Greining reiknirita vor 2023
Heimaverkefni 1

Skila skal þessu verkefni á vefnum Gradescope.

Gradescope tekur við .pdf skjölum. Frágangur á þeim skiptir máli.

Markmið þessa verkefnis er annars vegar að kanna stöðu nemenda í upphafi námskeiðs og hins vegar að hjálpa þeim við að rifja upp efni úr Stærðfræðimynstrum og Tölvunarfræði 2 sem kemur við sögu í námskeiðinu. Athugið að þetta verkefni á **ekki** að vinna í samvinnu við aðra eða með því að fá utanaðkomandi hjálp. Öll dæmin gilda jafnt.

Telji nemandi að mistök hafi verið gerð við yfirferð skal tilkynna slíkt á Gradescope.

Skilafrestur er til kl. 22:00 sunnudaginn 15. janúar. Gangi þér vel!

1. Mengi

Látum

$$A = \left\{ 1 + i + \binom{6}{i} \mid i \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq i \leq 6 \right\} \quad \text{og} \quad B = \{2i \mid i \in \{1,2,3,4\}\}.$$

Ákvarðið

i) $A \cap B$

ii) $|A \cup B|$

iii) $|A - B|$

iv) $|A \times B|$

2. Þrepun, endurkvæm skilgreining

Fibonacci runan er skilgreind með $f_0 = 0, f_1 = 1$ og $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ fyrir $n > 1$. Notið þrepun til að sýna að fyrir sérhverja náttúrulega tölu $n \geq 1$ gildi,

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

3. Endurkvæm reiknirit

Eftirfarandi Python fall tekur inn jákvæða heiltölu n og skilar fjölda bita í tvíundaframsetningu hennar (e. binary representation).

```
def telja(n):
    count = 1
    while n > 1:
        count += 1
        n = int(n/2)
    return count
```

Setjið fram endurkvæma (e. recursive) útfærslu af reikniritinu hér að ofan, annaðhvort með "sauðakóða" eða með Python kóða.

4. Vaxtarhraði falla

Stóra-O rithátturinn er mikið notaður í stærðfræði og tölvunarfræði til að lýsa vexti falla[1].

Látum $f(n)$ og $g(n)$ vera ekki-neikvæð föll. Ef $f(n)$ er alltaf takmarkað að ofan með föstu margfeldi af $g(n)$ þegar n er nógu stórt[2] þá er $f(n)$ sagt vera stóra-O af $g(n)$, ritað $O(g(n))$.

Í þessu dæmi er $f(n) = n^3$. Fyrir sérhvert fall $g(n)$ í töflunni hér að neðan, merkið við hvort f sé $O(g(n))$ eða g sé $O(f(n))$ með því að setja 'X' í viðeigandi reiti. Ekki þarf að rökstyðja svar ykkar sérstaklega.

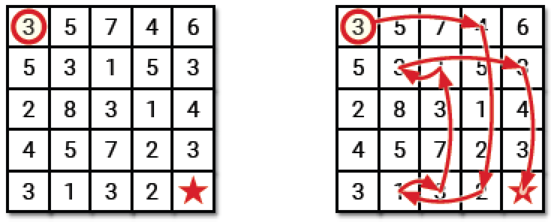
$g(n)$	$f(n)$ **er** $O(g(n))$	$g(n)$ **er** $O(f(n))$
$-3n + 1000n^2 + 5n^3$		
$n^3 \log n$		
$e^{0.1n} - n^3$		
n^2		

[1]Hliðstætt við "order of growth" í grein 1.4 í Sedgewick (kennslubók í Tölvunarfræði 2).

[2]Með öðrum orðum, til er rauntala $c > 0$ og heiltala $n_0 > 0$ þannig að $f(n) < c \cdot g(n)$ fyrir öll $n \geq n_0$.

5. Netafræði og yfirfærsla

Athugum leik[3] sem fer fram á borði með $n \times n$ reitum þar sem hver reitur er merktur með heiltölu. Leikmaður byrjar í efra vinstra horninu og er markmiðið að komast í neðra hornið hægra megin. Í hverri umferð má færa leikmanninn upp, niður, til vinstri eða til hægri og ræðst vegalengdin af tölunni í reitnum sem leikmaðurinn er staddur á. Ef t.d. leikmaðurinn er á reit merktum 3 þá má færa hann 3 skref upp, 3 skref niður, 3 skref til vinstri eða 3 skref til hægri. Athugið að það má aldrei færa leikmanninn út af borðinu. Hér á að lýsa hagkvæmu reiknirit sem skilar minnsta fjölda umferða sem þarf til að komast frá upphafsreit í endareit, ef það er hægt á annað borð, en skilar `None` annars. Fyrir 5×5 borðið hér að neðan ætti reikniritið t.d. að skila gildinu 8.



Gerið ráð fyrir að gildið á n og tölurnar í reitunum séu gefin (inntak í reikniritið). Lýsið hvernig má útbúa net $G = (V, E)$ út frá þessum gildum þannig að hægt sé að nota reiknirit Dijkstra fyrir stysta veg í neti til að ákvarða lausn á leiknum. Hvað má segja um keyrslutíma reikniritsins ykkar sem fall af n? Gleymið ekki að taka tillit til tímans sem fer í að setja upp netið.

Ábending: Hvað tákna hnútar í netinu? Hvað tákna leggir? Er netið stefnt eða óstefnt? Eru vogtölur á leggjum?

[3] Dæmi 5.11 úr Ericson, bls. 212, lítillega breytt. Það þarf ekki að að skoða kennslubókina til að leysa dæmið.