

LOGICA PROPOSICIONAL

Conceitos Básicos

Projeto Novos Talentos – CAPES
Computação no Ensino Fundamental
Atividade 1 – Parte 2

Prof: João Bosco m. Sobral / Prof. Fernando Cruz




A Lógica e seu Contexto

✓ Lógica é um tema fascinante. Mas o que é Lógica?

✓ Qual a sua definição?

✓ Algumas delas poderiam ser:

- *estudo do raciocínio;*
 - *estudo do pensamento correto e verdadeiro;*
 - *regras para demonstração científica verdadeira;*
 - *regras para pensamentos não-científicos;*
 - *regras sobre o modo de expor o conhecimento;*
 - *regras para verificação da verdade ou falsidade de um pensamento.*
- 

E por que estudar Lógica?

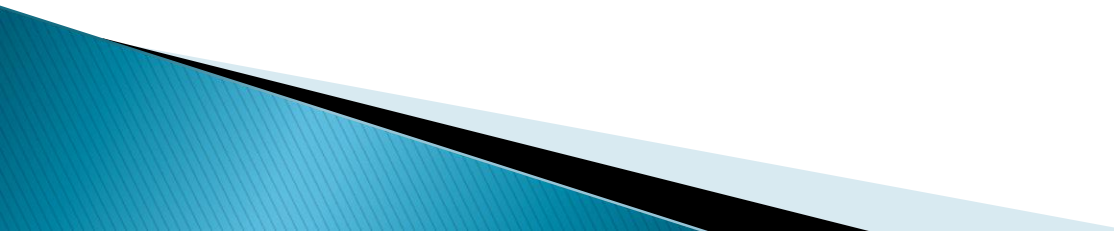


- ✓ Há inúmeras razões!
- ✓ Uma delas, bem interessante:
- ✓ É porque estamos numa era, na qual os principais produtos da mente humana são as **idéias** e a essência principal, de que se vale o mundo, é a informação.

Ideias ... (do texto de João Nunes de Souza)

- ▶ “Estas idéias são frutos da criatividade, que é a capacidade do gênero humano dar saltos a lugares onde nunca ninguém esteve.

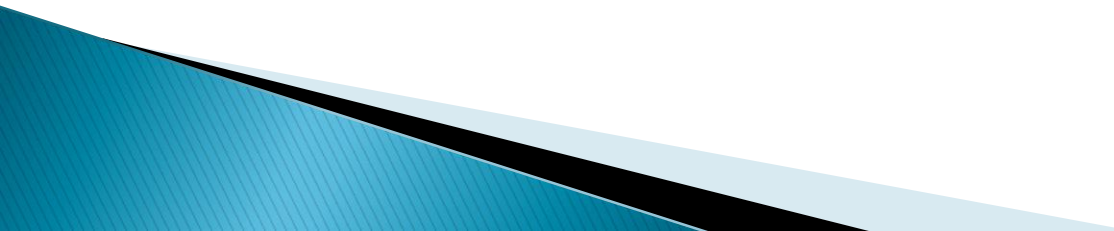
Uma idéia criativa significa ver ou fazer antes dos outros, fazer ver aos outros algo marcado pela originalidade, unicidade e qualidade rara. ...



Ideias ... Criatividade ...

- ▶ ... Lá no lugar onde tal criatividade se exprime, segredos são revelados ou destruídos e o homem se libera das escolhas habituais e obrigatórias."

O uso da idéias

- ▶ Saber usar as idéias, ser criativo, é muito mais que ser inteligente.
 - ▶ O uso das idéias depende e intervém em inúmeras capacidades mentais.
- 

Lógica de Argumentação

- ▶ Entre tais capacidades, uma de destaque é aquela que trata da **habilidade lógica de argumentação**.
- ▶ E geralmente, após o surgimento de uma grande idéia, **seus fundamentos serão criticados e analisados logicamente**.

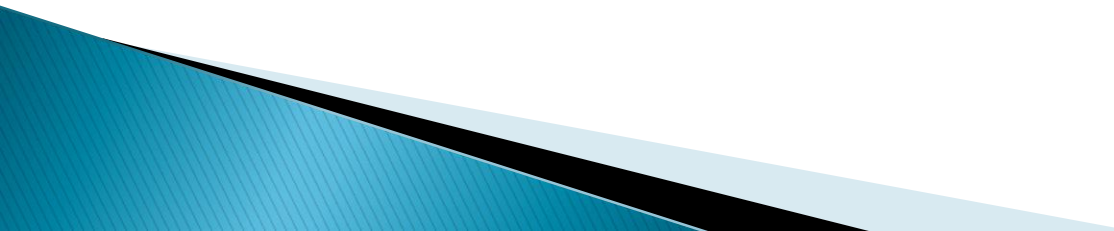
Natureza do Raciocínio

- ▶ Mas o que deve ser feito para aprender a raciocinar bem?
- ▶ É necessário estudar, por exemplo, a natureza do raciocínio e **isso pode ser realizado estudando Lógica.**

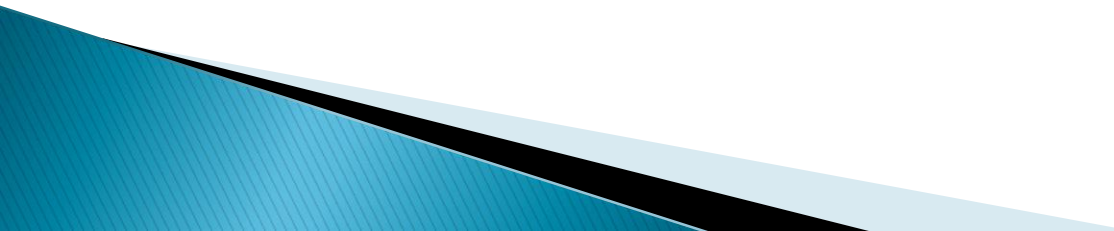
Ensino da Lógica

- ▶ O ensino de Lógica, significa uma melhor preparação dos indivíduos para os desafios da nova sociedade.

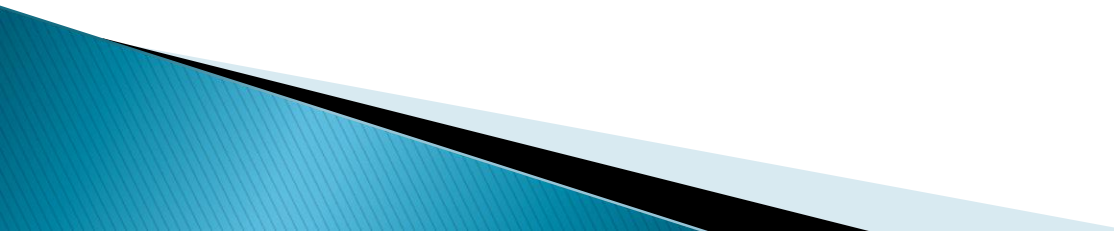
O que o professor deve fazer ?

- ▶ Ensinar **Lógica** e **Argumentação Lógica** passo a passo.
 - ▶ Apresentar seus principais fundamentos de forma agradável e lúdica, **utilizando uma linguagem simples e acessível.**
- 

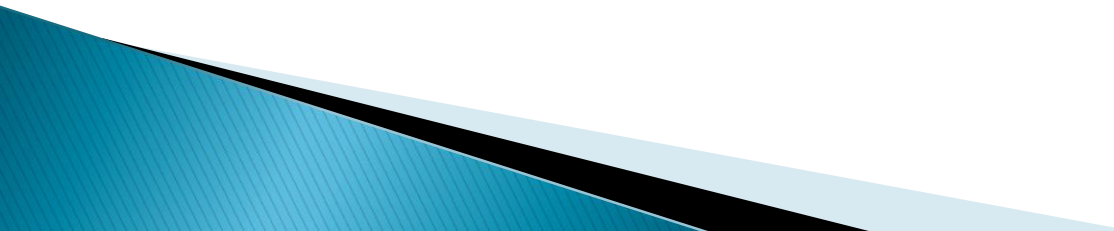
"Belisca no mundo da Lógica"

- ▶ Autor: Prof. João Nunes de Souza (UFU).
 - ▶ Os livros da série: "Belisca no mundo da Lógica" não requerem nenhum pré-requisito, nem mesmo maturidade matemática.
 - ▶ Eles se destinam ao leitor de qualquer formação ou idade.
- 

“As Aventuras de Belisca no mundo da Lógica”

- ▶ Utilizada como texto em disciplinas da **escola básica**, secundária e em cursos de reciclagem.
 - ▶ Escola de Ensino Básico da Universidade Federal de Uberlândia e na **Escola Colibri (ESTADO DE MINAS GERAIS)** .
- 

Metodologia de ensino

- ▶ A série: "Belisca no mundo da Lógica" é composta de quatro volumes.
 - ▶ O primeiro pode ser adotado por alunos do sexto ano;
 - ▶ O segundo, por alunos do sétimo ano, e assim por diante, até os alunos do nono ano.
- 

Metodologia de ensino

- ▶ Ao longo de sua utilização, essa série de livros e sua metodologia têm como objetivo principal o desenvolvimento da **capacidade de raciocínio e de crítica** dos alunos.

Desenvolvimento do Raciocínio

- ▶ O desenvolvimento do raciocínio é um tema cujo aprendizado requer, dos estudantes, um pensar adequado, um fazer com prazer, e uma forma positiva de ver os fatos a sua volta (tirar proveito dos fatos, no bom sentido de se chegar a alguma coisa).

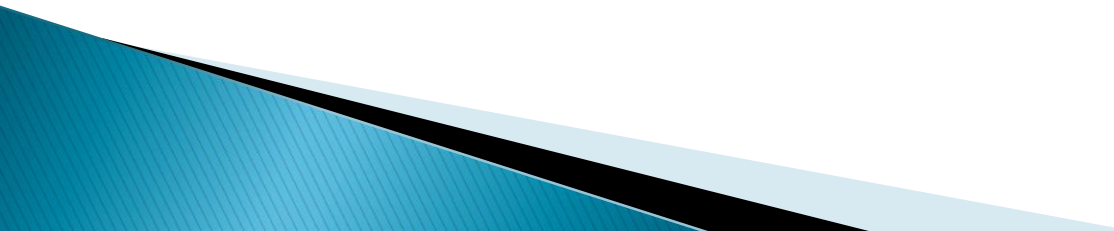
Desenvolvimento do Raciocínio

- ▶ Seu desenvolvimento envolve, pelo menos, três elementos principais:
 - *Raciocínio;*
 - *Prática;*
 - *Atitude.*

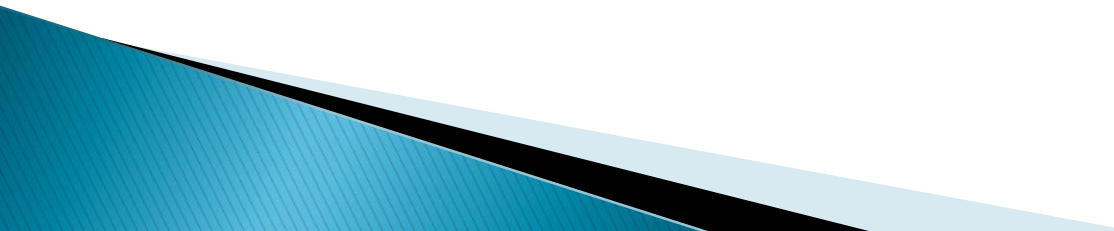
Raciocínio

- ▶ Propõe um passo a ser dado: estudar Lógica e Argumentação Lógica.

Prática

- ▶ Para aprender a raciocinar bem, **não basta apenas aprender Lógica e Argumentação Lógica.**
 - ▶ É necessário **desenvolver habilidades que internalizem os conceitos adquiridos**, bem como a **capacidade de aplicá-los no dia-dia.**
 - ▶ Os conceitos aprendidos devem ser aplicados em **contextos realistas.**
- 

Atitude

- ▶ Não bastam apenas raciocínio e prática.
 - ▶ Como quase toda atividade, o desenvolvimento da capacidade cognitiva depende de sua atitude.
 - ▶ E para aprender a raciocinar, é fundamental aprender a resolver problemas, refletir sobre questões postas e combinar as partes.
- 

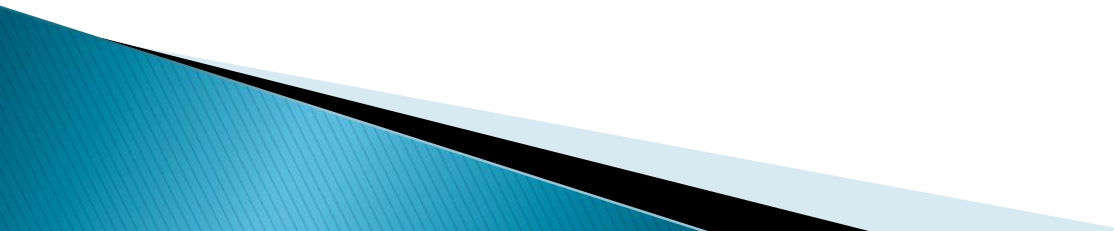
"Aventuras de Belisca no mundo da Lógica"

- ▶ "Aventuras de Belisca no mundo da Lógica" possui alguns tipos de personagens:
 - o narrador,
 - os indivíduos que compõem a história,
 - o professor de Lógica,
 - o pensador,
 - crítico do livro.

Personagens aqui utilizados

- ▶ Os **indivíduos** que compõem a história (Belisca e Cia)
- ▶ O **professor** de Lógica,

E os resultados esperados?

- ▶ *Estudantes com alguns dons criativos.*
 - ▶ *Que percebam como é importante possuir, praticar e viver valores éticos;*
 - ▶ *E também, raciocinar e ter atitudes adequadas a uma sociedade mais justa e fraterna.*
- 

Ler o texto

- ▶ Neste ponto você deve ler o texto de “A Aventura de Belisca no Mundo da Lógica” , de João Nunes de Souza (professor da Universidade Federal de Uberlândia).

(Texto comentado pelo professor)

Lógica

- ▶ Palavra derivada do vocábulo grego “logos”, que significa “**ideia**”, “**razão**” e “**regularidade**”.
- ▶ Emprega-se para:

Designar **o conjunto de regras que representa o processo de pensar.**

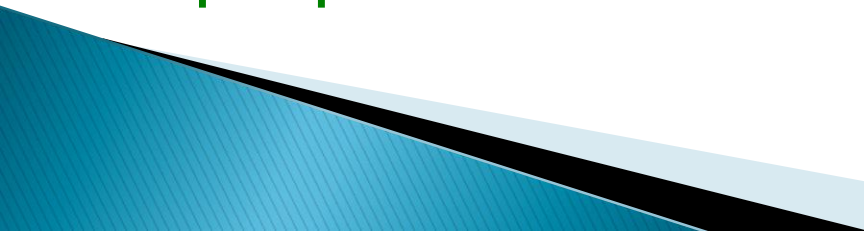
- ▶ É a **ciência das regras de raciocínio e de suas formas.**

Uma proposição é qualquer frase afirmativa da qual se pode decidir **verdade** ou **falso**, mas não ambos. As proposições simples são denotadas p , q , r , ...

Exemplos

- a) Brasília é a capital do Brasil.
- b) Brasil e Chile são países limítrofes.
- c) O cubo de 2 é ímpar.
- d) Todo número inteiro é múltiplo de 1.
- e) Algum número inteiro é divisor de 2.
- f) Para qualquer par de números reais x , y , vale sempre que $2x + y = 2y + x$.
- g) Se um número real é diferente de zero, então seu quadrado é positivo.

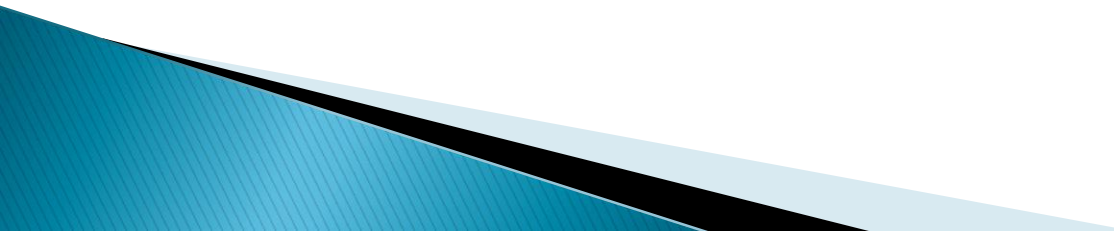
Lógica Proposicional

- ▶ É essencialmente um meio de formalizar o raciocínio lógico.
 - ▶ Existem dois tipos de raciocínio lógico:
 - o raciocínio que envolve as propriedades dos dados;
 - o raciocínio que não envolve as propriedades dos dados.
- 

Lógica Proposicional

- ▶ A Lógica Proposicional trata do tipo de raciocínio que não envolve dados, portanto não envolve propriedades dos dados.
- ▶ Se preocupa com verdade absolutas, ou seja não envolve variáveis que assumam dados e as propriedades dos dados.


Proposições independentes de dados

- ▶ a) **Brasilia é a capital do Brasil.** (V)
 - ▶ b) **Brasil e Chile são países limítrofes.** (F)
 - ▶ c) **O cubo de 2 é impar.** (F)
- 

Propriedade dependentes dos dados

- ▶ d) **Todo** número inteiro **i** é múltiplo de 1.
- ▶ e) **Algun** número inteiro **j** é divisor de 2.
- ▶ f) **Para qualquer par de números reais x, y,**
vale sempre que $2x + y = 2y + x$.
- ▶ g) Se **um número real x** é diferente de zero,
então seu quadrado é positivo.

Propriedade dependente dos dados

- ▶ A **veracidade** ou **falsidade** das afirmações d), e), f), g) **dependem dos valores (dados)** assumidos pelas variáveis i , j , x , e y .
 - ▶ Para tratar tais afirmações necessitamos de uma outra **Lógica**, que **estenda** a Lógica Proposicional.
 - ▶ Esta será a **Lógica dos Predicados**.
- 

Os conectivos lógicos geram proposições compostas, aquelas que são combinações de proposições simples

Negação: \neg

$\neg p$
No p

Conjunção: \wedge

$p \wedge q$
p e q

Disjunção: \vee

$p \vee q$
p ou q

Disjunção
exclusiva $\underline{\vee}$

$p \underline{\vee} q$
p ou q, mas não
ambas

Condicional: \rightarrow

$p \rightarrow q$
Se p então q

Bicondicional: \leftrightarrow

$p \leftrightarrow q$
p se e somente se q

Negação

$\neg p$

Toma o valor de
verdade contrário
de p

Conjunção

$p \wedge q$

É verdade
somente no
caso em que p
e q sejam
verdadeiros

Disjunção

$p \vee q$

É falso somente
no caso em que
p e q sejam
falsos

Disjunção exclusiva

$p \vee\! \vee q$

É verdadeiro
somente se um
e somente um é
verdadeira

Condicional

$p \rightarrow q$

É falso somente
no caso em que
p seja
verdadeiro e q
seja falso

Bicondicional

$p \leftrightarrow q$

É verdadeiro se
p e q tem os
mesmos valores
verdade

Exemplos em Aritmética

O cubo de -2 não é positivo.

2 é par e primo.

6 é múltiplo de 2 ou de 3 .

A raiz quadrada de -2 é real ou imaginária, mas não ambos.

Se um número é divisor de 14 e também de 21 , então esse número é divisor de $14 \cdot 2 + 21 \cdot (-3)$.

Um número é par se e somente se é divisível por 2 .

Caso particular de expressão lógica: Raciocínios ou Argumentos

Un raciocínio é toda expressão lógica com a seguinte estrutura:

$$"H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C"$$

donde H_i são expressões lógicas chamadas hipóteses ou premissas e

C é outra expressão lógica chamada Tese ou Conclusão.

Exemplos

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Classificação das Expressões Lógicas:

TAUTOLOGIAS

Expressões lógicas sempre verdadeiras.

Exemplos: $p \vee \neg p$ $p \leftrightarrow p$ $p \wedge q \rightarrow p$ $p \rightarrow p \vee q$

CONTRADIÇÕES

Expressões Lógicas sempre falsas.

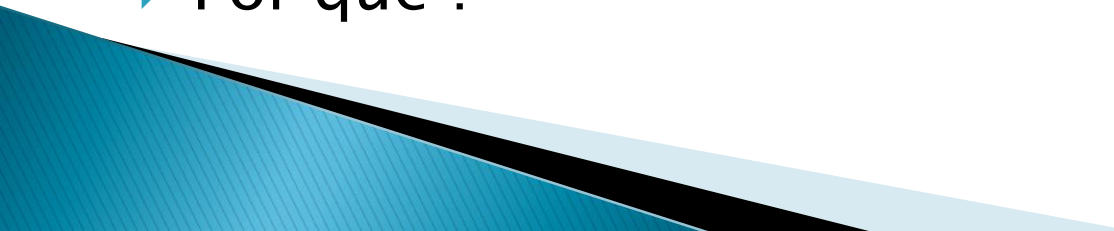
Exemplos: $p \wedge \neg p$ $p \leftrightarrow \neg p$ $p \vee \neg p \rightarrow F$ $\forall x \rightarrow p \wedge \neg p$

CONTINGÊNCIAS

Expressões Lógicas que não são tautologias nem contradições.

Exemplos: $p \rightarrow q$ $p \vee \neg q$ $p \leftrightarrow q \wedge r$ $p \wedge q \rightarrow \neg r$ $p \rightarrow p \vee q$

Exemplo de Tautologia

- ▶ Na Lógica Proposicional, a setença (afirmação ou proposição):
 - ▶ “Os macacos em Júpiter são vermelhos” (1)
ou
 - ▶ “Os macacos em Júpiter **não** são vermelhos” (2)
 - ▶ É **verdadeira** sem a necessidade de uma investigação biológica.
 - ▶ Por que ?
- 

Exemplo de Tautologia

- ▶ A proposição é uma instância da proposição válida na Lógica Proposicional:

$P \text{ ou } (\text{não } P)$

a qual é uma proposição abstrata.

- ▶ Tomando-se P como (1) e $(\text{não } P)$ como (2),

$P \text{ ou } (\text{não } P)$

é uma tautologia.

Exemplo de Tautologia

P	não P	P ou (não P)
V	F	V
F	V	V

Equivalencia lógica

- *Duas expressões lógicas A e B são equivalentes se possuem os mesmos valores verdade para cada combinação de valores verdade das proposições simples que a compõem.*
- *Se expressa como $A \Leftrightarrow B$*
- *$A \Leftrightarrow B$ se e somente se $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.*
- A importância das equivalências reside no fato de que as expressões podem ser substituídas uma por outra, dado que portam a mesma mensagem.

Las equivalencias más importantes reciben el nombre de LEYES LOGICAS.
Elas juegan un rol trascendente en las demostraciones. Éstas son algunas :

Doble Negación

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

"Es falso que 1 no es menor que 3" es equivalente a
"1 es menor que 3"

Distributividad

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

"3 es primo y , es divisor de 6 o es divisor de 9" es equivalente a
"3 es primo y divisor de 6 , o 3 es primo y divisor de 9"

Asociatividad

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

"6 es un número compuesto y 6 es múltiplo de 2 y de 3" es equivalente a
"6 es un número compuesto múltiplo de 2 y también de 3"

Más Leyes lógicas

Leyes de idempotencia

$$p \vee p \Leftrightarrow p \qquad p \wedge p \Leftrightarrow p$$

"2 es par y par" es equivalente a "2 es par"

Leyes de Identidad

$$p \wedge V \Leftrightarrow p \qquad p \vee F \Leftrightarrow p$$

"13 y 2011 son primos" es equivalente a "2011 es primo"

Leyes de Dominación

$$p \vee V \Leftrightarrow V \qquad p \wedge F \Leftrightarrow F$$

"13 o 2011 son primos" es Verdadero"

Leyes de los Inversos

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow V \qquad p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$$

"2011 es primo o no es primo" es Verdadero

"2011 es primo y no es primo" es Falso

Leyes de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

"No es cierto que, 72024 es primo y múltiplo de 3" es equivalente a "
"72024 no es primo o no es divisible por 3"

....y las relacionadas con la condicional y bicondicional

Ley de la Contrarecíproca

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

" Si F es diferenciable en a entonces F es continua en a" es equivalente a
"Si F no es continua en a entonces no es diferenciable en a"

Eliminación de la condicional

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Ejemplo: $[r \wedge s \rightarrow p \vee r] \Leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \vee p \vee r] \Leftrightarrow [\neg r \vee \neg s \vee p \vee r] \Leftrightarrow V$

Negación de la condicional

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

"No es cierto que , 2002 es múltiplo de 4 como consecuencia de que sea par" es equivalente a " 2002 es par y no es múltiplo de 4"

Transformaciones de la bicondicional

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Sea x un número entero , es equivalente afirmar

"x es múltiplo de 3 si y solo si la suma de sus cifras es divisible por 3" que
"Si x es múltiplo de 3 entonces la suma de sus cifras es múltiplo de 3 y , si la suma de las cifras de x es divisible por 3 entonces x es múltiplo de 3"

....y más sobre la Condicional

Ley de Exportación

$$[p \wedge q \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

"Si x es múltiplo de 2 y de 3 , entonces es multiplo de 6" es equivalente a
"Si x es múltiplo de 2, entonces es suficiente que sea múltiplo de 3 para que sea divisible por 6"

Ley del Absurdo

$$[p \rightarrow q] \Leftrightarrow [p \wedge \neg q \rightarrow F]$$

"Si x es múltiplo de 8 entonces es par" es equivalente a afirmar que
"Suponer que x es múltiplo de 8 y no es par es una contradicción"

Implicação Lógica

- Se diz *A implica logicamente B* se cada vez que *A* é verdadeira, *B* também o é.
- Se diz que a partir de *A* se conclui *B*, ou que *B* se infere de *A*: Se expressa $A \Rightarrow B$

Implicação Lógica

- $A \Rightarrow B$ si e somente se $A \rightarrow B$ é tautologia.
- A importância das **implicações lógicas** reside no fato de que são indispensáveis nas demonstrações de validade dos raciocínios.

Raciocínios ou Argumentos Válidos

Un raciocínio é válido se:

$$" H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C "$$

Isto é: Se as premissas são verdadeiras, a conclusão também será; como uma consequência inevitável"

Se diz que a conclusão se infere das premissas.

Os raciocínios válidos básicos que intervêm em qualquer demonstração de validade se chamam
REGRAS DE INFERÊNCIA.

REGLAS DE INFERÊNCIA BÁSICAS

H_1

H_2

\cdot

\cdot

—

$\therefore C$

Lei de
Simplifi-
cação

p

q

$\therefore q$

Lei de
Adição

p

$\therefore p \vee q$

Lei de
Combina-
ção

p

q

$\therefore p \wedge q$

Lei da
Contradi-
ção

$\neg p \rightarrow F$

$\therefore p$

Modus
Ponens

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus
Tollens

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Silogismo
Hipotético

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Silogismo
Disjuntivo

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Lei de
Casos

$$\begin{array}{c} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Métodos de Demonstração

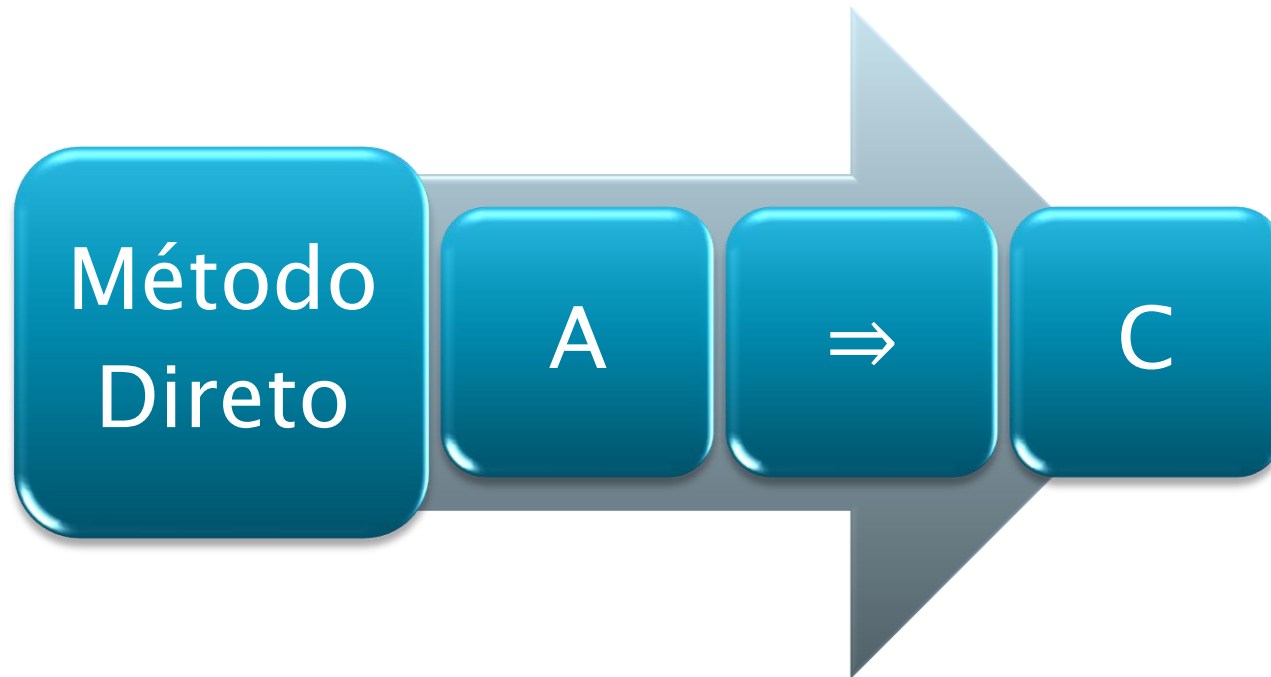
Seja o raciocínio

$$A \Rightarrow C$$

donde $A = H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$



Os métodos de classificação em
Diretos e Indiretos.



Método Indireto:
Redução ao
absurdo

A

$\wedge \neg C$

$\Rightarrow F$



Método Indireto:
pela Contra-
Recíproca

$$\neg C \Rightarrow \neg A$$



Aplicações da Lógica Proposicional

Presença dos conectivos lógicos na lógica de programação.

Presença da Lógica Proposicional nas demonstrações matemáticas.

Nos programas a presença dos conectivos lógicos é permanente e a avaliação dos valores verdade são imprescindíveis.

```
i:=1  
if i < 2 or i > 0 then  
  x:= x + 1  
else  
  x:= x + 2
```

```
i:=3  
if 0 < i < 2 or i = 3 then  
  x:= x + 1  
else  
  x:= x + 2
```

```
i:=1  
j:=1  
while (i < 2 and j < 5) or i + j = 5  
do  
  begin  
    x:= x + 1  
    i:= i + 2  
    j:= j + 1  
  end
```

Teorema:

Se um número inteiro divide a dois inteiros quaisquer, então divide a qualquer combinação linear deles:

$$\text{Se } a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b x + c y) \text{ , para qualquer } x, y \in \mathbb{Z}$$

Demonstración (Directa)

Se $a \mid b$, então $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot n$

Se $a \mid c$, então $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $c = a \cdot m$

Logo, $b x + c y = a \cdot n \cdot x + a \cdot m \cdot y = a \cdot (n \cdot x + m \cdot y)$

Se conclue que $a \mid (b x + c y)$ com que fica demonstrado o teorema.

Teorema de Euclides: Existem uma infinidade de números primos.

Demonstração (Indireta, por absurdo)

Suponha o contrário que existe uma quantidade finita de primos, que ordenados de menor a maior simbolizamos como:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$$

Seja $\beta = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$, com $\beta > p_i, \forall i$.

Como $\beta > p_i, \forall i$, então β não é primo; composto, ou seja β tem outros divisores diferentes de 1. Então pelo lema anterior existe um primo $p_j, 1 \leq j \leq k$ tal que $p_j \mid \beta$

Como $p_j \mid \beta$ e dado que $p_j \mid p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k$, então pelo lema anterior $p_j \mid (\beta - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k)$.

Isto é $p_j \mid 1$. O que é um absurdo, pois p_j é primo.

Esta contradição surge por se fazer a suposição que existia uma quantidade finita de primos.

Por lo tanto queda demonstrado que: Existe una cantidad infinita de primos.



Aplicações da Lógica Proposicional

Presença dos conectivos lógicos na
Álgebra Booleana

Presença da Lógica Proposicional na construção
dos circuitos lógicos.

- ▶ g) Existe um número real x tal que $x^2 < x$.