$\mathbb{C}[x]$를 원소 $f = x-1$로 localization한 ring $\mathbb{C}[x]_f$의 maximal ideal에 대한 고찰

1. Ideal $\langle x-3\rangle$이 maximal ideal인지 판별하자. 3을 대입하는 함수 $F_3: \mathbb{C}[x]_f \to \mathbb{C}$를 생각하면 임의의 원소 $\frac{(x-3)Q(x)+c}{(x-1)^n} \in \mathbb{C}[x]_f$에 대해 $F_3: \frac{(x-3)Q(x)+c}{(x-1)^n} \to \frac{c}{2^n}$이다.($Q(x) \in \mathbb{C}[x], c \in \mathbb{C}$) 예를 들어 $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+4)+13}{(x-1)^2} \in \mathbb{C}[x]_f$는 $\frac{13}{4}$에 대응된다. $F_3\left(\frac{(x-3)Q_1(x)+c_1}{(x-1)^{n_1}} + \frac{(x-3)Q_2(x)+c_2}{(x-1)^{n_2}}\right) = \frac{c_1}{(x-1)^{n_1}} + \frac{c_2}{(x-1)^{n_2}}$이고 $F_3\left(\frac{(x-3)Q_1(x)+c_1}{(x-1)^{n_1}} \times \frac{(x-3)Q_2(x)+c_2}{(x-1)^{n_2}}\right) = \frac{c_1c_2}{(x-1)^{n_1+n_2}}$이므로 F_3는 ring homomorphism이다. $kerF_3 = \langle x-3\rangle$이고 $\mathbb{C}$가 field이므로 $\langle x-3\rangle$는 maximal ideal이다. 따라서 $\langle x-a\rangle(a \neq 1)$은 maximal ideal이다.

2. Ideal $I = \langle\frac{x-3}{(x-1)^n}\rangle\,(n \geq 1)$은 maximal ideal이 아니다. $I \subset \langle x-3\rangle$이기 때문이다.

3. Ideal $I = \langle(x-3)(x-2)\rangle$는 maximal ideal이 아니다. $I \subset \langle x-3\rangle$이기 때문이다. 즉, generator 개수가 한 개이고 차수가 2차 이상인 ideal은 $\mathbb{C}$가 algebraically closed이므로 maximal ideal이 아니다.

4-1. Ideal $I = \langle x-3, x-2\rangle$는 maximal ideal이 아니다. $(x-2)-(x-3) = 1 \in I$이기 때문이다.

4-2. Ideal $I = \langle x-3, (x-2)(x-4)\rangle$는 maximal ideal이 아니다. $(x-2)(x-4)-(x-3)^2 = 1 \in I$이기 때문이다. 즉, generator $g_1, g_2, g_3, \ldots$를 각각 인수분해 했을 때 최대 공통 항이 $q(x)$이면 $\langle g_1, g_2, g_3, \ldots\rangle = \langle q(x)\rangle$이다. 따라서 1~3의 경우로 회귀한다.

결론. $\mathbb{C}[x]_f$의 maximal ideal은 $\langle x-a\rangle(a \neq 1)$ 꼴 뿐이고 이는 $\mathbb{C}[x]$에서 $S = \{(x-1)^n | n\ is\ a\ nonnegative\ integer\}$와 disjoint한 max ideal과 1대1 대응된다.