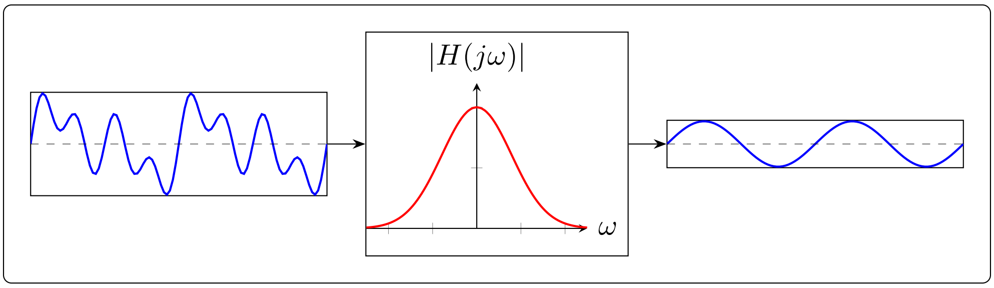
Notes on Digital Signal Processing[1]



Guo, H. [2]

version v0.0

[1]Project repository: https://github.com/Guo-Hui-acoustics/DSP
[2]Author email: gh20222734@163.com

Preface

本笔记关于数字信号处理。

Contents

Chapter 1　Introduction

``Talk is cheap. Show me the code.''

--- Linus Torvalds

1.1　数字 vs 模拟

在数字世界中，我们使用比特（bit）来描述精度。这赋予了它高且可控的精度。

数字意味着可编程。不同于模拟依赖于硬件，数字非常灵活且易于更改。

数字是制造在硅片上的，具有高存储密度且可压缩。并且成本很低。

1.2　DSP 的历史

现在让我们简要回顾一下 DSP 的历史。

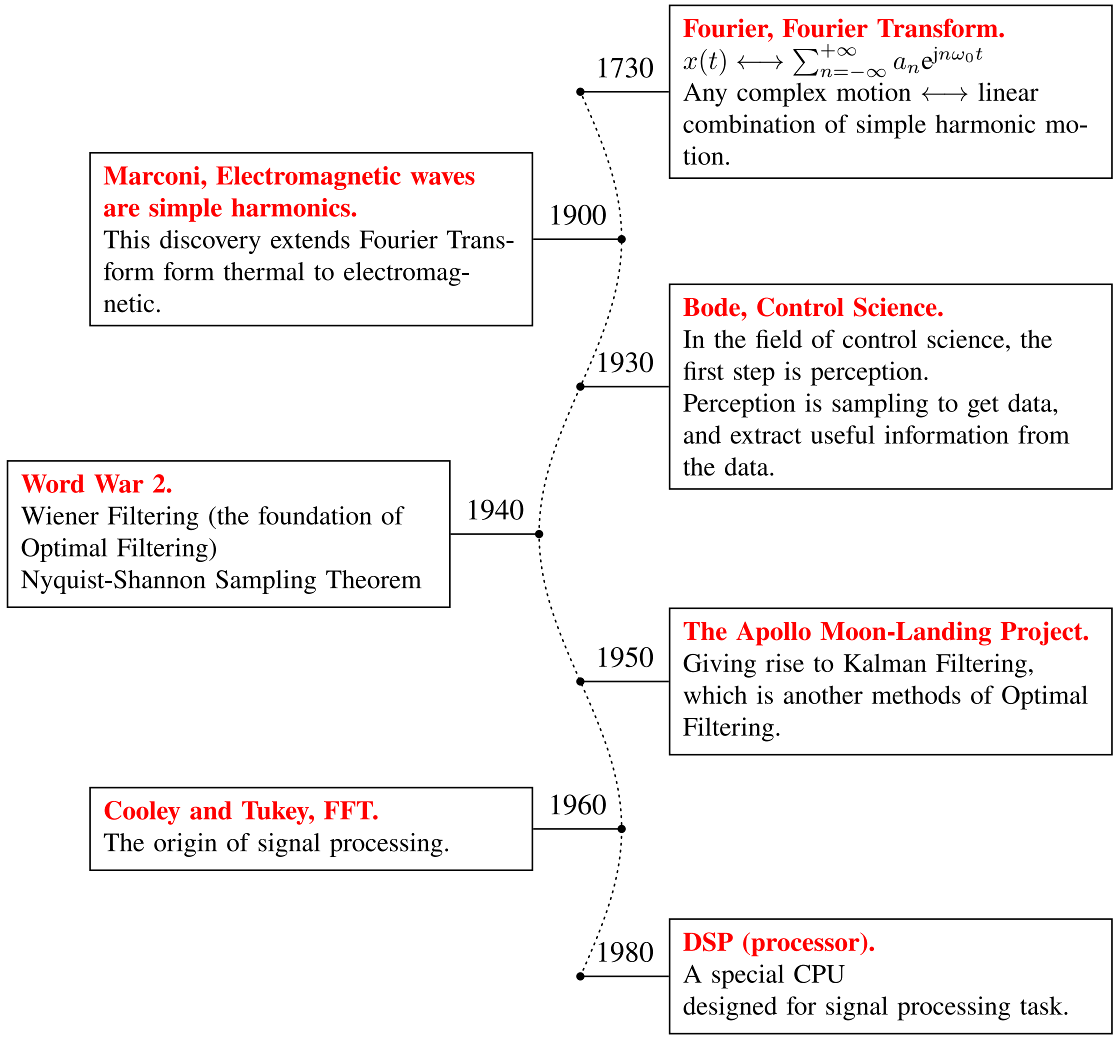


Figure 1: History of DSP

Chapter 2　离散时间信号与系统（时域）

2.1　惯例

考虑连续信号 $x(t)$，我们会发现它包含两个要素：

(1) 自变量：可以是时间或空间，这里是时间 t。

(2) 因变量。

因此，我们可以得出一个结论：信号是一个函数。

然而，数学函数通常具有解析表达式，例如：

$$x(t) = 3t^2 \tag{1}$$

但是信号通常没有明确的解析表达式，所以我们需要处理信号以获取信息。

现在让我们介绍连续时间信号和离散时间信号：

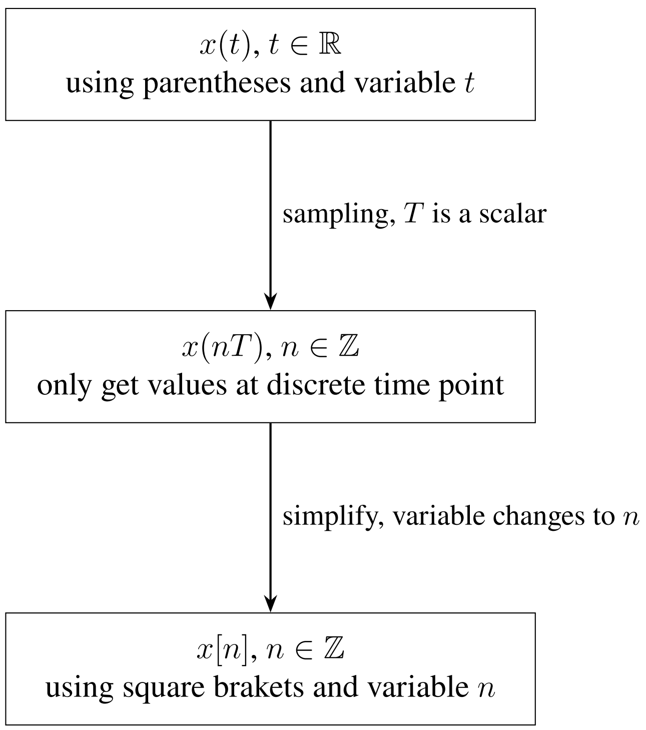


Figure 2: Signals

2.2 特殊信号

这里我们将介绍一些信号。

2.2.1 脉冲信号

定义:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

关于这个信号最重要的一点是，任何信号 $x[n]$ 都可以分解为移位脉冲 $\delta[n-k]$ 的线性组合:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{fundamental element}} , k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

这个公式引出了一个重要的思想:

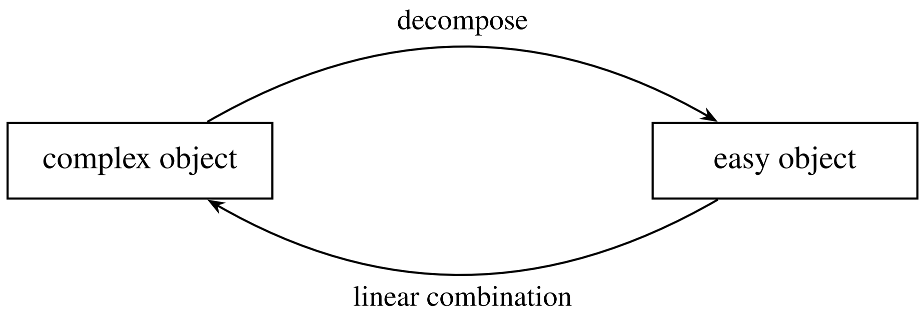


Figure 3: An important Idea

这个思想告诉我们：复杂对象可以被分解为许多简单对象的线性组合。

2.2.2 单位阶跃

定义:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{4}$$

那么 $u[n]$ 和 $\delta[n]$ 之间有什么关系？我们可以很容易地得到：

$$
\begin{aligned}
\delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\
u[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2.2.3 一个重要的函数

$$
x_\omega(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega t} \tag{6}
$$

x 的下标是 ω，表示频率。

为什么我们要引入它？因为如果我们对这个函数进行线性变换，频率不会改变。

我们可以给出离散时间版本：

$$
x_\omega[n] = \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega n} \tag{7}
$$

由于 $n \in \mathbb{Z}$，你可以得到一个有趣的性质：

$$
\begin{aligned}
x_{\omega+2\pi}[n] &= \mathbf{e}^{\mathbf{j}(\omega+2\pi)n} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega n}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

这意味着，在频域中，这个函数具有周期性，周期为 2π。

这里的 2π 对应物理世界中的什么频率？你将在下一章得到答案。

2.3 离散时间系统

我们使用下图来表示系统及其功能：

$$
\{x[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \boxed{\mathrm{T}} \longrightarrow \{y[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}
$$

Figure 4: $y[n] = T(\{x[n]\})$

为什么我们使用 $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 和 $\{y[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 来表示输入和输出？因为系统分为：

(1) 有记忆：$y[n]$（时间点 n 的输出）取决于当前和过去的输入。

(2) 无记忆：$y[n]$（时间点 n 的输出）仅取决于当前时间点的输入 $x[n]$。

所以当我们用符号表示系统的功能时，更严谨的写法是：

$$y[n] = T(\{x[n]\}) \tag{9}$$

这意味着系统 T 作用于一系列输入，而不仅仅是时间 n 的一个输入。但为了简单起见，我们将其写作：

$$y[n] = T(x[n]) \tag{10}$$

接下来，我们介绍一些典型的系统。

2.3.1 延迟器

$$y[n] = x[n - n_d] \tag{11}$$

n_d 是一个标量。我们应该如何理解系统的功能？我们可以举个例子。

假设 n_d 为 2，我们想得到时间 3 的输出，即 $y[3]$。根据公式，我们有：

$$\begin{aligned} y[3] &= x[3 - n_d] \\ &= x[1] \end{aligned} \tag{12}$$

这意味着，如果我们想得到当前的输出，我们需要使用过去的输入。所以这个系统是**有记忆的**。

2.3.2 积分器

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{13}$$

这个公式引出了一个重要的思想：

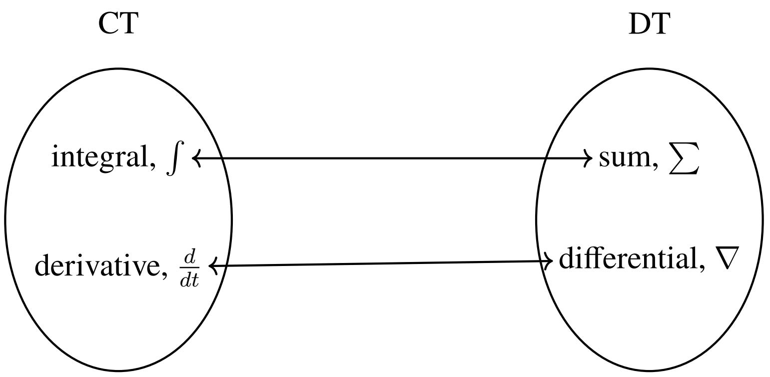


Figure 5: Continuous and Discrete Time Operations

显然，积分器是**有记忆的**。

2.3.3 平方器

$$y[x] = x^2[n] \tag{14}$$

显然，平方器是**无记忆的**。

2.4 线性

线性是系统的一个重要性质，也是我们研究的关键。

让我们从表面给出定义。如果系统 T 是线性系统，那么：

(1) 可加性：$T(x[n] + y[n]) = T(x[n]) + T(y[n])$.

(2) 齐次性：$T(\alpha x[n]) = \alpha T(x[n])$.

(我们不知道它是“有记忆”还是“无记忆”)。

这个定义只是给出了表面的输入输出关系，但系统仍然是一个黑盒子。现在让我们利用 An important Idea 来分析系统的内部结构。

假设 T 是线性系统，看下面的操作：

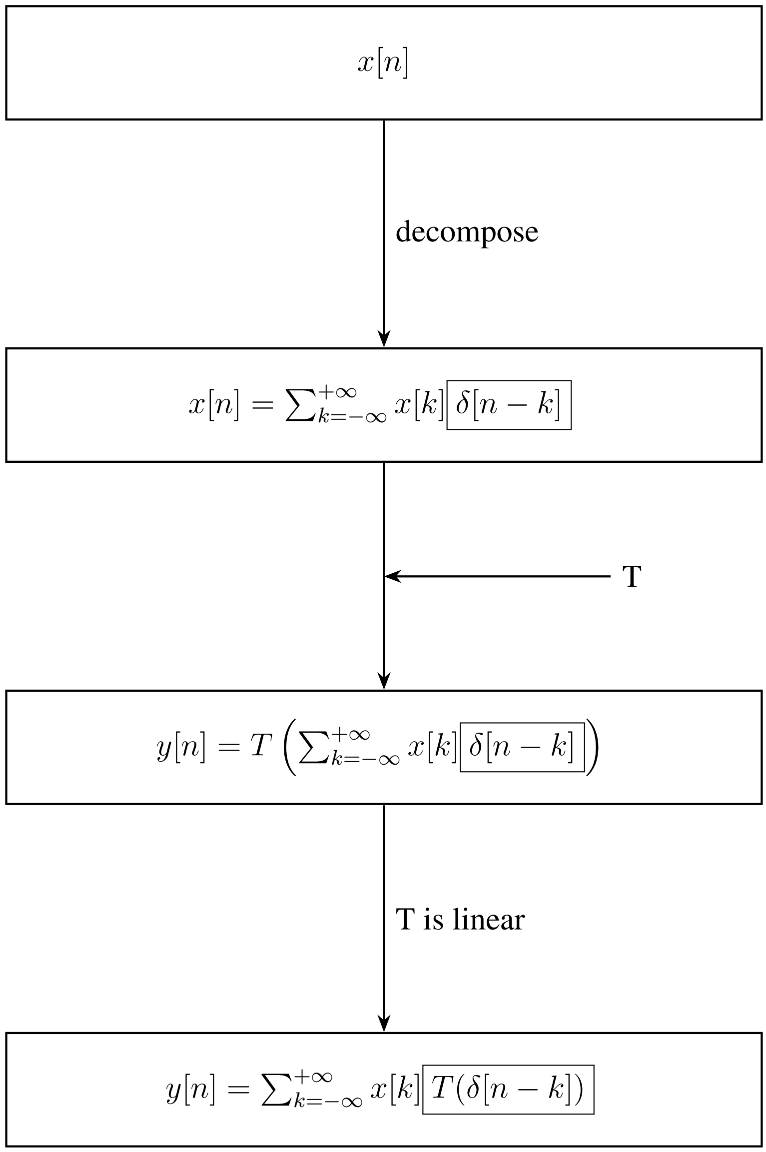


Figure 6: System Process

所以我们实现了以下功能:

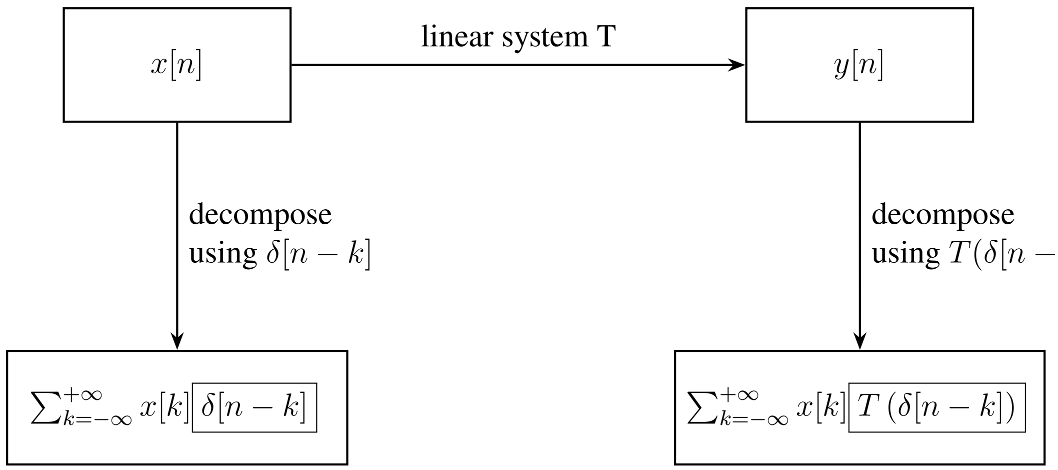


Figure 7: Summary of Linear System Derivation

也就是说，我们将输入 $x[n]$ 分解为脉冲的线性组合。由于系统 T 是线性的，输出也可以分解为线性组合，其中的元素是脉冲响应：

$$h(n,k) = T(\delta[n-k]) \tag{15}$$

2.5 理解脉冲响应

在上一小节中，我们得到了**脉冲响应**的定义：

$$h(n,k) = T(\delta[n-k]) \tag{16}$$

我们给出以下显而易见的理解：

(1) 当 n 和 k 都确定时，$h(n,k)$ 是一个标量。

(2) $h(n,k)$ 是变量 n 和 k 的函数。

为什么我们称之为脉冲响应？

假设我们的输入是在时间 2 的脉冲：

$$x[n] = \delta[n-2] \tag{17}$$

你可以得到：

$$y[n] = T(\delta[n-2]) = h(n,2) \tag{18}$$

这里，$\delta[n-2]$ 和 $h(n,2)$ 都是信号，而不是标量：

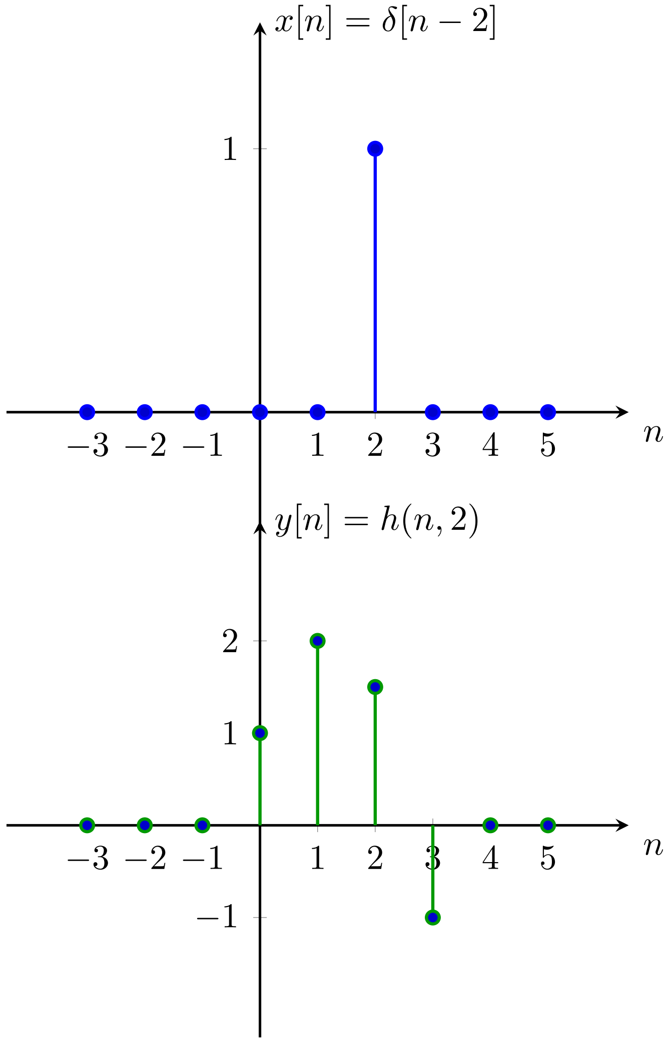


Figure 8: Impulse Response

如果我们的输入变成 $\delta[n-2]+\delta[n-3]$，会发生什么？我们的输出将变成：

$$y[n] = h(n, 2) + h(n, 3) \tag{19}$$

如果我们关注时间点 3 的输出或 $y[3]$，它的形式是：

$$y[3] = h(3, 2) + h(3, 3) \tag{20}$$

总之：

(1) $h(n, 2)$ 意味着，在时间 2 给予一个脉冲，我们得到的包含所有时间点的输出。

(2) $h(3, 2)$ 意味着，在时间 2 给予一个脉冲，我们得到的时间 3 的输出。

2.6 线性——矩阵视角

矩阵也是一种线性变换。

假设我们有以下矩阵 T:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{21}$$

我们使用这个矩阵作用于以下列向量:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

结果是:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \tag{23}$$

我们如何使用上面的思想来解释这一点?

实际上，我们要执行以下操作:

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= T(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= x_1 T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2 T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + x_3 T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{aligned} \tag{24}$$

我们有类似的“脉冲”:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

并且我们有类似的“脉冲响应”：

$$T(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix} \tag{26}$$

从这个例子可以看出：“脉冲响应”是系统本身的性质，与输入无关。

2.7 时不变性

假设有一个任意系统 T，我们有一个输入输出组合：

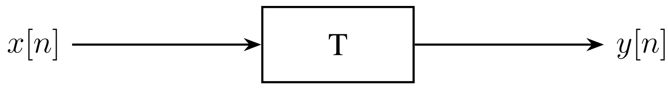


Figure 9: $y[n] = T(\{x[n]\})$

如果系统 T 是时不变的，也就是说：

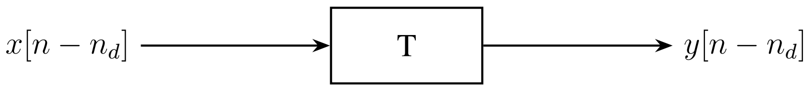


Figure 10: Time-Invariant System T

这里 n_d 是一个标量。

简而言之，如果一个系统 T 是时不变的，那么输出延迟与输入延迟相同。

2.8 LTI 系统

如果一个系统同时满足线性和时不变性，那么我们称该系统为 **LTI 系统**。

在上一小节中，如果系统 T 满足线性，那么我们可以给出**脉冲响应**：

$$h(n,k) = T(\delta[n-k]) \tag{27}$$

这里 $h(n,k)$ 是变量 n 和 k 的函数，我们只知道这个函数有两个变量。

我们的问题是，如果我们赋予线性系统 T 时不变性，$h(n,k)$ 应该满足什么形式？

在推理开始之前，我们为什么关注 $h(n,k)$? 因为在这里我们研究系统的性质，而脉冲响应是这个问题的核心。

特别地，我们给出以下定义：

$$h[n] = h(n,0) = T(\delta[n]) \tag{28}$$

$h[n]$ 表示当我们在时间 0 给予一个脉冲时 T 的脉冲响应。

这相当于：我们给 T 一个输入 $x[n] = \delta[n]$，输出是 $y[n] = h[n]$。

现在将我们的输入延迟 k：

$$x[n] = \delta[n] \quad \xrightarrow{\text{delay} \quad k} \quad \hat{x}[n] = \delta[n-k] \tag{29}$$

假设系统 T 是时不变的：

$$\hat{y}[n] = y[n-k] = h[n-k] \tag{30}$$

由于：

$$h(n,k) = T(\delta[n-k]) \tag{31}$$

所以：

$$h[n-k] = h(n,k) \tag{32}$$

2.9 卷积

现在我们知道，如果系统 T 满足线性和时不变性，给它一个输入 $x[n]$，输出是：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{33}$$

我们可以给出两个信号 $*$ 运算的定义：

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{34}$$

我们可以说：如果一个系统是 LTI 系统，那么：

$$\text{output} = \text{input} * \text{impulse} \quad \text{response} \tag{35}$$

2.10 卷积的一个例子

假设 T 是一个 LTI 系统，其脉冲响应为：

$$h[n] = u[n] - u[n-N] \tag{36}$$

这里 $u[n]$ 是单位阶跃，N 是正整数。我们给它一个输入：

$$x[n] = a^n u[n] \tag{37}$$

这里 $|a| < 1$。

计算输出：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{38}$$

2.10.1 方法 1. 解析计算

展开卷积公式：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-N-k] \end{aligned} \tag{39}$$

由于单位阶跃 $u[n]$ 在 $n < 0$ 时为 0，且 k 是求和变量，我们需要确定 k 的哪一部分会给出非零结果。

对于部分 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k]$，如果它是非零的，那么：

$$k \in [0, n] \tag{40}$$

对于部分 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-N-k]$，如果它是非零的，那么：

$$k \in [0, n-N] \tag{41}$$

然后因为我们的主要变量是 n，我们需要对 n 的不同范围进行分段讨论，并利用 (40) 和 (41) 来找出该部分是否为 0。

对于 $n \in (-\infty, 0)$，k 的范围不能满足 (40) 或 (41)，所以两部分都是 0：

$$y[n] = 0 \tag{42}$$

对于 $n \in [0, N-1]$，k 的范围可以满足 (40)，但不能满足 (41)：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k \end{aligned} \tag{43}$$

对于 $n \in [N, \infty]$，k 的范围可以满足 (40)，并且可以满足 (41)：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-N-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n-N} a^k \end{aligned} \tag{44}$$

2.10.2 图解法

$h[n]$ 和 $x[n]$ 的图形如下所示，这里我们选择 $a = 1/2$：

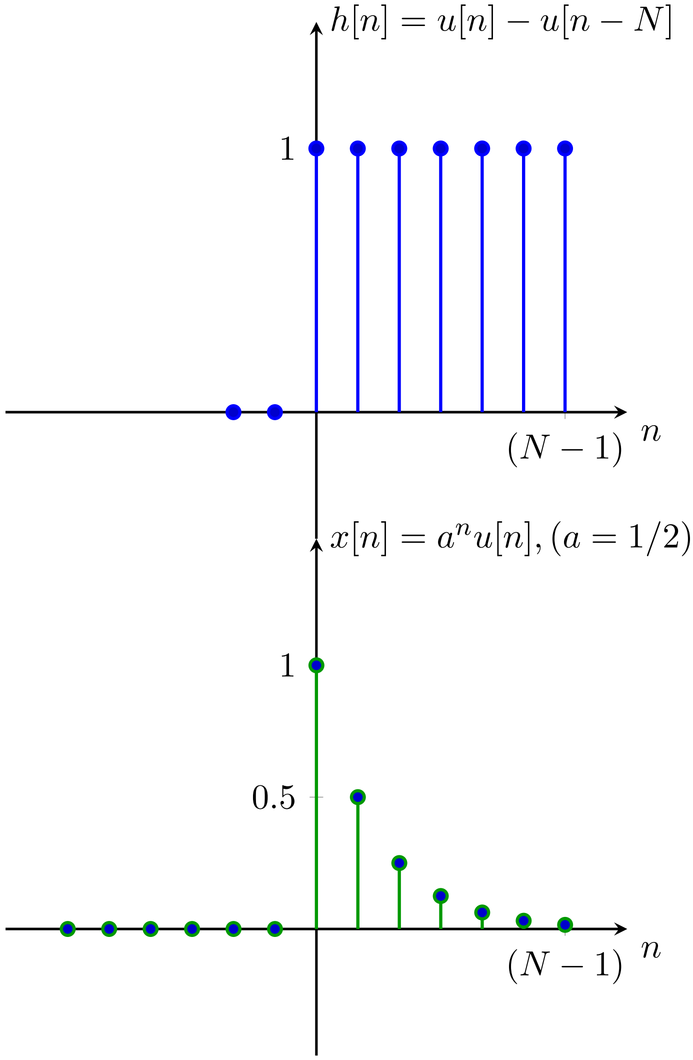


Figure 11: $h[n]$ and $x[n]$

由于求和变量是 k，我们执行以下操作：

$$h[n-k] = h[-(k-n)] \tag{45}$$

我们如何得到 $h[-(k-n)]$?

我们可以使用 $h[-k]$ 并平移 n 个单位：

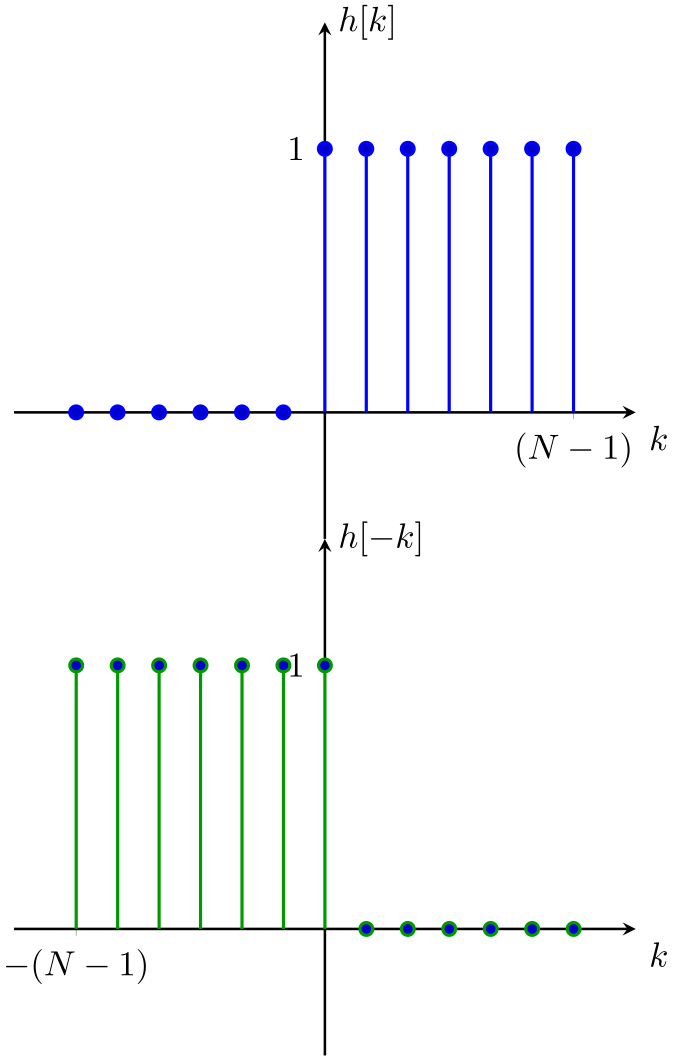


Figure 12: Top: The signal $h[n]$ and time-reversed signal $h[-n]$.

然后将 $h[-k]$ 平移 n 个单位，并执行相应的乘法：

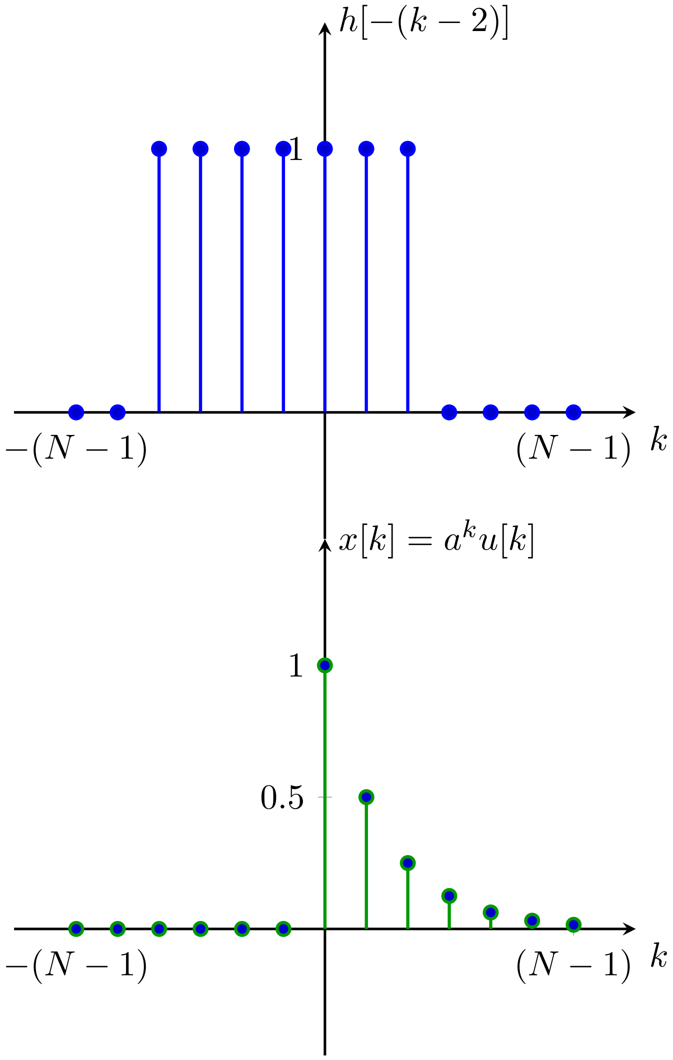


Figure 13: $y[n] = \sum x[k]h[n-k]$ at $n = 2$.

Chapter 3 DT Signal and System (Frequency Domain)