso elimina uma parte maior do espaço de busca de valorações de variáveis.

Outra observação é que o procedimento de simplificação não foi especificado. Na maioria dos algoritmos, esse procedimento inclui a simplificação

feita pela propagação do literal instanciado, o que pode ser visto como uma resolução unitária com o literal recém-instanciado, também chamada de BCP (*boolean constraint satisfaction*). Esse algoritmo de simplificação é apresentado no algoritmo 3.9.

Algoritmo 3.9 Simplifica(F)

Entrada: Uma fórmula F na forma clausal (FNC).
Saída: Uma fórmula na forma clausal equivalente a F, porém mais simples.

/* A simplificação ocorre enquanto F possuir uma cláusula unitária formada de apenas um literal */
enquanto F possui alguma cláusula unitária L **faça**
  Apaga de F toda cláusula que contém L. /* Simplificação 1 */
  Apaga ¬L das cláusulas restantes. /* Simplificação 2 */
fim enquanto
retorna F.

Com relação ao algoritmo 3.9, note que um passo de simplificação pode gerar diversas outras cláusulas unitárias. Por exemplo, se tivermos as cláusulas

$$\neg x_1$$
$$x_1 \vee x_2$$
$$x_1 \vee x_3$$
$$\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$$
$$\neg x_1 \vee x_4$$

a cláusula unitária inicial permite o processo de simplificação. Pela simplificação 1, a primeira e a última cláusula serão apagadas, e pela simplificação 2, x_1 será apagado da segunda e terceira cláusulas, gerando

$$x_2$$
$$x_3$$
$$\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$$

em que temos duas novas cláusulas unitárias. Se escolhermos x_2 primeiro (a ordem é irrelevante nesse caso, apesar de o programa ser, em tese, não-determinístico) obtemos

$$x_3$$

$$\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$$

e, for fim, a forma simplificada

$$\neg x_4 \vee \neg x_5.$$

Além dessa simplificação, algumas outras podem ser usadas:

- **Eliminação de Literais Puros**: Um literal é dito puro se ocorre em todas as cláusulas sempre na mesma polaridade. Nesse caso, basta fazer esse literal verdadeiro e apagar todas as cláusulas que o contêm.

- **Resolução de Literais Simples**: Um literal é simples se ocorre na forma positiva em uma única cláusula ou na forma negativa em uma única cláusula. Nesse caso, o literal é eliminado, resolvendo-se todas as cláusulas que o contêm. Note que isso não aumenta o número de cláusulas, mas diminui o número de átomos e, portanto, a complexidade do problema.

Essas simplificações não são aplicadas, em geral, a cada iteração do algoritmo resolvedor de SAT, mas algumas implementações as aplicam apenas na simplificação inicial ao problema.

Diversas heurísticas (ou estratégias) são aplicadas para selecionar o literal que será instanciado em um passo do algoritmo DPLL. A seguir, apresentamos algumas delas:

- **Heurística MOM.** Máximo número de Ocorrências de Mínimo comprimento. Essa heurística é de fácil implementação. A idéia básica é selecionar o literal que apresente o maior número de ocorrências em cláusulas de tamanho mínimo e, com isso, aumentar a probabilidade de detectar uma cláusula falsificável com antecedência. As cláusulas de tamanho mínimo têm, no mínimo, tamanho dois, pois as cláusulas unitárias são eliminadas pela simplificação.

- **Heurística SATO.** É uma variação da heurística MOM. Nesse caso, seja $f(p)$ o número de cláusulas de tamanho mínimo que contêm p, mais 1. A heurística calcula para todos os átomos o valor de $f(p) * f(\neg p)$ e escolhe o átomo p que maximiza esse produto. Por fim, a decisão sobre fazer p verdadeiro ou falso primeiro é tomada com base no maior valor, respectivamente, de $f(p)$ ou $f(\neg p)$.
  Para melhorar a eficiência da decisão do literal selecionado, algumas implementações não consideram o produto $f(p) * f(\neg p)$ em todas as cláusulas de tamanho mínimo, mas apenas uma fração destas.

- **Desempate por simulação.** No caso de uma das heurísticas anteriores gerar mais de um literal candidato para seleção, uma possibilidade é simular a aplicação da simplificação em cada uma delas e selecionar o literal L que causa, pela propagação unitária e simplificação, o maior número de cláusulas unitárias.

3.5.2 Aprendizado de Novas Cláusulas

`Os sábios aprendem com as escolhas malfeitas.`

Toda vez que derivamos uma contradição, ou seja, que um ramo da busca DPLL leva à falsificação de uma cláusula, pode-se lamentar a escolha dos literais que nos levaram a esse beco sem saída.

Alternativamente, podemos aprender com nossos erros. Em particular, aprendemos que os literais escolhidos levam à contradição e que as cláusulas envolvidas contêm informação relevante para evitar a repetição das más escolhas.

Podemos adicionar essa informação aprendida ao problema. No contexto do algoritmo DPLL, *aprender* significa *adicionar novas cláusulas ao problema*, sem aumentar o número de átomos.

O objetivo do aprendizado é melhorar a eficiência da prova, encolhendo o espaço de busca. Esse encolhimento é decorrente da adição de cláusulas novas que proíbem a repetição de más escolhas. Cada vez que derivamos uma contradição, podemos aprender uma ou mais cláusulas. Veremos a seguir dois métodos complementares de aprendizado de novas cláusulas.

Aprendendo das Más Escolhas

O método DPLL pode ser visto como a tentativa de construir uma valoração que satisfaça um conjunto de cláusulas. Nesse processo, a cada momento temos uma *valoração parcial*, V, que inicialmente é vazia. Essa valoração parcial

é expandida de duas maneiras: pelas escolhas de literais e pela propagação de cláusulas unitárias. Por outro lado, quando uma contradição é encontrada, a valoração parcial é contraída.

Por exemplo, suponha que iniciamos com a valoração parcial

$$V = \varnothing.$$

No primeiro passo de escolha, escolhemos o literal a_1:

$$V = \{a_1\}$$

e por propagação unitária, obtemos $a_2, \ldots, a_{k_a}$:

$$V = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_a}\}.$$

Supondo que V não seja contraditório, ou seja, não contenha dois literais opostos, continuamos o processo com uma nova escolha, o literal b_1, que um novo ciclo de propagação unitária expande V com $b_2, \ldots, b_{k_b}$

$$V = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_a}, b_1, b_2, \ldots, b_{k_b}\}.$$

Supondo agora que V, nesse ponto, falsifica uma cláusula – o que é equivalente a termos em V dois literais opostos, x e $\neg x$ –, desfazemos todos os efeitos da propagação e invertemos a última escolha – no caso, a escolha do literal b_1

$$V = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_a}, \sim b_1\};$$

note que $\sim b_1$ não aparece em negrito na valoração parcial V, pois o negrito se destina a literais escolhidos, e nesse caso $\sim b_1$ não é uma escolha, mas é a única opção que nos restou nessa valoração parcial, uma vez que sabemos que b_1 leva a uma contradição.

Nesse contexto, a derivação da contradição nos ensina que as escolhas simultâneas de a_1 e b_1 não são possíveis, o que pode ser codificado na fórmula $\neg(a_1 \wedge b_1)$, que corresponde à adição da cláusula

$$\sim a_1 \vee \sim b_1$$

Vamos ilustrar o processo de aprendizado com um exemplo mais concreto. Suponha que temos o seguinte conjunto de cláusulas:

$$p \vee q$$
$$p \vee \neg q$$
$$\neg p \vee t \vee s$$
$$\neg p \vee \neg t \vee s$$
$$\neg p \vee \neg s$$

e que temos a valoração parcial

$$V = \{\neg \mathbf{t}, \mathbf{p}\}$$

que por propagação unitária gera

$$V = \{\neg \mathbf{t}, \mathbf{p}, \underline{\neg s, s}\}$$

que é uma valoração contraditória que falsifica a terceira e quinta cláusulas. Nesse caso, vemos que a opção simultânea de $\neg t$ e p não é possível, ou seja, aprendemos a cláusula

$$t \vee \neg p,$$

que será adicionada ao conjunto de cláusulas. Nesse método de aprendizado, apenas os literais escolhidos, que estão representados pelo negrito na representação da valoração parcial, é que são usados no aprendizado, uma vez que os outros literais foram inferidos a partir deles.

Em geral, esse tipo de aprendizado *não* melhora muito a eficiência do resolvedor SAT, pois, no caso de termos k literais de escolha na valoração parcial, a forma clausal aprendida só será usada se $k - 1$ literais aparecerem em outro ramo da busca do DPLL, o que é uma situação pouco provável na prática. Esse tipo de aprendizado possui utilidade apenas em casos de *reinícios aleatórios*, descritos adiante. Outras técnicas de aprendizado mais úteis podem ser empregadas.

Aprendendo por Inferência

Cláusulas envolvidas em uma contradição trazem informação relevante que pode ser aprendida. Em particular, as cláusulas responsáveis pelo fechamento do ramo podem ser *resolvidas*. Nesse caso, aprendemos (e adicionamos à fórmula) a cláusula resultante da *resolução* de duas outras. Para isso, devemos armazenar novas informações na valoração parcial:

- Para cada literal obtido por propagação unitária, qual a cláusula que deu origem ao literal.
- Literais de escolha são associados a $\top$.

No mesmo exemplo anterior, as escolhas são representadas por:

$$V = \{(\neg \mathbf{t}, \top), (\mathbf{p}, \top)\}$$

Após a propagação linear que gerou a contradição, temos:

$$V = \{(\neg \mathbf{t}, \top), (\mathbf{p}, \top), \underline{(\neg s, \neg p \vee \neg s), (s, \neg p \vee t \vee s)}\}$$

Aprendemos a resolução das cláusulas associadas à contradição: $\neg p \vee \neg s$ e $\neg p \vee t \vee s$. Ou seja, adicionamos a seguinte cláusula à fórmula:

$$\neg p \vee t$$

que nesse exemplo em particular gerou a mesma cláusula aprendida pelo método anterior. No entanto, isso nem sempre acontece. Esse tipo de aprendizado por inferência, na prática, traz efeitos mais positivos sobre a eficiência, é o método de aprendizado que assumimos que estará sendo usado.

Podem-se aprender outras fórmulas, resultantes de outras resoluções, nem sempre com ganhos de eficiência.

3.5.3 O Método Chaff

O método chamado de Chaff trouxe melhorias de desempenho ao método DPLL. Existe uma implementação do Chaff livre na internet, chamada de zChaff, que ganhou diversos concursos de resolvedores SAT e que também pode ser adaptada a outros ambientes, como o de planejamento, e esse sistema também venceu várias competições de planejamento e inteligência artificial.

O Chaff é uma extensão do DPLL que utiliza aprendizado, e sua boa performance é devida aos seguintes elementos:

- Literais vigiados.
- Retrossaltos (*backjumping*).
- Reinícios aleatórios.

Biblioteca 118100 UniFMU ex2

- Heurística para lidar com aprendizado.

Analisaremos, a seguir, cada um desses métodos.

Literais Vigiados

No método Chaff, a parte principal do ganho de desempenho não está baseada em algoritmos sofisticados para redução do espaço de busca, mas em um desenho bastante eficiente da etapas cruciais do método DPLL: a propagação das cláusulas unitárias (também chamada anterior de *simplificação* ou, simplesmente, *propagação unitária*). Experimentos mostram que mais de 80% do tempo de execução de um método DPLL é destinado à propagação de cláusulas unitárias, e é nessa fase crítica que se devem investir os esforços de otimização.

A técnica dos literais vigiados tem como propriedades:

- Aceleração da propagação unitária.
- Falta de necessidade de apagar literais ou cláusulas.
- Falta de necessidade de vigiar todos os literais em uma cláusula.
- Retrocesso em tempo constante (muito rápido).

A lógica subjacente ao DPLL tem 3 valores verdade. Dada a valoração parcial

$$V = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$$

seja λ um literal qualquer. Então:

$$V(\lambda) = \begin{cases} 1(\text{verdade}) & \text{se } \lambda \in V \\ 0(\text{falso}) & \text{se } \bar{\lambda} \in V \\ *(\text{indefinido}) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os literais vigiados são uma estrutura de dados tal que:

- A cada instante, toda cláusula c tem exatamente dois literais selecionados: $\lambda_{c1}, \lambda_{c2}$.
- $\lambda_{c1}, \lambda_{c2}$ são escolhidos dinamicamente e mudam com o tempo.
- $\lambda_{c1}, \lambda_{c2}$ são *propriamente vigiados* sob a valoração parcial V se:

- Ambos são indefinidos; ou
- Ao menos, um deles é 1.

O comportamento dos literais vigiados é dinâmico. Inicialmente, $V = \varnothing$. Um par de literais vigiados é escolhido para cada cláusula. Essa escolha é sempre própria, pois todos os literais assim escolhidos são indefinidos.

Durante o processo normal do DPLL, há escolha de literais e propagação unitária, o que expande a valoração parcial V. Quando essa expansão ocorre, um ou ambos os literais vigiados podem ser falsificados. Se o par de literais vigiados de uma cláusula $\langle \lambda_{c1}, \lambda_{c2} \rangle$ torna-se impróprio, então o algoritmo de manutenção dos literais vigiados é acionado, da seguinte maneira: se há um ou mais literais vigiados falsificados, troca-se o par de literais vigiados, buscando, entre outros literais da cláusula, um outro par que restabeleça a vigia própria. Se nenhum par de literais vigiados próprios pode ser encontrado, então não há literais satisfeitos na cláusula, e duas situações podem ocorrer:

- Há um único literal indefinido na cláusula. Nesse caso, fazemos esse literal verdadeiro, e a valoração parcial V é expandida. Essa é a versão da propagação unitária com literais vigiados.
- Todos os literais foram falsificados. Nesse caso, procedemos ao retrocesso, que consiste unicamente na alteração de V, ou seja, apagamos as últimas propagações unitárias até encontrarmos em V um literal de escolha e invertemos essa escolha. Em seguida, continuamos com o DPLL normal, com novas propagações lineares e novas escolhas.

Note que, no procedimento de retrocesso citado, apenas os literais que estão vigiados e cujos valores foram alterados na contração de V é que são recomputados. As cláusulas não são alteradas com apagamentos na propagação unitária e, portanto, não necessitam ser recompostas no retrocesso.

Vamos dar um exemplo. Considere que temos, entre o conjunto de cláusulas a serem resolvidas, as seguintes cláusulas. Inicialmente, escolhemos os dois primeiros literais para serem vigiados.

cláusula	λ_{c1}	λ_{c2}
$p \vee q \vee r$	$p = *$	$q = *$
$p \vee \neg q \vee s$	$p = *$	$\bar{q} = *$
$p \vee r \vee \neg s$	$p = *$	$r = *$

Como todos os literais são indefinidos, todas as vigias são próprias.

Suponha que o literal $\neg p$ é escolhido, de forma que $V = \{\neg \mathbf{p}\}$. Todos os pares de literais vigiados ficam $(0, *)$, impróprios. Então, novos literais são eleitos para serem vigiados em cada uma das cláusulas impropriamente vigiadas, conforme a configuração a seguir:

cláusula	λ_{c1}	λ_{c2}
$p \vee q \vee r$	$r = *$	$q = *$
$p \vee \neg q \vee s$	$s = *$	$\neg q = *$
$p \vee \neg r \vee \neg s$	$\neg s = *$	$r = *$

O algoritmo DPLL procede normalmente. Como não há propagações unitárias, uma nova escolha é feita.

Suponha que $\neg r$ é escolhido, obtendo-se $V = \{\neg \mathbf{p}, \neg \mathbf{r}\}$. Assim, os literais vigiados na primeira e terceira cláusulas ficam impróprios. Em ambas as cláusulas, não há nenhum outro literal *-valorado ou 1-valorado para ser escolhido. Procedemos, então, à propagação unitária.

Pela cláusula 1, q torna-se verdadeiro, e pela cláusula 3, $\neg s$ torna-se verdadeiro. Dessa forma, obtemos a valoração $V = \{\neg \mathbf{p}, \neg \mathbf{r}, q, \neg s\}$ e a configuração:

cláusula	λ_{c1}	λ_{c2}
$p \vee q \vee r$	$r = 0$	$q = 1$
$p \vee \neg q \vee s$	$s = *$	$\neg q = *$
$p \vee \neg r \vee \neg s$	$\neg s = 1$	$r = 0$

Procedendo ao algoritmo DPLL, devemos continuar com a propagação unitária dos literais recém-inseridos em V. Com isso, os literais vigiados da cláusula 2 tornam-se impróprios.

Notamos que todos os literais da cláusula 2 estão falsificados e, portanto, não há nenhum outro par de literais nessa cláusula que constitua a vigia própria.

cláusula	λ_{c1}	λ_{c2}
$p \vee q \vee r$	$r = 0$	$q = 1$
$p \vee \neg q \vee s$	$s = 0$	$\neg q = 0$
$p \vee r \vee \neg s$	$\neg s = 1$	$r = 0$

Procedemos, então, a um retrocesso rápido. V é contraída até o último ponto de escolha, que é invertida: $V = \{\neg \mathbf{p}, r\}$. Apenas os literais vigiados

afetados são recomputados. Não há necessidade de recuperar o contexto prévio de uma pilha de contextos.

cláusula	λ_{c1}	λ_{c2}
$p \vee q \vee r$	$r = 1$	$q = *$
$p \vee \neg q \vee s$	$s = *$	$\neg q = *$
$p \vee r \vee \neg s$	$\neg s = *$	$r = 1$

Esse tipo de retrocesso é extremamente rápido, em comparação com o método tradicional. O algoritmo DPLL procede a partir desse ponto.

Retrossaltos

Retrossaltos (em inglês, *backjumping*) é uma técnica que evita a duplicação de esforços causada pela má escolha de um literal que acaba não tendo nenhum papel no fechamento de um ramo, ou seja, na descoberta de uma contradição. Vamos explicar a técnica do retrossalto por meio de um exemplo.

Suponha que temos a seguinte valoração parcial, em que cada literal está associado à cláusula que lhe deu origem; os literais de escolha estão associados a $\top$.

$$V = \{(\neg \mathbf{p}, \top), (\neg \mathbf{r}, \top), (\mathbf{a}, \top), (q, p \vee q \vee r), \underline{(\neg s, p \vee r \vee \neg s), (s, p \vee \neg q \vee s)}\}.$$

Claramente, essa valoração contém uma contradição. Note também que o literal escolhido **a** não ocorre nas cláusulas associadas às propagações unitárias subseqüentes. Isso que dizer: a escolha de **a** é inútil.

Se realizarmos o retrocesso seguido da substituição de a por seu oposto, esse retrocesso geraria uma repetição inútil:

$$V = \{(\neg \mathbf{p}, \top), (\neg \mathbf{r}, \top), (\neg \mathbf{a}, \top), (q, p \vee q \vee r), \underline{(\neg s, p \vee r \vee \neg s), (s, p \vee \neg q \vee s)}\}.$$

Nesse caso, o processo de retrocesso pode "saltar" sobre **a** e ignorá-lo; em vez de $V = \{(\neg \mathbf{p}, \top), (\neg \mathbf{r}, \top), (\neg \mathbf{a}, \top)$, gera

$$V = \{(\neg \mathbf{p}, \top), (\mathbf{r}, \top)\}.$$

Isso é o retrossalto. Retrossaltos, quando efetuados, trazem sempre ganhos de eficiência.

Reinícios Aleatórios

Considere o seguinte cenário, de alta probabilidade durante a execução do DPLL. A fórmula é satisfazível, porém as escolhas iniciais foram malfeitas. Suponha que temos 1.000 variáveis na fórmula, e as valorações que satisfazem essa fórmula requerem todas que $V(p_1) = 0$. No entanto, uma das primeiras escolhas da valoração parcial foi p_1 verdadeiro.

Nesse caso, só acharemos uma valoração que satisfaz a fórmula depois de esgotar todas as possibilidades da má escolha inicial, o que pode equivaler à construção de uma árvore com 2^{999} ramos.

Para evitar tais casos, surgiu a idéia de reiniciar periodicamente a busca da valoração. O mecanismo é o seguinte. Com o passar do processamento DPLL de uma dada fórmula, vamos aprendendo diversas cláusulas, que não estavam disponíveis quando a má escolha inicial foi feita. Se fosse dado realizar a escolha inicial nesse novo contexto, o literal escolhido seria outro, ou seria o mesmo, só que com polaridade oposta.

Para implementar esse reinício, o sistema contém como parâmetro uma probabilidade de reinício ε bem pequena (digamos, $\varepsilon = 0,5\%$). Cada vez que uma contradição é encontrada, uma ou mais cláusulas são aprendidas. Em seguida, com probabilidade $(1 - \varepsilon)$, ocorre o processo normal de retrocesso. Porém, com probabilidade ε, a busca pode ser reiniciada com $V = \varnothing$.

Esse reinício aleatório pode trazer problemas de eficiência se a fórmula for insatisfazível. Tal problema, porém, não ocorre se as fórmulas aprendidas forem mantidas ao se reiniciar. Ou seja, medidas empíricas garantem que os reinícios aleatórios tragam ganho de eficiência.

Heurística VSIDS

A heurística de seleção de literais do Chaff é chamada de VSIDS (do inglês *variable state independent decaying sum*). Esse método leva em consideração que novas cláusulas são aprendidas ao longo do processo e usa essa informação para privilegiar a escolha de literais em cláusulas recém-aprendidas:

- Para cada variável proposicional e para cada uma de suas polaridades, é atribuído um contador, inicializado com zero.
- Ao se adicionar uma cláusula ao problema (seja na inicialização, seja uma nova cláusula aprendida), é incrementado o contador de cada um dos literais da cláusula.
- Os literais com o maior contador são os candidatos à seleção.

- Caso haja mais de um literal candidato, escolhe-se aleatoriamente entre eles.
- Periodicamente, todos os contadores são divididos por uma constante. Dessa forma, os literais pertencentes às cláusulas incluídas mais recentemente acabam tendo maior prioridade.

Dessa forma, o Chaff privilegia a satisfação das últimas cláusulas aprendidas. Outro aspecto importante é que essa heurística gera uma sobrecarga pequena no processo de decisão, visto que os contadores só são atualizados em caso de *backtracking*.

3.5.4 O Método Incompleto GSAT

O GSAT foi o primeiro dos métodos incompletos propostos para a resolução de problemas SAT e baseia-se em processos probabilísticos sobre uma busca local. No caso do GSAT, as valorações consideram apenas os valores 1 (`verdadeiro`) e 0 (`falso`), não havendo mais átomos indefinidos.

Duas valoraçõses são *vizinhas* se diferem no valor atribuído a apenas um átomo. A idéia básica do método é, partindo de uma valoração inicial aleatória, a cada iteração visitar uma valoração vizinha que satisfaça um número de cláusulas maior que a valoração atual. São duas as condições de parada desse processo:

- Todas as cláusulas estão satisfeitas, em cujo caso retorna-se a valoração atual.
- O número máximo de iterações (MAXITER) é atingido. Nesse caso, seleciona-se uma nova valoração inicial e reinicia-se a busca local.

Uma descrição do GSAT pode ser encontrada no algoritmo 3.10. Lá, vemos que o processo pode ser reiniciado até um número de tentativas MAXTENTATIVAS. Após esse valor ter sido ultrapassado, o algoritmo simplesmente desiste, indicando que a valoração não foi encontrada. Isso pode indicar que a valoração não existe, no caso de a fórmula ser insatisfazível, ou que a valoração não foi achada. O GSAT não distingue entre esses dois casos.

Algoritmo 3.10 GSAT(F)

Entrada: Uma fórmula F na forma clausal (FNC), inteiros MAXITER e MAXTENTATIVAS.

Saída: Uma valoração v que satisfaz F, se encontrada.

```
para i := 1 até MAXTENTATIVAS faça
  v := uma valoração aleatória
  para j := 1 até MAXITER faça
    se v satisfaz F então
      retorne v
    fim se
    Seja v' o vizinho de v com maior incremento no número de cláusulas
    satisfeitas.
    v := v'
  fim para
fim para
retorna "Valoração não encontrada"
```

Em cada tentativa, a partir da valoração inicial, o GSAT analisa todas as valorações vizinhas. De uma forma *gulosa*, o GSAT busca a melhor valoração vizinha a cada iteração. No momento de escolher a valoração vizinha, existem três situações possíveis:

- Existem valorações que incrementam o número de fórmulas satisfeitas. Nesse caso, a visita a novos vizinhos procede normalmente.
- Todas as valorações vizinhas satisfazem um número menor de cláusulas. Isso indica que foi atingido um máximo local. A solução, nesse caso, é fazer uma nova tentativa, com uma nova valoração inicial aleatória.
- As valorações vizinhas levam, no máximo, à manutenção no total de cláusulas satisfeitas. Essa situação é denominada *movimento lateral*.

No caso da movimentação lateral, utiliza-se uma *busca tabu*. Nessa busca, memorizam-se quais as variáveis que foram invertidas ao longo de uma seqüência de deslocamentos laterais entre vizinhos, impedindo que uma mesma variável seja invertida duas vezes. Se, ao longo desse processo, for encontrada uma valoração que aumenta o número de cláusulas satisfeitas,

FMU / FIAM-FAAM / FISI

interrompe-se a busca tabu e retorna-se à busca gulosa normal. Se a busca tabu ficar sem opções, inicia-se uma nova tentativa, com uma nova valoração inicial aleatória.

3.5.5 O Fenômeno de Mudança de Fase

Considere um problema 3-SAT, ou seja, um conjunto de cláusulas, cada uma com três literais. São dois os parâmetros do problema 3-SAT, o número N de átomos e o número L de cláusulas. Em geral, os problemas 3-SAT são gerados aleatoriamente, dados N e L.

Com N fixo, se tivermos um número de cláusulas L pequeno, a tendência é que a fórmula seja satisfazível, pois o número de restrições sobre os átomos é pequeno. Dessa forma, espera-se que a maioria dos problemas gerados para L/N pequeno seja satisfazível.

Por outro lado, se for gerado um número L de cláusulas muito grande, a tendência é que a fórmula seja insatisfazível, visto que é grande a possibilidade de conflito entre as diversas restrições. Assim, espera-se que a maioria dos problemas gerados para L/N grande seja insatisfazível.

Existe, no entanto, um valor de L/N para o qual 50% das fórmulas geradas aleatoriamente são satisfazíveis e 50% das fórmulas geradas são insatisfazíveis. Esse valor de L/N é chamado de *ponto de mudança de fase*. Como é necessária a detecção de fórmulas insatisfazíveis, apenas localizamos o ponto de mudança de fase para algoritmos completos SAT-solucionadores.

Esse ponto de mudança de fase existe independentemente do método utilizado para a resolução do problema SAT. Além disso, duas propriedades do ponto de mudança de fases são notadas na prática:

- O valor L/N do ponto de mudança de fase é independente de N e é independente do algoritmo usado.
- O tempo médio de solução do problema é mais alto nas vizinhanças do ponto de mudança de fase.

Nunca se provou que o ponto de mudança de fase deva existir e ter essas propriedades. Essas observações são todas de caráter empírico. Pode ser que surja um novo algoritmo SAT que viole essas propriedades.

No caso de problemas 3-SAT, a experiência mostra que o ponto de mudança de fase ocorre para $L/N = 4,3$. Esse número é obtenível com mais estabilidade para $n > 100$.

Exercícios

3.16 Reescrever o algoritmo de DPLL utilizando iterações em vez de chamadas recursivas.

3.17 Implementar uma versão do algoritmo de DPLL na sua linguagem favorita e verificar o ponto de mudança de fase para o problema 3-SAT.

3.18 O algoritmo WalkSAT é uma variação do GSAT em que, com probabilidade ε, em vez de escolher a melhor valoração vizinha, uma valoração vizinha qualquer é escolhida; portanto, com probabilidade $(1-\varepsilon)$ o procedimento WalkSAT é igual ao procedimento SAT. Escrever o algoritmo do WalkSAT.

3.19 Implementar um resolvedor SAT (ou usar um disponível na internet) e descobrir qual o ponto de mudança de fase para o problema 4-SAT, ou seja, para o problema da satisfazibilidade de cláusulas com quatro literais.

3.6 Notas Bibliográficas

Os tableaux cuja implementação discutimos foram propostos originalmente por Smullyan, em 1968. Naquela época, ainda não havia computadores disponíveis para pesquisadores ou alunos. O tema de tableaux semânticos tornou-se popular entre os estudantes de computação a partir da publicação do livro de Melvin Fitting (Fitting, 1990). Desde então, diversas implementações foram propostas para tableaux semânticos, incluindo uma versão em Java livremente disponível na internet (jTAP, 1999) e uma implementação extremamente diminuta, chamada de *leanTAP*, que provavelmente é o menor provador de teoremas existentes (Beckert e Posegga, 1995). Uma referência sobre o estado da arte em tableaux e suas aplicações pode ser encontrada em (Posegga e Schmitt, 1999).

Uma série de fórmulas válidas de dificuldade de prova crescente aparece listada em Carbone e Semmer (2000). As fórmulas de Statman foram definidas inicialmente em 1978 (Statman, 1978), e uma prova de tamanho polinomial para o princípio do escaninho por meio do uso de axiomatização foi apresentada por Buss (1987).

O método de resolução para a prova automática de teoremas foi proposto por Robinson (1965) e se aplicava à lógica de primeira ordem. Neste livro, abordamos apenas a parte proposicional, apesar de este ser um dos métodos de dedução automática mais utilizados na prática para a programação em lógica (Lloyd, 1987) e na linguagem Prolog (Sterling e Shapiro, 1994).

A literatura sobre o problema SAT é imensa. A prova de que HornSAT é linear pode ser encontrada em (Dowling e Gallier, 1984), e o algoritmo log-espaço-completo para o 2SAT foi proposto por Even, Itai e Shamir em 1976. O artigo inicial de Davis e Putnam sobre satisfazibilidade data de 1960 (Davis e Putnam, 1960), porém o algoritmo conhecido como o "procedimento de Davis-Putnam" foi originalmente publicado em 1962, por Davis, Logemann e Loveland, o que explica por que esse método é muitas vezes chamado de DLL ou DPL ou DPLL. O método BCP usado na simplificação das cláusulas foi proposto por McAllester (1990) como um método empregado em seus sistemas mantenedores de verdade (TMS: *truth maintenance systems*) (Doyle, 1979). O fenômeno de mudança de fase na solução do problema SAT foi apresentado por Gent e Walsh (1994). O método Chaff pode ser encontrado em Moskewicz et al. (2001), e uma implementação do Chaff conhecida como zChaff pode ser obtida na página *http://www.princeton.edu/ chaff/zchaff.html*.

Parte 2

Lógica de Predicados

4 Lógica de Predicados Monádicos

4.1 Introdução

Conforme visto nos capítulos anteriores, a lógica proposicional permite caracterizar de forma rigorosa e precisa *relacionamentos entre proposições*. Os relacionamentos são caracterizados com base nos *conectivos* da lógica, e as inter-relações entre os conectivos (e conseqüentemente entre as proposições) são caracterizadas com base em um *sistema dedutivo*.

Todos os relacionamentos (tanto os caracterizados pelos conectivos como os caracterizados pelo sistema dedutivo) são justificados pela *semântica* da linguagem. Quando um sistema lógico é *correto* e *completo* com relação a uma semântica, existe uma vinculação entre o que se observa na semântica e o que pode ser deduzido pela lógica. Nesse caso, o sistema lógico pode ser usado para inferir fatos que dizem respeito, por exemplo, a um sistema (físico ou abstrato) correspondente à sua semântica: se quisermos raciocinar a respeito de máquinas em uma fábrica e se aceitarmos uma idealização das máquinas que corresponda à semântica vista nos capítulos anteriores da lógica proposicional, então poderemos usar a lógica para inferir fatos sobre as máquinas.

A partir deste capítulo, consideramos uma extensão da lógica proposicional, visando torná-la mais expressiva. Isso deve ampliar as oportunidades de aplicação da lógica para inferir fatos a respeito dos sistemas que correspondam à sua semântica, mas para isso será pago o preço de aumentar consideravelmente a complexidade da lógica.

Consideremos, por exemplo, as seguintes sentenças proposicionais:

(a) $e_1 \rightarrow s_1$

(b) $e_2 \rightarrow s_2$

(c) $e_3 \rightarrow s_3$

Intuitivamente, os índices de valor 1 indicam o Marcelo, os índices de valor 2 indicam a Ana Cristina e os índices de valor 3 indicam o Flávio. As proposições e_i denotam que "o indivíduo i pratica esportes", e as proposições s_i denotam que "o indivíduo i tem boa saúde".

Se os únicos indivíduos em nosso domínio de interesse forem esses três, então não existe a necessidade de se estender a lógica. Se quisermos, entretanto, considerar um domínio maior, as coisas podem mudar de figura. Como poderíamos, por exemplo, escrever que qualquer pessoa que pratica esportes tem boa saúde? Precisaríamos escrever algo como:

➡ $e_i \rightarrow s_i$, para qualquer valor de i pertencente ao conjunto $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Isso, entretanto, não pertence à linguagem proposicional vista anteriormente. A novidade é que as proposições representam agora propriedades relativas aos indivíduos correspondentes aos índices pertencentes a I. O nome usualmente adotado para essas propriedades é *predicados*, e por esse motivo a lógica proposicional estendida dessa forma é chamada de *lógica de predicados*.

Neste capítulo, consideraremos apenas um índice associado a cada predicado, ou seja, todos os predicados considerados serão *predicados monádicos*. No próximo capítulo, estenderemos ainda mais a linguagem, permitindo *predicados poliádicos*, ou seja, predicados indexados por listas de índices.

Um segundo exemplo é: como poderíamos escrever que o filho de qualquer pessoa que pratica esportes tem boa saúde?[1] Precisaríamos, nesse caso, de uma função $f : I \rightarrow I$ para capturar o conceito de "filho": se o indivíduo correspondente ao índice i é filho do indivíduo correspondente a j, então $f(j) = i$. Assim, precisaríamos escrever algo como:

[1] N.A. Não estamos, nesse momento, considerando se as sentenças escritas são verdadeiras ou falsas. Queremos apenas, por enquanto, ser capazes de formular essas sentenças.

- $e_i \rightarrow s_{f(i)}$, para qualquer valor de i pertencente ao conjunto $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A lógica de predicados monádicos admite, portanto, a referência indireta aos índices por meio de funções $f_k : I \rightarrow I, k = 1, 2, \ldots$.

Finalmente, consideremos o seguinte exemplo: se o pai ou a mãe de alguém pratica esportes, então esse alguém tem boa saúde. Essa sentença seria escrita como:

- $e_i \vee e_j \rightarrow s_{f(i,j)}$, para quaisquer valores de i e j pertencentes ao conjunto $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Nesse caso, modificamos a função correspondente ao conceito de "filho" para considerar pai e mãe. A função agora depende de dois parâmetros, em vez de apenas um, como no exemplo anterior. A lógica de predicados monádicos que estudaremos nas próximas seções, embora exija que todos os predicados sejam monádicos, admite funções poliádicas, ou seja, funções que dependem de mais de um parâmetro. Dessa forma, as funções consideradas têm a forma geral $f_k^n : I^n \rightarrow I, k = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots, N, N < \infty$.[2]

A lógica de predicados monádicos é muito útil para a formalização de conceitos da ciência da computação. Muitos problemas relacionados com a manipulação de tipos de dados em linguagens de programação, por exemplo, podem ser formalizados e verificados usando essa lógica.

4.2 A Linguagem de Predicados Monádicos

Apresentamos aqui a formalização da lógica de predicados monádicos. Para isso, precisamos de alguns conceitos preliminares.

Um conjunto $R^1 = \{r_1, r_2, \ldots\}$ é um *conjunto de predicados monádicos*. Esse conjunto pode ser vazio, finito ou infinito.

Um conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ é um *conjunto de constantes*. Esse conjunto pode ser vazio, finito ou infinito.

Conjuntos $F^i = \{f_1^i, f_2^i, \ldots\}$ são *conjuntos de funções i-ádicas*, ou seja, funções com i argumentos, $i \geqslant 1$. Cada um desses conjuntos pode ser vazio, finito ou infinito.

---

[2] N.A. Com $N < \infty$, queremos dizer que N é finito.

Uma *assinatura de predicados monádicos* é uma tupla específica

$$\Sigma^1 = [R^1, C, F^1, F^2, \ldots, F^N], N < \infty.$$

Fixemos agora o conjunto $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$, que é o *conjunto de variáveis*. Esse conjunto é necessariamente infinitamente enumerável.

Podemos, então, definir os termos e fórmulas da lógica de predicados monádicos. O conjunto $T(\Sigma^1)$ de *termos* da assinatura Σ^1 é definido indutivamente como o menor conjunto que atenda às seguintes condições:

- Se $x_i \in V$, então $x_i \in T(\Sigma^1)$.
- Se $c_i \in C$, então $c_i \in T(\Sigma^1)$.
- Se $f_i^j \in F^j$ e $t_1, \ldots, t_j \in T(\Sigma^1)$, então $f_i^j(t_1, \ldots, t_j) \in T(\Sigma^1)$.

O conjunto $\mathcal{F}(\Sigma^1)$ de *fórmulas* da assinatura Σ^1 é definido indutivamente como o menor conjunto que atenda às seguintes condições:

- Se $t \in T(\Sigma^1)$ e $r \in R^1$, então $r(t) \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$.
- Se $t_1, t_2 \in T(\Sigma^1)$, então $t_1 = t_2 \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$.

  Esses dois tipos de fórmulas são denominados *fórmulas elementares* ou *atômicas*:
- Se $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$, então $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$ (as regras para colocação de parênteses são idênticas às vistas para a lógica proposicional).
- Se $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$ e $x \in V$, então $\forall x(\varphi), \exists x(\varphi) \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$.

Uma subseqüência de símbolos ψ de uma fórmula φ que também pertença ao conjunto $\mathcal{F}(\Sigma^1)$ é denominada *subfórmula* de φ.

O conjunto de *variáveis livres* de uma fórmula φ, denotado como $L(\varphi)$, é definido assim:

- Se $\varphi = r(t), r \in R^1, t \in T(\Sigma^1)$, então $L(\varphi)$ é o conjunto de todas as variáveis ocorrendo em t.
- Se $\varphi = (t_1 = t_2), t_1, t_2 \in T(\Sigma^1)$, então $L(\varphi)$ é o conjunto de todas as variáveis ocorrendo em t_1 e t_2.

- Se $\varphi = \neg\psi$, então $L(\varphi) = L(\psi)$.
- Se $\varphi = \xi \vee \psi$, $\xi \wedge \psi$ ou $\xi \rightarrow \psi$, então $L(\varphi) = L(\xi) \cup L(\psi)$.
- Se $\varphi = \forall x(\psi)$ ou $\exists x(\psi)$, $x \in V$, então $L(\varphi) = L(\psi) - \{x\}$.

Se $L(\varphi) = \varnothing$, então a fórmula φ recebe o nome especial de *sentença*.

Exercícios

4.1 Considerar a assinatura $\Sigma^1 = [R^1, C, F^1, F^2]$, em que:

- $R^1 = \{r_1\}$.
- $C = \{a, b, c\}$.
- $F^1 = \{f^1\}$.
- $F^2 = \{f^2\}$.

Identificar, dentre as seqüências de símbolos a seguir, quais pertencem a $F(\Sigma^1)$:

- $r_1(a)$.
- $r_1(f_1)$.
- $r_1(f_2(x_1, f_1(a))) \vee r_1(f_1(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$.
- $r_1(x_1) \rightarrow \forall x_2(r_2(x_2))$.
- $\forall x_1(\exists x_2(r_1(f_1(x_1)) \rightarrow \neg r_1(f_2(x_2, x_1))))$.

4.2 Identificar, nas seqüências de símbolos anteriores que forem fórmulas, todas as suas subfórmulas.

4.3 Identificar, nas fórmulas do Exercício 4.1 e em todas as subfórmulas identificadas no Exercício 4.2, os respectivos conjuntos de variáveis livres.

4.3 Semântica

Um par $\mathcal{A}(\Sigma^1) = [A, v^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}]$ é um *sistema algébrico da assinatura* Σ^1 se as seguintes condições forem observadas:

- $A \neq \varnothing$ é denominado *portador* do sistema algébrico.

- $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}$ mapeia os elementos dos conjuntos de Σ^1 em subconjuntos e funções sobre o conjunto A e é denominada *interpretação* de Σ^1 em A.
- Se $r_i \in R^1$, então $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}(r_i) \subseteq A$.
- Se $c_i \in C$, então $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}(c_i) \in A$.
- Se $f_i^j \in F^j$, então existe uma função $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}(f_i^j) : A^j \to A$.

Seja $X \subseteq V$ um conjunto de variáveis selecionadas. Uma função $\gamma : X \to A$ é denominada *interpretação do conjunto* X *em* A.

O *valor* de um termo $t \in T(\Sigma^1)$ em um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ para interpretação γ é denotado como $t^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma]$ e é definido indutivamente da seguinte forma:

- Se $t = x \in X$, então $t^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma] = \gamma(x)$.
- Se $t = c \in C$, então $t^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma] = \nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}(c)$.
- Se $f_i^j \in F^j$, $t_1, \ldots, t_j \in T(\Sigma^1)$ e $t = f_i^j(t_1, \ldots, t_j)$, então

$$t^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma] = \nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}(f_i^j)(t_1^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma], \ldots, t_j^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma]).$$

  Ou seja, o valor de uma função é dado pelo valor do símbolo funcional aplicado aos valores dos termos que formam os parâmetros da função.

O valor de um termo em um sistema algébrico para uma interpretação γ é, portanto, sempre um elemento de A – desde que, é claro, as variáveis que ocorram nesse termo pertençam ao domínio da interpretação de variáveis γ utilizada. Caso isso não ocorra, o valor do termo é indeterminado.

Seja $\gamma : X \to A, X \subseteq V$ uma interpretação de variáveis e $X_1 \subseteq V$. Definimos a *restrição da interpretação* γ a X_1 como a função

$$\gamma \uparrow X_1 : (X \cap X_1) \to A, \begin{cases} \gamma \uparrow X_1(x) = \gamma(x), x \in X \cap X_1. \\ \gamma \uparrow X_1(x) = \text{indefinido, caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos definir agora quando uma fórmula $\varphi \in F(\Sigma^1)$ em um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ para uma interpretação γ é *verdadeira* (denotado como $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$). Para que φ seja verdadeira em $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ para γ, é preciso que ocorra o seguinte:

- Se $\varphi = r(t) \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ é equivalente a $t^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma] \in v^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}(r)$.
- Se $\varphi = (t_1 = t_2), t_1, t_2 \in T(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ é equivalente a $t_1^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma] = t_2^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}[\gamma]$.
- Se $\varphi = \neg\psi, \psi \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, não for verdade que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \psi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \psi \vee \xi, \psi, \xi \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \psi[\gamma]$ ou $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \xi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \psi \wedge \xi, \psi, \xi \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \psi[\gamma]$ e $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \xi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \psi \rightarrow \xi, \psi, \xi \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \psi[\gamma]$, então necessariamente também $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \xi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \exists x(\psi), \psi \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, existir pelo menos uma interpretação de variáveis $\gamma_1 : X_1 \rightarrow A$ tal que $x \in X_1, \gamma_1 \uparrow L(\varphi) = \gamma \uparrow L(\varphi)$ e $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \psi[\gamma_1]$.
- Se $\varphi = \forall x(\psi), \psi \in F(\Sigma^1)$, então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ se e somente se para qualquer interpretação de variáveis $\gamma_i : X_i \rightarrow A$ tal que $x \in X_i$ e $\gamma_i \uparrow L(\varphi) = \gamma \uparrow L(\varphi)$, tivermos que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \psi[\gamma_i]$.

Um caso que merece destaque é que: se φ for uma sentença, então $L(\varphi) = \varnothing$. Nesse caso, por definição, nos dois últimos casos, $\gamma_i \uparrow L(\varphi) = \gamma \uparrow L(\varphi)$, independentemente de qual seja a função γ. Se φ for uma sentença, portanto, podemos simplificar um pouco a notação e indicar que φ é verdadeira em $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ (denotado como $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi$).

Quando uma sentença não for verdadeira em um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$, dizemos que ela é *falsa* em $\mathcal{A}(\Sigma^1)$.

Exercícios

4.4 Considerar a assinatura $\Sigma^1 = [R^1, C, F^1, F^2]$, em que:

- $R^1 = \{r_1, r_2\}$.
- $C = \{a, b, c\}$.

- $F^1 = \{f^1\}$.
- $F^2 = \{f^2\}$.

Considerar também os seguintes sistemas algébricos:

- $\mathcal{A}_1(\Sigma^1) = [A_1, \nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}]$.
  - $A_1 = \{1\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(r_1) = \nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(r_2) = \{1\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(a) = \nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(b) = \nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(c) = 1$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(f^1) = f : A_1 \to A_1, f(x) = 1$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma^1)}(f^2) = g : A_1 \times A_1 \to A_1, g(x, y) = x$
- $\mathcal{A}_2(\Sigma^1) = [A_2, \nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}]$.
  - $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(r_1) = \{1, 3, 5, \ldots\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(r_2) = \{2, 4, 6, \ldots\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(a) = 1$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(b) = 2$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(c) = 3$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(f^1) = f : A_2 \to A_2, f(x) = x + 1$
  - $\nu^{\mathcal{A}_2(\Sigma^1)}(f^2) = g : A_2 \times A_2 \to A_2, g(x, y) = x + y$

Verificar, para as sentenças φ_i a seguir, se $\mathcal{A}_1(\Sigma^1) \models \varphi_i$ e se $\mathcal{A}_2(\Sigma^1) \models \varphi_i$:

- $\forall x_1(\exists x_2(\exists x_3(r_2(x_1) \to (r_1(x_2) \wedge r_1(x_3) \wedge (x_1 = f^2(x_2, x_3))))))$.
- $\forall x_1(\exists x_2(r_2(x_1) \to (r_1(x_2) \wedge \wedge(x_1 = f^2(x_2, a)))))$.
- $\forall x_1(\exists x_2(r_2(x_1) \to (r_1(x_2) \wedge \wedge(x_1 = f^2(x_2, c)))))$.
- $\exists x_1(\exists x_2(r_2(x_1) \to (r_1(x_2) \wedge \wedge(x_1 = f^2(x_2, c)))))$.
- $\forall x(r_1(x))$.
- $\forall x(r_1(x) \to r_1(x))$.
- $\exists x(r_2(f^1(x)) \to r_1(x))$.
- $\forall x(r_2(f^1(x)) \to r_1(x))$.
- $\forall x(\neg(r_2(f^1(x)) \to r_1(x)))$.
- $\neg\forall x(r_2(f^1(x)) \to r_1(x))$.

4.5 Para cada uma das sentenças do exercício anterior, construir (se possível) um sistema algébrico $\mathcal{A}_j(\Sigma^1)$ tal que não seja verdade que $\mathcal{A}_j(\Sigma^1) \models \varphi_i$.

Seja Σ^1 uma assinatura e $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$. Definimos a *assinatura* Σ^1 *restrita a* φ – denotada como $\Sigma^1(\varphi)$ – como a assinatura composta unicamente pelos predicados, constantes e funções de Σ^1 que ocorrerem em φ.

Seja um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1) = [A, \nu^{\mathcal{A}(\Sigma^1)}]$. Definimos como a *cardinalidade* de $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ a quantidade de elementos de A. Denotamos a cardinalidade de $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ como $|\mathcal{A}(\Sigma^1)|$.

Uma sentença φ é n-*verdadeira*, $n < \infty$, se $\mathcal{A}(\Sigma^1(\varphi)) \models \varphi$ para qualquer sistema algébrico de assinatura $\Sigma(\varphi)$ cuja cardinalidade seja menor ou igual a n. Denotamos esse conceito como $\models_n \varphi$.

Uma sentença φ é denominada simplesmente *verdadeira* se $\mathcal{A}(\Sigma^1(\varphi)) \models \varphi$ para qualquer sistema algébrico de assinatura $\Sigma(\varphi)$, independentemente da cardinalidade. Denotamos esse conceito como $\models \varphi$.

Exercícios

4.6 Demonstrar que existe um algoritmo que, para qualquer sentença φ, permite determinar em um número finito de passos se $\models_n \varphi$ para qualquer $n, 0 < n < \infty$.

4.7 (Extraído de Ershov e Paliutin, 1990) Demonstrar que a sentença a seguir é n-verdadeira para qualquer $n, 0 < n < \infty$, mas não é verdadeira:

$$\exists x_1(\forall x_2(\neg(f(x_2) = x_1))) \rightarrow \exists x_3(\exists x_4((f(x_3) = f(x_4)) \wedge \neg(x_3 = x_4)))$$

Nas próximas seções, estudaremos métodos sistemáticos para verificar se uma dada sentença é verdadeira, bem como a possibilidade de automatizar esses procedimentos na forma de programas de computador. Um último resultado importante que apresentamos na presente seção é um teorema que será útil nas seções seguintes. Apresentamos o teorema, mas não a sua demonstração, que estaria fora do escopo deste livro. Algumas sugestões de livros em que a demonstração desse teorema pode ser encontrada estão na seção de Notas Bibliográficas (Seção 4.8).

Um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ é um *modelo* de um conjunto de sentenças Γ se $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi$ para qualquer $\varphi \in \Gamma$. Se Γ tiver pelo menos um modelo,

dizemos que Γ é *satisfazível*. Dizemos ainda que Γ é *localmente satisfazível* se todo subconjunto finito de Γ tiver pelo menos um modelo.

Teorema 4.3.1 – teorema da compacidade Se um conjunto de sentenças Γ for localmente satisfazível, então ele também será satisfazível.

4.4 Dedução Natural

Iniciemos com o conceito de *substituição* de variáveis. Seja Σ^1 uma assinatura, $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma^1), \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$ e as variáveis $x_1, \ldots, x_n \in V$. Assumimos que as variáveis x_i sejam distintas duas a duas, mas entre os termos t_i podem ocorrer repetições. Assumimos ainda que, se φ tiver uma subfórmula de forma $\forall x'(\varphi')$ ou de forma $\exists x'(\varphi')$ e se $x_i \in L(\varphi)$ ocorrer dentro dessa subfórmula, então $x' \notin t_i$. A fórmula $\varphi[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ é obtida substituindo as variáveis *livres* entre $x_1, \ldots, x_n$ pelos termos de mesmo índice.

Por exemplo, se $\varphi = \forall x_1(r_1(x_1) \to r_1(x_2))$, então $\varphi[x_1 := f_1^2(c_1, x_1), x_2 := f_1^2(c_2, x_2)] = \forall x_1(r_1(x_1) \to r_1(f_1^2(c_2, x_2)))$. Deve ser observado que a variável x_1 não é substituída pelo termo correspondente, pois ela não pertence a $L(\varphi)$.

Como um segundo exemplo, se $\varphi = r_1(x_1) \to \exists x_2(r_1(f_1^2(x_1, x_2)))$, então pode ser efetuada a substituição $[x_1 := c_1]$ – gerando a fórmula $\varphi[x_1 := c_1] = r_1(c_1) \to \exists x_2(r_1(f_1^2(c_1, x_2)))$ –, mas não pode ser efetuada a substituição $[x_1 := x_2]$. Intuitivamente, uma substituição aplicada a uma fórmula gera um "caso particular" daquela fórmula, mas não deve impor condições na fórmula gerada que já não estivessem presentes na fórmula inicial. Uma leitura informal de φ nesse último caso poderia ser "se um valor de x_1 pertencer ao conjunto determinado por r_1, então existe pelo menos um valor de x_2 tal que o resultado da função $f_1^2(x_1, x_2)$ também pertencerá ao mesmo conjunto". A fórmula $\varphi[x_1 := c_1]$ particulariza φ para quando o valor de x_1 for igual a c_1, ou seja "se c_1 pertencer ao conjunto determinado por r_1 então existe pelo menos um valor de x_2 tal que o resultado da função $f_1^2(c_1, x_2)$ também pertencerá ao mesmo conjunto". Já a fórmula $\psi = r_1(x_2) \to \exists x_2(r_1(f_1^2(x_2, x_2)))$, que seria obtida pela aplicação errônea da regra de substituição delineada anteriormente, exige a leitura "se um valor de x_2 pertencer ao conjunto determinado por r_1, então existe um valor que pode ser substituído como os dois parâmetros da função f_1^2, e o resultado dessa função também pertencerá ao conjunto determinado por r_1".

Exercício

4.8 Efetuar as substituições apropriadas nas fórmulas a seguir:

- $r_1(x_1) \vee \neg r_2(x_2) \to r_1(f_1^2(x_1, x_2)), [x_1 := a, x_2 := b]$.
- $r_1(x_1) \to \forall x_2(r_1(f_1^2(x_1, x_2))), [x_1 := a, x_2 := b]$.
- $r_1(x_1) \to \forall x_2(r_1(f_1^2(x_1, x_2))), [x_1 := x_2, x_2 := x_1]$.
- $r_1(x_1) \to \forall x_2(r_1(f_1^2(x_1, x_2))), [x_1 := f(x_1)]$.
- $r_1(x_1) \to \forall x_2(r_1(f_1^2(x_1, x_2))), [x_2 := f(x_1)]$.

Sejam agora as fórmulas arbitrárias $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \Sigma^1, n \geqslant 1$. Definimos os *seqüentes* em Σ^1 como quaisquer expressões com uma das formas a seguir:

- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$.
- $\vdash \psi$.
- $\vdash$.

Definimos os *axiomas* em Σ^1 como todos os seqüentes com os formatos a seguir:

- $\varphi \vdash \varphi, \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$.
- $\vdash (x = x), x \in V$.
- $(x_1 = x_2), \varphi[x_3 := x_1] \vdash \varphi[x_3 := x_2], x_1, x_2, x_3 \in V$, supondo que essas substituições sejam possíveis.

O *sistema de dedução natural* para Σ^1 é formado pelas 16 regras a seguir, em que $\varphi, \psi, \xi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}(\Sigma^1), n \geqslant 1, x \in V, t \in T(\Sigma^1)$ e Γ, Φ são listas de fórmulas, possivelmente vazias:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$
2. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}$

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$

6. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash \xi; \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \xi}$

7. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$

10. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash}$

11. $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Phi \vdash \xi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Phi \vdash \xi}$

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$

13. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x(\varphi)}$, assumindo que $x \notin L(\varphi_i), \varphi_i \in \Gamma$

14. $\dfrac{\Gamma, \varphi[x := t] \vdash \psi}{\Gamma, \forall x(\varphi) \vdash \psi}$

15. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x(\varphi)}$

16. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x(\varphi) \vdash \psi}$, assumindo que $x \notin L(\varphi_i), \varphi_i \in \Gamma$ e $x \notin L(\psi)$

Cada uma das regras desse sistema de dedução prescreve uma forma de construção de novos seqüentes a partir de seqüentes anteriores. A *demonstração* de um seqüente C é uma árvore de seqüentes em que as folhas são axiomas, a raiz é o seqüente C e os seqüentes intermediários são construídos utilizando as regras anteriores.

Se existir uma demonstração de um seqüente C, então esse seqüente recebe o nome de *teorema*. Mais adiante, veremos a relação entre os teoremas e os sistemas algébricos da assinatura de φ.

Intuitivamente, podemos observar que as regras anteriores de 1 a 10 servem para acrescentar ou para eliminar um conectivo ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$). As

regras de números 11 e 12, que não acrescentam nem eliminam elementos da linguagem, são denominadas *regras estruturais* do sistema dedutivo. As regras de 13 a 16 manipulam os quantificadores ($\exists, \forall$), permitindo a sua inserção à esquerda ou à direita nos seqüentes.

Por exemplo, consideremos o seguinte seqüente:

$$\forall x_1(\forall x_2(\forall x_3((r_1(x_1) \to r_1(x_2)) \\ \wedge (r_1(x_1) \to r_1(x_3))))) \vdash \forall x_1(\forall x_2(\forall x_3(r_1(x_1) \to (r_1(x_2) \wedge r_1(x_3)))))$$

Ele pode ser demonstrado da seguinte forma,[3] em que abreviamos em alguns pontos a sentença $(r_1(a) \to r_1(b)) \wedge (r_1(a) \to r_1(c))$ como φ para tornar a demonstração um pouco mais concisa (*na próxima página*):

Exercícios

4.9 Construir demonstrações para os seguintes seqüentes:

- $\forall x(r_1(x) \vee r_2(x)) \vdash \forall x(r_2(x) \vee r_1(x))$.
- $r_1(a), r_1(b) \vdash r_1(a) \wedge r_1(b)$.
- $\vdash \forall x_1(\forall x_2(r_1(x_1) \to (r_1(x_2) \to r_1(x_1))))$.
- $r_1(a) \wedge \neg r_1(a) \vdash$.

4.10 Comparar as regras anteriores de 1 a 10 com as regras da Figura 2.2. Você deve notar que, na verdade, as duas notações são equivalentes. Optamos por uma notação distinta neste capítulo por um motivo didático, para expor o leitor às notações mais comumente encontradas em outros textos. Ademais, essa segunda notação explicita as regras estruturais (regras 11 e 12), que são freqüentemente alteradas para produzir lógicas não-clássicas, que podem ser, inclusive, de interesse da ciência da computação. Por exemplo, se eliminarmos essas duas regras (que estão implícitas na notação da Figura 2.2), os *conjuntos* de fórmulas à esquerda dos seqüentes passam a ser *listas* de fórmulas, em que a ordem e a quantidade de repetições de cada fórmula se tornam relevantes.

[3] N.A. Essa demonstração não é única. O leitor pode tentar, como exercício, construir uma demonstração diferente.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$r_1(a) \vdash r_1(a)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$r_1(a), \varphi \vdash r_1(a)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\varphi, r_1(a) \vdash r_1(a)$}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash r_1(a) \to r_1(b)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\varphi, r_1(a) \vdash r_1(a) \to r_1(b)$}
\RightLabel{}
\BinaryInfC{$\varphi, r_1(a) \vdash r_1(b)$}
\AxiomC{$r_1(a) \vdash r_1(a)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$r_1(a), \varphi \vdash r_1(a)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\varphi, r_1(a) \vdash r_1(a)$}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash r_1(a) \to r_1(c)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash r_1(a), r_1(a) \to r_1(c)$}
\RightLabel{}
\BinaryInfC{$\varphi, r_1(a) \vdash r_1(c)$}
\RightLabel{}
\BinaryInfC{$\varphi, r_1(a) \vdash r_1(b) \wedge r_1(c)$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$(r_1(a) \to r_1(b)) \wedge (r_1(a) \to r_1(c)) \vdash r_1(a) \to (r_1(b) \wedge r_1(c))$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\forall x_3((r_1(a) \to r_1(b)) \wedge (r_1(a) \to r_1(x_3))) \vdash r_1(a) \to (r_1(b) \wedge r_1(c))$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\forall x_2(\forall x_3((r_1(a) \to r_1(x_2)) \wedge (r_1(a) \to r_1(x_3)))) \vdash r_1(a) \to (r_1(b) \wedge r_1(c))$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\forall x_1(\forall x_2(\forall x_3((r_1(x_1) \to r_1(x_2)) \wedge (r_1(x_1) \to r_1(x_3))))) \vdash \forall x_3(r_1(a) \to (r_1(b) \wedge r_1(x_3)))$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\forall x_1(\forall x_2(\forall x_3((r_1(x_1) \to r_1(x_2)) \wedge (r_1(x_1) \to r_1(x_3))))) \vdash \forall x_2(\forall x_3(r_1(a) \to (r_1(x_2) \wedge r_1(x_3)))$}
\RightLabel{}
\UnaryInfC{$\forall x_1(\forall x_2(\forall x_3((r_1(x_1) \to r_1(x_2)) \wedge (r_1(x_1) \to r_1(x_3))))) \vdash \forall x_1(\forall x_2(\forall x_3(r_1(x_1) \to (r_1(x_2) \wedge r_1(x_3)))))$}
\end{prooftree}
$$

Podemos também estender nossa linguagem com as propriedades matemáticas usuais do símbolo de igualdade, fazendo uso dos seguintes seqüentes:

- $\vdash (t = t), t \in T(\Sigma^1)$.
- $(t_1 = t_2) \vdash (t_2 = t_1), t_1, t_2 \in T(\Sigma^1)$.
- $(t_1 = t_2), (t_2 = t_3) \vdash (t_1 = t_3), t_1, t_2, t_3 \in T(\Sigma^1)$.
- $(t'_1 = t''_1), \ldots, (t'_n = t''_n) \vdash t[x_1 := t'_1, \ldots, x_n := t'_n] = t[x_1 := t''_1, \ldots, x_n := t''_n], t, t'_1, \ldots, t'_n, t''_1, \ldots, t''_n \in T(\Sigma^1)$.
- $(t'_1 = t''_1), \ldots, (t'_n = t''_n), \varphi[x_1 := t'_1, \ldots, x_n := t'_n] \vdash \varphi[x_1 := t''_1, \ldots, x_n := t''_n], t, t'_1, \ldots, t'_n, t''_1, \ldots, t''_n \in T(\Sigma^1), \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$ e assumindo que as duas substituições possam ser efetuadas em φ.

Vamos agora definir a relação desejada entre os teoremas e a noção de verdade relativa a sistemas algébricos vista na seção anterior. Sejam Σ^1 uma assinatura de predicados monádicos, C um seqüente cujas fórmulas pertençam a $\mathcal{F}(\Sigma^1)$, $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ um sistema algébrico e $\gamma : V \to A$ uma interpretação de variáveis. As seguintes condições são requeridas para que C seja um seqüente *verdadeiro* em $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ para γ:

- Se $C = \Gamma \vdash \varphi$, é exigido que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ ou que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \neg\psi[\gamma]$ para pelo menos uma fórmula ψ pertencente a Γ (*observação:* Γ pode ser uma lista vazia de fórmulas).
- Se $C = \Gamma \vdash$, é exigido que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \neg\psi[\gamma]$ para ao menos uma fórmula ψ pertencente a Γ.

Se um seqüente C não for verdadeiro em $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ para γ, ele é denominado *falso*. Em particular, das duas exigências anteriores, podemos concluir que o seqüente vazio ($\vdash$) é falso em qualquer sistema algébrico e para qualquer interpretação de variáveis.

Um seqüente C é denominado simplesmente *verdadeiro* se for verdadeiro em qualquer sistema algébrico e para qualquer interpretação de variáveis.

O resultado natural esperado é uma correspondência entre teoremas e seqüentes verdadeiros. Esse resultado foi demonstrado por Kurt Gödel:

Teorema 4.4.1 – teorema da correção e completude O conjunto de seqüentes que são teoremas coincide com o conjunto de seqüentes que são verdadeiros.

Na Seção 4.6 analisaremos com mais detalhes esse resultado importante e útil da lógica matemática. Antes disso, estudaremos um segundo sistema dedutivo.

4.5 Axiomatização

O sistema dedutivo da seção anterior tem uma estratégia de construção, que é fazer uso de uma pequena quantidade de axiomas bastante simples e construir as propriedades desejadas para os elementos da linguagem (conectivos e quantificadores) por meio das regras de dedução. Com isso, temos poucos esquemas de axiomas e uma maior quantidade de regras.

A possibilidade "inversa" é fazer uso de uma pequena quantidade de regras, que sejam mantidas tão simples quanto possível, com a natural contrapartida de precisar de axiomas mais sofisticados e em maior quantidade, que levem às mesmas propriedades para os elementos da linguagem.

Consideremos, por exemplo, o seguinte seqüente:

$$r_1(c) \wedge r_2(c) \vdash r_2(c) \wedge r_1(c)$$

Esse seqüente é um teorema, o que pode ser comprovado pela demonstração a seguir:

$$\dfrac{\dfrac{r_1(c) \wedge r_2(c) \vdash r_1(c) \wedge r_2(c)}{r_1(c) \wedge r_2(c) \vdash r_2(c)} \quad \dfrac{r_1(c) \wedge r_2(c) \vdash r_1(c) \wedge r_2(c)}{r_1(c) \wedge r_2(c) \vdash r_1(c)}}{r_1(c) \wedge r_2(c) \vdash r_2(c) \wedge r_1(c)}$$

Nessa demonstração, foram utilizadas as regras de números (1), (2) e (3) do sistema de dedução natural visto na seção anterior. Se essas regras forem eliminadas do sistema dedutivo, que axiomas precisam ser incluídos para que o seqüente continue sendo um teorema?

Essa pergunta poderia ser respondida de muitas maneiras distintas. Escolhemos aqui uma resposta que melhor se adapta ao sistema dedutivo que apresentaremos a seguir. Inicialmente observamos que é simples demonstrar, usando as regras de números (7) e (8) do sistema de dedução natural, que o seguinte resultado é válido:

Teorema 4.5.1 – teorema da dedução Um seqüente $\Gamma \vdash \varphi$ é um teorema, $\Gamma = \xi_1, \ldots, \xi_n, n \geqslant 1$, em que φ, ξ_i são fórmulas se, e somente se, o seqüente $\vdash \xi_1 \to (\xi_2 \to (\ldots \to (\xi_n \to \varphi)\ldots)$ também o for.

Exercício

4.11 *(Difícil)* demonstrar o teorema da dedução.

Portanto, a pergunta anterior é equivalente a perguntar quais axiomas precisam ser incluídos em substituição às regras de números (1), (2) e (3) do sistema de dedução natural, para que o seqüente $\vdash r_1(c) \wedge r_2(c) \to r_2(c) \wedge r_1(c)$ seja um teorema.

Se considerarmos como axiomas adicionais todos os seqüentes com os seguintes formatos:

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.
- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$.
- $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \xi)))$.

em que φ, ψ e ξ são fórmulas, então podemos construir a seguinte demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_2(c) \quad \vdash (r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_2(c)) \to ((r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_1(c))\to(r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_2(c)\wedge r_1(c)))}{\vdash r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_1(c)} \quad \vdash (r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_1(c))\to(r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_2(c)\wedge r_1(c))}{\vdash r_1(c)\wedge r_2(c)\to r_2(c)\wedge r_1(c)}$$

Seja Σ^1 uma assinatura e as fórmulas arbitrárias $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \Sigma^1, n \geqslant 1$. Pode-se demonstrar que os seqüentes definidos na seção anterior podem ser, respectivamente, reescritos para as formas a seguir:

- $\vdash \varphi_1 \to (\ldots \to (\varphi_n \to \psi)\ldots)$.
- $\vdash \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$.
- $\vdash \psi$.
- $\vdash$.

Exercício

4.12 Demonstrar esse resultado.

Definimos para esses seqüentes um novo conjunto de axiomas em Σ^1, como sendo todos os seqüentes com os formatos a seguir:

1. $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi), \varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
2. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \xi)) \to (\varphi \to \xi)), \varphi, \psi, \xi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
3. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi, \varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
4. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi, \varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
5. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \xi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \xi))), \varphi, \psi, \xi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
6. $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi), \varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
7. $\vdash \varphi \to (\psi \vee \varphi), \varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
8. $\vdash (\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \xi)), \varphi, \psi, \xi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
9. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi), \varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
10. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi, \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$
11. $\vdash \forall x(\varphi) \to \varphi[x := t], \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1), x \in V, t \in T(\Sigma^1)$ e assumindo que essa substituição seja permitida
12. $\vdash \varphi[x := t] \to \exists x(\varphi), \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1), x \in V, t \in T(\Sigma^1)$ e assumindo que essa substituição seja permitida
13. $\vdash (x = x), x \in V$
14. $\vdash (x_1 = x_2) \to (\varphi[x_3 := x_1] \to \varphi[x_3 := x_2]), x_1, x_2 \in V, \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$ e assumindo que essas substituições sejam permitidas

O *sistema axiomático de dedução* para Σ^1 é formado pelos 14 axiomas e pelas três regras a seguir, em que $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$ e $x \in V$:

1. $\dfrac{\vdash \varphi \quad \vdash \varphi \to \psi}{\vdash \psi}$

2. $\dfrac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x(\varphi)}$

3. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x(\varphi) \to \psi}$

O teorema enunciado a seguir determina uma noção de equivalência entre o sistema de dedução natural visto na seção anterior e o sistema axiomático de dedução apresentado anteriormente. Uma demonstração elegante e concisa desse teorema pode ser encontrada em Ershov e Paliutin (1990):

Teorema 4.5.2 – teorema da equivalência entre sistemas dedutivos Seja Σ^1 uma assinatura e $\vdash \varphi$ um seqüente, $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$. Esse seqüente será um teorema no sistema de dedução natural se e somente se for também um teorema no sistema axiomático de dedução.

Com essa amostra, apresentamos a possibilidade de codificar a noção de demonstração de diferentes maneiras para um mesmo conjunto de fórmulas, de forma que os teoremas demonstrados nas diferentes codificações coincidam. A escolha de qual codificação utilizar depende das preferências e objetivos de quem estiver utilizando a lógica. Por exemplo, é comumente aceito que sistemas como o sistema de dedução natural, apresentado na seção anterior, são apropriados para estudar propriedades das demonstrações, que são colocadas como o elemento central do sistema. Uma propriedade interessante, por exemplo, é se uma dada demonstração de um teorema é a mais curta possível (ou seja, a que utiliza o menor número de regras de dedução), o que traduz uma noção intuitiva de simplicidade: como as propriedades dos elementos da linguagem estão codificadas nas regras, o menor uso de regras indica que a demonstração usa essas propriedades de forma "mais econômica". Por outro lado, se o interesse é a construção de um programa para demonstrar teoremas, então sistemas como o sistema axiomático, apresentado nesta seção, podem ser preferidos, pois o principal a ser implementado nesses programas são justamente as regras de dedução – que podem ser vistas como procedimentos para gerar novos seqüentes a partir dos anteriormente encontrados ou fornecidos – e, portanto, quanto menos regras, mais fácil deve ser construir um programa.

Quanto à construção de programas para demonstrar teoremas, discussões mais detalhadas serão apresentadas na Seção 4.7 e no próximo capítulo.

Exercício

4.13 Demonstrar os teoremas a seguir, usando tanto o sistema de dedução natural como o sistema axiomático de dedução:

- $\vdash (r_1(c) \vee r_2(c)) \rightarrow (r_2(c) \vee r_1(c))$.
- $\vdash \forall x((r_1(x) \vee r_2(x)) \rightarrow (r_2(x) \vee r_1(x)))$.
- $\vdash r_1(a) \rightarrow (r_1(b) \rightarrow (r_1(a) \wedge r_1(b)))$.
- $\vdash \forall x_1(\forall x_2(r_1(x_1) \rightarrow (r_1(x_2) \rightarrow r_1(x_1))))$.
- $\vdash \neg(r_1(a) \wedge \neg r_1(a))$.
- $\vdash (r_1(c) \rightarrow (r_2(c) \wedge r_3(c))) \rightarrow ((r_1(c) \rightarrow r_2(c)) \wedge (r_1(c) \rightarrow r_3(c)))$.
- $\vdash (\forall x_1(r_1(x_1) \rightarrow r_2(x_1))) \rightarrow (\forall x_2(r_1(x_2))) \rightarrow (\forall x_3(r_2(x_3)))$.
- $\vdash (\forall x_1(\forall x_2(r_1(x_2) \rightarrow r_2(x_1)))) \rightarrow (\exists x_3(r_1(x_3))) \rightarrow (\forall x_4(r_2(x_4)))$.
- $\vdash (\forall x_1(\neg r_1(x_1) \wedge r_2(x_1))) \rightarrow (\forall x_2(r_1(x_2) \rightarrow r_2(x_2)))$.
- $\vdash r(c) \rightarrow \forall x((x = c) \rightarrow r(x))$.
- $\vdash (\forall x_1(\exists x_2(r_1(x_1) \vee r_2(x_2)))) \rightarrow (\exists x_3(\forall x_4(r_1(x_4) \vee r_2(x_3))))$.

4.6 Correção e Completude

Voltemos agora ao Teorema 4.4.1 – *teorema da correção e completude* – enunciado no final da Seção 4.4:

> *O conjunto de seqüentes que são teoremas coincide com o conjunto de seqüentes que são verdadeiros.*

Graças ao Teorema 4.5.2 – *teorema da equivalência entre sistemas dedutivos* – tanto faz qual sistema dedutivo entre os dois vistos neste capítulo adotemos para demonstrar o teorema da correção e completude. Podem ser encontradas na literatura demonstrações utilizando qualquer um dos dois sistemas, além de outros sistemas dedutivos que também são equivalentes a esses dois (usando a mesma noção de equivalência adotada no Teorema 4.5.2).

A demonstração se divide em duas partes, que dão nome ao teorema e a esta seção. A primeira parte – *correção* – determina se todos os teoremas são verdadeiros. A segunda parte – *completude* – determina se existe pelo menos uma demonstração para cada um dos seqüentes verdadeiros.

Teorema 4.6.1 – correção do sistema de dedução natural Todo teorema é verdadeiro.

Demonstração: Da definição de teorema, depreendemos que um teorema é sempre um axioma ou o resultado da aplicação de uma regra de dedução em um teorema anterior (ou seja, a linha superior de uma regra de dedução em uma demonstração é sempre um teorema). Portanto, a demonstração desse teorema se limita a demonstrar que todos os axiomas são verdadeiros e que, assumindo por hipótese em cada regra que a linha superior é verdadeira, decorre que a linha inferior também é verdadeira.

Apresentaremos a demonstração para um axioma e para uma regra de dedução e deixaremos os axiomas e regras de dedução restantes como exercício. Alertamos, entretanto, que esse exercício é difícil.

Consideremos, por exemplo, o axioma $\varphi \vdash \varphi, \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma^1)$. Para que esse seqüente seja verdadeiro, é preciso que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$ ou, então, que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \neg\varphi[\gamma]$ para qualquer sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ e qualquer interpretação de variáveis γ. Essa segunda condição é equivalente a exigir que não seja verdade que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$. Portanto, o seqüente é necessariamente verdadeiro, independentemente do sistema algébrico, da interpretação ou da estrutura de formação da fórmula φ.

Consideremos agora, como exemplo de regra, a regra (4):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}.$$

Assumindo que o seqüente $\Gamma \vdash \varphi$ seja verdadeiro, então, para cada sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ e para cada interpretação de variáveis γ, $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \varphi[\gamma]$, ou então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \neg\psi[\gamma]$ para pelo menos uma fórmula ψ pertencente a Γ.

Para que o seqüente $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ seja verdadeiro, é preciso que, para cada sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ e para cada interpretação de variáveis γ, $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models (\varphi \vee \psi)[\gamma]$, ou então $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models \neg\psi[\gamma]$ para pelo menos uma fórmula ψ pertencente a Γ. A segunda condição é garantida por hipótese, portanto resta apenas verificar se, para cada sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma^1)$ e para cada interpretação de variáveis γ, temos que $\mathcal{A}(\Sigma^1) \models (\varphi \vee \psi)[\gamma]$. Mas essa condição também é garantida pela hipótese. ■

Exercício

4.14 *(Difícil)* Completar a demonstração anterior para os axiomas e regras de dedução restantes.

Demonstraremos o resultado de completude para o sistema de dedução natural restrito aos seqüentes de forma $\vdash \varphi$, no qual φ é uma fórmula. Isso não restringe o resultado obtido, uma vez que o Teorema 4.5.1 – *teorema da dedução* – garante que qualquer seqüente pode ser reescrito dessa forma.

Teorema 4.6.2 – completude do sistema de dedução natural Todo seqüente da forma $\vdash \varphi$ que for verdadeiro é um teorema.

Apresentamos a seguir um esboço de demonstração para esse teorema. Diversos detalhes não triviais são omitidos, embora indiquemos nas notas bibliográficas onde eles podem ser encontrados. O objetivo dessa apresentação é exibir a estrutura geral da demonstração.

Demonstração: Precisamos de um conceito auxiliar. Uma lista de fórmulas Φ de uma assinatura Σ^1 é *inconsistente* se o seqüente $\Gamma \vdash$ for um teorema e todas as fórmulas em Γ ocorrerem também em Φ. Caso contrário, Φ é uma lista *consistente*.

Vamos verificar se Φ ser consistente é condição suficiente para garantir que Φ tem pelo menos um modelo. O Teorema 4.3.1 – *teorema da compacidade* – garante que, se Φ for localmente satisfazível, então Φ também será satisfazível. Portanto, para verificar se Φ tem um modelo, basta analisar as sublistas finitas de fórmulas $\hat{\Phi} = [\psi_1, \ldots, \psi_m] \subseteq \Phi$. Para cada sublista $\hat{\Phi}$, consideremos $\hat{\Sigma}^1 = [\hat{R}^1, \hat{C}, \hat{F}^1, \ldots, \hat{F}^N], N < \infty$ como a assinatura restrita aos símbolos que ocorrem em $\hat{\Phi}$, que também é necessariamente finita.

Um resultado cuja demonstração não detalharemos aqui é que: se $\hat{\Phi}$ tiver pelo menos um modelo, então a sentença $\exists x_1(\exists x_2(\ldots \exists x_n(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m)\ldots)$ será verdadeira, em que $\bigcup_{i=1}^{m} L(\psi_i) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Seja $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ um conjunto de constantes distintas duas a duas, tal que $D \cap \hat{C} = \varnothing$. Seja $\hat{\Sigma}^1_D = [\hat{R}^1, \hat{C} \cup D, \hat{F}^1, \ldots, \hat{F}^N], N < \infty$, e seja $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$ o conjunto de sentenças da assinatura $\hat{\Sigma}^1_D$.

Seja agora uma coleção de conjuntos de sentenças de $\hat{\Sigma}^1_D$ construída da seguinte forma. A coleção é denotada como $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$:

- $\Phi_0 = \hat{\Phi}$. Como Φ é consistente, depreende-se que Φ_0 também o é.
- Se $\Phi_n \cup \{\xi_n\}$ for inconsistente, então $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{\neg\xi_n\}$.
- Se $\Phi_n \cup \{\xi_n\}$ for consistente e ξ_n não for da forma $\exists x(\xi'_n)$, então $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{\xi_n\}$.
- Se $\Phi_n \cup \{\xi_n\}$ for consistente e ξ_n for da forma $\exists x(\xi'_n)$, então $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{\xi_n, \xi'_n[x := d_k]\}$, em que $d_k \in D$ e k é o menor índice tal que d_k não ocorre em $\Phi_n \cup \{\xi_n\}$.

Seja agora $\overline{\Phi} = \bigcup_{i=0,1,\ldots} \Phi_i$. Considerando todas as sentenças da forma $(d_i = d_j) \in \overline{\Phi}, d_i, d_j \in D$, pode ser facilmente observado que essas sentenças organizam o conjunto D em classes de equivalência (isso decorre das propriedades do símbolo de igualdade apresentadas na Seção 4.4). De cada classe de equivalência, denotamos como $\tilde{d}$ um representante escolhido arbitrariamente. Finalmente, seja o sistema algébrico $\tilde{\mathcal{A}}(\Sigma^1) = [\tilde{A}, \tilde{v}^{\tilde{\mathcal{A}}(\Sigma^1)}]$ da assinatura Σ^1_D, tal que:

- $\tilde{A} = \{\tilde{d} : d \in D\}$.
- $\tilde{v}^{\tilde{\mathcal{A}}(\Sigma^1)}(d) = \tilde{d}, d \in D$.
- $\tilde{d} \in \tilde{v}^{\tilde{\mathcal{A}}(\Sigma^1)}(r), r \in \hat{R}^1$ se, e somente se, $r(d) \in \overline{\Phi}$.
- Se $\hat{f}^j \in \hat{F}^j$, então $\tilde{v}^{\tilde{\mathcal{A}}(\Sigma^1)}(\hat{f}^j)(\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_j) = \tilde{d}$ se, e somente se, $(\hat{f}^j(d_1, \ldots, d_n) = d) \in \overline{\Phi}$.

Pode ser demonstrado que esse sistema algébrico é um modelo de $\overline{\Phi}$. Como $\hat{\Phi} \subseteq \overline{\Phi}$, esse sistema também é um modelo de $\hat{\Phi}$. Dessa forma, $\hat{\Phi}$ é satisfazível.

Como esse resultado não requer qualquer propriedade específica a respeito de $\hat{\Phi}$, ele vale para qualquer sublista finita de fórmulas de Φ. Assim, Φ é localmente satisfazível e, portanto, também é satisfazível.

Ou seja, se Φ for consistente, então Φ também será satisfazível. Em outras palavras, se Φ for *insatisfazível*, então Φ será necessariamente *inconsistente*.

Consideremos agora o seqüente $\vdash \varphi$. Se a fórmula φ for verdadeira, então a fórmula $\neg\varphi$ será insatisfazível. Pelo resultado anterior, essa fórmula será inconsistente, ou seja, existirá uma demonstração de $\neg\varphi \vdash$. Usando a regra (9) do sistema de dedução natural, decorre de imediato

que existirá também uma demonstração de $\vdash \varphi$, que é o resultado desejado. ■

Exercício

4.15 Pesquisar na literatura especializada e completar os detalhes das demonstrações nessa seção.

4.7 Decidibilidade e Complexidade

Até aqui o fato de termos restringido a lógica aos predicados monádicos não tinha sido explorado. O motivo apresentado para essa restrição tinha sido o fato de que, mesmo assim, essa lógica já é bem mais expressiva que a lógica proposicional, permitindo a caracterização de diversos problemas interessantes para cientistas de computação (como, por exemplo, algumas teorias simples de tipos).

Nesta seção, apresentaremos um resultado interessante, que será complementado no próximo capítulo: a satisfazibilidade de sentenças na lógica de predicados monádicos é decidível – ou seja, podemos construir um programa de computador que, dada uma sentença nessa lógica, responde *SIM* se a sentença for satisfazível ou *NÃO* em caso contrário – mas, se quisermos tornar essa lógica "apenas um pouquinho" mais expressiva, acrescentando-lhe predicados poliádicos, a satisfazibilidade se tornará indecidível, ou seja, passa a ser impossível construir um programa como esse.

Existe um preço a pagar, entretanto, pela maior expressividade da lógica de predicados monádicos em comparação com a lógica proposicional, que é a complexidade computacional associada ao problema da satisfazibilidade nessa lógica. A lógica vista neste capítulo é uma extensão da lógica proposicional, portanto não é surpreendente que o problema da satisfazibilidade para essa lógica também seja NP-completo. A sua complexidade, entretanto, é significativamente maior que no caso da lógica proposicional, ou seja, além de os recursos computacionais requeridos para resolver o problema da satisfazibilidade crescerem exponencialmente com uma medida de complexidade da sentença analisada, eles crescem com uma velocidade muito maior que no caso da lógica proposicional.

Rigorosamente falando, é preciso restringir um pouco mais a lógica de predicados monádicos para que a satisfazibilidade se torne decidível. Denominamos de assinatura de predicados monádicos *pura* a assinatura

$$\Sigma_P^1 = [R^1, C, F^1, F^2, \ldots, F^N], N < \infty$$

em que $C = F^1 = \ldots = F^N = \varnothing$.

Nesse caso, o conjunto de termos $T(\Sigma_P^1)$ coincide com o conjunto de variáveis $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Uma sentença $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma_P^1)$ necessariamente se enquadra em uma das seguintes categorias:

- φ é *verdadeira*, ou seja, $\mathcal{A}(\Sigma_P^1) \models \varphi$ em qualquer sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma_P^1)$. Nesse caso, pelo teorema da completude, existe a garantia de que $\vdash \varphi$ é um teorema.
- φ é *falsa*, ou seja, para nenhum sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma_P^1)$ temos que $\mathcal{A}(\Sigma_P^1) \models \varphi$. Nesse caso, também pelo teorema da completude, existe a garantia de que $\vdash \neg\varphi$ é um teorema.
- φ é *satisfazível*, ou seja, existem sistemas algébricos $\mathcal{A}(\Sigma_P^1)$ tais que $\mathcal{A}(\Sigma_P^1) \models \varphi$, mas também existem $\mathcal{A}'(\Sigma_P^1)$ para os quais não temos que $\mathcal{A}'(\Sigma_P^1) \models \varphi$. Nesse caso, não temos como teorema $\vdash \varphi$ nem $\vdash \neg\varphi$. O problema é detectar essa situação e saber que não vale a pena continuar tentando demonstrar um desses seqüentes.

Suponha que tenhamos a garantia de que, se uma sentença φ tiver um ou mais modelos, ela necessariamente terá pelo menos um modelo cuja cardinalidade será menor que ou igual a um valor conhecido m. Nesse caso, podemos gerar todos os sistemas algébricos $\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1) = [A_P, \nu_P^{\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1)}]$ tais que $|\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1)| \leqslant m$ e verificar se $\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1) \models \varphi$ para algum $\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1)$. Essa garantia, portanto, nos permitiria afirmar que a satisfazibilidade dessa lógica é decidível, bem como delimitaria o tamanho do espaço de busca para determinar se φ é satisfazível. Esse espaço de busca corresponderia a todas as possibilidades de colocação dos elementos de A_P em cada um dos conjuntos $\nu_P^{\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1)}(r_i)$, r_i ocorrendo em φ, ou seja, 2^m.

Esse resultado, de fato, já foi demonstrado. Apresentamos a seguir a construção desses sistemas algébricos, mas omitimos a demonstração de que,

se φ tiver um modelo, então φ terá pelo menos um modelo $\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1) = [A_P, \nu_P^{\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1)}]$ tal que $|\mathcal{A}_i(\Sigma_P^1)| \leqslant m$.

Suponha que os predicados que ocorrem em φ sejam $r_1^1, \ldots, r_k^1$ e que as variáveis que ocorrem em φ sejam $x_1, \ldots, x_r$. Por hipótese, φ tem pelo menos um modelo. Suponha que $\mathcal{B}(\Sigma_P^1) = [B, \nu^{\mathcal{B}(\Sigma_P^1)}]$ seja um modelo de φ (em que B não seja necessariamente um conjunto finito).

Para cada $b \in B$, seja $\iota(b) = [\iota_1, \ldots, \iota_k]$, em que cada $\iota_i \in \{\top, \bot\}$ indica o seguinte: se $\iota_i = \top$, então $b \in \nu^{\mathcal{B}(\Sigma_P^1)}(r_i^1)$, e se $\iota_i = \bot$, então $b \notin \nu^{\mathcal{B}(\Sigma_P^1)}(r_i^1)$. Independentemente da cardinalidade de B, existem no máximo 2^k tuplas distintas da forma $[\iota_1, \ldots, \iota_k]$.

Agrupemos os elementos de B em 2^k classes de equivalência da seguinte forma: b_i e $b_j \in B$ pertencerão à mesma classe de equivalência se $\iota(b_i) = \iota(b_j)$. Selecionemos, agora, de cada classe de equivalência, s elementos arbitrários, em que $s = \min\{r, \text{cardinalidade da classe de equivalência}\}$. Denotemos o conjunto de elementos selecionados como D. A cardinalidade de D é $|D| \leqslant 2^k \times r$. Seja agora o sistema algébrico $\mathcal{D}(\Sigma_P^1) = [D, \nu^{\mathcal{D}(\Sigma_P^1)}]$, no qual $d \in \nu^{\mathcal{D}(\Sigma_P^1)}(r_i^1)$ se, e somente se, $d \in \nu^{\mathcal{B}(\Sigma_P^1)}(r_i^1)$, $d \in D$, $i = 1, \ldots, k$.

Pode ser demonstrado que $\mathcal{D}(\Sigma_P^1)$ é modelo de φ. Portanto, dada uma sentença $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma_P^1)$ com k predicados e r variáveis, a verificação de satisfazibilidade requer a inspeção de todos os possíveis sistemas algébricos construídos como $\mathcal{D}(\Sigma_P^1)$, o que, no pior caso, significa inspecionar $2^{2^k \times r}$ sistemas algébricos.

Conforme prometido, obtivemos, dessa forma, que o problema da satisfazibilidade para a lógica de predicados monádicos com assinatura *pura* é decidível. Entretanto, conforme também previsto, a sua complexidade computacional é alta. Para ilustrar o quanto mais de trabalho pode ser necessário para verificar a satisfazibilidade de uma sentença nessa lógica, em comparação com a lógica proposicional, consideremos a seguinte sentença proposicional

$$((p_1 \vee p_2) \wedge p_3) \rightarrow (p_4 \vee \neg p_5)$$

O conjunto de valorações que precisam ser inspecionadas para verificar a satisfazibilidade dessa sentença tem cardinalidade $2^5 = 32$.

Consideremos agora a seguinte sentença com predicados monádicos de uma assinatura pura

$$(\forall x_1(\exists x_2(\forall x_3((p_1(x_1) \vee p_2(x_2)) \wedge p_3(x_3))))) \rightarrow (\exists x_4(\forall x_5(p_4(x_4) \vee \neg p_5(x_5))))$$

O conjunto de sistemas algébricos que precisam ser inspecionados para verificar a satisfazibilidade dessa sentença tem cardinalidade $2^{2^5 \times 5}$ = aproximadamente $1,46 \times 10^{48}$.

4.8 Notas Bibliográficas

Existem muitos bons livros introdutórios que apresentam a lógica de predicados de forma dirigida a matemáticos. Dentre eles, destacamos os livros de Shoenfield (2001) e de Mendelson (1987). Um livro-texto excelente sobre esse mesmo assunto e com o mesmo enfoque é o de Ershov e Paliutin (1990), já mencionado ao longo do capítulo. Infelizmente, com a falência da editora Mir, esse livro se tornou difícil de encontrar.

Os resultados de decidibilidade e de complexidade do problema da satisfazibilidade para a lógica de predicados monádicos com assinatura pura podem ser encontrados no livro de Boolos e Jeffrey (1989). Um texto introdutório sobre decidibilidade é o livro de Epstein e Carnielli (2000). Esse livro é bastante acessível, embora a organização pouco convencional do texto dificulte a sua leitura em alguns pontos.

5 Lógica de Predicados Poliádicos

5.1 Introdução

Vamos retomar um dos exemplos de motivação apresentados no capítulo anterior, na Seção 4.1. Consideremos a sentença "o filho de qualquer pessoa que pratica esportes tem boa saúde". Já utilizando a notação da lógica de predicados monádicos, se a função unária $f^1 : T(\Sigma^1) \to T(\Sigma^1)$ denotar a relação "filho de", o predicado r_1^1 denotar "pratica esportes" e o predicado r_2^1 denotar "tem boa saúde", podemos escrever

$$\rightarrow \forall x(r_1^1(x) \to r_2^1(f^1(x))).$$

Está implícito nessa sentença que ninguém pode ter mais de um filho, caso contrário a relação f^1 deixaria de ser uma função. Para que admitamos a condição de alguém ter vários filhos, poderíamos transformar a função f^1 em uma relação $r^2 \subseteq T(\Sigma^1)^2$, para então escrever

$$\rightarrow \forall x_1(\forall x_2((r_1^1(x_1) \wedge r^2(x_1, x_2)) \to r_2^1(x_2)).$$

O problema é que agora precisamos de um predicado *diádico*, que está além da linguagem vista no capítulo anterior.

Os predicados monádicos caracterizam atributos associados a termos individuais, e os predicados poliádicos (diádicos, triádicos etc.) caracterizam relações entre os termos. Por esse motivo, freqüentemente a lógica de predicados monádicos é denominada *lógica de atributos*, e a lógica de predicados poliádicos é denominada *lógica de relações*.

A alteração na lógica, para passar da linguagem de predicados monádicos para a linguagem de predicados poliádicos, é mínima: basta admitirmos na linguagem esses novos predicados. O poder expressivo da linguagem, entretanto, é drasticamente ampliado. Embora a maioria dos resultados do capítulo anterior seja preservada no caso dos predicados poliádicos, o aumento da expressividade se manifesta vigorosamente na alteração dos resultados atingíveis de decidibilidade e complexidade.

Nas próximas seções, apresentaremos as alterações decorrentes da inclusão dos predicados poliádicos. Na medida do possível, replicaremos neste capítulo a estrutura de seções do capítulo anterior, para facilitar a comparação entre as duas lógicas.

5.2 A Linguagem de Predicados Poliádicos

Apresentamos aqui a formalização da lógica de predicados poliádicos. A única alteração com relação à lógica de predicados monádicos é a substituição do conjunto $R^1 = \{r_1, r_2, \ldots\}$ – o conjunto de predicados monádicos – pelos conjuntos $R^i = \{r_1^i, r_2^i, \ldots\}$ de *predicados* i-*ádicos*, ou seja, predicados com i argumentos, $i \geqslant 1$. Cada um desses conjuntos pode ser vazio, finito ou infinito.

Uma *assinatura* é uma tupla específica

$$\Sigma = [R^1, R^2, \ldots, R^M, C, F^1, F^2, \ldots, F^N], M, N < \infty$$

O conjunto de termos $T(\Sigma)$ da lógica de predicados poliádicos é definido exatamente da mesma maneira que o conjunto $T(\Sigma^1)$ do capítulo anterior.

O conjunto $F(\Sigma)$ de fórmulas da assinatura Σ é definido indutivamente como o menor conjunto que atenda às seguintes condições:

- Se $t_1, \ldots, t_j \in T(\Sigma)$ e $r_i^j \in R^j$, então $r_i^j(t_1, \ldots, t_j) \in F(\Sigma)$.
- Se $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, então $t_1 = t_2 \in F(\Sigma)$.

  Esses dois tipos de fórmulas são denominados *fórmulas elementares*.
- Se $\varphi, \psi \in F(\Sigma)$, então $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in F(\Sigma)$.
- Se $\varphi \in F(\Sigma)$ e $x \in V$, então $\forall x(\varphi), \exists x(\varphi) \in F(\Sigma)$.

O conjunto de *variáveis livres* de uma fórmula φ, denotado como $L(\varphi)$, passa a ser definido assim:

- Se $\varphi = r^j(t_1, \ldots, t_j), r^j \in R^j, t_1, \ldots, t_j \in T(\Sigma)$, então $L(\varphi)$ é o conjunto de todas as variáveis ocorrendo em $t_1, \ldots, t_j$.
- Se $\varphi = (t_1 = t_2), t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, então $L(\varphi)$ é o conjunto de todas as variáveis ocorrendo em t_1 e t_2.
- Se $\varphi = \neg\psi$, então $L(\varphi) = L(\psi)$.
- Se $\varphi = \xi \vee \psi, \xi \wedge \psi$ ou $\xi \rightarrow \psi$, então $L(\varphi) = L(\xi) \cup L(\psi)$.
- Se $\varphi = \forall x(\psi)$ ou $\exists x(\psi), x \in V$, então $L(\varphi) = L(\psi) - \{x\}$.

5.3 Semântica

Um par $\mathcal{A}(\Sigma) = [A, \nu^{\mathcal{A}(\Sigma)}]$ é um *sistema algébrico da assinatura* Σ se as seguintes condições forem observadas:

- $A \neq \varnothing$ é denominado *portador* do sistema algébrico.
- $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma)}$ mapeia os elementos dos conjuntos de Σ em relações e funções sobre o conjunto A e é denominada *interpretação* de Σ em A.
- Se $r_i^j \in R^j$, então $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma)}(r_i^j) \subseteq A^j = \overbrace{A \times \ldots \times A}^{j \text{ vezes}}$.
- Se $c_i \in C$, então $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma)}(c_i) \in A$.
- Se $f_i^j \in F^j$, então existe uma função $\nu^{\mathcal{A}(\Sigma)}(f_i^j) : A^j \rightarrow A$.

As definições de interpretação de um conjunto de variáveis $\gamma : X \rightarrow A$ e de valor de um termo $t \in T(\Sigma)$ em um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma)$ para uma interpretação γ permanecem inalteradas.

Podemos definir agora quando uma fórmula $\varphi \in F(\Sigma)$ em um sistema algébrico $\mathcal{A}(\Sigma)$ para uma interpretação γ é *verdadeira* (denotado como $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$). Para que φ seja verdadeira em $\mathcal{A}(\Sigma)$ para γ, é preciso que ocorra o seguinte:

- Se $\varphi = r^j(t_1, \ldots, t_j) \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ é equivalente a $[t_1^{\mathcal{A}(\Sigma)}[\gamma], \ldots, t_j^{\mathcal{A}(\Sigma)}[\gamma]] \in \nu^{\mathcal{A}(\Sigma)}(r^j)$.
- Se $\varphi = (t_1 = t_2), t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ é equivalente a $t_1^{\mathcal{A}(\Sigma)}[\gamma] = t_2^{\mathcal{A}(\Sigma)}[\gamma]$.

- Se $\varphi = \neg\psi, \psi \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, não for verdade que $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \psi \vee \xi, \psi, \xi \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi[\gamma]$ ou $\mathcal{A}(\Sigma) \models \xi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \psi \wedge \xi, \psi, \xi \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ se e somente se $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi[\gamma]$ e $\mathcal{A}(\Sigma) \models \xi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \psi \rightarrow \xi, \psi, \xi \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, no caso em que $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi[\gamma]$, então necessariamente também $\mathcal{A}(\Sigma) \models \xi[\gamma]$.
- Se $\varphi = \exists x(\psi), \psi \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, existir pelo menos uma interpretação de variáveis $\gamma_1 : X_1 \rightarrow A$ tal que $x \in X_1, \gamma_1 \uparrow L(\varphi) = \gamma \uparrow L(\varphi)$ e $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi[\gamma_1]$.
- Se $\varphi = \forall x(\psi), \psi \in F(\Sigma)$, então $\mathcal{A}(\Sigma) \models \varphi[\gamma]$ se, e somente se, para qualquer interpretação de variáveis $\gamma_i : X_i \rightarrow A$ tal que $x \in X_i$ e $\gamma_i \uparrow L(\varphi) = \gamma \uparrow L(\varphi)$, tivermos que $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi[\gamma_i]$.

Exercícios

5.1 Considerar a assinatura $\Sigma^1 = [R^1, R^2, C, F^1, F^2]$, em que:

- $R^1 = \{r^1\}$.
- $R^2 = \{r^2\}$.
- $C = \{a, b, c\}$.
- $F^1 = \{f^1\}$.
- $F^2 = \{f^2\}$.

Considerar também os seguintes sistemas algébricos:

- $\mathcal{A}_1(\Sigma) = [A_1, \nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}]$.
  - $A_1 = \{1, 2\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(r^1) = \{1\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(r^2) = \{[1, 2]\}$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(a) = \nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(b)$
  - $\nu^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(c) = 2$

- $v^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(f^1) = f : A_1 \to A_1, f(x) = 1$
- $v^{\mathcal{A}_1(\Sigma)}(f^2) = g : A_1 \times A_1 \to A_1, g(x,y) = y$

➡ $\mathcal{A}_2(\Sigma) = [A_2, v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}]$.

- $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(r^1) = \{1, 3, 5, \ldots\}$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(r^2) = \{[1,2], [3,4], [5,6], \ldots\}$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(a) = 1$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(b) = 2$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(c) = 3$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(f^1) = f : A_2 \to A_2, f(x) = x + 1$
- $v^{\mathcal{A}_2(\Sigma)}(f^2) = g : A_2 \times A_2 \to A_2, g(x,y) = x + y$

Verificar, para as sentenças φ_i a seguir, se $\mathcal{A}_1(\Sigma) \models \varphi_i$ e se $\mathcal{A}_2(\Sigma) \models \varphi_i$:

➡ $\forall x_1(\exists x_2(\exists x_3(r^2(x_1, x_2) \to (r^1(x_2) \wedge r^1(x_3) \wedge (x_1 = f^2(x_2, x_3))))))$.

➡ $\forall x_1(\exists x_2(r^2(x_1, x_2) \to (r^1(x_2) \wedge \wedge (x_1 = f^2(x_2, a)))))$.

➡ $\forall x_1(\exists x_2(r^2(x_1, x_2) \to (r^1(x_2) \wedge \wedge (x_1 = f^2(x_2, c)))))$.

➡ $\exists x_1(\exists x_2(r^2(x_1, x_2) \to (r^1(x_2) \wedge \wedge (x_1 = f^2(x_2, c)))))$.

➡ $\forall x(r^1(x))$.

➡ $\forall x(r^2(x, x) \to r^2(x, x))$.

➡ $\exists x(r^2(f^1(x), f^2(x, x)) \to r^2(x, x))$.

➡ $\forall x(r^2(f^1(x), x) \to r^1(x))$.

➡ $\forall x(\neg(r^2(f^1(x), x) \to r^1(x)))$.

➡ $\neg\forall x(r^2(f^1(x), x) \to r^1(x))$.

5.2 Para cada uma das sentenças do exercício anterior, construir (se possível) um sistema algébrico $\mathcal{A}_j(\Sigma)$ tal que não seja verdade que $\mathcal{A}_j(\Sigma) \models \varphi_i$.

5.3 Demonstrar que existe um algoritmo que, para qualquer sentença φ, permite determinar em um número finito de passos se $\models_n \varphi$ para qualquer $n, 0 < n < \infty$. Ou seja, demonstrar que o resultado obtido no Exercício 4.6 da Seção 4.3 independe da restrição da lógica a apenas predicados monádicos.

O Teorema 4.3.1 – *teorema da compacidade* – também independe da presença de predicados que não sejam monádicos. Portanto, ele também é válido na lógica de predicados poliádicos.

5.4 Dedução Natural

Não detalharemos nenhum aspecto dos sistemas dedutivos já vistos no capítulo anterior para a lógica de predicados poliádicos, pois tudo o que foi apresentado nas Seções 4.4 e 4.5 independe da restrição aos predicados monádicos e, portanto, continua válido com predicados poliádicos.

Continuam valendo, portanto, para o sistema de dedução natural:

- O conceito de *substituição* de variáveis.
- O conceito de *seqüente*.
- Os *axiomas* do sistema de dedução natural.
- Todas as 16 *regras de dedução*.
- O conceito de *demonstração* de um seqüente.
- O conceito de *verdade* relativa a um sistema algébrico.
- O Teorema 4.4.1 – *teorema da correção e completude*. Para verificar essa última afirmativa, basta acompanhar a estratégia de demonstração desse teorema – delineada na Seção 4.6 – e verificar que em nenhum ponto daquela demonstração foi obtido algum resultado dependente do fato de os predicados tratados serem todos monádicos.

5.5 Axiomatização

Da mesma forma, continuam também valendo para o sistema axiomático de dedução:

- O Teorema 4.5.1 – *teorema da dedução*.
- Os 14 *axiomas* e as três *regras de dedução*.
- O Teorema 4.5.2 – *teorema da equivalência entre sistemas dedutivos*.

5.6 Tableaux Analíticos

O método dos tableaux analíticos apresentado na Seção 2.4 pode ser estendido para a lógica de predicados. Para isso, acrescentamos mais dois tipos de fórmulas marcadas, além dos já existentes tipos α β. Eles são os tipos γ e δ, apresentados, respectivamente, nas Figuras 5.1 e 5.2.

γ	γ_1
$T\forall x(A)$	$TA[x := a]$
$F\exists x(A)$	$FA[x := a]$

em que a é uma constante arbitrária.

Figura 5.1 *Fórmulas do tipo α.*

δ	δ_1
$F\forall x(A)$	$FA[x := a]$
$T\exists x(A)$	$TA[x := a]$

em que a é uma constante arbitrária *que não ocorre em* A.

Figura 5.2 *Fórmulas do tipo α.*

As regras de expansão são bastante simples:

Expansão γ: Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo γ, adiciona-se γ_1 ao fim de todos os ramos que contêm γ.

$$\frac{\gamma}{\gamma_1}$$

Expansão δ: Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo δ, adiciona-se γ_1 ao fim de todos os ramos que contêm γ.

$$\frac{\delta}{\delta_1}$$

Todos os procedimentos para demonstração usando tableaux analíticos permanecem idênticos aos apresentados na Seção 2.4.

Exemplo 5.6.1

Vamos provar, usando um tableau analítico, que

$$\forall x(r_1(x) \to r_2(x)) \vdash (\forall x(r_1(x))) \to (\forall x(r_2(x))):$$

$$\begin{array}{c}
T\ \forall x(r_1(x) \to r_2(x)) \\
F\ \vdash (\forall x(r_1(x))) \to (\forall x(r_2(x))) \\
T\ (\forall x(r_1(x))) \\
F\ (\forall x(r_2(x))) \\
F\ r_2(a) \\
T\ r_1(a) \\
T\ r_1(a) \to r_2(a) \\
\diagup \quad \diagdown \\
F\ r_1(a) \quad T\ r_2(a) \\
\times \qquad \times
\end{array}$$

Exercício

5.4 Construir demonstrações para os seguintes seqüentes, usando o método dos tableaux analíticos:

- $\forall x(r_1(x) \vee r_2(x)) \vdash \forall x(r_2(x) \vee r_1(x))$.
- $r_1(a), r_1(b) \vdash r_1(a) \wedge r_1(b)$.
- $\vdash \forall x_1(\forall x_2(r_1(x_1) \to (r_1(x_2) \to r_1(x_1))))$.
- $r_1(a) \wedge \neg r_1(a) \vdash$.
- $\vdash (r_1(c) \vee r_2(c)) \to (r_2(c) \vee r_1(c))$.
- $\vdash \forall x((r_1(x) \vee r_2(x)) \to (r_2(x) \vee r_1(x)))$.
- $\vdash r_1(a) \to (r_1(b) \to (r_1(a) \wedge r_1(b)))$.
- $\vdash \forall x_1(\forall x_2(r_1(x_1) \to (r_1(x_2) \to r_1(x_1))))$.
- $\vdash \neg(r_1(a) \wedge \neg r_1(a))$.
- $\vdash (r_1(c) \to (r_2(c) \wedge r_3(c))) \to ((r_1(c) \to r_2(c)) \wedge (r_1(c) \to r_3(c)))$.

- $\vdash (\forall x_1(r_1(x_1) \to r_2(x_1))) \to (\forall x_2(r_1(x_2))) \to (\forall x_3(r_2(x_3)))$.
- $\vdash (\forall x_1(\forall x_2(r_1(x_2) \to r_2(x_1)))) \to (\exists x_3(r_1(x_3)))$
  $\to (\forall x_4(r_2(x_4)))$.
- $\vdash (\forall x_1(\neg r_1(x_1) \wedge r_2(x_1))) \to (\forall x_2(r_1(x_2) \to r_2(x_2)))$.
- $\vdash r(c) \to \forall x((x = c) \to r(x))$.
- $\vdash (\forall x_1(\exists x_2(r_1(x_1) \vee r_2(x_2)))) \to (\exists x_3(\forall x_4(r_1(x_4) \vee r_2(x_3))))$.

5.7 Decidibilidade e Complexidade

Na Seção 4.7 destacamos que a satisfazibilidade de sentenças na lógica de predicados monádicos com assinatura pura é decidível, porém tem complexidade computacional muito alta. Ou seja, podemos construir um programa de computador que, dada uma sentença nessa lógica, sempre responde *SIM* se a sentença for satisfazível ou *NÃO* em caso contrário; entretanto, esse programa pode demorar muitíssimo para gerar essa resposta, em alguns casos.

Nesta seção, apresentaremos um resultado interessante, relativamente surpreendente e um tanto incômodo: a satisfazibilidade de sentenças na lógica de predicados poliádicos é *in*decidível. Ou seja, *não existe* um algoritmo capaz de, dada qualquer sentença nessa lógica, sempre responder *SIM* se a sentença for satisfazível ou *NÃO* em caso contrário.

Para apresentar esse resultado com os detalhes técnicos necessários, precisaríamos de uma seqüência de conceitos auxiliares. Esses conceitos são, em si, de grande interesse para estudos mais aprofundados tanto de teoria da computação como de lógica matemática. Eles são, entretanto, mais complexos e abstratos que as técnicas e conceitos vistos neste livro, e consideramos que o seu estudo foge do escopo pretendido para esta obra. Na seção de Notas Bibliográficas (Seção 5.8), indicamos referências adicionais em que esses detalhes podem ser encontrados.

Em vez disso, apresentamos um exemplo significativamente mais simples de demonstração de existência de funções indecidíveis. Com esse exemplo, pretendemos ilustrar algumas técnicas e o grau de abstração necessário para demonstrações dessa natureza. Um fator matemático que contribui para o alto grau de abstração requerido é que o resultado pretendido é a demonstração da inexistência de algo (no caso, de um procedimento efetivo para obter um resultado), portanto ao final da demonstração nenhum objeto concreto é exibido.

Uma *função característica* de números naturais é uma função $f : \mathbb{N} \to \{\bot, \top\}$, em que $\mathbb{N}$ é o conjunto de números naturais. Dentre as diferentes funções características existentes, algumas são decidíveis e outras são indecidíveis. A seguir, demonstraremos a indecidibilidade do problema de decidir se uma função característica é ou não decidível.[1]

A demonstração será efetuada por *redução ao absurdo*: partiremos da hipótese de que o problema é decidível e mostraremos como essa hipótese leva a uma contradição. Consideremos por hipótese, portanto, que exista um procedimento (que poderia ser traduzido em um programa de computador) que receba qualquer função característica e responda se ela é ou não decidível. Em outras palavras, o procedimento indica se vale a pena tentar traduzir a função característica apresentada em um programa ou se essa seria uma causa perdida.

O conjunto de funções características é enumerável e pode ser ordenado segundo algum critério (por exemplo, segundo a ordem lexicográfica dos nomes dados às funções). Considerando essa ordenação e a existência do procedimento que responde se uma função característica é decidível, podemos computar qual é a n-ésima função característica decidível. Para isso, basta testar as funções características uma a uma, obedecendo à sua ordenação, e contar as funções decidíveis encontradas.

Supondo que seja possível efetuar esse teste e que as funções características decidíveis encontradas sejam denotadas, na ordem, como $d_0, d_1, \ldots$, poderemos construir a seguinte função $g : \mathbb{N} \to \{\bot, \top\}$:

$$\rightarrow g(i) = \begin{cases} \bot \text{ se } d_i(i) = \top \\ \top \text{ se } d_i(i) = \bot \end{cases}$$

Evidentemente, a própria função g é uma função característica decidível. Portanto, existe um índice k tal que $g = d_k$. O valor de $g(k)$, entretanto, é contraditório:

$$\rightarrow g(k) = \begin{cases} \bot \text{ se } d_k(k) = g(k) = \top \\ \top \text{ se } d_k(k) = g(k) = \bot \end{cases}$$

[1] N.A. Esse é um meta-problema de decidibilidade, por assim dizer.

Portanto, não é possível construir o procedimento que gera a seqüência de funções características decidíveis $d_0, d_1, \ldots$. Em outras palavras, determinar se qualquer função característica é ou não decidível é um problema indecidível.

A estratégia usada para demonstrar a indecidibilidade da satisfazibilidade para a lógica de predicados poliádicos é similar à da demonstração que acabamos de apresentar. A demonstração propriamente dita, entretanto, é muito mais complicada.

Exercício

5.5 (Extraído de Davis, 1958) Considerar as funções de uma variável para os números naturais $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Demonstrar que determinar se qualquer uma dessas funções é ou não decidível é um problema indecidível. (Dica: Se o problema fosse decidível e as funções decidíveis pudessem ser ordenadas como $d'_0, d'_1, \ldots$, considerar a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(i) = d'_i(i) + 1$.)

5.8 Notas Bibliográficas

As mesmas referências bibliográficas sugeridas na Seção 4.8 contêm material detalhado sobre a lógica de predicados poliádicos, incluindo a demonstração da indecidibilidade da satisfazibilidade para essa lógica.

Uma referência adicional importante é o texto histórico de Martin Davis (1958) que, apesar da idade, continua indicado como um livro exemplarmente didático e bem organizado. O exemplo de função indecidível apresentado aqui foi inspirado por um exercício encontrado nesse texto.

O sistema dedutivo da *resolução* apresentado no Capítulo 3 pode ser estendido para a lógica de predicados, com o devido tratamento das variáveis. Essa extensão, entretanto, já foi publicada em outros dois livros de um dos autores do presente texto, e consideramos redundante repeti-la mais uma vez aqui. Sugerimos ao leitor interessado que consulte Melo e Silva (2003) e Corrêa da Silva e Agustí-Cullell (2003).

Parte 3

Verificação de Programas

6 Especificação de Programas

6.1 Introdução

Uma das principais tarefas dos profissionais de computação é o entendimento e modelagem de um problema real em um problema computacional. Para o entendimento do problema real a ser resolvido, várias pesquisas têm sido desenvolvidas na chamada *engenharia de requisitos* (Sommerville e Sawyer, 1997; Kotonya e Sommerville, 1998). Ao final do processo de entendimento, o problema precisa ser representado e futuramente desenvolvido computacionalmente e, para isso, necessitamos de uma forma de representação clara e precisa.

É comum encontrarmos problemas a serem computacionalmente resolvidos representados em linguagem natural, como, por exemplo:

Exemplo 6.1.1

O proprietário de uma loja de CDs precisa que seja emitida, toda semana, uma lista de seus clientes ordenados do maior ao menor valor de compras. A partir de uma descrição inicial, o analista do sistema deve descrever o problema a ser implementado para os respectivos programadores do sistema. Algo como:

> Dada uma lista de clientes da loja e os seus respectivos valores de compras efetuadas naquela loja, o programa deverá produzir uma lista desses clientes em ordem decrescente dos seus respectivos valores de compras.

A partir dessa especificação, o programador irá produzir um programa de ordenação considerando o valor de compra de cada cliente.

O problema descrito anteriormente é bastante simples e com várias soluções conhecidas: os vários algoritmos de ordenação na literatura. Note, contudo, que não há qualquer menção sobre o fato de:

- Ter, ou não, clientes repetidos nessa lista.
- Se é permitida uma lista vazia de clientes.
- Ou, ainda, qual o significado de *lista ordenada pelo valor de compra*.

Sobre o significado de ordenação, poderíamos assumir o termo como conhecido na literatura, enquanto os outros itens deveriam ser explicitamente mencionados para uma solução mais precisa. A falta de definição desses elementos poderia gerar uma solução inadequada como, por exemplo, listar um mesmo cliente várias vezes quando os valores de suas compras deveriam ser somados no caso em que um mesmo cliente aparecesse mais de uma vez na lista fornecida (quando é permitido um mesmo cliente aparecer mais de uma vez na lista).

Assumir o termo como na literatura, nesse caso particular, poderia ser apropriado porque o domínio é conhecido. Contudo, em grande parte dos sistemas computacionais, *assumir* significados de termos, ao contrário de defini-los explicitamente, pode ser desastroso, culminando com a produção de um software que não foi solicitado quando *assumimos* um significado errôneo de termos. Esse é apontado como um dos principais problemas no desenvolvimento de software e tem sido largamente estudado na área de *engenharia de software* (Sommerville, 2001). Uma das suas principais causas é a falta de comunicação adequada, seja entre pessoas do grupo de desenvolvimento, seja entre as várias modelagens do sistema. A comunicação adequada entre as várias modelagens é remediada principalmente por boas representações, o que também propicia uma melhor comunicação entre pessoas da equipe de desenvolvimento.

Existem hoje linguagens para a especificação dos vários níveis de abstração do software, desde a arquitetura até problemas algorítmicos detalhados. A UML (*unified modeling language*) (Booch, Rumbaugh e Jacobson, 1999) é um exemplo do esforço de unificar representações das modelagens de sistemas para facilitar o entendimento. Várias outras linguagens com semânticas precisamente definidas também têm sido largamente usadas para a especificação de sistemas críticos e serão discutidas na Seção 6.5. Neste capítulo, discutimos

o uso da lógica clássica como linguagem para *especificação de programas*. Uma discussão sobre especificação de sistemas computacionais complexos está fora do escopo deste livro. Aqui, pretendemos apenas mostrar como podemos especificar problemas a serem solucionados por um programa para que possamos, posteriormente, provar que o programa implementa, de fato, uma solução para o problema especificado.

6.2 Especificação de Programas

Como visto na seção anterior, vários problemas a serem resolvidos computacionalmente são especificados em linguagem natural ou mesmo em uma linguagem esquemática que, muitas vezes, tem seus itens descritos em linguagem natural. Apesar de a descrição de um sistema computacional em linguagem natural ser, em geral, de fácil leitura (se for bem escrita) pela maioria dos integrantes da equipe de desenvolvimento, a ambigüidade de termos utilizados para definir os requisitos pode gerar entendimentos diferentes sobre um mesmo requisito. Isso poderá ocasionar desenvolvimentos de partes individuais de um mesmo requisito que são inconsistentes entre si, simplesmente porque cada um teve uma interpretação particular sobre um mesmo termo. Além disso, podemos gerar, em linguagem natural:

- Frases perfeitas sob o ponto de vista gramatical, mas com significado vago na descrição de um domínio de aplicação de sistemas.
- Frases com significados inconsistentes sobre um mesmo requisito.

Por outro lado, como visto no estudo da lógica clássica (Partes I e II), esta pode expressar propriedades sobre o nosso cotidiano a partir dos predicados definidos sobre o domínio em questão. Com a lógica clássica, podemos, então, formular sentenças sobre sistemas com interpretação única, já que todos os seus operadores têm um significado único. Além disso, podemos ainda verificar inconsistências quando definimos propriedades contraditórias sobre um mesmo requisito.

Neste capítulo, temos como objetivo mostrar o uso da lógica clássica na especificação de propriedades sobre programas. Para isso, definimos inicialmente quais tipos de propriedades são relevantes aos programas seqüenciais (determinísticos), para então mostrar como elas podem ser definidas usando a lógica clássica.

6.2.1 Programas como Transformadores de Estados

Discutimos até o momento a importância da especificação como modelagem precisa de problemas reais. A partir dessa modelagem, ou representação, dos dados reais, precisamos de formas de processamento que transformem os dados originais em novos dados produzidos. Essas transformações são realizadas por meio dos programas, que são máquinas abstratas responsáveis pela transformação de dados. Assim, a solução computacional para um problema requer que ele tenha os seus dados modelados de forma computacional e, a partir de um modelo desses dados, o programa faz processamentos que os transformam em dados resultado, o resultado computacional do programa. A Figura 6.1 mostra essa relação entre os dados de entrada e saída.

$$\text{Dados de Entrada} \longrightarrow \boxed{\text{Programa}} \longrightarrow \text{Dados de Saída}$$

Figura 6.1 *Programa abstrato.*

Considerando a computação de um programa como uma máquina de transformação, podemos distinguir dois *estados* primordiais do programa: o *estado inicial*, quando nenhuma transformação sobre os dados foi ainda realizada, e o *estado final*, após todas as transformações realizadas pelo programa. A maioria dos programas, no entanto, é formada por sucessivas transformações de dados. Dessa forma, podemos subdividir o programa em elementos de transformações sucessivas, como mostra a Figura 6.2.

$$\boxed{\sigma_1} \longrightarrow \boxed{\sigma_2} \cdots \longrightarrow \boxed{\sigma_n}$$

Figura 6.2 *Programa: transformação de estados.*

Ainda nos resta definir o que representa o estado de um programa. Se considerarmos que um programa é representado por uma função, como nas linguagens funcionais, os dados de entrada representam o estado inicial, o processamento da função representa o programa (a capacidade de transformação) e o resultado da função representa o estado final, como definido na Figura 6.1. Para as linguagens que possuem variáveis para *guardar* valores de dados a serem computados ao longo do programa, o estado é refletido pelo conjunto de variáveis e seus respectivos valores. O estado inicial de um

programa é, portanto, denotado pelo conjunto de suas variáveis, com os seus respectivos conteúdos, quando a computação do programa é iniciada. Após uma primeira transformação, temos um novo estado do programa, e assim sucessivamente até o final da computação, chegando ao estado final do programa. Para programas seqüenciais, a computação de um programa é, na realidade, uma transformação sucessiva de seu estado (Figura 6.3).

$$\boxed{\sigma_1 = \{v_1^1, \ldots, v_m^1\}} \longrightarrow \boxed{\sigma_2 = \{v_1^2, \ldots, v_m^2\}} \cdots \longrightarrow \boxed{\sigma_n = \{v_1^n, \ldots, v_m^n\}}$$

Figura 6.3 *Computação de um programa.*

Assim, especificar propriedades sobre programas significa descrever relações sobre os estados desse programa. Para o problema apresentado no Exemplo 6.1.1 (ordenação pelo valor de compra), poderíamos definir propriedades tanto sobre o estado inicial quanto sobre o estado final:

Estado inicial:

- A lista de clientes contém pelo menos um cliente.
- Não há clientes repetidos na lista dada.
- Para cada cliente, existe um valor não-negativo de compras etc.

Estado final:

- A lista resultado do programa deverá conter todos os elementos da lista inicial.
- A lista resultado deverá estar em ordem decrescente dos valores de compra. Assim, o cliente que efetuou a compra de maior valor deverá ser o primeiro elemento da lista. O segundo elemento da lista deverá conter o cliente que efetuou a segunda maior compra, e assim sucessivamente.

Note que as propriedades definidas são apenas ilustrativas e várias outras poderiam ser definidas sobre o mesmo programa, inclusive considerando restrições distintas sobre o estado inicial do programa, como, por exemplo, aceitar uma lista de entrada com a repetição de clientes. É importante salientar que as propriedades aqui definidas sobre o estado inicial restringem

o funcionamento do programa a apenas dados de entrada que satisfaçam aquelas características. Por outro lado, as propriedades sobre o estado final refletem o que será produzido pelo programa e, principalmente, quais as transformações efetuadas sobre os dados do estado inicial. Além dos estados inicial e final, as propriedades poderiam também ser definidas sobre estados intermediários do programa.

6.2.2 Especificação de Propriedades sobre Programas

Como os programas seqüenciais são transformadores de dados e esses dados denotam o estado dos programas por meio de suas variáveis, é natural que as propriedades sobre os programas sejam definidas sobre as suas variáveis. Assim, podemos definir uma propriedade sobre uma variável em particular ou, ainda, como uma relação entre variáveis de um mesmo programa. Para ilustrar, vamos utilizar um problema ainda mais simples que o anterior.

Exemplo 6.2.1

Dados dois valores de entrada sobre o domínio dos números inteiros maiores ou iguais a 10 (dez), o programa deverá calcular a soma desses dois valores.

Especificação:

Para especificarmos esse problema, podemos inicialmente *dar nomes* às variáveis de entrada do programa: x representa o primeiro dado de entrada e y, o segundo dado de entrada. Podemos agora definir a restrição sobre os dados de entrada (estado inicial) do programa:

$$x \geqslant 10 \wedge y \geqslant 10$$

Para que o programa a ser construído possa funcionar da forma esperada, precisamos que esse predicado seja satisfeito.

Usando essas mesmas variáveis do programa e mais uma nova variável para denotar o valor calculado pelo programa (z), podemos especificar também propriedades sobre o estado final do programa:

$$z = x + y$$

Aqui, usamos novamente as duas variáveis definidas como valores de entrada para especificar a propriedade de que o valor calculado pelo programa deverá corresponder à soma dos valores de entrada. Note que esse é um

predicado sobre as variáveis do programa e, portanto, deverá ser verdadeiro ao final do programa (a igualdade definida na fórmula é matemática; isso não constitui uma atribuição como em programas).

No exemplo anterior, definimos propriedades sobre os estados inicial e final usando variáveis que representam os dados de entrada do programa. Para um problema tão simples, pudemos especificar as propriedades relevantes diretamente do seu enunciado. Para problemas mais complexos, o enunciado, em geral, não é escrito de forma tão completa quanto o apresentado anteriormente e a especificação requer, muitas vezes, o conhecimento do domínio do problema para que possamos especificar precisamente o problema computacional a ser resolvido. Essa é, de fato, a situação mais comum a ser encontrada, e o *especificador* do sistema ou programa tem como tarefa modelar um problema real de forma que possa ser resolvido computacionalmente.

Assim, um mesmo sistema (ou programa) pode ser especificado de formas diferentes e o *especificador* é responsável por decidir quais propriedades são relevantes ao sistema (precisam ser satisfeitas pelo sistema) tanto em seu estado inicial quanto em seu estado final (ou estados intermediários, para sistemas mais complexos). A decisão de quais *propriedades são relevantes* a um dado sistema é uma tarefa tão subjetiva quanto a de se *construir um programa claro e elegante* para um dado problema e depende da experiência do *especificador*. Por essa razão, podemos ter especificações distintas de um mesmo problema ou ainda especificações com características indesejáveis, tais como falta de clareza, deficitária ou com propriedades desnecessárias. Nos exemplos seguintes, mostramos especificações distintas do Exemplo 6.2.1 e apontamos alguns problemas.

Exemplo 6.2.2

Considere o mesmo problema definido no Exemplo 6.2.1.

Especificação:

Sobre o estado inicial:

$$x \geqslant 10 \wedge y \geqslant 10 \wedge (x + y) \geqslant 0$$

Sobre o estado final:

$$z = x + y \wedge z \geqslant 20$$

Análise:

Nas propriedades especificadas, tanto sobre o estado inicial quanto sobre o estado final acrescentamos novos predicados. Sobre o estado inicial, $(x+y) \geqslant 0$ é um predicado desnecessário porque pode ser deduzido pelos dois outros iniciais. Da mesma forma, sobre o estado final, o predicado $z \geqslant 20$ pode ser omitido por ser uma conseqüência dos dois primeiros predicados sobre o estado inicial, juntamente com $z = x + y$. Essa é uma característica indesejável nas especificações, a qual chamamos de *superespecificação* (do inglês *overspecification*).

A superespecificação, em geral, ocorre quando o especificador tem o ímpeto de especificar *tudo* o que ele sabe sobre o problema e não percebe que está repetindo o que já foi especificado. Em casos particulares, a superespecificação pode ser proposital para enfatizar uma certa característica do problema. Para o problema apresentado no exemplo, este poderia ter sido requisitado em um domínio em que o resultado apresentado deverá ser usado para um próximo cálculo e tem como restrição ser um valor estritamente maior ou igual a 20. Nesse caso, o predicado $z \geqslant 20$ poderia servir como ênfase no sistema como um todo.

Exemplo 6.2.3

Considere o mesmo problema definido no Exemplo 6.2.1.

Especificação:

Sobre o estado inicial:

$$x \geqslant 10 \wedge (x + y) \geqslant (10 + x)$$

Sobre o estado final:

$$z = x + y$$

Análise:

Nas propriedades especificadas sobre o estado inicial, temos o predicado $(x + y) \geqslant (10 + x)$. Este, juntamente com $x \geqslant 10$, especifica que y deve ser maior ou igual a 10 (dez), como requerido pelo problema. Contudo, essa é uma forma *pouco clara*, ou indireta, de explicitar tal propriedade. É ideal que tenhamos especificações com propriedades explícitas sobre o problema e da maneira mais concisa possível.

Podemos, ainda, ter especificações deficitárias que podem prejudicar tanto o problema a ser resolvido quanto a sua verificação posteriormente.

Exemplo 6.2.4

Considere o mesmo problema definido no Exemplo 6.2.1.

Especificação:

Sobre o estado inicial:

$$x \geqslant 10$$

Sobre o estado final:

$$z = x + y$$

Análise:

Na propriedade especificada sobre o estado inicial, temos apenas o predicado $x \geqslant 10$. Nesse caso, y poderia assumir qualquer valor, o que torna a especificação incompatível com a definição do problema. Com essa especificação *incompleta* do problema, um programa poderia ser construído resultando em uma solução errada para o problema – poderíamos, inclusive, obter números negativos como resultado do problema.

Vários cuidados devem ser observados para que obtenhamos uma especificação clara, concisa e precisa de um programa. O especificador precisa definir, inicialmente, quais restrições são necessárias sobre os dados de um programa para que ele funcione, assim como propriedades sobre os dados a serem produzidos pelo programa. Nos exemplos anteriores, definimos as propriedades sobre os dados dos programas utilizando uma linguagem matemática – comparações sobre números inteiros e conectivos lógicos. Poderíamos ter tais especificações escritas em linguagem natural, mas as vantagens de termos especificações de programas definidas em uma linguagem matemática são:

(a) **Precisão:** a linguagem matemática é precisa e, por isso, possui um significado único para cada propriedade.

(b) **Verificação de Consistência:** a linguagem matemática nos possibilita verificar inconsistências nas especificações quando temos propriedades contraditórias sobre um mesmo objeto. Essas inconsistências

podem ser verificadas de forma automática ou pelo menos semi-automática. Tal verificação se torna impossível quando temos essas especificações em linguagem natural, dada a ambigüidade de termos e sentenças.

(c) **Simulação:** as especificações em algumas linguagens matemáticas podem ser parcialmente executáveis, o que auxilia a validação da especificação.

(d) **Verificação de Programas:** após a construção de um programa que pretendemos que solucione o problema especificado, podemos verificar (novamente de forma automática ou semi-automática) se esta é uma solução (satisfaz) para a especificação do problema. Assim como na verificação de consistência, a verificação do programa só é possível se tivermos o problema especificado em uma linguagem precisa.

Uma vantagem decorrente das especificações em linguagem matemática é que para definir propriedades de forma precisa, os especificadores necessitam de uma idéia clara sobre o problema, ao passo que a descrição em linguagem natural pode ser vaga. Note que isso não é mérito da linguagem matemática (podemos ter especificações com um bom entendimento sobre o problema em linguagem natural), mas acaba sendo uma realidade na prática.

Em contrapartida, uma especificação escrita em linguagem matemática, apesar de ser acessível aos profissionais de computação, nem sempre é de fácil leitura aos usuários que contratam os serviços de tais profissionais. Além disso, apesar de estimular um entendimento preciso do problema, a especificação em linguagem matemática pode ser tanto incompleta quanto incorreta em relação ao problema real. Assim como em quaisquer outras modelagens de problemas reais, o especificador poderá ter um entendimento incorreto ou incompleto do problema, e isso se refletirá na especificação. Existe a chance de entendimentos equivocados serem descobertos se tivermos a simulação da especificação, mas não há um "passe de mágica" que faça com que especificações em uma linguagem matemática sejam exatamente o que se deseja do problema real sem um esforço do especificador.

Nesta seção, apresentamos apenas o que é desejável na especificação de programas e argumentamos que podemos usar uma linguagem matemática para tal especificação. Na Seção 6.3, mostramos o uso da lógica clássica como linguagem matemática para a especificação de propriedades sobre programas seqüenciais.

6.3 Lógica Clássica como Linguagem de Especificação

Vimos, na Parte 2 deste livro, o uso da lógica de predicados para expressar sentenças do nosso cotidiano e sistemas de prova sobre tal fundamento. Nesta seção, redefinimos a linguagem lógica utilizada para a especificação de programas, considerando a semântica já definida nos capítulos anteriores.

Considere R, F, V e C os conjuntos de símbolos de predicados, funções, variáveis e constantes, respectivamente. A linguagem lógica aqui utilizada será a seguinte:

Termos – os termos t são definidos por:

$$t ::= x \mid c \mid f(t, \ldots, t)$$

- x – uma variável – $x \in V$.
- c – uma constante – $c \in C$.
- Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e f é uma função ($f \in F$) de paridade n, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Fórmulas – o conjunto de *fórmulas* é definido por:

$$\varphi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi$$

- Se P é um predicado com n argumentos e $t_1, \ldots t_n$ são termos, então $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula.
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall$ e $\exists$ são todos operadores da lógica de predicados com a semântica definida anteriormente.
- A precedência dos operadores, assim como o uso de parênteses nas fórmulas, tem o mesmo significado que nas fórmulas apresentadas anteriormente.
- As variáveis não quantificadas são ditas variáveis livres.

Alguns predicados sobre programas, assim como nos exemplos anteriores, serão definidos na forma infixa para tornar a leitura de propriedades mais intuitiva.

Exemplo 6.3.1

Para comparar se um dado número inteiro é maior ou igual a outro, utilizamos

$$5 \geqslant 4$$

em vez de usarmos o predicado na forma

$$\mathrm{MaiorOuIgual}(5,4) \text{ ou } \geqslant (5,4)$$

como sugerido na notação anterior. Essa escolha de notação tem como objetivo a clareza, já que lidamos no nosso dia-a-dia com comparações entre números na notação infixa, seja em definições matemáticas, seja nas linguagens de programação. Da mesma forma, a comparação entre variáveis que representam valores numéricos também aparecerá na forma infixa para tornar a leitura mais intuitiva:

$$x \geqslant y$$

Além dessa comparação, todas as outras comparações usuais entre números inteiros também serão usadas na forma infixa:

$$x = y, x \leqslant y, x \leqslant y, x \geqslant y, x \geqslant y$$

Operadores sobre inteiros serão definidos na Seção 6.3.1.

A forma de escrita (infixa) dos predicados conhecidos sobre números não altera o significado nem o poder de expressão da lógica. Assim, a semântica da linguagem e os sistemas de prova definidos nos capítulos anteriores continuam válidos aqui.

Para a especificação de um programa, devemos inicialmente definir o significado dos predicados usados nas asserções (ou propriedades) sobre o programa. Omitimos a definição inicial desses predicados se eles já forem conhecidos, tais como os matemáticos definidos anteriormente.

Exemplo 6.3.2

Dadas x e y variáveis que representam números inteiros, as seguintes expressões são fórmulas aceitas como asserções de programas:

(a) $x > 0$ – o valor da variável x deverá ser maior que 0.

(b) $x \geqslant 0 \wedge x \leqslant 10$ – o valor da variável x deverá estar no intervalo fechado entre 0 e 10.

(c) $x < 0 \vee x \geqslant 20$ – o valor da variável x deverá ser um número negativo ou maior ou igual a 20.

(d) $\forall x(x = 0 \vee x + y > 10)$ – para todos os valores que a variável x pode assumir, esse valor deverá ser 0, ou a sua soma com o valor da variável y deverá ser maior que 10.

(e) $\exists y(x = 2 * y)$ – o valor da variável x é um número par.

Aqui mostramos apenas que asserções usando a lógica de predicados podem ser usadas como especificações de programas. Nas seções que seguem, definimos um conjunto de predicados associados a tipos de dados que auxiliam a especificação de sistemas reais e uma sistemática de especificação baseada em asserções sobre os estados inicial e final dos programas.

6.3.1 Tipos de Dados e Predicados Predefinidos

Quando definimos sentenças lógicas sobre o nosso cotidiano, precisamos, antes de tudo, definir predicados e funções-base sobre o domínio em questão. Para especificar asserções sobre programas, devemos definir, da mesma forma, um conjunto de predicados sobre o domínio de aplicação. Apesar de podermos definir novos tipos em grande parte das linguagens de programação, existem os elementos-base sobre os quais construímos esses novos tipos, os tipos predefinidos das linguagens. Predefinimos aqui um conjunto de predicados e funções sobre elementos que comumente usamos para asserções sobre programas. Esta não é uma lista exaustiva de elementos-base; uma lista mais completa pode ser encontrada nas linguagens e métodos formais definidos com o propósito de especificação de sistemas mais complexos (Seção 6.5). Aqui, restringimo-nos a um conjunto ilustrativo que nos possibilite definir asserções sobre programas.

Números Inteiros

Expressões envolvendo números inteiros são comuns em linguagens de programação e, por isso, estados dos programas muitas vezes incluem variáveis com valores no conjunto de números inteiros. Existe um conjunto de relações e funções sobre números inteiros, e aqui enumeramos alguns deles usados no decorrer das especificações:

$\mathrm{IntXInt} \rightarrow \mathrm{Int}$

- $x + y$.
- $x - y$.
- $x * y$.
- x/y – divisão de inteiros.
- $\max(x, y)$ – o valor máximo entre dois números.
- $\min(x, y)$ – o valor mínimo entre dois números.
- $\mathrm{mod}(x, y)$ – resto da divisão de x por y.

$\mathrm{IntXInt} \rightarrow \mathrm{Bool}$

- $x = y$ – o símbolo $=$ é sobrecarregado para números inteiros e termos lógicos.
- $x < y$.
- $x \leqslant y$.
- $x > y$.
- $x \geqslant y$.

Essa é uma definição incomum para os números inteiros, mas é usada aqui apenas para facilitar a escrita/leitura das especificações.

Vetores

Da mesma forma que os números inteiros, é comum termos vetores (*arrays*) de valores, os quais formam um tipo composto. Em particular, podemos ter vetores de números inteiros:

$$V_1, \ldots, V_n$$

As variáveis compostas serão representadas por índices (subscritos), que são valores inteiros. Os vetores de valores inteiros têm a seguinte assinatura:

$$\mathrm{Int} \rightarrow \mathrm{Int}$$

Para elementos representados nesse tipo de estrutura, podemos, por exemplo, comparar valores, bem como os seus índices.

Exemplo 6.3.3

Os elementos do vetor V, que não contém elementos repetidos, estão em ordem decrescente:

$$\forall i, j (i < j \rightarrow V_i > V_j)$$

Na maioria dos métodos formais, os vetores são definidos como seqüências, o tipo associado a vetores, e várias relações e funções são definidas (como, por exemplo, primeiro e último elementos da seqüência). Aqui, optamos pela denominação de vetores para aproximar à nomenclatura usada nas linguagens de programação.

6.3.2 Invariantes, Precondições e Pós-condições

Para a especificação de propriedades sobre programas, as quais objetivamos que sejam verificadas posteriormente (Capítulo 7), devemos sistematizar como elas devem ser construídas.

Como sugerido na Seção 6.2, programas seqüenciais são essencialmente transformadores de estados. As especificações de programas devem, portanto, denotar quais ações são esperadas dos programas sob o ponto de vista de transformações de seus estados. Inicialmente, o especificador deve:

1. Identificar o domínio de aplicação do problema
2. Escolher uma representação (modelo) para os dados a serem manipulados pelo programa
3. Definir os elementos que compõem os estados do programa
4. Identificar quais transformações sobre o estado são relevantes ao problema e
5. Descrever as transformações sobre os estados

Na identificação e descrição das transformações sobre os estados, devemos identificar alguns elementos importantes: o estado inicial e o estado final. Além disso, as asserções devem explicitamente denotar sobre quais estados elas são definidas:

Precondições: asserções definidas sobre o estado inicial do programa que denotam sob quais restrições o programa está preparado para funcionar. As precondições determinam condições tanto sobre dados de entrada quanto sobre valores iniciais de variáveis. Se as precondições de um programa são violadas, não há garantia de que ele funcione adequadamente.

Exemplo 6.3.4

Dado um número inteiro n, o programa Fat deverá calcular o fatorial de n.

Identificando o domínio de aplicação do problema, o domínio da função fatorial, percebemos que ela está definida apenas para números inteiros maiores ou iguais a zero: $n \geqslant 0$. Como essa função não está definida para números negativos, o programa estará preparado apenas para o cálculo de fatorial de números não-negativos. Caso seja dado um número negativo, o programa poderá eventualmente produzir um resultado errôneo. Assim, temos para o problema proposto:

Pre: $n \geqslant 0$

Caso essa condição seja violada – por exemplo, $n = -2$ –, o programa poderia produzir um resultado errado como -2, não produzir um resultado final (*loop* infinito) ou ainda produzir uma mensagem sobre o dado de entrada errado.

Diferentemente dos exemplos anteriores, neste tivemos de descobrir, a partir do domínio de aplicação do problema, quais as precondições necessárias ao funcionamento do programa. Isso é uma prática na maioria das situações reais e constitui uma das tarefas do especificador (a definição informal do problema a ser resolvido nem sempre evidencia tais condições). Vale ressaltar que a omissão de precondições para um programa determina que ele deverá responder a quaisquer valores do tipo. Quando não há a definição explícita das precondições, estas assumirão o valor `true`, denominando que não há restrições sobre o estado inicial do programa.

Pós-condições: são asserções sobre o estado final do programa que denotam condições sobre os dados resultado do programa. Nas pós-condições, são definidas as propriedades sobre os dados de saída e valores das variáveis que denotam o estado do programa. Os valores de saída são denotados por variáveis que serão usadas como resultado e estão, em geral, relacionadas a variáveis ou valores de entrada.

Exemplo 6.3.5

Considere o problema do Exemplo 6.3.4 sobre fatorial. Além de definir as precondições para o funcionamento do programa, devemos também denotar o resultado a ser produzido pelo programa por meio de suas pós-condições. Seja n o valor de entrada, como definido anteriormente, e denotamos por fat o valor resultado da função. Temos, para o problema, as pós-condições:

$$\text{Pos:} fat = n!$$

em que

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ n * (n-1)!, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

uma definição usual da função fatorial.

Na definição da pós-condição dessa função, foi usada uma variável que denota o valor resultado do programa (fat) para deixar clara a relação por meio de variáveis de programas. Como o problema proposto é uma função matemática, pudemos denotar o valor resultado do programa em uma única variável de estado (fat). Em outros casos, poderemos ter um conjunto de variáveis que configuram o estado final do programa.

A omissão da pós-condição significa que não há quaisquer condições (propriedades) a serem satisfeitas pelo estado final do programa, e o seu valor é true, da mesma forma que as precondições. Sob o ponto de vista prático, significa que quaisquer valores resultado produzidos pelo programa são aceitáveis já que não precisam satisfazer a quaisquer propriedades. Em outras palavras, uma especificação com a pós-condição

true é inerte, já que não há menção do que o programa deve produzir. Nesse caso, qualquer programa é adequado para tal especificação.

Invariante: são asserções sobre programas que devem ser válidas ao longo da computação do programa. Em particular, tal asserção deve ser válida nos estados inicial e final dos programas. Assim, se definimos que x, uma variável de um programa P, deve ser maior que zero ao longo da computação do programa, devemos descrever tal propriedade como invariante do programa (Inv:$x > 0$).

Exemplo 6.3.6

Consideremos ainda o problema do Exemplo 6.3.4 sobre fatorial e acrescentemos a asserção de que a variável sobre o valor resultado não assume valores negativos no decorrer da execução do programa. Podemos, então, definir o invariante:

Inv:$fat \geqslant 0$

Note que tal asserção é, ao mesmo tempo, uma pré e pós-condição na especificação do problema e poderia eventualmente ser acrescentada a tais condições. Lembre-se de que ter a mesma condição como invariante, precondição e pós-condição constitui uma superespecificação do problema, a qual é aceita apenas quando se quer enfatizar aspectos específicos do problema.

A omissão de invariantes no sistema não constitui uma situação dramática na especificação do problema como a omissão das pós-condições. É comum encontrarmos especificações de problemas sem quaisquer invariantes. No exemplo anterior, introduzimos o invariante artificialmente no problema para a sua explicação. Em particular, definiremos as especificações de programas sem incluir explicitamente invariantes.

Alternativamente, podemos distribuir invariantes do programa sobre as pré e pós-condições. Sob o ponto de vista de especificação, definir uma mesma asserção como pré e pós-condição de um programa não constitui um invariante. Como as precondições atuam apenas sobre o estado inicial e as pós-condições, sobre o estado final do programa,

tais asserções não precisam ser satisfeitas nos estados intermediários, diferentemente do invariante, que precisa ser satisfeito em todos os estados.

Para efeito de especificação de programas definida neste livro, usaremos apenas as pré e pós-condições deles. Quando uma dada propriedade precisar ser satisfeita tanto no estado inicial quanto no estado final do programa, ela será explicitamente uma asserção na pré e pós-condição concomitantemente. Contudo, a idéia de invariante será abordada nas regras de prova para fazermos verificação de programas (Capítulo 7).

Exemplo 6.3.7

Consideremos o problema do Exemplo 6.3.6 sobre fatorial com a asserção de que a variável sobre o valor resultado não assume valores negativos no decorrer da execução do programa. Para o valor de entrada n e o valor de saída fat, a especificação do problema pode ser definida por:

Especificação:

Pre: $n \geqslant 0 \wedge fat \geqslant 0$

Pos: $fat = n! \wedge fat \geqslant 0$

Note que a propriedade $fat \geqslant 0$ é redundante na pós-condição, mas foi mantida aqui apenas para deixar explícito o invariante sugerido anteriormente.

Além dos estados inicial e final do programa, podemos ainda definir quais propriedades devem ser satisfeitas em estados intermediários do programa. Podemos, em particular, definir propriedades sobre partes internas dos programas. Essa forma de especificação será parcialmente explorada no Capítulo 7.

6.3.3 Variáveis de Especificação

Mostramos, até o momento, um conjunto de especificações definidas por meio de asserções sobre os estados inicial e final dos programas. Argumentamos que os estados dos programas são denotados pelas suas variáveis, e todas as asserções foram definidas sobre as variáveis dos programas. Em certas situações, precisamos de asserções na pós-condição relacionadas a valores de variáveis em estados anteriores do programa, mesmo que estes tenham sido modificados ao longo da computação. Para isso, devemos *lembrar*

alguns valores que não são preservados até o final do programa. Nesses casos, criamos *variáveis de especificação*, que não existem no programa, apenas na especificação. Elas servem como elementos auxiliares quando precisamos definir propriedades sobre o estado final do programa que usam valores não preservados pelas variáveis do programa.

Exemplo 6.3.8

Consideremos novamente o problema do Exemplo 6.3.4 sobre fatorial.

Programas iterativos que resolvem o problema do cálculo de fatorial usam a própria variável de entrada, n, para esse cálculo. Dessa forma, o valor da variável n é *destruído* ao longo do cálculo no programa. Para designarmos que o valor da variável fat contém o cálculo do fatorial do valor de entrada, criamos a variável de especificação n_0:

Especificação:

Pre:$n \geqslant 0 \wedge n_0 = n$

Pos:$fat = n_0!$

Dessa forma, independentemente do valor final de n, se é preservado ou *destruído*, a pós-condição denota explicitamente a noção da especificação de fatorial sobre o valor inicial.

Na maioria das linguagens formais (Seção 6.5) que lidam com especificações baseadas nos estados inicial e final, existem notações explícitas sobre cada um deles. Aqui, especificamos as propriedades sobre programas porque temos como objetivo a verificação dessas propriedades sobre os programas. Por essa razão, usamos variáveis que fazem parte dos próprios programas, como veremos no Capítulo 7, nas especificações e, por isso, a necessidade da criação das variáveis de especificação. No caso do exemplo anterior, precisaríamos provar que a propriedade $fat = n!$ é satisfeita ao término do programa. Contudo, o valor da variável usado para a prova será aquele ao término do programa, mesmo que tenha sido modificado.

Portanto, apesar de a pós-condição no Exemplo 6.3.5 estar correta sob o ponto de vista de especificação, pode ser problemática na verificação do programa por conta do uso concomitante das variáveis nos programas e nas especificações.

6.4 Exemplo

Descrevemos aqui o problema apresentado inicialmente, com a sua respectiva especificação.

Exemplo 6.4.1

Voltando ao nosso problema inicial sobre a loja que quer ordenar seus clientes pelo valor de compra (Exemplo 6.1.1), vamos agora especificá-lo formalmente.

Consideramos dois vetores: C para clientes e V para os valores de compra dos clientes. Para cada cliente C_i temos o valor correspondente da compra V_i maior ou igual a zero. Além disso, cada cliente aparece apenas uma vez na lista.

Especificação:

Pre: $\forall i, j.(i \neq j \rightarrow C_i \neq C_j) \wedge V_i \geqslant 0 \wedge C0_i = C_i \wedge V0_i = V_i$

Pos: $\forall i, j(i < j \rightarrow V_i \geqslant V_j) \wedge (C_i = C0_j \rightarrow V_i = V0_j)$

Na precondição, temos a restrição sobre o domínio de entrada para que os clientes sejam distintos e cada valor de compra seja não-negativo. Como cada V_i está relacionado ao C_i correspondente, e tal correspondência deve permanecer nos vetores resultado, criamos as variáveis de especificação V0 e C0 para que tal relação possa ser denotada na pós-condição. Assim, na pós-condição, temos que o vetor de valores V deve estar ordenado e que a relação entre os valores e os clientes é preservada como nos valores de entrada (usando as variáveis de especificação – $C_i = C0_j \rightarrow V_i = V0_j$).

Exercícios

6.1 Formular uma especificação para um programa P que, dados dois números naturais, deve calcular o máximo divisor comum para eles.

6.2 Formular uma especificação para um programa P em que, dados dois números inteiros como entrada, a soma desses dois números no estado inicial deve ser idêntica à soma deles no estado final do programa. Notar que o valor de cada uma das variáveis que representa esses valores pode ser modificado ao longo da execução de P.

6.3 Especificar o problema de divisão de inteiros. O programa P deve receber dois dados de entrada x e y e produzir o quociente e o resto da divisão de x por y.!! É proibido usar os operadores de divisão (x/y) e o resto da divisão (mod(x, y)) para especificar esse problema.

6.4 Formular uma especificação para o problema de geração de números pares. Um programa P deve gerar um número par.

6.5 Formular a especificação para a decomposição de um número maior que 2 em fatores primos. O programa P deve receber como entrada um número natural e produzir os fatores primos que decompõem esse número.

6.6 Um dado número é palíndromo se possui a mesma ordem de dígitos quando visto da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Formular uma especificação para que, dado um número natural, o programa deva testar se esse número é palíndromo.

6.7 Especificar o problema para que, dado um número natural a um programa P, este deva reconhecer se o número pode ser escrito da forma $2^i - 1$.

6.8 Formular uma especificação para um programa P que recebe um número inteiro e uma lista de números inteiros e verifica se esse número está contido na lista ou não.

6.9 Um programa recebe uma lista de números inteiros e a quantidade de elementos dessa lista, e deve produzir uma nova lista, de forma que todos os elementos que aparecem antes do i-ésimo elemento devam conter o valor zero. Especificar tal problema.

6.5 Notas Bibliográficas

Os estudos sobre especificação de requisitos e de programas não são recentes, e se dão principalmente pela preocupação em desenvolver o software/programa desejado, para evitar descobrir que o software desenvolvido não era o esperado apenas quando já estivesse pronto. Um grande esforço foi empregado para a definição de métodos formais baseados em modelos, tais

como Z (Woodcock e Davies, 1996), B (Wordsworth, 1996) e VDM (Vienna Development Method) (Jones, 1990), os quais foram inicialmente criados para o desenvolvimento de sistemas seqüenciais no paradigma modular e têm como fundamentos principais a teoria dos conjuntos e a lógica de predicados.

As idéias de invariantes, pré e pós-condições para sistemas aparecem de forma explícita nos métodos formais citados. Neste livro, seguimos uma abordagem similar à que é usada em VDM, na qual denominamos as pré e pós-condições explicitamente, mas omitimos os invariantes. Os métodos Z e B seguem abordagem semelhante na forma de esquemas e são ainda enriquecidos com uma linguagem para esquemas. Nesses métodos, aparecem também formas particulares de denotar os estados inicial e final e suas mudanças, assim como a predefinição de tipos estruturados, tais como conjuntos, seqüências e suas variações, juntamente com as respectivas operações básicas.

Além dos sistemas seqüenciais, existem os desenvolvimentos de teorias e métodos para sistemas concorrentes (não abordados neste livro), tais como CCS (Milner, 1999) e CSP (Hoare, 1969). Estas são álgebras (ou cálculos) que têm como objetivo principal denotar a comunicação entre processos. Mais recentemente, existe um esforço no desenvolvimento de teorias e linguagens para agentes móveis, tais como *pi-calculus* (Milner, 1999) e *ambient-calculus* (Cardelli e Gordon, 1998), entre outros. O leitor pode consultar Nissanke (1999) sobre um resumo de métodos dedicados tanto a sistemas seqüenciais quanto concorrentes. O site *http://www.afm.sbu.ac.uk/* contém uma série de *links* para os métodos formais citados e vários outros, assim como para ferramentas existentes para eles.

7 Verificação de Programas

7.1 Introdução

É comum encontrarmos erros quando testamos programas. Em geral, descobrimos os erros e "rearrumamos" os programas, de forma a reparar tais erros. Em certas ocasiões, conseguimos reparar tais erros sem que novos erros sejam introduzidos. Mas, infelizmente, reparar um erro aqui gera um outro erro lá, e assim temos de fazer reparos sucessivos nos programas até que eles possam ser executados para uma malha de testes sem produzir resultados errados. Será que um programa executado para aquela malha de testes não produzirá resultados errôneos para outros dados? Na realidade, os testes só garantem que o programa produzirá dados corretos para o conjunto de dados que foi testado, mas tal garantia não é extrapolada para outros testes. Não são poucos os sistemas que, depois de tempos de uso, descobrimos que produzem resultados absurdos ou mesmo param mediante um dado diferente. Alguns programas estão aparentemente corretos, mas não funcionam adequadamente para dados específicos. O mais grave é que alguns erros de programas, no entanto, nem são percebidos ao longo de seu funcionamento porque não foram submetidos a dados que os revelassem.

Exemplo 7.1.1

Faça um programa que, dadas duas seqüências de números inteiros em ordem crescente, produz uma terceira seqüência em ordem crescente contendo todos os elementos das duas primeiras seqüências.

Uma das soluções para esse problema é o entrelaçamento das duas seqüências respeitando a ordem:

Programa:

```
void merge1(int V1[], int V2[], int V3[], int tam1, int tam2)
  {int pos1, pos2, pos3;
   pos1 = pos2 = pos3 = 0;
   while (tam1 + tam2 > 0)
    {if (V1[pos1] > V2[pos2])
      {V3[pos3] = V2[pos2];
       pos2 = pos2 + 1;
       tam2 = tam2 - 1;}
     else
      {V3[pos3] = V1[pos1];
       pos1 = pos1 + 1;
       tam1 = tam1 - 1;}
     pos3++;
    }
  }
```

Análise:

De uma análise descuidada desse programa podemos supor que ele funciona corretamente para o problema proposto. Contudo, é fácil notar que, se uma das seqüências dadas for vazia, faremos uma comparação indevida: `if (V1[pos1] > V2[pos2])`. Estaríamos comparando um valor com um outro valor indefinido. Tal situação ocorre quando uma das seqüências é vazia ou ainda quando todos os elementos de uma das seqüências são menores que o da outra etc.

Se usássemos esse programa em um sistema real e nunca tivéssemos tais situações, poderíamos incorrer no erro de achar que o programa estaria correto, uma vez que nunca teria produzido resultado inadequado (no caso do programa anterior, encontraríamos o erro com poucos testes).

Exemplo 7.1.2

Uma vez que detectamos um problema no programa do Exemplo 7.1.1, podemos tentar corrigir tal problema. Assim, a condição do `while` pode ser modificada para que este seja executado apenas quando as duas seqüências forem não-vazias.

Programa:

```
void merge2(int V1[], int V2[], int V3[], int tam1, int tam2)
 {int pos1, pos2, pos3;
  pos1 = pos2 = pos3 = 0;
  while (tam1 > 0 && tam2 > 0)
   {if (V1[pos1] > V2[pos2])
     {V3[pos3] = V2[pos2];
      pos2 = pos2 + 1;
      tam2 = tam2 - 1;}
    else
     {V3[pos3] = V1[pos1];
      pos1 = pos1 + 1;
      tam1 = tam1 - 1;}
    pos3++;
   }
 }
```

Análise:

Agora só faremos a comparação do comando `if-else` se tivermos, de fato, elementos nas duas seqüências. Mas, nesse caso, paramos de produzir a nova seqüência quando já usamos todos os elementos de uma das seqüências originais; os elementos restantes da outra seqüência não apareceriam na seqüência produzida. Assim, tentando corrigir um erro do programa, acabamos de introduzir outro.

Nesse caso, temos de considerar mais esse problema a ser corrigido.

Exemplo 7.1.3

Dado o erro detectado, vamos corrigir o problema:

Programa:

```
void merge2(int V1[], int V2[], int V3[], int tam1, int tam2)
 {int pos1, pos2, pos3;
  pos1 = pos2 = pos3 = 0;
  while (tam1 > 0 && tam2 > 0)
   {if (V1[pos1] > V2[pos2])
     {V3[pos3] = V2[pos2];
      pos2 = pos2 + 1;
      tam2 = tam2 - 1;}
    else
     {V3[pos3] = V1[pos1];
```

```
      pos1 = pos1 + 1;
      tam1 = tam1 - 1;}
    pos3++;
  }
/* preenche com vetor V1  */
  while (tam1 > 0)
   {V3[pos3] = V1[pos1];
    pos1 = pos1 + 1;
    tam1 = tam1 - 1;
    pos3++;
   }
/* preenche com vetor V2  */
  while (tam2 > 0)
   {V3[pos3] = V2[pos2];
    pos2 = pos2 + 1;
    tam2 = tam2 - 1;
    pos3++;
   }
}
```

Aqui, corrigimos os pequenos erros do programa original.

Se para um problema tão simples cometemos erros tanto na sua elaboração quanto na sua correção, o que acontece em problemas mais complexos? Na prática, como podemos perceber que o programa está incorreto? Uma das maneiras usuais é a inspeção de programas. Nela, seguimos a lógica do programa e muitas vezes percebemos que não tratamos os casos especiais. Para isso, usamos a definição do problema – a qual, na maioria das vezes, está descrita em linguagem natural –, com o nosso conhecimento sobre o domínio do problema. Se os casos particulares a serem tratados não são do nosso conhecimento, não perceberemos os problemas do programa. Além disso, tal percepção depende do entendimento do programa, que deverá estar escrito de forma clara para que os casos especiais sejam evidenciados. Note que, apesar de funcionar na prática, essa é uma forma subjetiva de julgamento.

Outra técnica bastante usada é o teste de programas, como mencionado anteriormente. Nela, são escolhidos os casos de teste a serem validados e um conjunto de dados de teste gerado, sobre o qual o programa é executado. Os casos de teste são classes de dados sobre as quais o programa deve atuar. A seleção dessas classes de dados é arbitrária e realizada de forma

manual ou, na melhor das hipóteses, semi-automática. De qualquer forma, um subconjunto de dados dentro daquela classe será testado, já que o teste exaustivo não é viável. Nesse caso, alguns dos dados não testados poderão gerar resultados errados, principalmente quando agregamos em uma única classe elementos com comportamentos diferenciados e não percebemos *a priori*. Apesar das várias técnicas de teste desenvolvidas atualmente, os testes não garantem o funcionamento para todos os possíveis dados do domínio do programa. Com isso, programas, mesmo que bem testados, podem produzir resultados errôneos para dados particulares. Para garantir que um programa responda adequadamente aos dados do domínio, precisamos verificar se ele é, de fato, uma implementação particular da especificação do problema. Para isso, precisamos provar que o programa satisfaz a especificação do problema, como veremos a seguir.

7.1.1 Como Verificar Programas?

Para quaisquer sistemas computacionais, esperamos que os programas funcionem adequadamente (corretamente) para todos os dados de entrada do seu domínio de aplicação, ou seja, que eles produzam os resultados esperados para cada dado. Por isso, não há correção absoluta de programas; nenhum programa está correto ou errado por si só, mas em relação à especificação do problema. Existem, de fato, estratégias para produzirmos programas corretos em relação à sua especificação (Francez, 1992; Partsch, 1990):

Síntese: Dada uma especificação φ, um programa P é construído de forma automática, ou semi-automática, por meio da transformação da especificação original no programa P. A partir da especificação, transformações sucessivas são aplicadas até que o programa seja produzido. Se tal problema estivesse resolvido por completo, não precisaríamos mais programar, apenas especificar e aplicar as transformações. Apesar dos esforços de desenvolvimentos dessa estratégia, a transformação automática ainda não é uma realidade, exceto para algumas áreas específicas. Além disso, o processo de decisão de quais regras devem ser aplicadas é assistido: devemos definir como tornar uma especificação mais concreta por meio da aplicação das regras de refinamento. Em geral, são necessários vários passos sucessivos para chegarmos a um programa final: uma especificação é transformada em outra mais concreta (mais detalhada) e assim sucessivamente até que os tipos de dados

e algoritmos estejam definidos, quando temos uma solução específica para o problema especificado. Vale salientar que essas regras fazem parte de um sistema de transformação e não devem produzir novas especificações que violem as originais.

Verificação: Dada uma especificação φ e um programa P, mostrar que P é um modelo para a especificação φ (P satisfaz φ).

Diferentemente da síntese, como a especificação e o programa são fornecidos, fazemos uma verificação *a posteriori*. Nessa abordagem, devemos ter formas de comparar a especificação com o programa para que possamos provar que este último é um modelo para a especificação. Essa será a estratégia usada neste capítulo para provarmos a correção dos programas. A alternativa por essa abordagem está baseada principalmente na facilidade de mostrar o uso da lógica e seus sistemas de prova, na especificação e prova de correção de programas. Por outro lado, vários desenvolvimentos têm sido realizados nessa área, inclusive com aplicação na indústria.

Na prática, o uso da verificação formal aparece em várias situações. Aqui relatamos apenas algumas usuais ao desenvolvimento de programas:

Análise: Dado um programa P, encontrar uma especificação φ que defina o problema para o qual o programa P é uma solução. A partir daí, podemos descobrir se o programa resolve o problema desejado.

Essa estratégia é usada, em geral, quando temos sistemas prontos que não possuem uma especificação adequada e alguns problemas são encontrados. Uma especificação inadequada surge, por exemplo, quando o sistema sofre várias manutenções evolutivas, mas sua documentação não é devidamente modificada. Em certas ocasiões, o sistema pode produzir resultados inadequados sem que possamos determinar precisamente quais partes do sistema estão provocando tais problemas. A análise tem como objetivo resgatar a especificação atual de um sistema para que a origem dos resultados indesejados seja detectada. Nesse caso, faz-se necessária a correção dos programas. Em outras ocasiões, as especificações de programas servem como resgate do problema para que sejam usadas como documentação do sistema.

Correção: Dados uma especificação φ e um programa P que não satisfaz φ, construir um programa P/ que satisfaça φ e seja próximo de P (considerando uma medida de proximidade – código, por exemplo).

Podemos ter a especificação de um problema e construirmos, por acidente, um programa correspondente que não satisfaz a especificação (provado usando verificação). Assim, precisamos construir um novo programa que satisfaça a dada especificação. Em geral, o novo programa é uma correção do original, modificado para atender à especificação, o qual pode ser novamente verificado quanto à sua satisfazibilidade da especificação.

Outra situação comum se dá quando os sistemas sofrem modificações para atender a novos requisitos. Nesse caso, a especificação do problema é refeita para atender aos novos requisitos e um novo programa deve ser construído para atender à nova especificação. O novo programa é, em geral, uma modificação de programas anteriores e, portanto, uma *correção* de programa para que atenda à nova especificação.

Otimização: Dados uma especificação φ e um programa P que satisfaz φ, encontrar um programa P/ equivalente a P que seja ótimo sob determinadas medidas de complexidade.

Na prática, queremos substituir um programa por um outro mais eficiente. Isso é necessário para vários casos em que encontramos programas freqüentemente usados em um sistema, mas que não têm um desempenho adequado. Nesse caso, devemos produzir um novo programa P/ com a eficiência adequada, mas que conserve o comportamento do programa P. O novo programa P/ pode ser comparado tanto com o programa P (equivalência) quanto com a especificação φ (satisfazibilidade). Assim, tanto relações de equivalência quanto de satisfazibilidade podem ser utilizadas nessa abordagem, e técnicas de verificação podem ser usadas em ambas as comparações.

Na verificação de programas, faz-se necessária a comparação entre a especificação e o programa correspondente. Se a especificação for escrita em linguagem natural, não há como compará-la com o programa de forma matemática. Para que provemos que um programa satisfaz uma dada especificação, precisamos construir um sistema de provas, e não há como construir tal sistema baseado em linguagem natural pela falta de precisão

e ambigüidades de sentenças na linguagem. O que usualmente fazemos, quando a especificação é dada em linguagem natural, é submeter o programa a um conjunto de testes para nos certificarmos de que ele funciona adequadamente. Os testes de programas servem para fazermos a *validação* deles, mas a verificação de programas só poderá ser realizada mediante um sistema de provas.

Portanto, para verificarmos programas, necessitamos de:

1. Uma especificação escrita em uma linguagem com fundamento matemático para que seja precisa e não ambígüa.

2. Um programa escrito em uma linguagem que tem o significado de seus comandos definido de forma precisa – semântica formal da linguagem de programação.

3. Uma forma de associar e comparar as asserções da especificação com os comandos do programa; as linguagens de especificação e programação devem, portanto, ser comparáveis.

4. Um sistema de provas que usamos para mostrar que um programa satisfaz uma dada especificação.

A linguagem de especificação utilizada neste livro será a já definida no Capítulo 6, baseada na lógica de predicados, com operações definidas sobre números inteiros e vetores. A linguagem de programação terá a sua sintaxe definida na Seção 7.2. A semântica da linguagem será definida com um sistema de provas associado nas Seções 7.4 e 7.5 por meio da lógica de Hoare (1969). Dessa forma, associamos as asserções com os comandos dos programas por meio das regras do sistema de provas.

7.2 Uma Linguagem de Programação

A linguagem de programação L aqui usada corresponde a um subconjunto dos comandos de linguagens de programação, tais como C, C++ e Java. Esse subconjunto escolhido das linguagens, o qual forma a nossa linguagem L, é capaz de computar os mesmos problemas que as outras linguagens aqui citadas, mas certamente em uma forma mais rudimentar (sem tantas facilidades quanto as outras). A razão para a escolha de um subconjunto essencial da linguagem de programação é para manter a simplicidade dos

elementos semânticos a serem definidos. Além disso, alguns comandos mais sofisticados dessas linguagens podem ser definidos a partir desse conjunto essencial de comandos. Outras características como vinculação dinâmica de escopo necessitariam de extensões sofisticadas no sistema de provas e desvirtuariam o propósito principal deste livro, o qual é mostrar o uso da lógica na prova de programas.

A linguagem de programação L tem como tipos de dados primários os domínios dos *números inteiros* e os *booleanos*. Assim, temos as expressões definidas sobre números inteiros (expressões aritméticas) e outras expressões sobre valores booleanos (expressões lógicas). O outro domínio sintático da linguagem são os comandos, responsáveis pelas transformações de estados dos programas. A sintaxe da linguagem é a seguinte:

Expressões Aritméticas: Sejam n um número no domínio dos inteiros $(\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ e x uma variável que tem como conteúdo um valor do domínio dos inteiros,

$$E ::= n \mid x \mid (-E) \mid (E + E) \mid (E - E) \mid (E * E)$$

- As operações básicas sobre inteiros ($+, -, *$ são soma, subtração e multiplicação) têm o significado usual.
- A prioridade dos operadores também é usual: o "$-$" unário é o de maior prioridade, seguido dos $*$, e $+, -$ binários que têm a mesma prioridade. Portanto, usamos parênteses para auxiliar a definição das expressões sobre inteiros, assim como na matemática.

Expressões Lógicas: Seja {true, false} o conjunto de valores booleanos,

$$B ::= \text{true} \mid \text{false} \mid (!B) \mid (B\&B) \mid (B||B) \mid (E < E) \mid (E == E) \mid (E! = E)$$

- !, &, || representam negação, conjunção e disjunção, respectivamente.
- ! tem a mais alta prioridade, e & e || têm a mesma prioridade. Parênteses também são usados para determinar prioridades nas expressões.
- As comparações sobre inteiros resultam em um valor booleano. $<$ representa o menor, $==$ representa a igualdade entre valores

inteiros e ! = a diferença entre valores inteiros. As comparações == e ! = podem ser definidas a partir da ⩽ e da negação, mas foram introduzidas aqui para facilitar a leitura das expressões lógicas dos programas. Mais uma vez, parênteses também são permitidos nessas expressões para determinar as prioridades.

Comandos: Considere as expressões aritméticas e lógicas definidas anteriormente, x uma variável do tipo inteiro e as chaves ({}) para demarcar os blocos de comandos,

$$C ::= x := E \mid C; C \mid \texttt{if}\ B\ \{C\}\ \texttt{else}\ \{C\} \mid \texttt{while}\ B\ \{C\}$$

- x := E corresponde ao comando de atribuição: a expressão aritmética E é avaliada, e o resultado dela é associado como conteúdo da variável x.
- C1; C2 corresponde ao comando de composição seqüencial: o comando C1 é executado inicialmente e, após o término da sua execução, o comando C2 é executado. É importante salientar que, se o comando C1 não termina, o comando C2 não pode ser executado. Além disso, o comando C2 é executado sobre o estado do programa já modificado pelo comando C1.
- `if` B {C1} `else` {C2} corresponde ao comando condicional: a expressão lógica B é avaliada e, se o resultado dessa expressão for true, o bloco de comandos {C1} será executado; se for false, o bloco de comandos {C2} será executado.
- `while` B {C} corresponde ao comando de repetição da linguagem: a expressão lógica B é inicialmente avaliada sobre o estado atual e, se o valor resultado for true, o bloco de comandos {C} será executado. Após a execução do bloco de comandos, B será novamente avaliada sobre o estado atual (após a execução do bloco de comandos). Se a expressão B é avaliada e tem o valor false como resultado, o comando termina.

Aqui, definimos os comandos da linguagem de forma intuitiva, assim como os conhecemos das linguagens de programação no mercado. Como já foi mencionado anteriormente, para que possamos verificar os programas em relação às especificações correspondentes, precisamos definir precisamente o efeito de cada comando; a semântica formal dos comandos da linguagem.

Considerando que um programa seqüencial é essencialmente um transformador de dados de um estado inicial para dados em um estado final, a idéia mais intuitiva dessas transformações pode ser definida pela *semântica operacional* (Winskel, 1993), que denota o efeito sobre o estado do programa para cada comando da linguagem. Assim, o programa possui um estado inicial e sofre efeitos sucessivos de mudanças de estados, por meio de seus comandos, até chegar ao estado final. A execução de um comando C no estado atual σ provoca um efeito sobre o estado do programa, o qual passa a ser $\sigma\prime$:

$$< C, \sigma > \rightarrow \sigma\prime$$

A semântica operacional deve denotar os efeitos de todos os comandos da linguagem de programação e, para isso, deve ser definida sobre todos os comandos e expressões da linguagem. A semântica é, de fato, definida sobre todos os elementos sintáticos da linguagem, e a semântica de um programa é inferida a partir da semântica de cada um de seus comandos em particular (por indução estrutural).

Exemplo 7.2.1

No comando de atribuição x := E, por exemplo, temos a avaliação da expressão E no estado atual

$$< E, \sigma > \rightarrow m$$

m é o resultado da avaliação da expressão E no estado σ. O efeito da atribuição da expressão E a uma variável x no estado σ é, portanto:

$$< x := E, \sigma > \rightarrow \sigma[m/x]$$

quando o resultado da avaliação de E é m no dado estado. Note que o novo estado ($\sigma[m/x]$) é obtido a partir do estado σ, com a diferença de que o conteúdo associado à variável x passa a ser m. A regra de inferência para o comando de atribuição na semântica operacional pode, então, ser escrita por:

$$\boxed{\text{Atrib-Operacional}} \quad \frac{< E, \sigma > \rightarrow m}{< x := E, \sigma > \rightarrow \sigma[m/x]}$$

que é lido: se E é avaliado com o valor m no estado σ, então o efeito do comando de atribuição x := E sobre o programa, no mesmo estado, será a geração do novo estado $\sigma[m/x]$.

Vale salientar que, para que obtenhamos tal efeito do comando de atribuição, precisamos ter definido também a semântica das expressões aritméticas (como avaliar E no estado σ?). Da mesma forma, as expressões lógicas e todos os outros comandos também devem ter suas semânticas definidas.

Exemplo 7.2.2

Para exemplificar o uso da semântica do comando de atribuição definido no Exemplo 7.2.1, considere o programa:

```
a := 5 ;
```

O programa tem uma variável, que não possui valor associado inicialmente. O estado inicial do programa é, portanto, denotado pelo estado

$$\sigma = \{(a, ?)\}$$

como a avaliação da expressão 5 no estado σ é o valor 5,

$$< 5, \sigma > \rightarrow 5$$

temos que

$$< a := 5, \sigma > \rightarrow \sigma[5/a]$$

chegando ao estado final:

$$\sigma\prime = \sigma[5/a] = \{(a, 5)\}$$

Na notação de regra de inferência:

$$\square \frac{< 5, \sigma > \rightarrow 5}{< a := 5, \sigma > \rightarrow \sigma[5/a]}$$

Apesar de ser uma maneira intuitiva de denotar a semântica das linguagens, a semântica operacional não faz uma representação explícita entre asserções que denotam as pré e pós-condições dos programas. Como o nosso objetivo primordial, neste capítulo, é a verificação, devemos ter um sistema de provas para que, dados a especificação do programa, por meio das suas pré e pós-condições, e um programa, provemos que ele satisfaz a especificação:

$$\langle \varphi \rangle \ \mathrm{Prog} \ \langle \psi \rangle \tag{7.1}$$

Uma interpretação para essa asserção é dada por (correção parcial):

> para todo estado σ que satisfaz φ, se a execução de Prog a partir do estado σ termina, produzindo o estado $\sigma\prime$, então $\sigma\prime$ satisfaz ψ.

A asserção 7.1 é chamada de *tripla de Hoare* por ter sido proposta por Hoare com o objetivo de provar a correção de programas. Na prática, queremos um sistema (cálculo) de provas para provar a validade da asserção 7.1:

$$\vdash \langle \varphi \rangle \ \mathrm{Prog} \ \langle \psi \rangle$$

Complementando a idéia inicial das *triplas*, Hoare também desenvolveu um sistema de provas no qual as regras relacionam cada construtor da linguagem de programação com as asserções necessárias. Historicamente, regras similares foram definidas por R. W. Floyd para provar diagramas de fluxo (Floyd, 1967) e, posteriormente, adaptadas por Hoare para programas. Por isso, são também denominadas regras Floyd-Hoare. Além disso, os autores inicialmente propuseram as regras como uma forma de dar o significado aos comandos de programas em termos de *axiomas* que designam como provar as propriedades. Por essa razão, essa abordagem para definição dos comandos é também denominada *semântica axiomática* (Winskel, 1993).

Nas seções que seguem, mostraremos o que é um sistema de provas baseado em lógica para a prova de asserções em programas.

7.3 Prova de Programas

Sob o ponto de vista prático, o que significa construir um sistema de provas para provar asserções como

$$\vdash \langle \varphi \rangle \ \mathrm{Prog} \ \langle \psi \rangle ? \tag{7.2}$$

As precondições φ são propriedades sobre o estado inicial do programa Prog. Podemos ter, por exemplo, um estado particular σ que satisfaça a asserção φ

$$\sigma \vdash \varphi$$

então, após a execução do programa Prog sobre o estado σ, um estado $\sigma\prime$ é produzido e $\sigma\prime$ satisfaz ψ:

$$\sigma \vdash \varphi \rightarrow \lceil \mathrm{Prog} \rfloor_\sigma \vdash \psi$$

onde Prog termina se executado sobre um estado que satisfaz φ e $\lceil \mathrm{Prog} \rfloor_\sigma$ representa o estado produzido por Prog após a sua execução sobre o estado σ.

A asserção 7.2, contudo, deve ser válida para todos os estados que satisfazem σ:

$$\forall\sigma(\sigma \vdash \varphi) \rightarrow \lceil \mathrm{Prog} \rfloor_\sigma \vdash \psi$$

Nessas discussões, assumimos que o programa Prog termina quando executado sobre os estados σ. Na prática, contudo, temos programas que não param, mas não mencionamos ainda como lidar com eles. As provas de programas podem, de fato, ser divididas em: provas quando assumimos que o programa pára e provas que têm como tarefa também provar a terminação do programa. Definimos, a seguir, essas duas noções de provas.

Definição 7.3.1 – correção parcial A tripla

$$\langle\varphi\rangle\ \mathrm{Prog}\ \langle\psi\rangle$$

é satisfeita sob correção parcial se, para todos os estados que satisfazem φ, o estado resultante da execução do programa Prog satisfaz a pós-condição ψ, se Prog termina. Nesse caso, $\vdash_{\mathrm{par}}$ é a relação de satisfazibilidade para a correção parcial:

$$\vdash_{\mathrm{par}} \langle\varphi\rangle\ \mathrm{Prog}\ \langle\psi\rangle$$

Correção parcial é um requisito ineficiente, na prática, porque não garante a terminação do programa: qualquer programa que não termina satisfaz a sua especificação. Na outra noção de correção, a satisfazibilidade, bem como a terminação do programa, deve ser provada. Tal noção é definida como segue:

Definição 7.3.2 – correção total A tripla

$$\langle \varphi \rangle \ \mathrm{Prog} \ \langle \psi \rangle$$

é satisfeita sob correção total se, para todos os estados que satisfazem φ, o estado resultante da execução do programa Prog satisfaz a pós-condição ψ e Prog termina. Nesse caso, $\vdash_{tot}$ é a relação de satisfazibilidade para a correção total:

$$\vdash_{tot} \langle \varphi \rangle \ \mathrm{Prog} \ \langle \psi \rangle$$

Note que qualquer programa que entra em um laço infinito de repetição não satisfaz sua especificação sob a relação de correção total. Essa relação é, obviamente, muito mais útil na prática, e o nosso interesse se concentra nela. Contudo, provar correção total de programas pode ser dividida em: provar correção parcial e provar que o programa termina.

Exemplo 7.3.1

Suponha um programa Fat que calcula o fatorial de um número inteiro n:

Programa:

```
fat := 1;
i := 0;
while (i != n)
 { i := i + 1 ;
   fat = fat * i;
 }
```

Considere a especificação do problema do cálculo de fatorial (já apresentada nos Exemplos 6.3.4 e 6.3.5).

Especificação:

Pre: $n \geqslant 0$

Pos: $fat = n!$

Reescrevendo o problema usando as triplas de Hoare, temos:

$$\langle n \geqslant 0 \rangle \ \mathrm{Fat} \ \langle fat = n! \rangle$$

Agora queremos provar que o programa Fat satisfaz a especificação para a relação tanto de correção parcial quanto de correção total de programas.

$$\vdash_{par} \langle n \geqslant 0 \rangle \ \mathrm{Fat} \ \langle fat = n! \rangle \ ?$$

$$\vdash_{tot} \langle n \geqslant 0 \rangle \ \mathtt{Fat} \ \langle \mathtt{fat} = n! \rangle \ ?$$

Para provar a correção parcial ($\vdash_{par}$), dado que o programa Fat termina, precisamos verificar se a variável fat contém o resultado da função fatorial para o dado n, quando n é um número natural. Para esse programa, é fácil averiguar que, para números naturais, o programa calculará o fatorial de n como requisitado.

Para provar a correção total ($\vdash_{tot}$), precisamos verificar que a variável fat contém o resultado da função fatorial para o dado n, quando n é um número natural, e que o programa Fat termina. A argumentação sobre o resultado produzido pelo programa é a mesma que a anterior. Contudo, para a correção total, precisamos ainda provar que o programa termina: como a condição de parada do comando de repetição depende da variável i que é incrementada de 0 até n, e n é um número positivo, podemos argumentar que o programa terá um número finito de passos de execução (termina). Por isso, o programa Fat satisfaz a especificação dada.

Podemos ter ainda uma especificação para um problema similar:

Exemplo 7.3.2

Consideremos novamente o programa Fat para calcular o fatorial de um número inteiro n:

Programa:

```
fat := 1;
i := 0;
while (i != n)
 { i := i + 1 ;
   fat = fat * i;
 }
```

Com a descrição informal desse problema, se o especificador não tiver conhecimento do domínio da função fatorial, pode produzir uma especificação que não restringe o domínio de dados de entrada do programa:

$$\langle \mathsf{true} \rangle \ \mathtt{Fat} \ \langle \mathtt{fat} = n! \rangle$$

O que acontece se quisermos provar as correções parcial e total dessa asserção?

$$\vdash_{par} \langle \mathsf{true} \rangle \ \mathtt{Fat} \ \langle \mathtt{fat} = n! \rangle \ ?$$

$$\vdash_{tot} \langle \text{true} \rangle \ \mathtt{Fat} \ \langle \mathtt{fat} = n! \rangle \ ?$$

Para provar a correção parcial ($\vdash_{par}$), precisamos verificar: se o programa Fat termina, então a variável fat contém o resultado da função fatorial para o dado n, quando n é um número inteiro. Nesse caso, como estamos interessados apenas nos resultados do programa para dados de entrada que ele termina, nem precisamos recorrer aos dados de entrada. A argumentação da satisfazibilidade é similar à do Exemplo 7.3.1.

Para provar a correção total ($\vdash_{tot}$), contudo, precisamos verificar que a variável fat contém o resultado da função fatorial para o dado n inteiro e que o programa Fat termina. A argumentação sobre o resultado produzido pelo programa é a mesma que a anterior. O término do programa pode ser provado para os números naturais (como no Exemplo 7.3.1), mas falha para os inteiros negativos: como i é decrementado e n é negativo, i não convergirá para o valor de n e o programa não pára.

Nos exemplos citados, mostramos apenas de maneira informal, por meio de argumentações, quando as correções parcial ou total são satisfeitas ou falham. Mas essas argumentações não constituem provas dessas relações. Nas seções que seguem, definimos os sistemas de prova para verificar (formalmente) tanto a correção parcial quanto a correção total de programas.

7.4 Correção Parcial de Programas

Argumentamos, até o momento, que desejamos provar as triplas de Hoare, que foram definidas considerando o programa como um todo. O sistema de provas para tanto é definido sobre cada elemento sintático da linguagem, e as provas são realizadas usando indução sobre as estruturas dos programas. Ou seja, as regras provam a correção de uma asserção para um comando mais complexo, pela prova de correção das asserções de seus subcomandos. Devemos, então, distinguir dois elementos no sistema de provas: as regras de inferência sobre cada um dos elementos sintáticos dos programas e o mecanismo de prova utilizando as regras definidas.

7.4.1 Regras

As regras apresentadas no Quadro 7.1 são uma adaptação das regras apresentadas por Hoare em 1969, as *regras de Hoare* para a linguagem, exemplo da Seção 7.2. O conjunto dessas regras forma a *lógica de Hoare*.

Quadro 7.1 *Regras de prova (parcial).*

$$\text{Composição}\quad \frac{\langle\varphi\rangle\ C1\ \langle\eta\rangle \quad \langle\eta\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle}{\langle\varphi\rangle\ C1; C2\ \langle\psi\rangle}$$

$$\text{Atribuição}\quad \frac{}{\langle\psi[E/x]\rangle\ x := E\ \langle\psi\rangle}$$

$$\text{IfElse}\quad \frac{\langle\varphi \wedge B\rangle\ C1\ \langle\psi\rangle \quad \langle\varphi \wedge \neg B\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle}{\langle\varphi\rangle\ \texttt{if}\ B\ \{C1\}\ \texttt{else}\ \{C2\}\ \langle\psi\rangle}$$

$$\text{WhileParcial}\quad \frac{\langle\eta \wedge B\rangle\ C\ \langle\eta\rangle}{\langle\eta\rangle\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ \langle\eta \wedge \neg B\rangle}$$

$$\text{Implicação}\quad \frac{\vdash \varphi' \rightarrow \varphi \quad \langle\varphi\rangle\ C\ \langle\psi\rangle \quad \vdash \psi \rightarrow \psi'}{\langle\varphi'\rangle\ \{C\}\ \langle\psi'\rangle}$$

O entendimento das regras é relativamente fácil, com exceção, talvez, das regras para os comandos de atribuição e repetição (`while`):

Composição Dadas as especificações para os fragmentos de programa C1 e C2:

$$\langle\varphi\rangle\ C1\ \langle\eta\rangle \quad \langle\eta\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle$$

a regra Composição nos permite concluir:

$$\langle\varphi\rangle\ C1; C2\ \langle\psi\rangle$$

Em outras palavras, se já temos provado $\langle\varphi\rangle\ C1\ \langle\eta\rangle$ e $\langle\eta\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle$, podemos provar também $\langle\varphi\rangle\ C1; C2\ \langle\psi\rangle$.

Atribuição A regra para a atribuição não contém premissas e é, portanto, um axioma da lógica. Segundo essa regra, se quisermos provar que a propriedade ψ é satisfeita após a atribuição $x := E$, precisamos provar também que $\langle\psi[E/x]\rangle$ é satisfeita no estado que antecede o comando de

atribuição ($\psi[E/x]$ significa a fórmula ψ em que todas as ocorrências livres de x são substituídas pela expressão E).

De uma leitura dessa regra com pouca atenção, temos o ímpeto de pensar que ela foi escrita às avessas. Contudo, desejamos provar a satisfazibilidade de propriedades sobre programas em relação aos resultados produzidos. Da mesma forma, queremos provar asserções após o comando de atribuição, a asserção ψ. Como sabemos que x contém o valor da expressão E no estado que deve satisfazer ψ (nesse ponto do programa, a atribuição $x := E$ foi realizada), então a asserção a ser satisfeita antes da atribuição é a própria ψ. Mas a propriedade ψ é formulada sobre um estado quando a atribuição já foi realizada, enquanto tal atribuição ainda não foi realizada antes do comando. Assim, a propriedade a ser satisfeita antes da atribuição é a própria ψ com todas as ocorrências de x substituídas pela expressão E, $\psi[E/x]$.

IfElse A regra de prova para o comando `if-else` permite a prova de triplas do tipo

$$\langle\varphi\rangle \texttt{ if } B \{C1\} \texttt{ else } \{C2\} \langle\psi\rangle$$

pela decomposição desta em duas outras: uma quando a condição B é verdadeira, e outra quando essa condição é falsa. A precondição φ deve ser satisfeita antes de executar o comando, independentemente de a condição ser verdadeira ou falsa. Da mesma forma, a pós-condição ψ deve ser satisfeita após o comando. A prova da satisfazibilidade da especificação pelo comando pode ser desmembrada, então, em

$$\langle\varphi \wedge B\rangle\ C1\ \langle\psi\rangle$$

e

$$\langle\varphi \wedge \neg B\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle$$

A partir das provas desses dois elementos, podemos concluir a prova do comando `if-else`. Isso mostra, mais uma vez, a característica composicional do sistema a ser formulado a partir dessas regras.

WhileParcial `while` é o comando mais sofisticado da nossa linguagem e, portanto, é esperado que a regra para sua prova também seja a mais sofisticada:

$$\langle\eta\rangle \texttt{ while } B \{C\} \langle\eta \wedge \neg B\rangle$$

Uma das idéias centrais dessa regra é ter uma propriedade (η) preservada ao longo das iterações do comando de repetição, a qual chamamos de *invariante* do comando de repetição. No comando, temos a condição B que depende de algumas variáveis e uma seqüência de comandos ({C}) a serem executados quando a condição é verdadeira. As variáveis relacionadas à condição B são, em geral, modificadas ao longo da execução do comando C mas o invariante deve ser satisfeito. Assim, não interessa quantas vezes temos as iterações no dado comando de repetição, o invariante deve ser satisfeito antes e depois de o comando C ser executado (é assumido que o comando C termina)

$$\langle \eta \wedge B \rangle \; C \; \langle \eta \rangle ,$$

quando imediatamente após a execução do comando `while`

$$\langle \eta \wedge \neg B \rangle .$$

O que distingue quando mais uma iteração deve ser realizada, ou não, é a condição B.

Implicação A regra da implicação nos diz que se já provamos

$$\vdash \varphi\prime \rightarrow \varphi$$

e

$$\vdash \psi \rightarrow \psi\prime$$

e ainda que o comando C satisfaz a sua especificação:

$$\langle \varphi \rangle \; C \; \langle \psi \rangle$$

então, temos também a prova de

$$\langle \varphi\prime \rangle \; \{C\} \; \langle \psi\prime \rangle$$

Essa regra faz a conexão entre as provas que podemos ter na lógica de predicados, usada na especificação dos problemas, com a lógica de programas aqui apresentada. Isso nos permite considerar as provas na lógica de predicados como parte das provas de programas. Essa

regra amplia a lógica de programas para que considere provas sobre os predicados e estabelece, portanto, o elo de ligação entre especificação e programas.

7.4.2 Sistema de Provas

Pelas regras de Hoare, temos a noção de derivação de provas de comandos a partir de elementos menores e, conseqüentemente, um sistema de provas. As derivações são, então, as *provas* e a conclusão, um *teorema*.

Uma vez que temos as regras de Hoare como lógica para a prova de programas, precisamos agora de um mecanismo para usar tais regras e produzir as provas. Como as próprias regras sugerem, provar um programa consiste em compor a prova de cada um dos comandos na seqüência em que aparecem no programa, por meio da regra Composição. Assim, provar que o programa P

$$\begin{array}{c} C0; \\ C1; \\ C2; \\ \vdots \\ Cn \end{array}$$

satisfaz a especificação

$$\begin{array}{c} Pre{:}\varphi \\ Pos{:}\psi \end{array}$$

$$\vdash_{par} \langle\varphi\rangle\ P\ \langle\psi\rangle$$

corresponde a provar cada um dos comandos para as suas pré e pós-condições individuais:

$$\begin{array}{c} \langle\varphi\rangle \\ C0; \\ \langle\varphi_1\rangle \\ C1; \\ \langle\varphi_2\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi_n\rangle \\ Cn \\ \langle\psi\rangle \end{array}$$

O que corresponde a:

$$\vdash_{par} \langle \varphi \rangle \; C0 \; \langle \varphi_1 \rangle$$
$$\vdash_{par} \langle \varphi_1 \rangle \; C1 \; \langle \varphi_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\vdash_{par} \langle \varphi_n \rangle \; Cn \; \langle \psi \rangle$$

Qual regra deve ser aplicada para provar cada comando é detectada pela própria sintaxe do comando; se é uma Atribuição, um IfElse etc. Mas, aqui, foram introduzidas asserções intermediárias entre os comandos: como encontrar tais asserções quando temos apenas a especificação das pré (φ) e pós-condições (ψ) do problema?

Em princípio, queremos provar que o programa produz um resultado que satisfaz a pós-condição ψ se tivermos como premissa φ sobre o estado inicial do programa. Com esse objetivo, podemos, por exemplo, argumentar a aplicação da regra Atribuição:

$$\text{Atribuição}\ \frac{}{\langle \psi[E/x] \rangle \; x = E \; \langle \psi \rangle}$$

Exemplo 7.4.1

Suponha que queiramos provar:

$$\vdash_{par} \langle \text{true} \rangle \; x := 5 \; \langle x > 0 \rangle$$

Em outras palavras, queremos verificar se o programa dado produz um resultado (denotado pela variável x) maior que zero. Como temos apenas um comando de atribuição no programa, devemos utilizar a regra Atribuição:

$$\uparrow \begin{array}{l} \langle \text{true} \rangle \\ \langle (x > 0)[x = 5] \rangle \equiv \langle 5 > 0 \rangle \\ x := 5 \\ \langle x > 0 \rangle \end{array}$$

Nesse passo de prova, olhamos o que queríamos provar ($x > 0$) e descobrimos qual a propriedade necessária antes do comando de atribuição do

programa ($5 > 0$). Agora, para completar a prova, devemos verificar se a precondição true é suficiente para provar essa nova asserção requerida:

$$\text{true} \rightarrow (5 > 0)$$

Como a asserção $5 > 0$ é verdadeira no domínio dos inteiros, temos que a implicação acima também o é, finalizando assim a prova do programa após a aplicação da regra Implicação.

Assim como na atribuição, a aplicação das regras sobre os demais comandos segue a mesma ordem: "olhamos o que queremos provar para, então, introduzir asserções intermediárias verificar se a premissa é suficiente para provar a asserção do topo do programa".

As provas aqui serão apresentadas em um tableau de provas com os seguintes elementos:

Regra	Passo	Asserção	Programa

em que *Regra* e *Passo* representam o nome da regra a ser aplicada e o passo da prova, respectivamente (o passo da prova não é necessário, mas foi introduzido aqui para que o leitor acompanhe o momento em que as regras são aplicadas). A prova do programa do Exemplo 7.4.1 pode ser, então, expressa de forma resumida como:

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	2	$\text{true} \rightarrow (5 > 0)$	
Atribuição	1	$5 > 0$	x := 5;
	0	$x > 0$	

No passo 0, olhamos a pós-condição que desejamos para o programa ($x > 0$), no passo 1, aplicamos a regra Atribuição e descobrimos qual a precondição para o dado comando: substituindo as ocorrências de x pela expressão da atribuição (5) na pós-condição do comando ($x > 0$), obtemos $5 > 0$. Como chegamos ao topo do programa, devemos agora provar que a precondição do programa true é suficiente como premissa para provarmos a asserção requerida no topo do programa, executando assim o passo 2. Nesse ponto, o programa é provado correto se conseguimos provar a asserção produzida

pelo passo 2. Tal prova, no entanto, deve recorrer a um sistema de provas para a lógica de predicados que considera o domínio dos inteiros. Só depois dessa prova podemos concluir a prova do programa (usamos o símbolo ✓ para denotar que foi provado e ✗ para denotar que não pode ser provado).

A prova do programa pode ser lida de cima para baixo, mas a aplicação das regras é realizada de baixo para cima: partindo da pós e subindo até a precondição. Apresentamos, a seguir, provas para programas simples para ilustrar a aplicação de cada uma das regras da Quadro 7.1.

Atribuição

Exemplo 7.4.2

Seja Suc um programa que deve calcular o sucessor de um número no domínio dos inteiros. A especificação do problema é dada por:

Especificação:

Pre:true

Pos: $suc = x + 1$

Programa:

```
suc := x + 1
```

Verificação:

$$\vdash_{par} \langle \text{true} \rangle \; \text{Suc} \; \langle suc = x + 1 \rangle$$

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	2	$\text{true} \rightarrow (x + 1 = x + 1)$✓	
Atribuição	1	$x + 1 = x + 1$	suc := x + 1;
	0	$suc = x + 1$	

Note que, no passo 1, aplicamos a regra Atribuição e assim geramos uma nova asserção, em que suc é substituída por $x + 1$. Assim, a asserção $x + 1 = x + 1$ é gerada a partir da pós-condição $suc = x + 1$ e a aplicação da regra Atribuição.

Composição

Da mesma forma que no comando de atribuição, a regra sobre composição também pode ser aplicada diretamente quando o comando é sintaticamente reconhecido. É importante salientar que, se temos a pré e a pós-condição para o programa e iniciamos a prova pela pós-condição, podemos descobrir a asserção necessária antes do último comando, e assim sucessivamente até chegarmos ao topo do programa no qual encontramos a precondição. Essa regra da composição permite que as provas sejam realizadas de forma composicional, na qual provamos apenas um comando por vez.

Exemplo 7.4.3

Seja SucPred um programa que deve calcular o sucessor e o predecessor de um número no domínio dos inteiros. A especificação do problema é dada por:

Especificação:

Pre:true

Pos:$\mathtt{pred} = x - 1 \wedge \mathtt{suc} = x + 1$

Programa:

```
suc  := x + 1;
pred := x - 1;
```

Verificação:

$$\vdash_{par} \langle \text{true} \rangle \, \mathtt{SucPred} \, \langle \mathtt{pred} = x - 1 \wedge \mathtt{suc} = x + 1 \rangle$$

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	3	$\text{true} \rightarrow (x - 1 = x - 1 \wedge x + 1 = x + 1)$	
Atribuição	2	$x - 1 = x - 1 \wedge x + 1 = x + 1$	suc := x + 1;
Atribuição	1	$x - 1 = x - 1 \wedge \mathtt{suc} = x + 1$	pred := x − 1;
	0	$\mathtt{pred} = x - 1 \wedge \mathtt{suc} = x + 1$	

A asserção $x - 1 = x - 1 \wedge \mathtt{suc} = x + 1$ gerada a partir da pós-condição e da aplicação da regra Atribuição, no passo 1, passa a ser a pós-condição para o comando suc := x + 1. Por causa da regra Composição, podemos novamente aplicar a regra Atribuição gerando, assim, a nova asserção $x - 1 = x - 1 \wedge x + 1 = x + 1$ no topo do programa.

IfElse

Para o comando IfThenElse temos duas alternativas: quando a condição é verdadeira e quando ela é falsa:

$$\boxed{\text{IfElse}}\ \frac{\langle \varphi \wedge B \rangle\ C1\ \langle \psi \rangle \quad \langle \varphi \wedge \neg B \rangle\ C2\ \langle \psi \rangle}{\langle \varphi \rangle\ \texttt{if}\ B\ \{C1\}\ \texttt{else}\ \{C2\}\ \langle \psi \rangle}$$

Assim, quando iniciamos pela pós-condição e queremos levá-la para o topo do comando, devemos considerar duas situações:

1. Quando a condição é verdadeira, devemos considerar o comando C1: a pós-condição do comando (ψ) deve ser levada ao topo considerando apenas o comando C1. Denotamos por φ_1 essa nova asserção considerando o C1

2. Quando a condição é falsa, devemos considerar o comando C2: a pós-condição do comando (ψ) deve ser levada ao topo considerando apenas o comando C2. Denotamos por φ_2 essa nova asserção considerando o C2

Essas duas situações são refletidas nas premissas da regra IfElse:

$$\langle \varphi \wedge B \rangle\ C1\ \langle \psi \rangle \quad \langle \varphi \wedge \neg B \rangle\ C2\ \langle \psi \rangle$$

Para a primeira premissa, quando a condição é verdadeira (B), φ_1 deve ser verdadeira. Para a segunda premissa, quando a condição é falsa ($\neg B$), φ_2 deve ser verdadeira. Como devemos considerar as duas premissas no topo do comando, a asserção necessária no topo do comando deve ser:

$$B \rightarrow \varphi_1 \wedge \neg B \rightarrow \varphi_2$$

A prova do comando é concluída com a prova da asserção anterior, considerando $\langle \varphi \rangle$ como premissa. Mas, se o comando ainda não está no topo do programa a ser provado (muitas vezes, temos uma seqüência de comandos anteriormente), levamos tal asserção até o topo do programa para prová-la.

Utilizando a regra IfElse sobre o comando a seguir:

$$\begin{array}{c}\langle\varphi\rangle\\ \texttt{if(B)}\\ \{C1\}\\ \texttt{else}\\ \{C2\}\\ \langle\psi\rangle\end{array}$$

temos, portanto, os seguintes passos para a prova do comando `if-else`:

1. Introduzir ψ como pós-condição de C1 e C2:

$$\begin{array}{c}\langle\varphi\rangle\\ \texttt{if(B)}\\ \{C1\\ \boxed{\langle\psi\rangle}\}\\ \texttt{else}\\ \{C2\\ \boxed{\langle\psi\rangle}\}\\ \langle\psi\rangle\end{array}$$

2. Produzir as novas asserções como precondições de C1 e C2 a partir da pós-condição ψ: φ_1 e φ_2.

$$\begin{array}{c}\langle\varphi\rangle\\ \texttt{if(B)}\\ \{\boxed{\langle\varphi_1\rangle}\\ C1\\ \langle\psi\rangle\}\\ \texttt{else}\\ \{\boxed{\langle\varphi_2\rangle}\\ C2\\ \langle\psi\rangle\}\\ \langle\psi\rangle\end{array}$$

3. Produzir a nova asserção no topo do comando que garanta a validade das premissas:

$$\begin{array}{l}
\langle\varphi\rangle \\
\boxed{\langle B \rightarrow \varphi_1 \wedge \neg B \rightarrow \varphi_2\rangle} \\
\texttt{if}(B) \\
\{\langle\varphi_1\rangle \\
C1 \\
\langle\psi\rangle\} \\
\texttt{else} \\
\{\langle\varphi_2\rangle \\
C2 \\
\langle\psi\rangle\} \\
\langle\psi\rangle
\end{array}$$

Nesse último passo, devemos provar a nova asserção, tendo como premissa a precondição φ, concluindo assim a prova de todo o comando. A seguir, ilustramos a aplicação da regra com um programa simples.

Exemplo 7.4.4

Seja `Maisum` um programa que dado um número inteiro, calcula o próximo número no domínio dos números naturais.

Especificação:

Pre:true

Pos:$\texttt{num} = 0 \vee \texttt{num} = \texttt{x} + 1$

Programa:

```
a := x + 1;
if (a < 0)
 {num := 0;}
else
 {num := a;}
```

Verificação:

$$\vdash_{par} \langle \text{true}\rangle\ \texttt{Maisum}\ \langle \texttt{num} = 0 \vee \texttt{num} = \texttt{x} + 1\rangle$$

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	5	$\text{true} \rightarrow (((x+1) < 0 \rightarrow 0 = 0 \vee 0 = x+1) \wedge$	
		$(\neg((x+1) < 0) \rightarrow x+1 = 0 \vee x+1 = x+1))$	
		$(\neg((x+1) < 0) \rightarrow x+1 = 0 \vee x+1 = x+1)$	a := x + 1;
IfElse	3	$(a < 0 \rightarrow 0 = 0 \vee 0 = x+1) \wedge$	
		$(\neg(a < 0) \rightarrow a = 0 \vee a = x+1)$	if (a < 0) {
Atribuição	2	$0 = 0 \vee 0 = x+1$	num := 0;
IfElse	1	$num = 0 \vee num = x+1$	}
			else {
Atribuição	2	$a = 0 \vee a = x+1$	num := a;
IfElse	1	$num = 0 \vee num = x+1$	}
	0	$num = 0 \vee num = x+1$	

Nesse caso particular, temos em conjunto a aplicação das regras de composição, atribuição e do condicional `if-else`. Assim, a prova da asserção do topo do `if-else` foi levada ao topo de todo o programa para ser realizada.

WhileParcial

Todas as regras mostradas anteriormente são aplicadas diretamente aos programas sem que seja necessária a criação de novos elementos. Elas podem ser, portanto, aplicadas automaticamente. Para a aplicação da regra WhileParcial, no entanto, temos um novo elemento introduzido, o invariante.

Nos programas, queremos provar:

$$\langle \varphi \rangle \ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ \langle \psi \rangle \tag{7.3}$$

assim como nos outros comandos mostrados até o momento. Contudo, a regra WhileParcial é definida usando asserções sobre uma mesma propriedade (η):

$$\boxed{\text{WhileParcial}}\ \frac{\langle \eta \wedge B \rangle\ C\ \langle \eta \rangle}{\langle \eta \rangle\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ \langle \eta \wedge \neg B \rangle}$$

Nesse caso, a propriedade η deve ser satisfeita tanto antes e depois de cada iteração do comando quanto ao final dele. O que determina quando a iteração deve ser realizada é a condição B, que é falsa apenas ao final do comando, quando não devemos mais realizar as iterações.

Para aplicarmos a regra WhileParcial ao comando, como aparece em (7.3) devemos, então, *descobrir* o invariante η, tal que:

1. $\vdash \varphi \rightarrow \eta$

2. $\vdash (\eta \wedge \neg B) \rightarrow \psi$

porque

$$\langle \varphi \rangle \langle \eta \rangle \texttt{while}\ B\ \{C\} \langle \eta \wedge \neg B \rangle \langle \psi \rangle$$

No entanto, para que possamos aplicar a regra WhileParcial, devemos ter como premissa:

$$\langle \eta \wedge B \rangle\ C\ \langle \eta \rangle$$

Então, se provarmos que η, é de fato, um invariante, a premissa pode ser usada. Assim como tivemos no comando `if-else`, se tivermos η como pós-condição do corpo do comando C, podemos descobrir a precondição a ser satisfeita antes de iniciar o corpo do comando: tendo η após o corpo C, levamos essa asserção para o topo de C e descobrimos $\eta\prime$. Note que, antes de o corpo C ser executado, temos a asserção $\eta \wedge B$ na premissa. Essa asserção pode, então, ser usada para provarmos $\eta\prime$.

$$(\eta \wedge B) \rightarrow \eta\prime$$

Assim, para provar que η é um invariante, precisamos provar que:

1. $\vdash (\eta \wedge \neg B) \rightarrow \psi$

2. $\vdash (\eta \wedge B) \rightarrow \eta\prime$

Descobrir o invariante η depende de uma percepção de asserções candidatas para que os itens anteriores sejam satisfeitos. É importante salientar que o invariante não precisa ser satisfeito durante a execução de C, mas antes do comando `while`, antes e depois de cada iteração do corpo C e após todo o comando `while`. Em geral, um invariante útil expressa uma relação entre as variáveis manipuladas no corpo do comando (C). Quais variáveis devem ser, de fato, utilizadas para expressar o invariante e qual a relação entre elas podem ser percebidas pela seqüência de valores produzidos por essas variáveis ao longo de uma computação do programa. Assim, a partir de uma computação exemplo, podemos notar a relação entre as variáveis antes da execução do comando e logo após a execução do corpo C, ou seja, após cada iteração do comando de repetição.

Exemplo 7.4.5

Consideremos novamente o programa para calcular o fatorial com a sua respectiva especificação (já apresentado no Exemplo 7.3.1).

Especificação:

Pre: $n \geqslant 0$

Pos: $fat = n!$

Programa:

```
fat := 1;
i := 0;
while (i != n)
 { i := i + 1 ;
   fat = fat * i;
 }
```

Para encontrar o invariante para o comando `while`, devemos considerar um exemplo de computação do comando, para dados reais, e então comparar a relação entre as variáveis. Podemos ter, por exemplo, $n = 4$:

iteração	i	fat	$i \neq n$
0	0	1	true
1	1	1	true
2	2	2	true
3	3	6	true
4	4	24	false

A iteração 0 corresponde ao momento imediatamente anterior à execução do comando. A condição ($i \neq n$) é calculada com os valores das variáveis ao término da iteração (os que aparecem na tabela).

Note que a relação

$$fat = i!$$

é mantida tanto antes (iteração 0) quanto após cada iteração. Essa asserção é, portanto, uma candidata a invariante do comando. Resta-nos provar que é, de fato, um invariante:

1. $\vdash (\eta \wedge \neg B) \rightarrow \psi$

2. $\vdash (\eta \wedge B) \rightarrow \eta'$

$$\eta \equiv fat = i!$$
$$\neg B \equiv i = n$$
$$B \equiv i \neq n$$
$$\eta' \equiv fat * (i+1) = (i+1)!$$
$$\psi \equiv fat = n!$$

então,

1. $\vdash (fat = i! \wedge (i = n)) \rightarrow fat = n!$ ✓

2. $\vdash (fat = i! \wedge i \neq n)) \rightarrow \eta' \equiv fat * (i+1) = (i+1)!)$ ✓

Como as condições para que η seja, de fato, um invariante são satisfeitas, este passa a ser um invariante do comando. Com isso, η pode passar a ser uma precondição para o comando `while`.

Os passos de prova para o comando

$$\langle\varphi\rangle$$
$$\texttt{while}(B)$$
$$\{C\}$$
$$\langle\psi\rangle$$

usando a regra WhileParcial são:

1. Encontrar um candidato a invariante η observando a relação entre as variáveis do corpo do comando C, antes e após a sua execução

2. Certificar η como possível invariante em relação à pós-condição ψ, provando:

$$\vdash \eta \wedge \neg B \rightarrow \psi$$

$$\langle\varphi\rangle$$
$$\texttt{while}\ (B)$$
$$\{C\}$$
$$\boxed{\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi}\ ✓$$
$$\langle\psi\rangle$$

3. Introduzir η como pós-condição do corpo C do comando `while`:

$$\langle\varphi\rangle$$
`while` (B)
{C
$$\boxed{\langle\eta\rangle}\}$$
$$\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi \checkmark$$
$$\langle\psi\rangle$$

4. Produzir η′ a partir de η e o corpo C:

$$\langle\varphi\rangle$$
`while` (B)
$$\{\boxed{\langle\eta'\rangle}$$
C
$$\langle\eta\rangle\}$$
$$\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi \checkmark$$
$$\langle\psi\rangle$$

5. Certificar η como invariante provando:

$$(\eta \wedge B) \rightarrow \eta'$$
$$\langle\varphi\rangle$$
`while` (B)
$$\boxed{(\eta \wedge B) \rightarrow \eta'} \checkmark$$
$$\{\langle\eta'\rangle$$
C
$$\langle\eta\rangle\}$$
$$\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi \checkmark$$
$$\langle\psi\rangle$$

6. Introduzir η como precondição do comando `while`:

$$\begin{array}{l}
\langle\varphi\rangle \\
\boxed{\langle\eta\rangle} \\
\texttt{while}\,(B) \\
(\eta \wedge B) \rightarrow \eta' \checkmark \\
\{\langle\eta'\rangle \\
C \\
\langle\eta\rangle\} \\
\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi \checkmark \\
\langle\psi\rangle
\end{array}$$

Exemplo 7.4.6

Consideremos novamente o programa do Exemplo 7.4.5:

Especificação:

Pre: $n \geqslant 0$

Pos: $fat = n!$

Programa:

```
fat := 1;
i := 0;
while (i != n)
 { i := i + 1 ;
   fat = fat * i;
 }
```

Verificação:

$$\vdash_{par} \langle n \geqslant 0\rangle\, Fat\, \langle fat = n!\rangle$$

Inicialmente, precisamos encontrar um candidato e certificá-lo como invariante, para o comando `while`, considerando a pós-condição ψ (passo a passo explicado no Exemplo 7.4.5). Na prova, incluímos como primeiro passo a certificação do invariante em relação à pós-condição. Assim, os elementos:

Invariante η:	$fat = i!$
$\vdash (\eta \wedge \neg B) \rightarrow \psi$:	$(fat = i! \wedge \neg(i \neq n)) \rightarrow fat = n!$ ✓

foram incluídos na tabela a seguir em vez de serem mantidos em separado.

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	9	$n \geqslant 0 \rightarrow (1 = 0!)$✓	
Atribuição	8	$1 = 0!$	fat := 1;
Atribuição	7	$fat = 0!$	i := 0;
WhileParcial	6	$fat = i!$	while (i != n)
Implicação	5	$(fat = i! \wedge (i \neq n)) \rightarrow$ $fat * (i+1) = (i+1)!$✓	
Atribuição	4	$fat * (i+1) = (i+1)!$	{ i := i + 1 ;
Atribuição	3	$fat * i = i!$	fat = fat * i;
WhileParcial	2	$fat = i!$	}
WhileParcial	1	$(fat = i! \wedge \neg(i \neq n)) \rightarrow fat = n!$✓	
Invariante	1	$fat = i!$	
	0	$fat = n!$	

A certificação do invariante em relação à precondição foi apenas realizada no topo do programa juntamente com a prova final. Novamente, todas as provas que recorrem a um provador externo para a lógica de predicados e números inteiros estão anotadas com ✓.

Note que, nesse último exemplo, assim como em todos os outros anteriores, todas as provas relativas à lógica de predicados foram omitidas. A rigor, para que provemos os programas, precisamos de um sistema de provas para a lógica de predicados, assim como para os números inteiros, e tais provas deveriam ser mostradas aqui. Como queremos priorizar os passos de prova para os programas já que as provas para a lógica de predicados foram vistas na Parte II, optamos por não introduzir, aqui, essas provas (o leitor pode recorrer aos sistemas de provas da Parte II do livro). Da mesma forma, *apelamos* para o conhecimento intuitivo do leitor em relação aos números inteiros para não introduzir mais a teoria e sistemas de provas para números inteiros. Isso sobrecarregaria a leitura do livro, e a teoria de números inteiros, ou quaisquer outros tipos aqui utilizados, está fora do escopo deste livro.

7.4.3 Correção e Completude do Sistema de Provas

Quando apresentamos um sistemas de provas, as primeiras questões que surgem são:

1. O sistema de provas é correto? Quando o sistema produz uma prova de correção sobre o programa, é verdade que o programa está correto?

2. O sistema de provas é completo? Todo programa que está correto em relação à sua especificação pode ser provado pelo sistema?

Definição 7.4.1 Quando um programa satisfaz a sua especificação sob a relação de correção parcial, dizemos que

$$\models_{par} \langle \varphi \rangle \, P \, \langle \psi \rangle$$

Então, o sistema de provas para a correção parcial de programas é *correto* quando

$$\vdash_{par} \langle \varphi \rangle \, P \, \langle \psi \rangle \rightarrow \models_{par} \langle \varphi \rangle \, P \, \langle \psi \rangle$$

Por outro lado, o sistema de provas para a correção parcial de programas é *completo* quando

$$\models_{par} \langle \varphi \rangle \, P \, \langle \psi \rangle \rightarrow \vdash_{par} \langle \varphi \rangle \, P \, \langle \psi \rangle$$

Para provar a correção do sistema de provas, é necessária apenas a prova de correção para cada uma das regras (indução estrutural), já que o sistema é composicional. Essa é uma prova relativamente simples e pode ser encontrada em Winskel (1993).

Para provar a completude do sistema de provas, contudo, devemos recorrer a provas para a lógica de predicados, já que utilizamos seus sistemas de provas como recurso externo às nossas provas. Pelo *teorema de incompletude de Gödel*, já enunciado na Parte II deste livro, não podemos provar a completude para a lógica de predicados e, portanto, não podemos provar para o novo sistema aqui introduzido. Um artifício usado para provar a completude do sistema de provas aqui apresentado é a introdução de asserções de programas como axiomas do sistema, a partir dos quais podemos fazer uma prova da completude relativa do sistema de provas. A prova da completude relativa do sistema pode ser encontrada em Apt e Olderog (1997), Francez (1992) e Winskel (1993). Omitimos essa prova neste livro para não sairmos do foco: uso da lógica para especificação e provas de programas.

Exercícios

7.1 Verificar a correção parcial para cada uma das triplas a seguir (pode ser verdadeira ou falsa), usando apenas a regra Atribuição:

1. $\langle \text{true} \rangle\ x := 5\ \langle \text{true} \rangle$
2. $\langle \text{true} \rangle\ x := 10\ \langle x = 10 \rangle$
3. $\langle x = 20 \rangle\ x := 5\ \langle x > 20 \rangle$
4. $\langle x = 20 \rangle\ x := 5\ \langle \text{false} \rangle$
5. $\langle \text{false} \rangle\ x := 5\ \langle x > 20 \rangle$
6. $\langle \text{true} \rangle\ x := 5\ \langle \text{false} \rangle$

7.2 Verificar a correção parcial para cada uma das triplas a seguir usando as regras Atribuição e Composição:

1. $\langle x > 0 \rangle\ y := x + 5\ \langle y \geqslant 5 \rangle$
2. $\langle \text{true} \rangle\ y := x; y := 2 * x + y\ \langle y = 3 * x \rangle$
3. $\langle z \geqslant 1 \rangle\ x := 1; y := z; y := y - x\ \langle z > y \rangle$
4. $\langle x = x_0 \wedge y = y_0 \rangle\ z := x; x := y; y := z\ \langle x = y_0 \wedge y = x_0 \rangle$

7.3 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
if (x>y)
 {z:= x;}
else
 {z:= y;}
```

Mostrar:

1. $\vdash_{par} \langle \text{true} \rangle\ P\ \langle z = \max(x, y) \rangle$
2. $\vdash_{par} \langle x > 0 \rangle\ P\ \langle z > 0 \rangle$
3. $\vdash_{par} \langle x > 0 \rangle\ P\ \langle z > \min(x, y) \rangle$

7.4 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
fat := 1;
while (n != 0)
 {fat := fat * n ;
  n := n - 1;
 }
```

Mostrar:

1. $\vdash_{par} \langle n \geqslant 0 \rangle\, P\, \langle fat = n! \rangle$
2. $\vdash_{par} \langle n = n_0 \wedge n \geqslant 0 \rangle\, P\, \langle fat = n_0! \rangle$

7.5 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
y := 0;
while (y != x)
 {y := y + 1;
 }
```

Mostrar:

1. $\vdash_{par} \langle \mathsf{true} \rangle\, P\, \langle x = y \rangle$
2. $\vdash_{par} \langle x \geqslant 0 \rangle\, P\, \langle x = y \wedge y \geqslant 0 \rangle$

7.6 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
q := 0;
r := x;
while (r >= y)
 {r := r - y;
  q := q + 1;
 }
```

Mostrar:

1. $\vdash_{par} \langle y \neq 0 \rangle\, P\, \langle (x = q * y + r) \wedge (r < y) \rangle$
2. $\vdash_{par} \langle \mathsf{true} \rangle\, P\, \langle (x = q * y + r) \wedge (r < y) \rangle$

7.7 Fazer um programa para cada um dos problemas propostos na Seção 6.4 e provar a correção parcial desses programas em relação à especificação que você formulou naqueles exercícios.

7.5 Correção Total de Programas

No Exemplo 7.4.6, mostramos a prova de correção parcial para um programa que calcula o fatorial de um número inteiro. Para completar a prova, tivemos de provar:

$$n \geqslant 0 \rightarrow (1 = 0!)\checkmark$$

no topo do programa. Mas para provar $1 = 0!$ não precisamos da premissa $n \geqslant 0$, já que, por definição, $1 = 0!$. Isso significa que, mesmo que tivéssemos a asserção true como precondição do programa, a correção parcial dele poderia ser provada:

$$\vdash_{par} \langle \mathsf{true} \rangle \, \mathtt{Fat} \, \langle \mathtt{fat} = n! \rangle$$

porque

$$\mathsf{true} \rightarrow (1 = 0!)\checkmark$$

Se considerarmos true como precondição, podemos ter um número negativo como entrada, o que levará o programa a uma repetição infinita do comando `while`. Mesmo assim, a correção parcial do programa pode ser provada porque essa relação *assume* que cada comando termina.

Na correção total de programas, em vez de considerarmos que cada comando termina, queremos provar que os comandos terminam de fato. Dessa forma, precisamos redefinir a lógica para que as regras contemplem a terminação de programas. Dentro do repertório de comandos da linguagem de programação proposta, temos apenas um comando de repetição: `while`. Esse é o único comando da linguagem que pode não terminar se sua condição nunca progredir para o valor `false`. Por isso, a lógica para a correção total de programas contém as mesmas regras encontradas na prova parcial de programas, exceto a regra sobre o comando `while`, a qual é refeita considerando que agora queremos provar o término do comando. O Quadro 7.2 contém a lógica de Hoare para a correção total de programas.

Quadro 7.2 *Regras de prova (total).*

Composição
$$\frac{\langle\varphi\rangle\ C1\ \langle\eta\rangle \quad \langle\eta\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle}{\langle\varphi\rangle\ C1; C2\ \langle\psi\rangle}$$

Atribuição
$$\frac{}{\langle\psi[E/x]\rangle\ x := E\ \langle\psi\rangle}$$

IfElse
$$\frac{\langle\varphi \wedge B\rangle\ C1\ \langle\psi\rangle \quad \langle\varphi \wedge \neg B\rangle\ C2\ \langle\psi\rangle}{\langle\varphi\rangle\ \texttt{if}\,B\,\{C1\}\ \texttt{else}\,\{C2\}\ \langle\psi\rangle}$$

WhileTotal
$$\frac{\langle\eta \wedge B \wedge 0 \leqslant E = E_0\rangle\ C\ \langle\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0\rangle}{\langle\eta \wedge 0 \leqslant E\rangle\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ \langle\eta \wedge \neg B\rangle}$$

Implicação
$$\frac{\vdash \varphi' \rightarrow \varphi \quad \langle\varphi\rangle\ C\ \langle\psi\rangle \quad \vdash \psi \rightarrow \psi'}{\langle\varphi'\rangle\ \{C\}\ \langle\psi'\rangle}$$

A única nova regra de prova introduzida é a WhileTotal, que substituiu a WhileParcial da lógica anterior. As outras regras têm o mesmo significado do Quadro 7.1. Nessa nova regra,

WhileTotal
$$\frac{\langle\eta \wedge B \wedge 0 \leqslant E = E_0\rangle\ C\ \langle\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0\rangle}{\langle\eta \wedge 0 \leqslant E\rangle\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ \langle\eta \wedge \neg B\rangle}$$

introduzimos os elementos E e E_0. Como desejamos provar a terminação, precisamos de uma expressão que decresça a cada iteração até chegar a um valor que torne a condição do `while` falsa após um número finito de iterações (isso garante que o comando termina). Esses novos elementos são, então:

- A expressão *variante* E – uma expressão sobre variáveis do programa cujo valor decresce a cada iteração do `while`. Ou seja, o valor de E após a execução de C é menor que o valor de E_0 antes da execução de C.
- E_0 – a expressão E antes da execução do comando C, usada para evidenciar a variação do valor de E a cada iteração.

A prova do comando `while` é realizada de forma semelhante à que fizemos com a prova de correção parcial do mesmo comando, exceto que a convergência (para zero) da expressão variante deve também ser provada. Para isso, os passos de prova usando a regra WhileTotal são:

1. Encontrar um candidato a *invariante* η e uma expressão *variante* E observando a relação entre as variáveis do corpo do comando C, antes e depois da sua execução

2. Certificar η como invariante em relação à pós-condição ψ:

$$\vdash \eta \wedge \neg B \rightarrow \psi$$

$$\begin{array}{l} \langle\varphi\rangle \\ \texttt{while}\ (B) \\ \{C\} \\ \boxed{\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi\ \checkmark} \\ \langle\psi\rangle \end{array}$$

3. Introduzir $\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0$ como pós-condição do corpo C:

$$\begin{array}{l} \langle\varphi\rangle \\ \texttt{while}\ (B) \\ \{C \\ \boxed{\langle\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0\rangle}\} \\ \eta \wedge \neg B \rightarrow \psi\ \checkmark \\ \langle\psi\rangle \end{array}$$

4. Produzir $\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0$ a partir de $\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0$ e o corpo C:

$$\begin{array}{l} \langle\varphi\rangle \\ \texttt{while}\ (B) \\ \{\boxed{\langle\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0\rangle} \\ C \\ \langle\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0\rangle\} \\ \eta \wedge \neg B \rightarrow \psi\ \checkmark \\ \langle\psi\rangle \end{array}$$

5. Certificar η e E como invariante e variante, respectivamente:

$$(\eta \wedge B \wedge 0 \leqslant E = E_0) \rightarrow (\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0)$$

$\langle\varphi\rangle$
`while (B)`
$\boxed{(\eta \wedge B \wedge 0 \leqslant E = E_0) \rightarrow (\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0)}$ ✓
$\{\langle\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0\rangle$
C
$\langle\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0\rangle\}$
$\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi$ ✓
$\langle\psi\rangle$

6. Introduzir $\eta \wedge 0 \leqslant E$ como precondição do comando `while`:

$\langle\varphi\rangle$
$\boxed{\langle\eta \wedge 0 \leqslant E\rangle}$
`while (B)`
$(\eta \wedge B \wedge 0 \leqslant E = E_0) \rightarrow (\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0)$ ✓
$\{\langle\eta' \wedge 0 \leqslant E' \leqslant E_0\rangle$
C
$\langle\eta \wedge 0 \leqslant E \leqslant E_0\rangle\}$
$\eta \wedge \neg B \rightarrow \psi$ ✓
$\langle\psi\rangle$

Exemplo 7.5.1

Consideremos novamente o programa do Exemplo 7.4.5:

Especificação:

Pre: $n \geqslant 0$

Pos: $fat = n!$

Programa:

```
fat := 1;
i := 0;
while (i != n)
 { i := i + 1 ;
   fat = fat * i;
 }
```

Verificação:

$$\vdash_{tot} \langle n \geqslant 0 \rangle \, Fat \, \langle fat = n! \rangle$$

Inicialmente, precisamos encontrar um candidato e certificá-lo como invariante, para o comando `while`, considerando a pós-condição ψ, assim como a expressão variante E.

Invariante η:	$fat = i!$
Variante E:	$n - i$

A partir desses dois elementos, prosseguimos com os passos de prova:

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	10	$n \geqslant 0 \rightarrow (1 = 0! \wedge 0 \leqslant n)$✓	
Atribuição	9	$1 = 0! \wedge 0 \leqslant n$	fat := 1;
Atribuição	8	$fat = 0! \wedge 0 \leqslant n - 0$	i := 0;
WhileTotal	7	$fat = i! \wedge 0 \leqslant n - i$	while (i != n)
Implicação	6	$(fat = i! \wedge (i \neq n) \wedge 0 \leqslant n - i = E_0) \rightarrow$ $fat * (i+1) = (i+1)! \wedge 0 \leqslant n - (i+1) \leqslant E_0$✓	
Atribuição	5	$fat * (i+1) = (i+1)! \wedge 0 \leqslant n - (i+1) \leqslant E_0$	{ i := i + 1 ;
Atribuição	4	$fat * i = i! \wedge 0 \leqslant n - i \leqslant E_0$	fat = fat * i;
WhileTotal	2	$fat = i! \wedge 0 \leqslant n - i \leqslant E_0$	}
WhileTotal	1	$(fat = i! \wedge \neg(i \neq n)) \rightarrow fat = n!$✓	
Invariante	1	$fat = i!$	
Variante	1	$n - i$	
	0	$fat = n!$	

Note que dessa vez precisamos da precondição $n \geqslant 0$ para provar a asserção do topo do programa:

$$n \geqslant 0 \rightarrow (1 = 0! \wedge 0 \leqslant n)✓$$

Se não tivéssemos a premissa $n \geqslant 0$, não poderíamos provar a asserção $0 \leqslant n$. Diferentemente da correção parcial de programas, *não* podemos, por exemplo, provar

$$\vdash_{tot} \langle true \rangle \, Fat \, \langle fat = n! \rangle$$

Regra	Passo	Asserção	Programa
Implicação	10	$\text{true} \to (1 = 0! \wedge 0 \leqslant n)$✗	
Atribuição	9	$1 = 0! \wedge 0 \leqslant n$	fat := 1;
Atribuição	8	$\mathtt{fat} = 0! \wedge 0 \leqslant n - 0$	i := 0;
WhileTotal	7	$\mathtt{fat} = i! \wedge 0 \leqslant n - i$	while (i != n)
Implicação	6	$(\mathtt{fat} = i! \wedge (i \neq n) \wedge 0 \leqslant n - i = E_0) \to$ $\mathtt{fat} * (i+1) = (i+1)! \wedge 0 \leqslant n - (i+1) \leqslant E_0$✓	
Atribuição	5	$\mathtt{fat} * (i+1) = (i+1)! \wedge 0 \leqslant n - (i+1) \leqslant E_0$	{ i := i + 1 ;
Atribuição	4	$\mathtt{fat} * i = i! \wedge 0 \leqslant n - i \leqslant E_0$	fat = fat * i;
WhileTotal	2	$\mathtt{fat} = i! \wedge 0 \leqslant n - i \leqslant E_0$	}
WhileTotal	1	$(\mathtt{fat} = i! \wedge \neg(i \neq n)) \to \mathtt{fat} = n!$✓	
Invariante	1	$\mathtt{fat} = i!$	
Variante	1	$n - i$	
	0	$\mathtt{fat} = n!$	

Mais uma vez, recorremos a provas da lógica de predicados e teoria dos inteiros que não foram demonstradas aqui.

Definição 7.5.1 Quando um programa satisfaz a sua especificação sob a relação de correção total, dizemos que

$$\vDash_{tot} \langle \varphi \rangle\, P\, \langle \psi \rangle$$

O sistema de provas para a correção total de programas é *correto* quando

$$\vdash_{tot} \langle \varphi \rangle\, P\, \langle \psi \rangle \to \vDash_{tot} \langle \varphi \rangle\, P\, \langle \psi \rangle$$

O sistema de provas para a correção total de programas é *completo* quando

$$\vDash_{tot} \langle \varphi \rangle\, P\, \langle \psi \rangle \to \vdash_{tot} \langle \varphi \rangle\, P\, \langle \psi \rangle$$

Essas asserções restritas à completude relativa considerando um conjunto de asserções sobre programas e assumindo a expressividade dos inteiros também podem ser encontradas em Apt e Olderog (1997) e Francez (1992).

Exercícios

7.8 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
fat := 1;
while (n != 0)
 {fat := fat * n ;
  n := n - 1;
 }
```

Mostrar:

1. $\vdash_{tot} \langle n \geqslant 0 \rangle\ P\ \langle fat = n! \rangle$
2. $\vdash_{tot} \langle n = n_0 \wedge n \geqslant 0 \rangle\ P\ \langle fat = n_0! \rangle$

7.9 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
y := 0;
while (y != x)
 {y := y + 1;
 }
```

Mostrar:

1. $\vdash_{tot} \langle true \rangle\ P\ \langle x = y \rangle$
2. $\vdash_{tot} \langle x \geqslant 0 \rangle\ P\ \langle x = y \wedge y \geqslant 0 \rangle$

7.10 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
q := 0;
r := x;
while (r >= y)
 {r := r - y;
  q := q + 1;
 }
```

Mostrar:

1. $\vdash_{tot} \langle y \neq 0 \rangle\ P\ \langle (x = q * y + r) \wedge (r < y) \rangle$
2. $\vdash_{tot} \langle true \rangle\ P\ \langle (x = q * y + r) \wedge (r < y) \rangle$

7.11 O número de Fibonacci é definido indutivamente por:

$$fib_0 = 0,$$
$$fib_1 = 1,$$
$$fib_n = fib_{n-1} + fib_{n-2}, n \geqslant 2$$

Dado o programa P a seguir

Programa:

```
x := 0;
y := 1;
count := n;
while (count > 0)
{ h := y;
  y := x + y;
  x := h;
  count := count - 1;
}
```

Mostrar:

$\vdash_{tot} \langle n \geqslant 0 \rangle\, P\, \langle x = fib(n) \rangle$

7.12 Dado o programa P a seguir

Programa:

```
a := 0;
z := 0;
while (a != y)
 { z := z + x;
   a := a + 1;
 }
```

Mostrar:

$\vdash_{tot} \langle true \rangle\, P\, \langle z = x * y \rangle$

7.6 Notas Bibliográficas

Como já exposto neste capítulo, a verificação de programas (ou sistemas de software) depende de fundamentos matemáticos tanto para a linguagem de especificação, como já foi discutido no Capítulo 6, quanto para a linguagem de programação. Aqui, a linguagem de programação usada teve sua semântica axiomática definida para, posteriormente, usarmos a lógica de Hoare para verificar os programas. Existem outras formas de definirmos as semânticas das linguagens de programação, tais como a *semântica operacional* (Plotkin, 1981) e a *semântica denotacional* (Schmidt, 1986). Os leitores interessados em outras formas de definição de semântica de linguagens de programação podem consultar Winskel (1993), que dá uma visão geral sobre

as várias formas de definição de semântica de linguagens, mas sem muita profundidade.

Neste livro, introduzimos a verificação de programas sob uma abordagem prática para exemplificar o uso da lógica, e seus sistemas de prova, na correção de programas. Vários outros livros tratam o tema de verificação de programas de forma mais aprofundada, inclusive para programas concorrentes. Aqui, utilizamos principalmente os livros de Francez (1992) e de Apt e Olderog (1997) como referência, nos quais são demonstradas a completude relativa e correção do sistema de provas aqui utilizado.

Para cada um dos métodos ou linguagens formais, tais com o Z, VDM e B (já mencionados no Capítulo 6, Seção 6.5), existe um sistema de provas relacionado. Para esses métodos, há cálculos de refinamentos com os quais as especificações podem ser sucessivamente detalhadas para que se aproximem do código. Vários estudos têm sido desenvolvidos nessa área, como, por exemplo, *Circus* (Sampaio, Woodcock e Cavalcanti, 2002; Woodcock, 2004), que tem um cálculo de refinamento para especificações conjuntas em Z/CSP. Várias referências e ferramentas sobre outras formas de verificação e técnicas de refinamento e transformação de programas (Partsch, 1990) podem ser acessadas a partir do site *http://www.afm.sbu.ac.uk/*.

Conclusão

Apresentamos, portanto, nossa modesta compilação da lógica clássica de uma forma que consideramos particularmente útil para cientistas de computação.

Nosso objetivo foi apresentar os diversos temas tratados de forma acessível e simples, para que este livro pudesse ser usado como base em disciplinas de graduação. Por esse motivo, como o leitor deve ter notado, apresentamos relativamente poucas demonstrações de teoremas ao longo de todo o texto, se comparado com livros sobre lógica clássica de outros autores.

Nosso maior cuidado e esforço, entretanto, foi em não sacrificar a *precisão* dos temas tratados em nome da simplicidade. Consideramos paradoxal apresentar um livro de lógica matemática de maneira imprecisa.

Esperamos ter atingido nosso objetivo, que era a produção de um livro-texto de alta qualidade, voltado primordialmente para os estudantes de informática interessados em lógica matemática.

Sendo assim, concluímos. Ponto final.

7 Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen[1].

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*

---

[1] N.A. "Sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar."

Referências Bibliográficas

APT, K. R.; OLDEROG, E. R. *Verification of sequential and concurrent programs*. Berlim: Springer-Verlag, 1997.

BECKERT, B.; POSEGGA, J. *leanTAP*: Lean, tableau-based deduction. *Journal of automated reasoning*, n.15, v.3, p. 339-358, 1995.

BETH, Evert Willem. *Formal methods*. An introduction to symbolic logic and to the study of effective operations in arithmetic and logic. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1962.

BOOCH, G.; RUMBAUGH, J.; JACOBSON, I. *The unified modelling language user guide*. Reading: Addison-Wesley, 1999.

BOOLOS, G. S.; JEFFREY, R. C. *Computability and logic*. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

BUSS, Samuel. Polynomial size proofs of the propositional pigeonhole principle. *Journal of symbolic logic*, n.52, p. 916-927, 1987.

CARBONE, Alessandra; SEMMES, Stephen. *A graphic apology for symmetry and implicitness*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford University Press, 2000.

CARDELLI, L.; GORDON, A. D. Mobile ambients. In: NIVAT, Maurice (Ed.). *Foundations of software science and computational structures*. Springer, 1998.

COOK, Stephen A. The complexity of theorem proving procedures. *Third Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*. Nova York: ACM, 1971, p. 151-158.

COOK, Stephen A.; RECKHOW, Robert A. The relative efficiency of propositional proof systems. *Journal of Symbolic Logic*, n. 44, v.1, p. 36-50, 1979.

CORRÊA DA SILVA, F. S.; AGUSTÍ-CULLELL, J. *Knowledge coordination*. Chichester: John Wiley, 2003.

D'AGOSTINO, Marcello. Are tableaux an improvement on truth-tables? – Cut-free proofs and bivalence. *Journal of Logic, Language and Information*, n.1, p. 235-252, 1992.

DAVIS, M. *Computability and unsolvability*. New York: McGraw-Hill, 1958.

DAVIS, M.; PUTNAM, H. A computing procedure for quantification theory. *Journal of the ACM*, n.7, v.3, p.201-215, 1960.

DAVIS, Martin; LOGEMANN, George; LOVELAND, Donald. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, n.5, v.7, p.394-397, Jul. 1962.

DOWLING, W. F.; GALLIER, J. H. Linear time algorithms for testing satisfiability of propositional horn formulae. *Journal of Logic Programming*, n.3, p. 267-284, 1984.

DOYLE, Jon. A truth maintenance system. In: *Artificial intelligence*, p. 259-279, 1979.

EPSTEIN, R. L.; CARNIELLI, W. A. *Computability* – Computable functions, logic, and the foundations of mathematics. 2. ed. Belmont: Wadsworth, 2000.

ERSHOV, Yu.; PALIUTIN, E. *Lógica matemática*. Moscou: Mir, 1990.

EVEN, S.; ITAI, A.; SHAMIR, A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computing*, n.5, v.4, p. 691-703, 1976.

FITTING, Melvin. *First-order logic and automated theorem proving*. New York: Springer-Verlag, 1990. (2. ed., 1996).

FLOYD, R. Assigning meaning to programs. In: SCHWARTZ, J. T. (ed.). *Proceedings of Symposium on Applied Mathematics 19* - Mathematical aspects of computer science. Nova York: American Mathematical Society, p. 19-32, 1967.

FRANCEZ, N. *Program verification*. Reading: Addison-Wesley, 1992.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and intractability*: A guide to the theory of NP-completeness. Nova York: Freeman, 1979.

GENT, Ian; WALSH, Toby. The SAT phase transition. In: COHN, A. G. (ed.) *Proceedings of ECAI-94*. Chichester: John Wiley & Sons, p. 105-109, 1994.

GÖDEL, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I (Sobre proposições indecidíveis de Principia Matematica e sistemas relacionados). In: *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*. Traduzido para o inglês em 1931. Disponível na internet em *http://home.ddc.net/ygg/etext/godel/godel3.htm*.

GRAY, Jeremy. *The Hilbert challenge*: A perspective on twentieth century mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2000.

HILBERT, David. *Foundations of geometry* (Traduzido do alemão por L. Unger). Chicago: Open Court Publisher, 1899.

HILBERT, D. The foundations of mathematics. p. 464-479, 1927.

HINTIKKA, J. *Knowledge and belief*. Ithaca: Cornell University Press, 1962.

HOARE, C. A. R. An axiomatic basis for computer programming. *Communications of the ACM*, n. 10, v. 12, p. 576-580, 1969.

_____. *Communicating sequential processes*. Nova York: Prentice Hall International Series in Computer Science, 1985.

HUTH, M. R. A.; RYAN, M. D. *Logic in computer science* – Modelling and reasoning about systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

JACKY, J. *A way of Z*: practical programming with formal methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

JONES, C. B. *Systematic software development using VDM*. New Jersey: Prentice Hall, 1990.

jTAP – A tableau prover in java. Disponível em: *http://i12www.ira.uka.de/~aroth/jTAP/*, 1999.

KOTONYA, G.; SOMMERVILLE, I. *Requirements engineering*: processes and techniques. Chichester: John Wiley and Sons, 1998.

LLOYD, J. W. *Foundations of logic programming*. 2.ed. Berlim: Springer-Verlag, 1987.

MACHALE, Desmond. *George Boole* – His life and work. Dublin: Boole Press, 1985.

MCALLESTER, D. Truth maintenance. In: *Proceedings of the Eighth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-90)*, p. 1109-1116, 1990.

MELO, A. C. V.; CORRÊA DA SILVA, F. S. *Princípios de linguagens de programação*. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic* 3. ed. Belmont: Wadsworth and Brooks/Cole, 1987.

MILNER, R. *Communication and concurrency*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.

_____. *Communicating and mobile systems*: the π-Calculus. Cambridge: Cambridge University Press, maio 1999.

MOSKEWICZ, Matthew W. et al. Chaff: engineering an efficient SAT solver. In: *Proceedings of the 38th Design Automation Conference (DAC'01)*, p. 530-535, 2001.

MONK, J. D. (ed.). *Handbook of Boolean algebra*. Amsterdã: Elsevier Science Publishers, 1989.

NISSANKE, N. *Formal specification* – Techniques and Applications. Springer-Verlag, 1999.

PARTSCH, H. A. *Specification and transformation of programs* – A formal approach to software development. Springer-Verlag, 1990.

PLOTKIN, G. D. Structural operational semantics. *Lecture Notes DAIMI FN-19*. Dinamarca: Aarhus University, 1981.

POSEGGA, Joachim; SCHMITT, Peter. Implementing semantic tableaux. In: GABBAY, Dov; D'AGOSTINO, Marcello; HÄHNLE, Reiner; POSEGGA, Joachim (ed.). *Handbook of tableaux based methods in automated deduction*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

PRAWITZ, Dag. *Natural deduction*. A proof-theoretical study. Estocolmo: Almqvist and Wiksell, 1965.

RICE, A. Augustus De Morgan: Historian of science. *History of Science*, n.34, p. 201-240, 1996.

ROBERTSON, D.; AGUSTÍ, J. *Software Blueprints* – Lightweight uses of logic in conceptual modelling. Boston: Addison-Wesley, 1999.

ROBINSON, J. A. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM (JACM)*, n.12, v.1, p. 23-41, Jan. 1965.

SAMPAIO, A. C. A.; WOODCOCK, J. C. P.; CAVALCANTI, A. L. C. Refinement in Circus. In: ERIKSSON, L.; LINDSAY, P. A. (eds.) *FME 2002: Formal Methods – Getting IT Right*, v. 2391 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 451-470. Springer-Verlag, unknown 2002.

SCHMIDT, D. *Denotational semantics*: a methodology for language development. Boston: Allyn & Bacon, 1986.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Wellesey: AK Peters, 2001.

SOMMERVILLE, I. *Software engineering*. 6.ed. Boston: Addison-Wesley, 2001.

SOMMERVILLE, I.; SAWYER, P. *Requirements engineering*: a good practice guide. Chichester: John Wiley and Sons, 1997.

SMULLYAN, Raymond M. *First-order logic*. Springer-Verlag, 1968.

STATMAN, R. Bounds for proof-search and speed-up in predicate calculus. *Annals of Mathematical Logic*, n. 15, p. 225-287, 1978.

STERLING, Leon; SHAPIRO, Ehud. *The art of Prolog*. 2. ed. Cambridge: MIT Press, 1994.

STILLWELL, John. Emil Post and his anticipation of Goedel and Turing. *Mathematics Magazine*, n. 77, v.1, p. 3-14, 2004.

SZABO, M. E. (ed.). *Collected papers of Gerhard Gentzen*. Studies in Logic. Amsterdã: North Holland, 1969.

VAN HEIJENOORT, J. (ed.). From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, v. 1, p. 1-7. Vienna, 1995.

VIHAN, P. The last months of Gerhard Gentzen in Prague. In: *Collegium logicum*, v.1, p. 1-7. Viena, 1995.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSEL, B. A. W. *Principia mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

Wikimedia Foundation. Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/. Acesso em Jul. 2004.

WINSKEL, G. *The formal semantics of programming languages* – An introduction. Cambridge: MIT Press, 1993.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus*. 1922. Disponível na internet em inglês em diversos sites como: *http://users.compaqnet.be/cn111132/wittgenstein/tractatus_logico_philosophicus.htm*.

WOODCOCK, J. C. P.; DAVIES, J. *Using Z:* specification, refinement and proof. Prentice Hall, 1996.

WOODCOCK, Jim. Using Circus for critical industrial applications. In: *WMF2003: 6th Brazilian Workshop on Formal Methods*, Campina Grande, Brasil, unknown 2004. To be published in Electronic Notes in Theoretical Computer Science. Keynote speech: the Formal Methods Europe Lecture.

WORDSWORTH, J. B. *Software engineering with B*. Boston: Addison-Wesley, 1996.

Flávio Soares Corrêa da Silva é professor do Departamento de Ciência da Computação da USP – campus Butantã. É graduado (1984) e mestre (1989) em Engenharia pela USP, doutor (1992) em Inteligência Artificial pela Universidade de Edinburgh (Escócia) e livre-docente (1999) também pela USP.

Marcelo Finger é professor do Departamento de Ciência da Computação da USP – campus Butantã. É graduado (1988) em Engenharia pela Escola Politécnica da USP, mestre (1990) e doutor (1994) em Ciência da Computação pela Universidade de Londres (Inglaterra) e livre-docente (2001) em Ciência da Computação pela USP. Trabalha há 16 anos na área de Lógica Computacional e já publicou diversos artigos em periódicos e conferências internacionais. É autor de um livro de Lógica Temporal e de dois livros infantis.

Ana Cristina Vieira de Melo é professora do Departamento de Ciência da Computação da USP – campus Butantã. É graduada (1986) e mestre (1989) em Ciência da Computação pela UFPE, e doutora (1995) em Ciência da Computação pela Universidade de Manchester (Inglaterra).

LÓGICA PARA COMPUTAÇÃO

O livro apresenta um texto original em português que, sem perder a abordagem introdutória, expõe rigor matemático e profundidade adequados para o público-alvo. A obra apresenta os fundamentos e métodos da lógica matemática para estudantes de Ciência da Computação, permitindo-lhes apreciar os benefícios e as dificuldades advindos da aplicação de métodos matemáticos rigorosos para a resolução de problemas e, acima de tudo, a enorme importância dos métodos formais – e mais especificamente dos métodos fundamentados em lógica formal – para as diversas facetas e ramificações da Ciência da Computação.

APLICAÇÕES

Livro-texto para as disciplinas lógica e métodos formais nos cursos de graduação e pós-graduação em Ciência da Computação, Matemática e Filosofia. Leitura complementar para a disciplina fundamentos matemáticos da computação. Leitura recomendada também para profissionais e todos aqueles que, direta ou indiretamente, lidam com métodos formais e matemáticos para a resolução de problemas.

ISBN 13 978-85-221-0517-5
ISBN 10 85-221-0517-0

9 788522 105175

CENGAGE Learning™
Para suas soluções de curso e aprendizado, visite **www.cengage.com.br**