Домашнее задание №4

Гунаев Руслан, 776 группа

14 марта 2019 г.

1.

1)

Заметим, что для того, чтобы хотя бы два числа были одинаковые, нам надо их общего числа вариантов отнять те, в которых все числа разные.

$$N_0 = n^m, N_1 = \frac{n!}{(n-m)!}n \Rightarrow P = 1 - \frac{n!}{n^m(n-m)!}$$

2)

Было замечено при проверке, что m асимптотически равен корню из n. Докажем это, положив $m = a\sqrt{n}$

$$\frac{n!}{n^m(n-m)!} = \frac{\sqrt{n}n^n e^{n-a\sqrt{n}}}{e^n(n-a\sqrt{n})^{n-a\sqrt{n}}\sqrt{n-a\sqrt{n}}n^{a\sqrt{n}}}$$

Воспользовавшись вторым замечательным пределом и разложением функции в ряд Тейлора, получим значение для a.

$$a = \frac{1}{\sqrt{\ln(1-p)}}$$

Для $p = 1/2$ в частности получаем, что

$$m = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}\sqrt{n}$$

Этот пункт сделали совместно с М. Сидоровым.

2.

1)

Всего вариантов $N_0 = 2^{10}$, найдем количество вариантов, когда орлов и решек одинаковое число. Таких вариантов очевидно $N_1 = \binom{10}{5}$. Итоговая вероятность

$$P_1 = \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{5}$$

2)

Существует все три типа последовательности. Когда орлов больше, решек больше, и когда их количества равны. Заметим, что первый и второй тип эквиваленты, если видим последовательность первого типа, то просто меняем решки на орлы, орлы на решки, получим послеодвоательность второго типа, и наоборот.

$$P_2 = \frac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2^{11}} = \frac{1}{2} - \frac{P_1}{2}$$

3)

Первые пять бросков кидаем произвольно, оставшиеся пять выбираются однозначно.

$$P_3 = \frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{32}$$

4)

Посчитаем количество таких случаев:

1. Первые четыре орла фиксированы, остальные 6 бросков – произвольные: $N_1 = 2^6$
2. Первый бросок выпала решка, затем 4 броска орел, остальные – произвольные: $N_2 = 2^5$
3. Первый бросок орел или решка, потом решка, затем 4 орла, остальные – произвольные: $N_3 = 2 \cdot 2^4 = 2^5$
4. Первые 2 броска произвольные, затем решка, затем 4 орла, остальные 3 – произвольные: $N_4 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$
5. Первые 3 броска произвольные, затем решка, затем 4 орла, остальные 2 – произвольные: $N_5 = 2^3 \cdot 2^2 = 2^5$
6. Первые 4 броска произвольные (за исключением 4 орлов, т.к. этот случай уже рассматривался в 1-м пункте), потом решка, затем 4 орла, последний бросок произвольный: $N_6 = (2^4 - 1) \cdot 2 = 2^5 - 2$
7. Первые 5 бросков произвольные (за исключением ООООР, РОООО, ООООО), затем решка и 4 орла: $N_7 = 2^5 - 3$

В сумме получается 251 возможный случай, тогда

$$p = 251/1024 \approx 0.245$$

3.

Событие A означает, что на первом кубике выпало 6. Событие B – в сумме на двух кубиках выпало 7.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(A)$$

Найдем вероятность пересечения двух событий. На первом кубике выпало 6, а в сумме 7, значит на втором кубике могло выпаст только 1, значит $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

$$P(A|B) = P(B|A) = \frac{1}{6}.$$

4.

Если выпало четное число очков, то вероятность этого события 1/2. Если выпало кратное трем, то вероятность 1/3. Если выпало четное и кратное 3, то вероятность 1/6.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B).$$

Получили, что события независимы.

5.

$$E[max\{X_1, X_2\}] + E[min\{X_1, X_2\}] = E[max\{X_1, X_2\} + min\{X_1, X_2\}] = E[X_1 + X_2] =$$
$$= E[X_1] + E[X_2] = 7/2 + 7/2 = 7$$

6.

1)

Пусть Z–количество бросков. Обозначим $p_1 = 0$, если первой выпала шестерка, $p_1 = 1$ в остальных случаях.

$$EZ = \frac{5}{6}E(Z|p_1 = 1) + \frac{1}{6}E(Z|p_1 = 0)$$

Если в первый бросок выпала не шестерка, тогда мы просто потеряли ход, поэтому получим.

$$E(Z|p_1 = 1) = 1 + EZ$$

Если выпала шестерка, то следующим броском может выпасть шесть с вероятностью $\frac{1}{6}$, иначе в остальных случаях мы потеряем два броска, получим

$$E(Z|p_1 = 0) = \frac{2}{6} + \frac{5}{6}(2 + EZ)$$

Решив систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим

$$EZ = 42.$$

2)

Аналогично предыдущему пункту. Найдем матожидание количества юросков для последовательности POP.

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(E_1 + 1) \\ A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(1 + A) \\ B = \frac{3}{2} + (E_1 + 3) \end{cases} \Rightarrow E_1 = 10$$

Найдем матожидание для последовательности PPO.

$$\begin{cases} E_2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(E_2 + 1) \\ A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(E_2 + 2) \\ B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(B + 1) \end{cases} \Rightarrow E_2 = 8$$

Таким образом, вероятность встречи второй последовательности первой выше чем встреча первой последовательности.

7.

1)

Находясь на позиции m мы с вероятностью p попадем на позицию $m-1$, с вероятностью $(1-p)$ – на $m+1$. Составим рекуррентное соотношение:

$$Q(m) = pQ(m-1) + (1-p)Q(m+1),$$

где $Q(m)$ – вероятность попасть в гостиницу, находясь на позиции m.

$$(1-p)\lambda^2 - \lambda + p = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)}$$

$$Q(m) = C_1 \cdot \lambda_1^m + C_2 \cdot \lambda_2^m$$

Из начальных условий найдем C_1 и C_2:

$$Q(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$Q(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = 0$$

Для $n = 10, m = 5, p = \frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \\ C_1 = \frac{1024}{1023} \\ C_2 = -\frac{1}{1023} \end{cases} \Rightarrow Q(5) = \frac{1024}{1023} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{1023} = \frac{31}{1023} \approx 0.03$$

2)

Аналогично, составим рекуррентное соотношение:

$$E(m) = p(E(m-1)+1) + (1-p)(E(m+1)+1) = pE(m-1) + (1-p)E(m+1) + 1$$

8.

Пусть случайные величины X, Y обозначают два независимых подбрасывания монетки. Положим 1 обозначает выпадение орла, 0 – решки. Пусть Z – случайная величина, равная 1, если в результате ровно одного из двух подбрасываний монетки выпал орёл, и 0 в противном случае. Тогда тройка (X, Y, Z) имеет следующее вероятностное распределение:

$$(X, Y, Z) = \begin{cases} (0,0,0), P = 1/4 \\ (0,1,1), P = 1/4 \\ (1,0,1), P = 1/4 \\ (1,1,0), P = 1/4 \end{cases}$$

Заметим, что распределения каждой случайной величины по отдельности равны: $f_X(0) = f_Y(0) = f_Z(0) = 1/2$ и $f_X(1) = f_Y(1) = f_Z(1) = 1/2$. Распределения любых пар этих величин также равны: $f_{X,Y} = f_{X,Z} = f_{Y,Z}$, где $f_{X,Y}(0,0) = f_{X,Y}(0,1) = f_{X,Y}(1,0) = f_{X,Y}(1,1) = 1/4$. Поскольку каждое из попарных совместных распределений равно произведению соответствующих им распределений, случайные величины являются попарно независимыми.

Несмотря на это, X, Y, Z не являются независимыми в совокупности, поскольку $f_{X,Y,Z}(x,y,z) \neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$. Для $(X,Y,Z) = (0,0,0)$ левая часть равна 1/4, а правая – 1/8.

9.

Выберем произвольные r вершин. Посчитаем, сколько может существовать циклов на этих вершинах. Пусть этот подграф полный. Заметим, что циклы вида

$$1, 2, \dots, r; 2, 3, \dots, r, 1$$

одинаковые. Также каждый цикл мы можем перевернуть, таким образом всего получим $\frac{(r-1)!}{2}$ циклов. Значит всего может быть циклов

$$N = \binom{n}{r}\frac{(r-1)!}{2}.$$

В силу линейности матожидания получим

$$EX = \sum_{i=1}^{N} EX_i, X_i = \{1, \text{ такой цикл встретился в случ. графе}; 0, \text{ иначе}\}$$

Очевидно, что $EX_i = p^r$, в итоге получим

$$EX = \binom{n}{r}\frac{(r-1)!}{2}p^r$$

10.

Посчитаем сколько может быть перестановок на r числах. Аналогично прошлой задаче, за исключением того, что мы не можем перевернуть цикл, получим $(r-1)!$. Значит всего может быть циклов

$$N = \binom{n}{r}(r-1)!$$

В силу линейности матожидания получим

$$EX = EX = \sum_{i=1}^{N} EX_i, X_i = \{1, \text{ такой цикл встретился в случ. графе}; 0, \text{ иначе}\}$$

Найдем EX_i. Эта величина равна вероятности получения конкретного цикла на конкретных числах. А значит

$$EX_i = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

В итоге получаем

$$EX = \binom{n}{r}(r-1)!EX_i = \frac{1}{k}$$

Найдем дисперсию этой величины. Так как $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N, X_i \in \{0, 1\}$, то $E(X^2) = EX$, а значит дисперсия равна

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2}$$

11.

Возьмем массив из n элементов, в котором $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow i = m[i]$.

На каждом шаге программа будет рандомно выбирать число t в диапазоне от 1 до $n - i$, где $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, и менять $m[t]$ с $m[n-i]$.

Заметим, что при таком выборе чисел алгоритм никогда не выберет одинаковые числа, потому что он выбирает не само число, а номер элемента массива, который мы будем менять с другим элементом, и на каждом шаге выбор этих чисел ограничен, ведь мы создаем зону в массиве, из который мы никак не сможем достать уже выбранные ранее числа.

12.

Пусть алгоритм берет некоторое произвольное число. Далее бежит по последовательности и сравнивает каждый элемент с взятым ранее числом. Если совпадений не меньше половины, то выводим ответ да. Если меньше, алгоритм должен взять другое рандомное число и проделать то же самое. Проделав аналогичное 10 раз, вероятность ошибки работы алгоритма будет менее 0.1 процента. Покажем это. Пусть в последовательности есть число a, которое встречается не меньше половины раз. Вероятность того, что алгоритм выбирает число не равное этому числу меньше 1/2. Пусть мы взяли 10 раз числа, отличные от a. Вероятность такого события

$$p < 1/2 \cdot 1/2 \cdots 1/2 < 1/1024 < 1/1000.$$

Данный алгоритм в любом случае затратит линейное время.