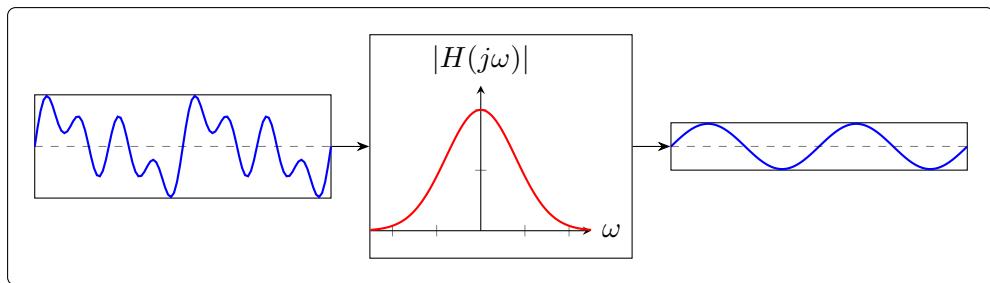


Notes on Digital Signal Processing¹



Guo, H.²

version v0.0

¹Project repository: <https://github.com/Guo-Hui-acoustics/DSP>

²Author email: gh20222734@163.com

Preface

本笔记关于数字信号处理。

Contents

Preface	II
1 Introduction	1
1.1 数字 vs 模拟	1
1.2 DSP 的历史	1
2 离散时间信号与系统（时域）	3
2.1 惯例	3
2.2 特殊信号	4
2.2.1 脉冲信号	4
2.2.2 单位阶跃	4
2.2.3 一个重要的函数	5
2.3 离散时间系统	5
2.3.1 延迟器	6
2.3.2 积分器	6
2.3.3 平方器	7
2.4 线性	7
2.5 理解脉冲响应	9
2.6 线性——矩阵视角	11
2.7 时不变性	12
2.8 LTI 系统	12
2.9 卷积	13
2.10 卷积的一个例子	14
2.10.1 方法 1. 解析计算	14
2.10.2 图解法	16
3 DT Signal and System (Frequency Domain)	19

Chapter 1 Introduction

``Talk is cheap. Show me the code.''

--- Linus Torvalds

1.1 数字 vs 模拟

在数字世界中，我们使用比特（bit）来描述精度。这赋予了它高且可控的精度。

数字意味着可编程。不同于模拟依赖于硬件，数字非常灵活且易于更改。

数字是制造在硅片上的，具有高存储密度且可压缩。并且成本很低。

1.2 DSP 的历史

现在让我们简要回顾一下 DSP 的历史。

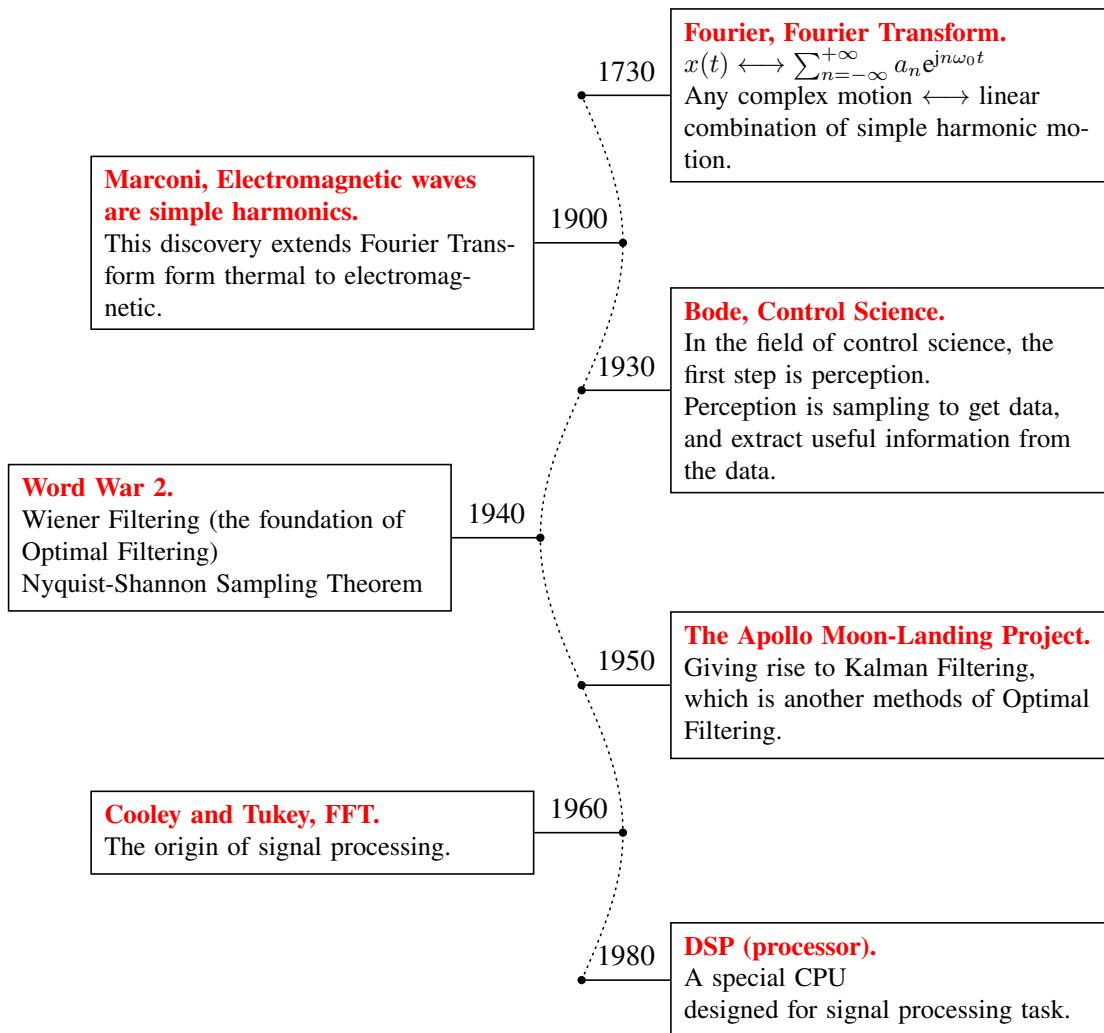


Figure 1: History of DSP

Chapter 2 离散时间信号与系统（时域）

2.1 惯例

考虑连续信号 $x(t)$, 我们会发现它包含两个要素:

- (1) 自变量: 可以是时间或空间, 这里是时间 t 。
- (2) 因变量。

因此, 我们可以得出一个结论: 信号是一个函数。

然而, 数学函数通常具有解析表达式, 例如:

$$x(t) = 3t^2 \quad (1)$$

但是信号通常没有明确的解析表达式, 所以我们需要处理信号以获取信息。

现在让我们介绍连续时间信号和离散时间信号:

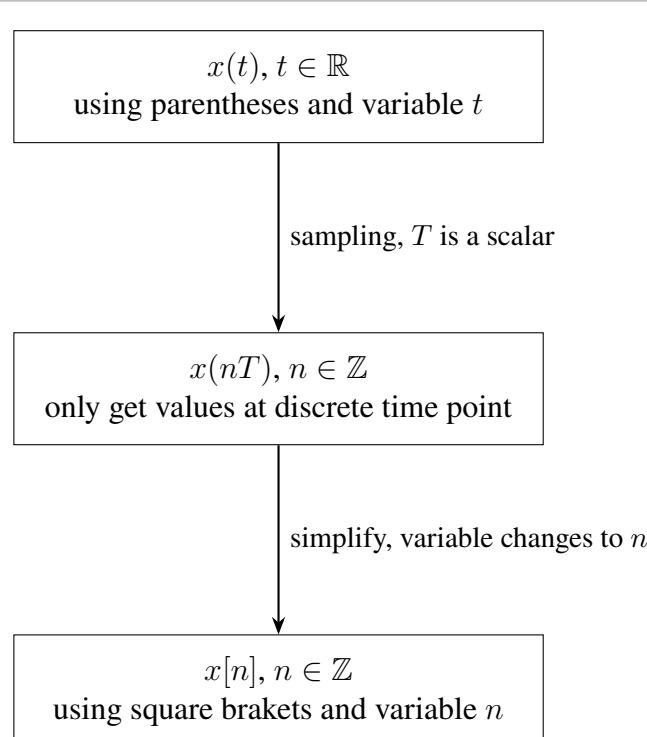


Figure 2: Signals

2.2 特殊信号

这里我们将介绍一些信号。

2.2.1 脉冲信号

定义：

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

关于这个信号最重要的一点是，任何信号 $x[n]$ 都可以分解为移位脉冲 $\delta[n - k]$ 的线性组合：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \underbrace{\delta[n - k]}_{\text{fundamental element}}, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

这个公式引出了一个重要的思想：

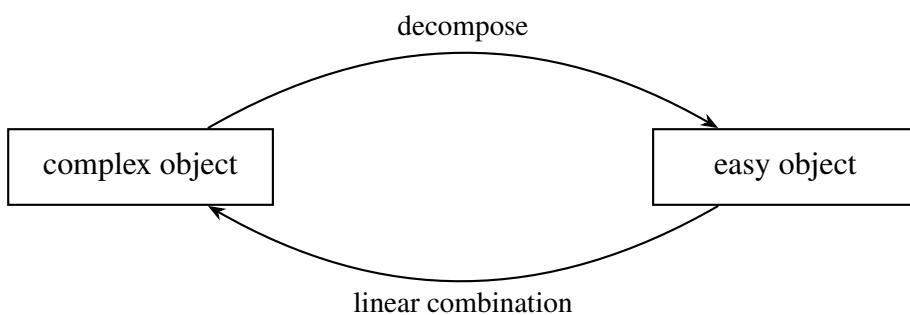


Figure 3: An important Idea

这个思想告诉我们：复杂对象可以被分解为许多简单对象的线性组合。

2.2.2 单位阶跃

定义：

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

那么 $u[n]$ 和 $\delta[n]$ 之间有什么关系？我们可以很容易地得到：

$$\begin{aligned}\delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\ u[n] &= \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]\end{aligned}\tag{5}$$

2.2.3 一个重要的函数

$$x_\omega(t) = e^{j\omega t}\tag{6}$$

x 的下标是 ω ，表示频率。

为什么我们要引入它？因为如果我们将这个函数进行线性变换，频率不会改变。

我们可以给出离散时间版本：

$$x_\omega[n] = e^{j\omega n}\tag{7}$$

由于 $n \in \mathbb{Z}$ ，你可以得到一个有趣的性质：

$$\begin{aligned}x_{\omega+2\pi}[n] &= e^{j(\omega+2\pi)n} \\ &= e^{j\omega n}\end{aligned}\tag{8}$$

这意味着，在频域中，这个函数具有周期性，周期为 2π 。

这里的 2π 对应物理世界中的什么频率？你将在下一章得到答案。

2.3 离散时间系统

我们使用下图来表示系统及其功能：

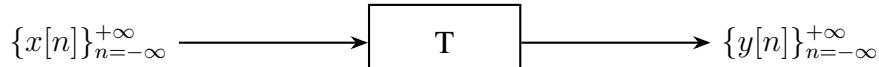


Figure 4: $y[n] = T(\{x[n]\})$

为什么我们使用 $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 和 $\{y[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 来表示输入和输出？因为系统分为：

- (1) 有记忆： $y[n]$ （时间点 n 的输出）取决于当前和过去的输入。
- (2) 无记忆： $y[n]$ （时间点 n 的输出）仅取决于当前时间点的输入 $x[n]$ 。

所以当我们用符号表示系统的功能时，更严谨的写法是：

$$y[n] = T(\{x[n]\}) \quad (9)$$

这意味着系统 T 作用于一系列输入，而不仅仅是时间 n 的一个输入。但为了简单起见，我们将其写作：

$$y[n] = T(x[n]) \quad (10)$$

接下来，我们介绍一些典型的系统。

2.3.1 延迟器

$$y[n] = x[n - n_d] \quad (11)$$

n_d 是一个标量。我们应该如何理解系统的功能？我们可以举个例子。

假设 n_d 为 2，我们想得到时间 3 的输出，即 $y[3]$ 。根据公式，我们有：

$$\begin{aligned} y[3] &= x[3 - n_d] \\ &= x[1] \end{aligned} \quad (12)$$

这意味着，如果我们想得到当前的输出，我们需要使用过去的输入。所以这个系统是有记忆的。

2.3.2 积分器

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (13)$$

这个公式引出了一个重要的思想：

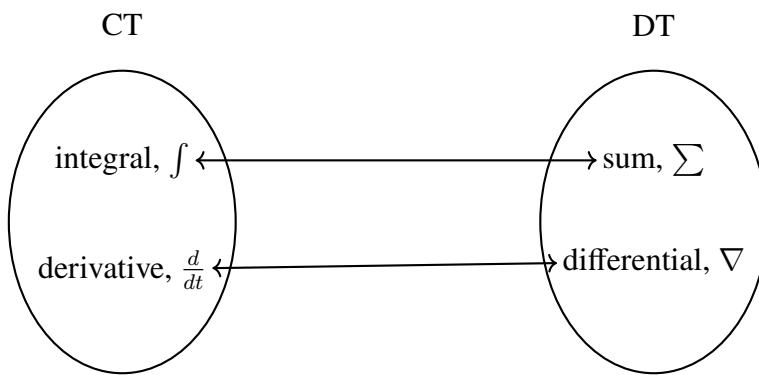


Figure 5: Continuous and Discrete Time Operations

显然，积分器是有记忆的。

2.3.3 平方器

$$y[x] = x^2[n] \quad (14)$$

显然，平方器是无记忆的。

2.4 线性

线性是系统的一个重要性质，也是我们研究的关键。

让我们从表面给出定义。如果系统 T 是线性系统，那么：

- (1) 可加性： $T(x[n] + y[n]) = T(x[n]) + T(y[n]).$
- (2) 齐次性： $T(\alpha x[n]) = \alpha T(x[n]).$

(我们不知道它是“有记忆”还是“无记忆”）。

这个定义只是给出了表面的输入输出关系，但系统仍然是一个黑盒子。现在让我们利用 **An important Idea** 来分析系统的内部结构。

假设 T 是线性系统，看下面的操作：

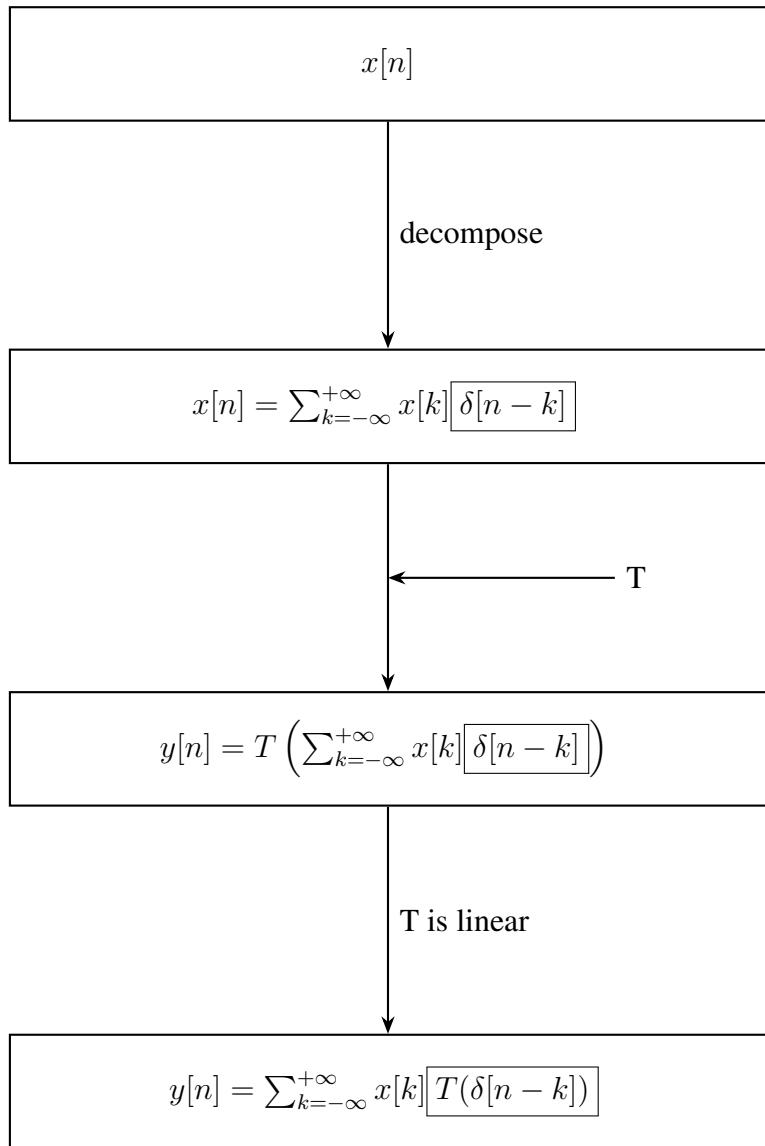


Figure 6: System Process

所以我们实现了以下功能：

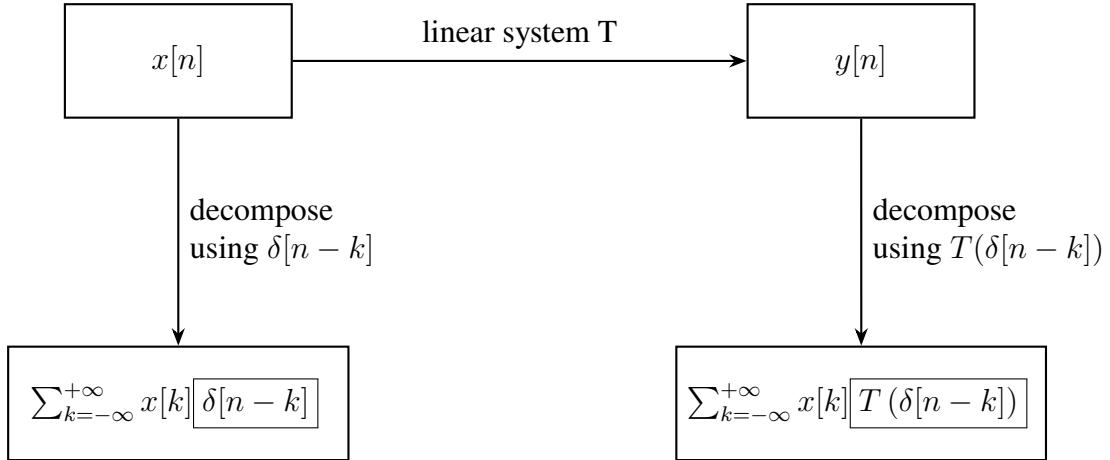


Figure 7: Summary of Linear System Derivation

也就是说，我们将输入 $x[n]$ 分解为脉冲的线性组合。由于系统 T 是线性的，输出也可以分解为线性组合，其中的元素是脉冲响应：

$$h(n, k) = T(\delta[n - k]) \quad (15)$$

2.5 理解脉冲响应

在上一小节中，我们得到了脉冲响应的定义：

$$h(n, k) = T(\delta[n - k]) \quad (16)$$

我们给出以下显而易见的理解：

- (1) 当 n 和 k 都确定时， $h(n, k)$ 是一个标量。
- (2) $h(n, k)$ 是变量 n 和 k 的函数。

为什么我们称之为脉冲响应？

假设我们的输入是在时间 2 的脉冲：

$$x[n] = \delta[n - 2] \quad (17)$$

你可以得到：

$$y[n] = T(\delta[n - 2]) = h(n, 2) \quad (18)$$

这里， $\delta[n - 2]$ 和 $h(n, 2)$ 都是信号，而不是标量：

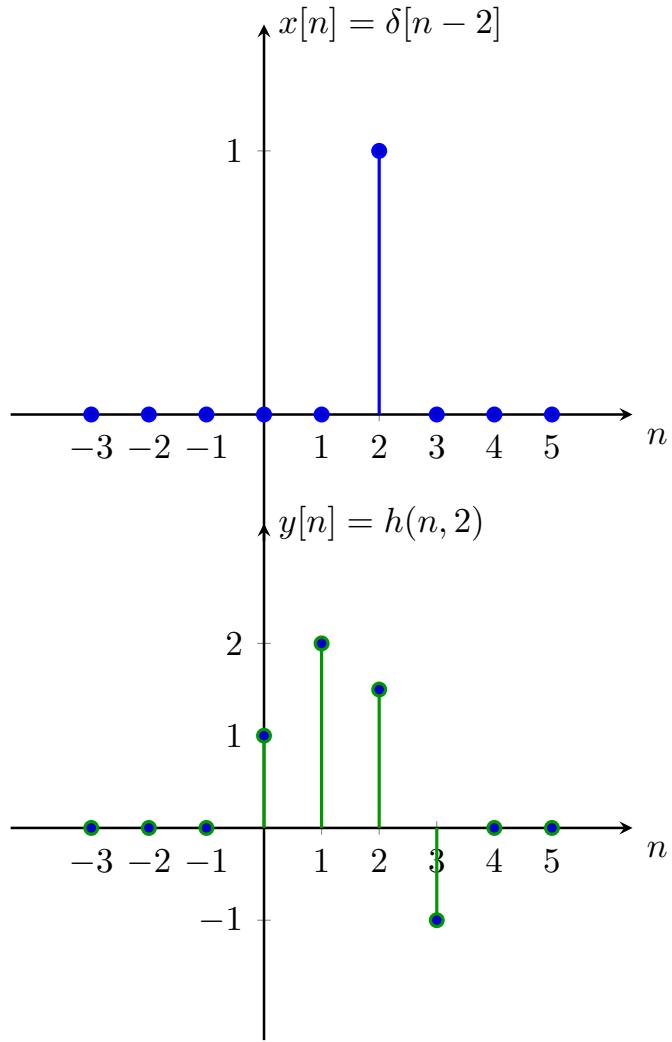


Figure 8: Impulse Response

如果我们的输入变成 $\delta[n - 2] + \delta[n - 3]$, 会发生什么? 我们的输出将变成:

$$y[n] = h(n, 2) + h(n, 3) \quad (19)$$

如果我们关注时间点 3 的输出或 $y[3]$, 它的形式是:

$$y[3] = h(3, 2) + h(3, 3) \quad (20)$$

总之:

- (1) $h(n, 2)$ 意味着, 在时间 2 给予一个脉冲, 我们得到的包含所有时间点的输出。
- (2) $h(3, 2)$ 意味着, 在时间 2 给予一个脉冲, 我们得到的时间 3 的输出。

2.6 线性——矩阵视角

矩阵也是一种线性变换。

假设我们有以下矩阵 T :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

我们使用这个矩阵作用于以下列向量:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

结果是:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

我们如何使用上面的思想来解释这一点?

实际上, 我们要执行以下操作:

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= T(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= x_1 T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

我们有类似的“脉冲”:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

并且我们有类似的“脉冲响应”：

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad (26)$$

从这个例子可以看出：“脉冲响应”是系统本身的性质，与输入无关。

2.7 时不变性

假设有一个任意系统 T ，我们有一个输入输出组合：



Figure 9: $y[n] = T(\{x[n]\})$

如果系统 T 是时不变的，也就是说：



Figure 10: Time-Invariant System T

这里 n_d 是一个标量。

简而言之，如果一个系统 T 是时不变的，那么输出延迟与输入延迟相同。

2.8 LTI 系统

如果一个系统同时满足线性和时不变性，那么我们称该系统为 **LTI 系统**。

在上一小节中，如果系统 T 满足线性，那么我们可以给出脉冲响应：

$$h(n, k) = T(\delta[n - k]) \quad (27)$$

这里 $h(n, k)$ 是变量 n 和 k 的函数，我们只知道这个函数有两个变量。

我们的问题是，如果我们赋予线性系统 T 时不变性， $h(n, k)$ 应该满足什么形式？

在推理开始之前，我们为什么关注 $h(n, k)$? 因为在这里我们研究系统的性质，而脉冲响应是这个问题的核心。

特别地，我们给出以下定义：

$$h[n] = h(n, 0) = T(\delta[n]) \quad (28)$$

$h[n]$ 表示当我们在时间 0 给予一个脉冲时 T 的脉冲响应。

这相当于：我们给 T 一个输入 $x[n] = \delta[n]$ ，输出是 $y[n] = h[n]$ 。

现在将我们的输入延迟 k ：

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{\text{delay } k} \hat{x}[n] = \delta[n - k] \quad (29)$$

假设系统 T 是时不变的：

$$\hat{y}[n] = y[n - k] = h[n - k] \quad (30)$$

由于：

$$h(n, k) = T(\delta[n - k]) \quad (31)$$

所以：

$$h[n - k] = h(n, k) \quad (32)$$

2.9 卷积

现在我们知道，如果系统 T 满足线性和时不变性，给它一个输入 $x[n]$ ，输出是：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k] \quad (33)$$

我们可以给出两个信号 * 运算的定义：

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k] \quad (34)$$

我们可以说：如果一个系统是 LTI 系统，那么：

$$\text{output} = \text{input} * \text{impulse response} \quad (35)$$

2.10 卷积的一个例子

假设 T 是一个 LTI 系统，其脉冲响应为：

$$h[n] = u[n] - u[n - N] \quad (36)$$

这里 $u[n]$ 是单位阶跃， N 是正整数。我们给它一个输入：

$$x[n] = a^n u[n] \quad (37)$$

这里 $|a| < 1$ 。

计算输出：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (38)$$

2.10.1 方法 1. 解析计算

展开卷积公式：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-N-k] \end{aligned} \quad (39)$$

由于单位阶跃 $u[n]$ 在 $n < 0$ 时为 0，且 k 是求和变量，我们需要确定 k 的哪一部分会给出非零结果。

对于部分 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k]$ ，如果它是非零的，那么：

$$k \in [0, n] \quad (40)$$

对于部分 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-N-k]$ ，如果它是非零的，那么：

$$k \in [0, n - N] \quad (41)$$

然后因为我们的主要变量是 n ，我们需要对 n 的不同范围进行分段讨论，并利用 (40) 和 (41) 来找出该部分是否为 0。

对于 $n \in (-\infty, 0)$, k 的范围不能满足 (40) 或 (41), 所以两部分都是 0:

$$y[n] = 0 \quad (42)$$

对于 $n \in [0, N - 1]$, k 的范围可以满足 (40), 但不能满足 (41):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^n a^k \end{aligned} \quad (43)$$

对于 $n \in [N, \infty]$, k 的范围可以满足 (40), 并且可以满足 (41):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] u[n-N-k] \\ &= \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^{n-N} a^k \end{aligned} \quad (44)$$

2.10.2 图解法

$h[n]$ 和 $x[n]$ 的图形如下所示，这里我们选择 $a = 1/2$:

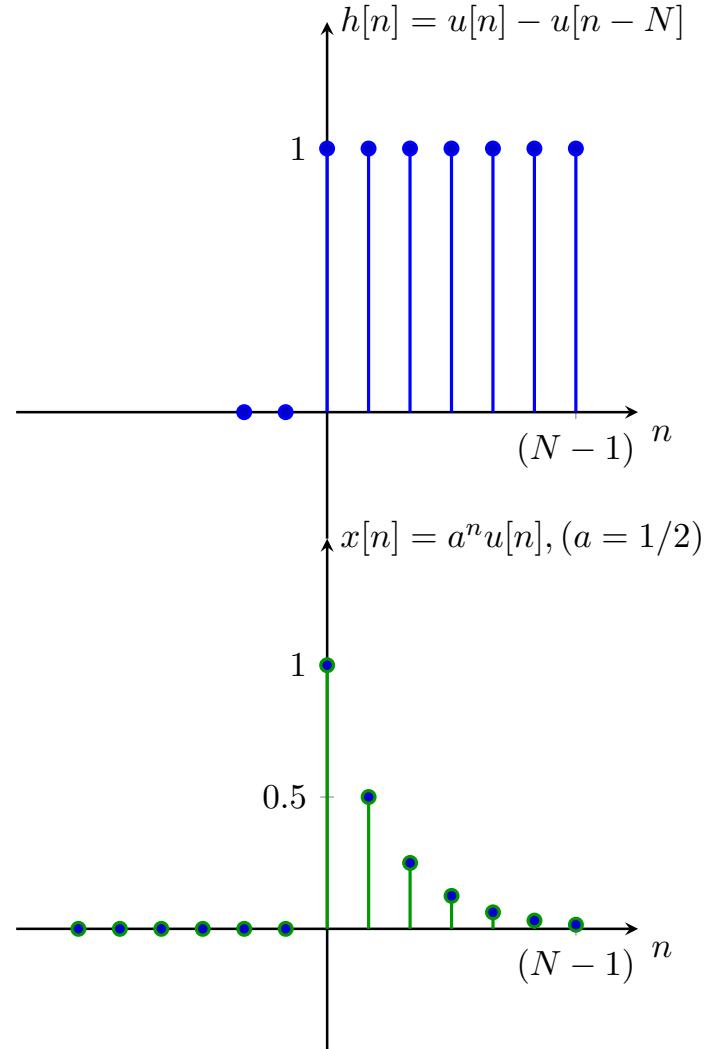


Figure 11: $h[n]$ and $x[n]$

由于求和变量是 k ，我们执行以下操作：

$$h[n - k] = h[-(k - n)] \quad (45)$$

我们如何得到 $h[-(k - n)]$ ？

我们可以使用 $h[-k]$ 并平移 n 个单位：

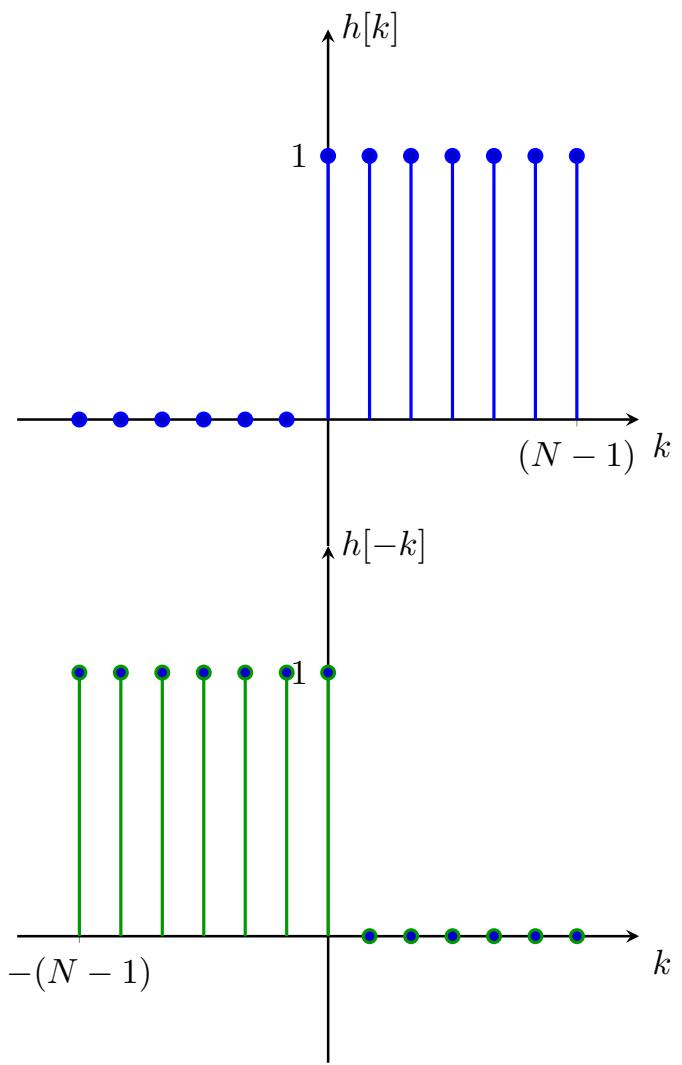


Figure 12: Top: The signal $h[n]$ and time-reversed signal $h[-n]$.

然后将 $h[-k]$ 平移 n 个单位，并执行相应的乘法：

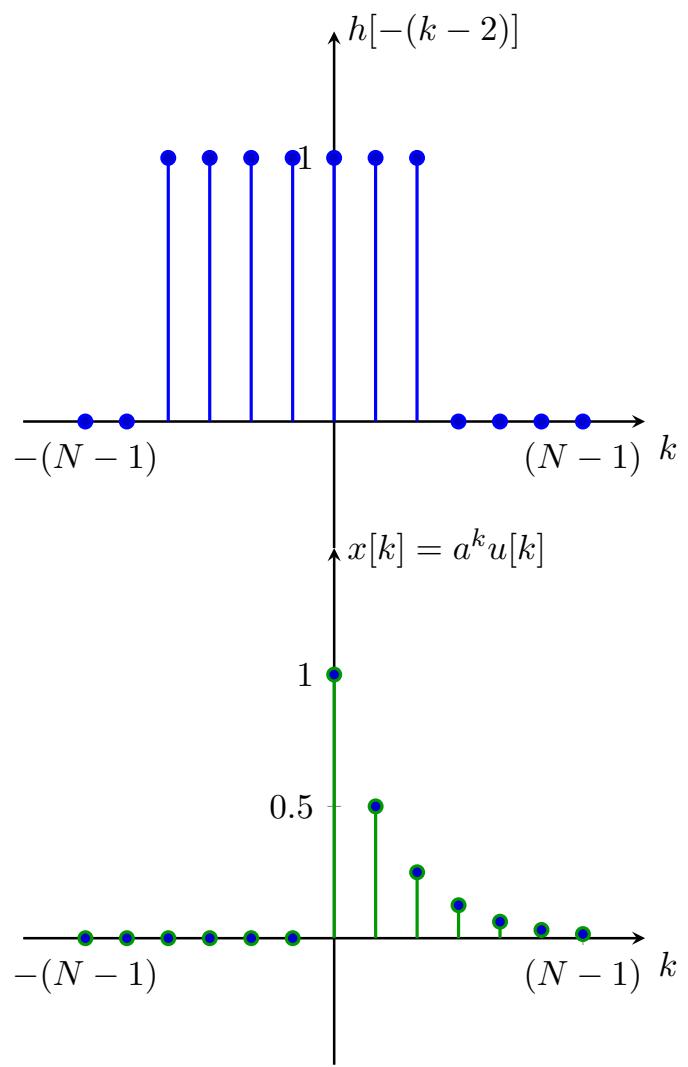


Figure 13: $y[n] = \sum x[k]h[n-k]$ at $n = 2$.

Chapter 3 DT Signal and System (Frequency Domain)