Домашнее задание №7

Гунаев Руслан, 776 группа

9 мая 2019 г.

1.

$P(x) = A(x)(x-a)+B(x), deg(B(x)) \leqslant 0 \Rightarrow B(a) = P(a) \Rightarrow B(x) = P(a) \Rightarrow P(x) \equiv P(a)(mod(x-a))$

2.

$$\omega_n^k \equiv 1 \Leftrightarrow k \equiv 0(modn)$$

n кратно 2, значит и k кратно 2 .

$$\omega_n^k = \omega_{2t}^{2p}, t \equiv 0(modp) \Rightarrow (\omega_n^2)^t = 1 \Leftrightarrow \omega_n^2 = \omega_{n/2}$$

3.

$P(\omega_8^k) = P_0(\omega_4^k) + \omega_8^k P_1(\omega_4^k) = P_{00}(\omega_2^k) + \omega_4^k P_{01}(\omega_2^k) + \omega_8^k(P_{10}(\omega_2^k) + \omega_4^k P_{11}(\omega_2^k))$, $\omega_2 = -1$, $\omega_4 = i$.

1)

$$P_{00}(x) = 1 + x; \quad P_{01}(x) = 3 + 3x; \quad P_{10}(x) = 2 + 2x; \quad P_{11}(x) = 4 + 4x$$
$$P_{00}(-1) = 0; \quad P_{01}(-1) = 0; \quad P_{10}(-1) = 0; \quad P_{11}(-1) = 0$$
$$P_{00}(1) = 2; \quad P_{01}(1) = 6; \quad P_{10}(1) = 4; \quad P_{11}(1) = 8$$
$$P(\omega_8^0) = 20$$
$$P(\omega_8^1) = 0$$
$$P(\omega_8^2) = -4 - 4i$$
$$P(\omega_8^3) = 0$$
$$P(\omega_8^4) = -4$$
$$P(\omega_8^5) = 0$$
$$P(\omega_8^6) = -4 + 4i$$
$$P(\omega_8^7) = 0$$

2)

$$P_{00}(x) = 1 + x; \quad P_{01}(x) = 1 + x; \quad P_{10}(x) = 1 + x; \quad P_{11}(x) = 1 + x$$
$$P_{00}(-1) = 0; \quad P_{01}(-1) = 0; \quad P_{10}(-1) = 0; \quad P_{11}(-1) = 0$$
$$P_{00}(1) = 2; \quad P_{01}(1) = 2; \quad P_{10}(1) = 2; \quad P_{11}(1) = 2$$
$$P(\omega_8^0) = 8$$
$$P(\omega_8^1) = 0$$
$$P(\omega_8^2) = 0$$
$$P(\omega_8^3) = 0$$
$$P(\omega_8^4) = 0$$
$$P(\omega_8^5) = 0$$
$$P(\omega_8^6) = 0$$
$$P(\omega_8^7) = 0$$

4.

Доказано в задаче №12.

5.

$$P_{00}(x) = 10 - 2x; \; P_{01}(x) = 0; \; P_{10}(x) = 2 + (3\sqrt{2} + 2)i + (2 + (3\sqrt{2} - 2)i)x;$$
$$P_{11} = 2 + (3\sqrt{2} - 2)i + (2 - (3\sqrt{2} + 2)i)x$$

$$8P((\omega_8^{-1})^0) = 16$$
$$8P((\omega_8^{-1})^1) = 12 + 0(-i) + \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}(4i - i6\sqrt{2}i) = 2\sqrt{2} + 18 + (2\sqrt{2} - 6)i$$
$$8P((\omega_8^{-1})^2) = 8 + (-i)(4 + 6\sqrt{2}i - 4 + 4i) = 12 + 6\sqrt{2}$$
$$8P((\omega_8^{-1})^3) = 12 + \frac{(-1-i)\sqrt{2}}{2}(4i + i6\sqrt{2}i) = 2\sqrt{2} + 18 + (-2\sqrt{2} + 6)i$$
$$8P((\omega_8^{-1})^4) = 8 + (-1)(4 + 6\sqrt{2}i + 4 - 4i) = (4 - 6\sqrt{2})i$$
$$8P((\omega_8^{-1})^5) = 12 + \frac{(-1+i)\sqrt{2}}{2}(4i - i6\sqrt{2}i) = 6 - 2\sqrt{2} + (-2\sqrt{2} + 6)i$$
$$8P((\omega_8^{-1})^6) = 8 + i(4 + 6\sqrt{2}i - 4 + 4i) = 4 - 6\sqrt{2}$$
$$8P((\omega_8^{-1})^7) = 12 + \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}(4i + i6\sqrt{2}i) = 6 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 6)i$$

6.

Полученный многочлен будет не выше четвертой степени. Посчитаем значения произведений исходных многочленов в корнях четвертой степени из единицы

$$A(\omega_4^0) \cdot B(\omega_4^0) = 10;\ A(\omega_4^1) \cdot B(\omega_4^1) = 0;\ A(\omega_4^2) \cdot B(\omega_4^2) = -2;\ A(\omega_4^3) \cdot B(\omega_4^3) = 0$$

Далее воспользуемся обратным преобразованием Фурье, чтобы восстановить коэффициенты исходного многочлена. $P_0(x) = 10 - 2x;\ P_1(x) = 0$. Тогда $4a_k = P_0(\omega_2^{-k}) + \omega_4^{-k} P_1(\omega_2^{-k})$.

$$P_0(1) = 8;\ P_1(1) = 0;\ P_0(-1) = 12;\ P_1(-1) = 0$$

$$a_0 = 8/4 = 2$$

$$a_1 = 12/4 = 3$$

$$a_2 = 8/4 = 2$$

$$a_3 = 12/4 = 3$$

Итого $A(x) \cdot B(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.

7.

Рассмотрим многочлен вида

$$A(x) = x + x^2 + \cdots + x^m.$$

Возведем этот многочлен в квадрат при помощи быстрого преобразования Фурье. Получим новый многочлен. Далее пробежимся по многочлену и занесем различные степени в новый массив B, который и будет ответом.

Заметим, что $\forall i, j \leqslant m \hookrightarrow i + j \in B$, ведь этому числу будет соответствовать слагаемое степени $i + j$ в полученном многочлене.

В силу асимптотики быстрого преобразования Фурье итоговая асимптотика такого алгоритма также будет $\Theta(n \log n)$.

8.

Заметим, что в корне дерева налево идут индексы с нулевым младшим битом, а направо – с единичным, что после обращения битов соответствует обычному порядку(сначала числа с нулевым старшим битом, потом с единичным). Отбрасывая на каждом уровне каждый бит, мы продолжаем этот процесс вниз по дереву, и в конце концов получаем перевернутый двоичный порядок в листьях.

10.

$$C(x) = 1 + x + x^5 + x^6$$

Положим $n = 8$.

$$C(\omega_8^0) = 4$$

$$C(\omega_8^1) = 1 - i$$

$$C(\omega_8^2) = 2i$$

$$C(\omega_8^3) = 1 + i$$

$$C(\omega_8^4) = 0$$

$$C(\omega_8^5) = 1 - i$$
$$C(\omega_8^6) = -2i$$
$$C(\omega_8^7) = 1 + i$$

$$P_{00} = 4, P_{01} = 2i - 2ix, P_{10} = 1 - i + (1 - i)x, P_{11} = (1 + i) + (1 + i)x$$

Произведем обратное преобразование Фурье.

$$DFT_n^{-1}(A) = n^{-1} rev(DFT_n(A))$$

$$P(\omega_8^0) = 8$$
$$P(\omega_8^1) = 0$$
$$P(\omega_8^2) = 8$$
$$P(\omega_8^3) = 8$$
$$P(\omega_8^4) = 0$$
$$P(\omega_8^5) = 0$$
$$P(\omega_8^6) = 0$$
$$P(\omega_8^7) = 8$$

Произведем разворот и деление на 8.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получим исходный многочлен.

11.

$$A(x) = 1 + 2x, B(x) = 3 + 4x^3, C(x) = A(x) \cdot B(x)$$

Положим $n = 8$.

$$C(\omega_8^0) = 21$$
$$C(\omega_8^1) = (1 + 2(1 + i)/\sqrt{2})(3 + 4(i - 1)/\sqrt{2})$$
$$C(\omega_8^2) = (1 + 2i)(3 - 4i)$$
$$C(\omega_8^3) = (1 + 2(i - 1)/\sqrt{2})(3 + 4(i + 1)/\sqrt{2})$$
$$C(\omega_8^4) = 1$$
$$C(\omega_8^5) = (1 - 2(1 + i)/\sqrt{2})(3 - 4(i - 1)/\sqrt{2})$$
$$C(\omega_8^6) = (1 - 2i)(3 + 4i)$$
$$C(\omega_8^7) = (1 - 2(i - 1)/\sqrt{2})(3 - 4(i + 1)/\sqrt{2})$$

$$P(\omega_8^k) = P_0(\omega_4^k) + \omega_8^k P_1(\omega_4^k) = P_{00}(\omega_2^k) + \omega_4^k P_{01}(\omega_2^k) + \omega_8^k (P_{10}(\omega_2^k) + \omega_4^k P_{11}(\omega_2^k)),\ \omega_2 = -1,\ \omega_4 = i.$$

$$P(\omega_8^0) = 24$$
$$P(\omega_8^1) = 0$$
$$P(\omega_8^2) = 0$$
$$P(\omega_8^3) = 0$$
$$P(\omega_8^4) = 64$$
$$P(\omega_8^5) = 32$$
$$P(\omega_8^6) = 0$$
$$P(\omega_8^7) = 48$$

Произведя разворот и поделя все на 8, получаем, что

$$C(x) = 3 + 6x + 4x^3 + 8x^4.$$

12.

Введем матрицу DFT_n. Очевидно, она будет принимать следующий вид.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & e^{\frac{4\pi i}{N}} & e^{\frac{6\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{N}} & e^{\frac{8\pi i}{N}} & e^{\frac{12\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{\frac{6\pi i}{N}} & e^{\frac{12\pi i}{N}} & e^{\frac{18\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} & e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} & e^{\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Найдем A^2. Заметим, что Для любого целого $n \geqslant 0$, целого $k > 0$, не кратного n, выполнено равенство

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = 0$$

Докажем это.

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = \frac{(\omega_n^k)^n - 1}{\omega_n^k - 1} = 0$$

Если $k = 0$, то очевидно такая сумма равна n. Рассмотрим элементы матрицы, возведенной в квадрат.

$$b_{kp} = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^{kj})(\omega_n^{pj})$$

Также учитывая рассуждения описанные в конспекте, получим

$$A^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = nC$$

Заметим, что матрица C задает матрицу оператора $rev(a)$.

13.

Матрица для прямого преобразования указана в прошлой задаче. Запишем матрицу обратного преобразования.

$$A_{DFT_N^{-1}} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}} & e^{-\frac{4\pi i}{N}} & e^{-\frac{6\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{4\pi i}{N}} & e^{-\frac{8\pi i}{N}} & e^{-\frac{12\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{6\pi i}{N}} & e^{-\frac{12\pi i}{N}} & e^{-\frac{18\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} & e^{-\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} & e^{-\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

14.

$$DFT_n^{-1}\{f(x); f(-x)\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum a_k x^k \\ \sum a_k (-1)^k x^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{2k} x^{2k} \\ \sum a_{2k+1} x^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} slice_{2,0}(f) \\ slice_{2,1}(f) \end{pmatrix}$$

9.

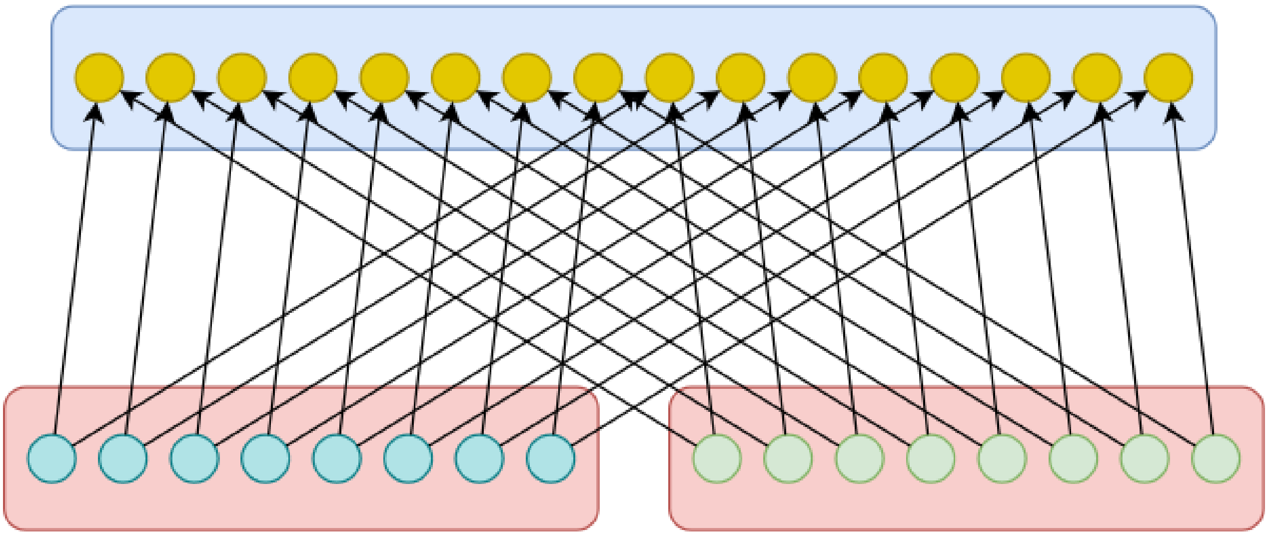

Рис. 1: Схема бабочки для перехода от ω_8 к ω_{16}.