Дополнительные задачи.

Гунаев Руслан, 776 группа

8 сентября 2019 г.

Для задания $a.b$ верно, что a – номер домашнего задания, b –номер задания со звездочкой.

7.1. (2б)

Произведем умножение

$$DFT_n^{-1}\begin{pmatrix} f(\omega_n^0 x) \\ f(\omega_n^1 x) \\ \vdots \\ f(\omega_n^{n-1} x)\end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \dots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \dots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \dots & \omega_n^{-(n-1)(n-1)}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum a_i\omega_n^0 x^i \\ \sum a_i\omega_n^i x^i \\ \sum a_i\omega_n^{2i} x^i \\ \vdots \\ \sum a_i\omega_n^{(n-1)i} x^i\end{pmatrix} = \frac{1}{n}S$$

Получим

$$S_k = \sum_{j=0}^{j=n-1}\omega_n^{-kj}\sum_{i=0}^{\infty} a_i\omega_n^{ji}x^i = \sum_{j=0}^{j=n-1}\sum_{i=0}^{\infty} a_i\omega_n^{j(i-k)}x^i$$

Зафиксируем i. Если $i \equiv k \ (mod\ n)$, то $\omega_n^{j(i-k)} = 1$, таким образом, если $i = nt + k$, то в S_k будет ровно n штук $a_i x^i = a_{nt+k}x^{nt+k}$.

Теперь рассмотрим остальные i. Для каждого i получим, что в S_k входит число равное

$$a_i x^i \sum_{j=0}^{j=n-1}\omega_n^{j(i-k)}.$$

Ранее мы получил, что если $i - k$ не кратно n,

$$\sum_{j=0}^{j=n-1}\omega_n^{j(i-k)} = 0,$$

а значит, что вклад от всех $i \neq nt + k$ нулевой, в итоге получим, что

$$S_k = n\sum_{t=0}^{\infty} a_{nt+k}x^{nt+k} = n \cdot slise_{n,k}(f).$$

Что и требовалось доказать.

2.1. (2б)

Пусть дана КС-грамматика $\Gamma = \{\Sigma, N, S, P\}$. Поскольку классы языков, допускаемых МП-автоматами по допускающему состоянию и по пустому стеку, совпадают, достаточно построить автомат с допуском по пустому стеку.

Построим автомат из одного состояния q с входным алфавитом Σ, стековым алфавитом $N \cup \Sigma$, маркером дна S и функцией перехода δ, определённой ниже.

δ задаётся следующим образом: Добавим такие переходы для каждого терминала a и правила вывода $V \to \gamma$.

1. для каждого правила вывода $V \to \gamma \in P$ определим $\delta(q, \varepsilon, V) = \{(q, \gamma)\}$;

2. для каждого терминала a определим $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$.

Данный алгоритм линейный от входа.

Построим прямое произведение автоматов так же, как строилось прямое произведение для двух ДКА(получим КС-язык, так как пересечение КС-языка с регулярным дает КС-язык). Данный алгоритм описан в дз. Асимптотика $O(|\Gamma| \cdot |D|)$.

Шаг 0. Множество порождающих нетерминалов пустое.

Шаг 1. Находим правила, не содержащие нетерминалов в правых частях и добавляем нетерминалы, встречающихся в левых частях таких правил, в множество.

Шаг 2. Если найдено такое правило, что все нетерминалы, стоящие в его правой части, уже входят в множество, то добавим в множество нетерминалы, стоящие в его левой части.

Шаг 3. Повторим предыдущий шаг, если множество порождающих нетерминалов изменилось.

В результате получаем множество всех порождающих нетерминалов грамматики, а все нетерминалы, не попавшие в него, являются непорождающими.

2.3

Рассмотрим предикат $f(x, y)$, который равен 1, если $|x| < e^{|y|}$, и 0 в обратном случае.

Рассмотрим язык $L = \{y \mid g(x) = f(x, y) -$ общезначимый предикат$\}$. Рассмотрим дополнение этого языка. Покажем, что он не лежит в NP. Известно, что предикат вычисляется за полином от длины входа. Но мы не сможем подобрать ни один сертификат полиномиальной длины, при котором $g(x) = 0$. А значит L не лежит в $co - NP$.

4.1

6.1

6.2

3.1

3.2