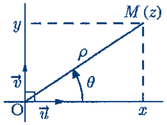
BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE

A. NOMBRES COMPLEXES

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z.



z a pour forme algébrique $x + i\,y$.

Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = y$

Conjugué de z : $\overline{z} = x - i\,y$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $z \neq 0$,

z a pour forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

z a pour forme exponentielle : $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$

Module de z : $|z| = \rho$

Argument de z : $\arg z = \theta \ [2\pi]$

Conjugué de z : $\overline{z} = \rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$

Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|z\,z'| = |z|\,|z'|$

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$

Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe t, $t \in \mathbb{C}$: $z' = z + t$

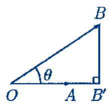
Homothétie de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$

B. GÉOMÉTRIE

Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB'}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$



Produit scalaire et coordonnées

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal de l'espace alors $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées (a, b, c) et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a\,b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a\,b + b^2)$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \ldots + b^n$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

Soient a, b et c trois nombres réels $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

L'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \qquad z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$
- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $z_1 = -\dfrac{b}{2\,a}$
- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \qquad z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$

Si $\Delta \neq 0$, $\quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$, $\quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)^2$

C. TRIGONOMÉTRIE

Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

III. PROBABILITÉS

A. GÉNÉRALITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\quad$ $P(\Omega) = 1$ $\quad$ $P(\emptyset) = 0$

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d' éléments de } A}{\text{Nombre d' éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

B. VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance mathématique : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (\mathrm{E}(X))^2$

Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

C. COMBINAISONS ET FORMULE DU BINÔME

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ $\quad$ $0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\quad$ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

D. LOIS DE PROBABILITÉ

Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$P(X = 1) = p$ $\quad$ et $\quad$ $P(X = 0) = 1 - p$

$\mathrm{E}(X) = p$ $\quad$ $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs entières $0, 1, \dots, n$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathrm{E}(X) = np$ $\quad$ $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Loi uniforme sur $[0\,;1]$

J étant un intervalle inclus dans $[0\,;1]$,

$P(J) =$ longueur de J

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$,

dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement

Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a, b]) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

Pour tout $c \geqslant 0$, $P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

IV. ANALYSE

A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$

$u_n = u_0 + n\,a$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b\,u_n$

$u_n = u_0\,b^n$

Somme de termes

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Limite d'une suite géométrique

Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$.

B. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. *Fonctions exponentielles et logarithmes*

$e^0 = 1$

Pour tous réels a et b,

$e^{a+b} = e^a\,e^b$ $\qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\qquad (e^a)^b = e^{a\,b}$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$\ln a\,b = \ln a + \ln b$ et $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$a^x = e^{x \ln a}$ $\qquad \ln(a^x) = x \ln a$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0\,;+\infty[$,

$y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

2. *Racine $n^{ème}$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x \in [0\,;+\infty[$ et $y \in [0\,;+\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n\,e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n\,e^{-x} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. *Dérivées et primitives des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. *Opérations sur les dérivées*

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (k\,u)' = k\,u'$ k étant une constante

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$ $\qquad (v \circ u)' = (v' \circ u)\,u'$

$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u\,u'$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

$\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Si $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $g'(x) = f(x)$.

Formule de Chasles

$\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$

Linéarité

$\displaystyle\int_a^b (\alpha\,f(t) + \beta\,g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ordre

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Inégalité de la moyenne

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$

alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$

Intégration par parties

$\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$

La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ $(a \neq b)$ est $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. CONGRUENCES

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$,

si $a \equiv b$ $[n]$ et $a' \equiv b'$ $[n]$, alors

$a + a' \equiv b + b'$ $[n]$ $\qquad a - a' \equiv b - b'$ $[n]$

$a\,a' \equiv b\,b'$ $[n]$ $\qquad a^p \equiv b^p$ $[n]$

B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

– Similitude directe : $z' = a\,z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

– Similitude indirecte : $z' = a\,\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$

C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une équation du cylindre d'axe $(\mathrm{O}; \vec{k})$ et de rayon $r > 0$ est $x^2 + y^2 = r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $(\mathrm{O}; \vec{k})$ est $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$.