

Greining reiknirita vor 2023

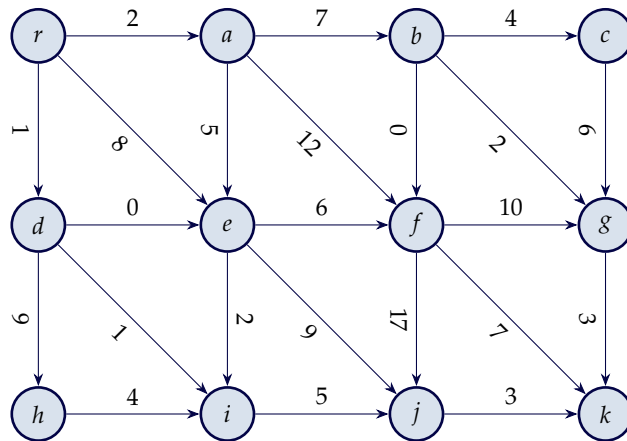
Verkefnatími 6

Leiðbeiningar

- Einn úr hópnum tekur að sér skila lausninni á Gradescope í lok tímans (passa að skrá alla í hópnum sem unnu að lausn verkefnisins).
- Þetta verkefni er nokkuð umfangsmikið og það getur verið erfitt að klára það á 90 mínútum. Ekki hafa áhyggjur af því, þið gerið bara ykkar besta!
- Ekki hika við að biðja kennara um aðstoð.

1. Stystu vegir (gamalt prófdæmi)

- a) Látum $G = (V, E, w)$ vera stefnt, vegið net þar sem hnútum er raðað á ferningslaga net eins og sýnt er á myndinni hér að neðan. Það er leggur frá hnút u í hnút v ef v er nágranni u og v liggur í austur, suður eða suð-austur frá u .



Setjið fram reiknirit til að ákvarða lengd stysta vegar frá uppsprettu r í alla aðra hnúta í slíku neti sem hefur keyrslutíma $O(|V|)$.

- b) Notið reikniritið í a) eða annað viðeigandi reiknirit til að ákvarða stystu leið frá hnút r í hnút k í netinu hér að ofan. Rökstyðjið svarið. Ábending: Látið þennan lið mæta afgangi.

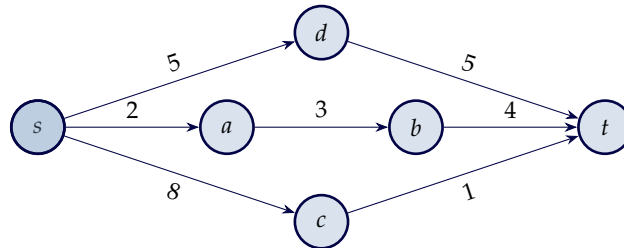
2. Stystu vegir (gamalt prófdæmi)

- a) Athugum reiknirit til ákvörðunar á stysta vegi í neti $G = (V, E, w)$ sem gerir ráð fyrir að engar vogtölur séu neikvæðar, þ.e. $w(u, v) \geq 0$ fyrir öll $(u, v) \in E$. Uppfinningamaðurinn Georg Gírlausi heldur því fram að með einfaldri breytingu sé hægt að beita slíku reikniriti á net með neikvæðum vogtölum. Aðferðin felst í að útbúa net $G' = (V, E, w')$ með $w'(u, v) = w(u, v) + Q$ þar sem $Q > 0$ er valið þannig að öll $w'(u, v) > 0$. Stysti vegur milli s og t í G' svarar þá til stysta vegar í G .

Finndu mótdæmi sem sýnir hvers vegna þessi aðferð virkar ekki.

- b) Látum $G = (V, E, w)$ vera vegið net þar sem allar vogtölur $w(u, v)$ eru jákvæðar heiltölur. Athugum það verkefni að finna stysta veg milli hnúta s og t í G þannig að í þeim tilvikum þar sem það eru margir stystu vegir, viljum við ákvarða þann stysta veg sem hefur fæsta leggi.

Dæmi: Í netinu hér að neðan eru stystu vegirnir $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$ og $s \rightarrow c \rightarrow t$ báðir af lengd 9 en sá fyrri er með 3 leggi en sá síðari með 2 leggi.



Það er hægt að finna stysta veg sem uppfyllir skilyrðið hér að ofan með því að skilgreina fyrst nýjar vogtölur $w'(u, v)$ út frá $w(u, v)$ og keyra reiknirit Dijkstra *einu sinni*.

Hvernig á að skilgreina $w'(u, v)$? Skýrið svar ykkar stuttlega.

- c) Uppfinningamaðurinn Georg Gírlausi setti nýlega fram reiknirit til að reikna *lengsta* veg í neti $G = (V, E, w)$ sem keyrir í margliðutíma. Reikniritið skiptir öllum vogtölum $w(u, v)$ út fyrir $-w(u, v)$ og keyrir síðan Bellman-Ford reikniritið. Skýrið hvers vegna þessi aðferð virkar ekki sem skyldi.

3. Öryggi á vegum

Leysið dæmi 8.25 í Ericson ("Mulder and Scully have computed ...") *Ábending:* Hvernig er hægt að breyta reikniriti fyrir stysta veg þ.a. það ákvarði mestu líkur?

4. Verkröðun

Látum $G = (V, E)$ vera stefnt net með engum hringrásum (e. directed acyclic graph, DAG) þar sem hnútar tákna verk sem þarf að vinna og leggir tákna í hvað röð þarf að vinna verkin, þ.e. leggur (u, v) tákna að það verði að klára verk u áður en byrjað er á v . Sérhver hnútur v hefur vogtölu $T(v)$ sem segir til um hversu langan tíma tekur að vinna verk v . Lýsið reikniriti til að ákvarða stysta mögulega tíma sem tekur að klára öll verkin í G . *Ábending:* Er hægt að útbúa net G' út frá G þannig að stysti vegur í G' gefi lausn á upphaflega verkefninu?