Próf 9.12.2010 - Lausn

Dæmi 1

a) $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$; $M = \sum_i m_i$

allir massar, þ.m.t. gjörð

$x_{cm} = 0$ vegna samhverfu (má reikna → 0)

$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{r}{6m} \left(\underbrace{m \cdot 0}_{\text{gjörð}} + \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m \right.$

sin(30°)

y-hnit massa i

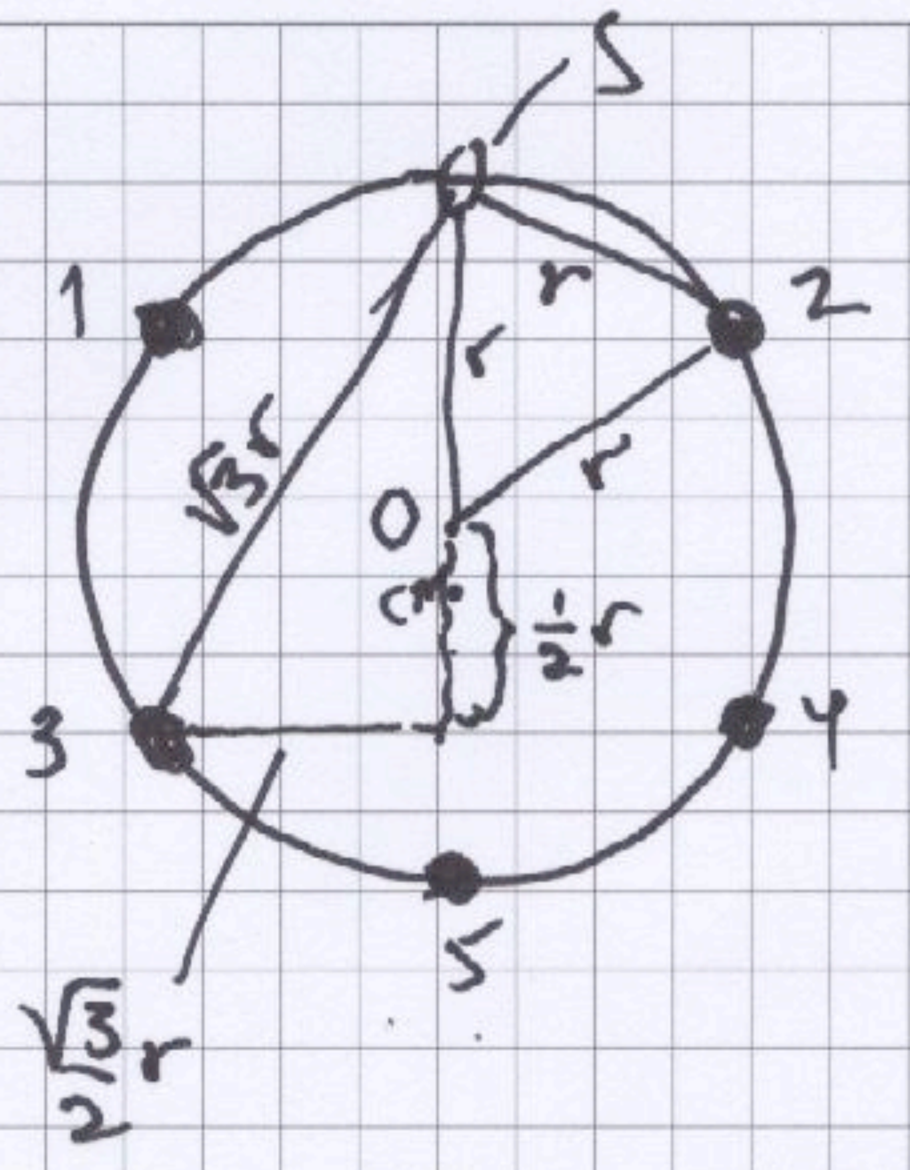
$\left. - \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} m - m \right) = -\frac{r}{6} = -0.05\ [m]$

$(x, y)_{cm} = \left(0, -\frac{r}{6}\right)$

b) $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_s}{Mgd}}$; $M = 6m$

d fjarlægð milli snún.ás og cm. $d = \frac{7}{6} r$

I_s er hverfitregða um snúningsás s.



Gjörð (án mannanna) hefur cm í O.

$$I_{O,\text{gjörð}} = mr^2 \quad (\text{gefið})$$

$$I_{S,\text{gjörð}} = I_{O,\text{gjörð}} + mr^2 \quad (\text{Steiner})$$

$$= 2mr^2$$

$$I_{1,S} = mr^2 = I_{2,S}$$

$$I_{3,S} = I_{4,S} = m(\sqrt{3}\,r)^2 = 3mr^2$$

$$I_{5,S} = m(2r)^2 = 4mr^2$$

$$\Rightarrow I_S = (\underset{\text{gjörð}}{2} + \underset{\#1}{1} + \underset{\#2}{1} + \underset{\#3}{3} + \underset{\#4}{3} + \underset{\#5}{4})\,mr^2 = 14mr^2$$

(*)

$$\Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{14mr^2}{6mg\frac{7}{6}r}} = 2\pi\sqrt{2\frac{r}{g}} = \underline{1.55\,[s]}$$

c) (*) á bls. 2 er óháð m, styttist út vegna geómetríu dæmis $\Rightarrow T_2 = T_1$ (E)

Önnur leið t.þ.a. finna I_S í b) er að finna $I_{O,\text{heild}}$ og nota Steiner til að tengja við I_S. Passa verður þó að O er ekki cm heildarkerfis.

$$I_O = \underset{\text{gjörð}}{mr^2} + \underset{\text{maður}}{5mr^2} = 6mr^2$$

Nú er $I_O = I_{cm} + 6m d_o^2 \quad (1) \quad \left(d_o = \frac{r}{6}\right)$

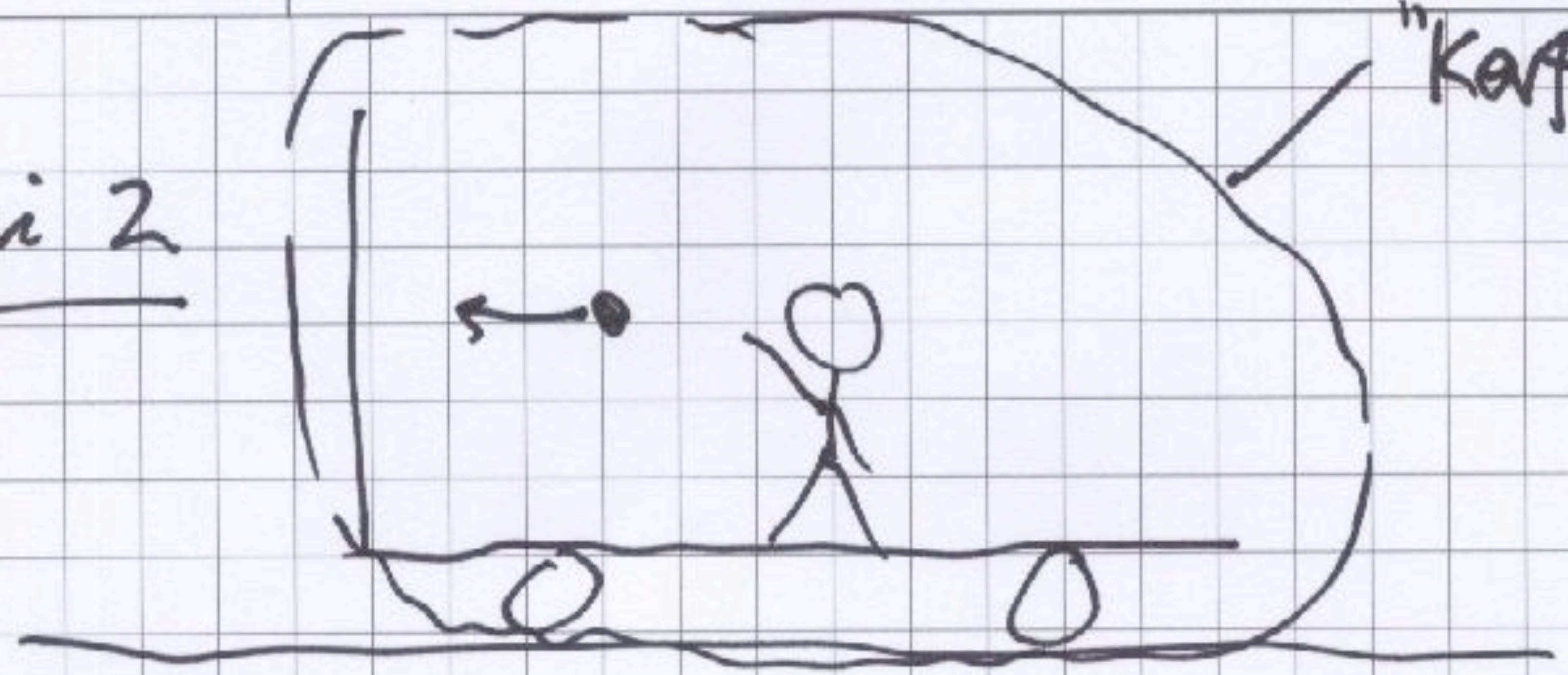
og $I_S = I_{cm} + 6m d_S^2 \quad (2) \quad \left(d_S = \frac{7}{6}r\right)$

(2) − (1) gefur

$$I_S - I_O = 6m\left(d_S^2 - d_o^2\right) = 6m\left(\left(\frac{7}{6}r\right)^2 - \left(\frac{r}{6}\right)^2\right) = 8mr^2$$

$$\Rightarrow I_S = I_O + 8mr^2 = 6mr^2 + 8mr^2 = 14mr^2$$

Dæmi 2



Ef skriðþungavarðveisla og 3.LN gilda innan kerfis, þ.e. um hreyfingar stúdents og eggja/golfkúlna þá snýst þetta um hvort nokkur massi yfirgefi kerfið með hraða $|v|>0$.

Eggjunum kastað $\Delta p_{kerfi} = 0 \Rightarrow$ Kyrr.

Golfkúlur skjótast tilbaka og yfirgefa kerfi (sbr. eldflaug/geimflaug)

$(M - m_g)\, v_{kerfi} = m_g\, v_{golfk.}$ fyrir eitt kast.

$\Rightarrow$ Kemst af stað ef enginn núningur.

Dæmi 3

a) Athn. $m_{vír} = \rho_{Cu} \cdot A \cdot L = \rho_{Cu} \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L = 8940 \cdot \frac{\pi \cdot (10^{-3})^2}{4} \cdot 10$

$= 0.07\,[kg]$

$m_{vír} \ll M$

$\rightarrow$ kjörpendúll (einfaldur pendúll)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9.82}} = \underline{\underline{6.34\,[s]}}$$

b) þverbylgja á línu $\quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

þar sem $\mu = \frac{m_{vír}}{L}$ og F er togkraftur í vír.

$F = Mg$ (því $m_{vír} \ll M$, hunsa þyngd vírs)

Hraði bylgju eftir vír er því

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{m_{vír}} \cdot L} \qquad \left(= 167.3\,\left[\frac{m}{s}\right] \right)$$

Púls þarf að fara upp og tilbaka niður

$x = v \cdot t$

$x = 2L$

$$\Rightarrow t = \frac{2L}{v} = 2L \cdot \sqrt{\frac{m_{vír}}{MgL}} = \underline{\underline{0.119\,[s]}}$$

c) Púls við tíma $t=0$:

$$y(x,0) = \frac{0.005}{x^2 + 0.5}$$

Við tíma t:

$$y(x,t) = \frac{0.005}{(x-vt)^2 + 0.5}$$

d) $\cancel{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$ $$\frac{\Delta L}{L} = \frac{M \cdot g}{A\,Y} = \frac{M \cdot g}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot Y} = \underline{\underline{1.95 \cdot 10^{-3}}}$$

þversniðsflat. Young's modulus

Hlutfallsleg lenging.

Gefur $\Delta L = 1.95$ [cm]

Dæmi 4

$p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa úti

Við yfirborð í glasi: $T_1 = 37°C = 310$ K

$V_1 = 410$ cm^3

Við dýpi: $h = 40$ m

$T_2 = 7°C = 280$ K

Notum kjörgasjöfnu $pV = nRT$

$\Rightarrow \frac{pV}{T} = nR =$ fasti því loftmagn óbreytt.

$$\Rightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$p_1 = p_0$ því vatnsborð í glasi sama og utan.

$$p_2 = p_1 + \rho g h = p_0 + \rho g h$$

ρ eðlismassi vatns.

$$\Rightarrow V_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{p_2} = \frac{p_0 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{(p_0 + \rho g h)} = 75 \text{ cm}^3$$

Dæmi 5

a) $W_{AB} = K_B - K_A = K_B$

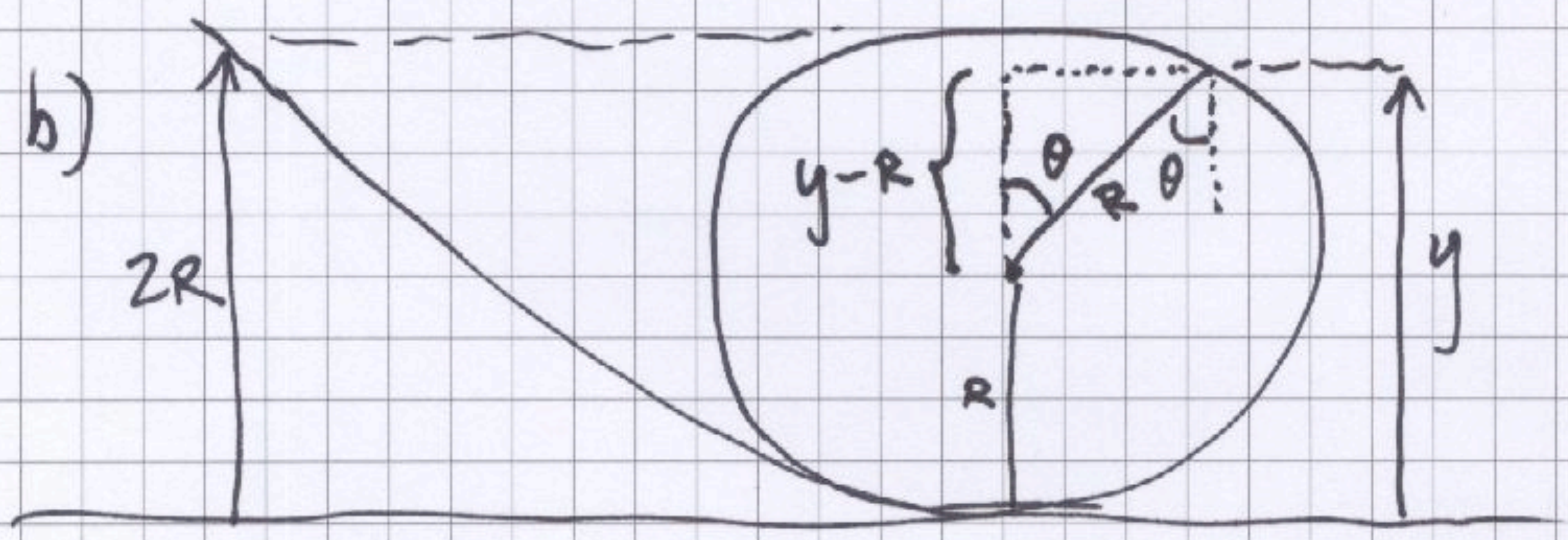
$$K_B = W_{AB}$$

þar sem $W_{AB} = mg2R$ og $K_B = \frac{1}{2} m v_B^2$

má líka segja:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mg2R$$

b)



$$mg2R = mgy + \frac{1}{2} m v^2$$ orkuvarðveisla eða vinnu-hreyfiorku setning.

v í hæð y

$$v = \sqrt{2g(2R-y)}$$

Til að bíll sé í snertingu við braut í y þarf miðsóknarhröðun þar að vera stærri en hornrétti þáttur þyngdarhröðunar (jafngilt að skoða miðsóknarkraft og þyngdarkraft).

(*) $$a_\perp = \frac{v^2}{R} \geq g_\perp = g\cos\theta$$

Nú er $\cos\theta = \frac{y-R}{R}$

Þá fæst:

$$a_\perp = \frac{2g(2R-y)}{R} \geq g \cdot \frac{y-R}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 2(2R-y) \geq y-R$$

$$5R \geq 3y$$

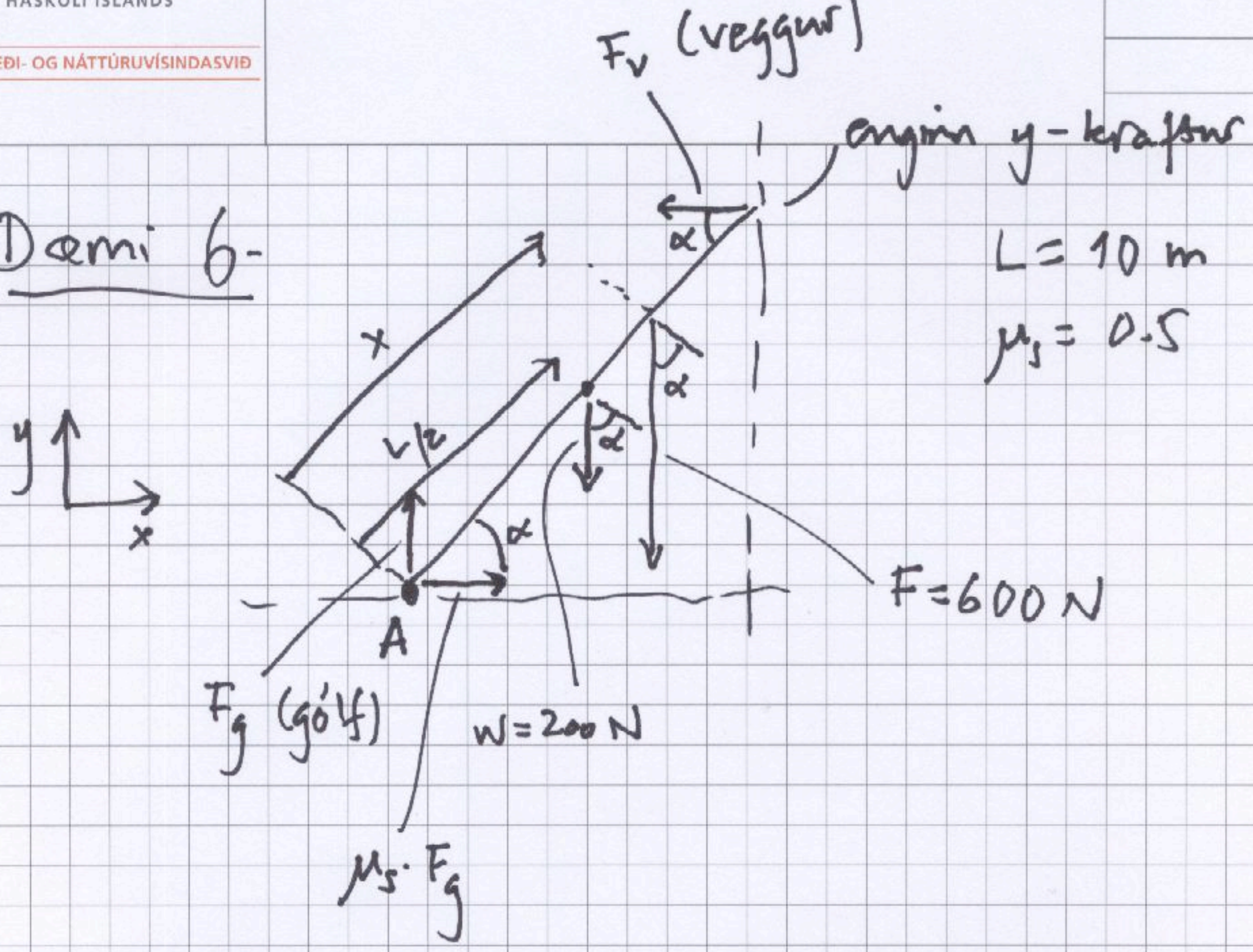
eða $\underline{\underline{y \leq \frac{5}{3}R}} = 1.67\,R \Rightarrow$ C

c) B. Skv. orkuvarðveislu kemst hann í 2R aftur, en ekki í snertingu við braut vegna skilyrðis (*). (Ef vinstri hluti væri fjarlægður kæmist hann í 2R.)

Miðsóknarkraftur frá braut framkvæmir <u>enga</u> <u>vinnu</u>. Ekkert orkutap.

(A. Rangt – en <u>ef</u> hann kæmist í 2R í snertingu við braut væri $v_{2R}=0$, sbr. orkuvarðveislu.)

Dæmi 6.



$L = 10$ m

$\mu_s = 0.5$

$$\sum F_y = 0: \quad F_g - W - F = 0 \Rightarrow F_g = W + F$$

$$(*) \quad \sum F_x = 0: \quad \mu_s F_g - F_v \geq 0$$

Vægi um A $(+)$ $\sum \tau_A = 0$:

$$-W\cos\alpha \cdot \frac{L}{2} - F\cos\alpha \cdot x + F_v \sin\alpha \cdot L = 0$$

Set í $(*)$ og fæ:

$$\mu_s(W+F) - \frac{1}{L\sin\alpha}\left(W \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha + F \cdot x \cdot \cos\alpha\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x \leq \mu_s L \tan\alpha \cdot \frac{W+F}{F} - \frac{L}{2} \cdot \frac{W}{F} = \underline{\underline{6.28\,[m]}}$$