

电动力学笔记

郭蒙

中山大学物理学院，广东，广州，510275

目录

1 电磁现象的普遍规律	1
1.1 电荷和电场	2
1.1.1 库伦定律	2
1.1.2 高斯定理和电场散度	2
1.1.3 静电场的旋度	3
1.2 电流和磁场	3
1.2.1 电荷守恒定律	3
1.2.2 毕奥-萨伐尔定律	4
1.2.3 磁场的环量和旋度	4
1.2.4 磁场的散度	4
1.2.5 磁场旋度和散度公式的证明	4
1.3 麦克斯韦方程组	4
1.3.1 电磁感应定律	4
1.3.2 位移电流	5
1.3.3 洛伦兹力公式	5
1.4 介质的电磁性质	6
1.4.1 介质的极化	6
1.4.2 介质的磁化	7
1.4.3 介质中的 Maxwell 方程组	8
1.4.4 电磁场边值关系	8
1.4.5 法向分量的关系	8
1.4.6 切向分量的关系	9

Chapter 1

电磁现象的普遍规律

1.1 电荷和电场

1.1.1 库伦定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 \mathbf{F} 为

$$\mathbf{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

其中 ϵ_0 为真空介电常量。

现代观点认为两电荷之间的作用力是通过场传递的，由上式可知电荷受到的作用力与电荷量 Q 成正比，我们定义电场强度 $\mathbf{E}(x)$ 来表述电荷之间的作用力

$$\mathbf{F} = Q' \mathbf{E} \quad (1.2)$$

结合两式可以直接表达出电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3)$$

在实际情况下，由于电场具有叠加性，由物体的电荷密度球积分可以得到一个几何物体周围的电场强度分布

$$\mathbf{E}(x) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' \quad (1.4)$$

1.1.2 高斯定理和电场散度

在研究电荷和电场的关系时，我们知道电荷 Q 发出的电场强度的通量总是正比于 Q ，与附近其他电荷的存在无关，我们以点电荷周围的闭合曲面 S 的电场强度 \mathbf{E} 的通量，由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

将面元投影得到闭合曲面的通量

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

其中 $d\Omega$ 为立体角元。相应的，对于已知的空间电荷分布，对相应的电荷求积分即可得到

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.7)$$

当体积 V 不断缩小的时候，电场的通量可以改写为散度的形式，有

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.8)$$

它是电场的一个基本微分方程，反映电场作用的局域性质：空间某点领域上场的散度只和点上的电荷密度有关，而和其他地点的电荷分布无关。特别的，在一般的运动电荷的前提下，远处的场不能用库伦定律表出。

1.1.3 静电场的旋度

旋度所反映的是场的环流性质，下面我们用库伦定律来证明电场没有旋度。在电场空间的某个环路中有下面的关系

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.9)$$

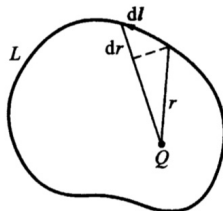


图 1.1: 电场环路

观察上式得到右边的被积函数是一个全微分，绕 L 的回路积分值为零。因此得到

$$\boxed{\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0} \quad (1.10)$$

将回路不断缩小，得到静电场的旋度表达

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.11)$$

电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷，在自由空间中电场线连续通过；在静电情形下电场没有旋涡状结构。

1.2 电流和磁场

在介绍磁场性质之前，先给出两个电流分布的基本规律。

1.2.1 电荷守恒定律

一个系统的总电荷严格保持不变。以电流和电荷的关系用连续性方程表示为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.12)$$

化简得到微分方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

上式被称为**电流连续性方程**。特别的，当研究的对象是恒定电流时，物理量不随时间变化，此时 $\partial \rho / \partial t = 0$ ，所以在恒定电流情况下

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.14)$$

这一点也可以印证恒定电流的分布是无源的，流线必为闭合曲线。

1.2.2 毕奥-萨伐尔定律

该定律描述了两个电流之间的作用力，一个电流元在磁场中受到的力可以表示为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.15)$$

给出电流密度之后表示场点上的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1.16)$$

当电流集中在细导线上，改写定律为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.17)$$

1.2.3 磁场的环量和旋度

磁场沿闭合曲线的环量与通过闭合曲线所围曲面的电流 I 成正比

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (1.18)$$

上式称为安培环路定律，可以通过毕奥-萨伐尔定律证明，在此不多赘述。

求得微分形式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.19)$$

1.2.4 磁场的散度

磁感应强度是无源场，对任何闭合曲面的总通量为零

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.20)$$

微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.21)$$

1.2.5 磁场旋度和散度公式的证明

1.3 麦克斯韦方程组

在之前的章节里我们已经讨论了静电磁场的散度和旋度，下面我们考虑变化的电磁场的关系，主要是考虑新增的两个物理量之间的联系

1. 变化的磁场激发电场
2. 变化的电场激发磁场

1.3.1 电磁感应定律

我们引入线圈 L 上的感应电动势，已知它和磁通量的变化率成正比。对于闭合线圈而言，感应电动势的存在表面线圈中存在电场，且感应电动势是电场强度沿闭合回路的线积分，综合上述得到

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.22)$$

微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.23)$$

感应电场是有旋场。

1.3.2 位移电流

在上一节我们指出恒定电流是闭合的，在交变的情况下，电流分布不再是闭合的——可以用带电容器的电路为例，实际上该处的电流是中断的。

恒定电流满足安培环路定律1.18，对式子两边取散度，由于 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$ ，上式只有当 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 的时候成立，而恒定电流下无磁场产生，因此两者相互矛盾。

我们假设存在一个位移电流 \mathbf{J}_D ，使得它和电流 \mathbf{J} 合起来构成闭合的电流，满足

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) = 0 \quad (1.24)$$

这样可以解决前文的矛盾，现在只需要表示出位移电流，联立

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.25)$$

得到 \mathbf{J}_D 的一个可能的表达式¹

$$\mathbf{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.26)$$

综上所述，得到 Maxwell 方程组

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (1.27)$$

1.3.3 洛伦兹力公式

场对电荷体系的作用分别表述为电场和磁场之间的作用，通过库仑定律和安培定律体现，分别是

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q\vec{E} \\ d\vec{F} &= Id\vec{l} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} dV \end{aligned} \quad (1.28)$$

两者相加并写作力密度的形式

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.29)$$

对于单个点电荷，很容易得到关系 $\vec{J} = \rho\vec{v}$

化简得

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.30)$$

¹实际上由式1.24可以得到多个可能的解，只是该解是最简单的求解

1.4 介质的电磁性质

介质是一个带电粒子系统，在介质被极化的时候，由正点中心和负电中心是否重合分为两类：重合的介质在

- 定义 —— 电阻率很大，导电能力很差的物质
- 电介质的级化 —— 是其中的束缚电荷的微小移动的宏观结果
- 极化的微观机制 —— 无极分子的位移极化
 - 在外电场作用下产生的电偶极矩称为感生极矩
 - 有极分子的取向极化

图 1.2: 电磁介质

1.4.1 介质的极化

在外场的作用下，介质中的正负电子对会一致取向排列，形成有图的排列。如果正电荷在外，那么介质中便有等量的负电荷来维持介质的整体电中性。这种由于极化而出现的电荷分布称为束缚电荷，以 ρ_p 表示束缚电荷密度，有关系

$$\int_V \rho_p dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.31)$$

对于体积分的表示，则可以表达为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.32)$$

非均匀介质极化后整个介质内部都有束缚电荷出现，而在均匀介质内，束缚电荷只出现在自由电荷附近和介质界面处。我们需要特别说明的是介质分界面上束缚电荷的表示，由上图1.3可以得知——在两个介质的分界面，介质 1 和介质 2 分别都有本介质极化后的剩余电荷和另一个介质“漂移”过来的电荷，在分界面薄层出现的净余电荷就可以表示为 $-(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S}$ ，其中有束缚电荷面密度 σ_p ，则进一步表示为

$$\sigma_p dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.33)$$

$$\sigma_p = -\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (1.34)$$

介质内的电现象包括两个方面. 一方面电场使介质极化而产生束缚电荷分布，另一方面这些束缚电荷又反过来激发电场，两者是互相制约的。介质对宏观电场的作用就是通过束缚电荷激发电场。

所以整体仍然满足 Maxwell 方程

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p \quad (1.35)$$

由于束缚电荷不易测量，更容易得到的是自由电荷，我们引入辅助量电位移矢量 \mathbf{D} ，定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.36)$$

可以看出， \mathbf{D} 并不能代表介质中的场强，仅仅有着辅助的作用代入上式得到关系

$$\mathbf{D} = \nabla \cdot \rho_f \quad (1.37)$$

极化强度矢量毫无疑问与外电场强度呈某种比例关系，对于一般的各向同性线性介质，极化强度和

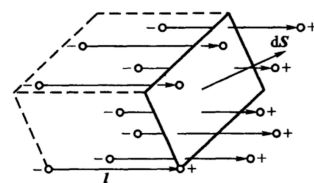


图 1.3: 介质的极化

电场强度有着线性关系

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.38)$$

联立上式很容易得到关系

$$\mathbf{D} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \quad (1.39)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.40)$$

ε 称为介质的电容率, ε_r 为相对电容率。

1.4.2 介质的磁化

目前介质磁化的理论解释有两种——分子电流观点和磁荷观点, 我们在这里以分子电流为例。

为使得介绍的流程更加明晰, 我们先直接写出麦克斯韦方程组在介质中的满足的方程

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.41)$$

其中 \mathbf{J}_f 为介质中的自由电流密度, \mathbf{J}_M 为介质中的磁化电流密度, \mathbf{J}_P 为介质中的极化电流密度, 后两者一并称为**诱导电流密度**。下面介绍它们的形成机理。

对于磁化电流密度。为描述磁介质的磁化状态, 引入磁化强度矢量, 定义为单位体积内分子磁矩的矢量和, 我们把宏观体积元内的分子看作电流环, 那么只要刚刚与面边缘相交的环对介质磁化有着共贡献, 那么可以得到关系

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{(L \text{ 内})} I' \quad (1.42)$$

相应的微分形式为

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.43)$$

而对于极化电流密度而言, 是电场变化导致的介质极化强度变化而产生的电流, 满足

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\sum_i e_i \mathbf{v}_i}{\Delta V} = \mathbf{J}_P \quad (1.44)$$

和介质的电场规律一样, 自由电流的分布可以直接通过实验测得, 我们希望引入一个物理量使得它仅由介质性质和自由电流的分布决定, 由上式变化得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.45)$$

引入磁场强度 \mathbf{H} , 定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.46)$$

这样就有关系

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.47)$$

从式1.41和式1.47可以看出, 磁感应强度 \mathbf{B} 描述了介质内整体的宏观磁场, 而 \mathbf{H} 仅仅只是一个辅助物理量, 为能完备的描述 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 之间的关系, 我们还需要介质的磁化率 χ_M 。对于各向同性非铁磁物质而言, 上式的几个物理量之间有着线性关系²

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (1.48)$$

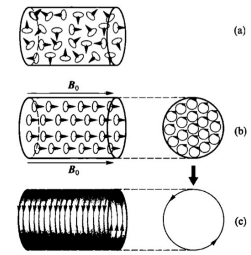


图 1.4: 分子电流磁化

²为什么讨论磁介质的时候要考虑极化带来的影响, 而讨论极化的时候没有与磁化相关的项

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.49)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_M \quad (1.50)$$

1.4.3 介质中的 Maxwell 方程组

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (1.51)$$

式中出现的 ρ 等符号都是直接代指自由电荷和自由电流的分布。

上述方程组想要求解还需要下面的一些关系

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \bar{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (1.52)$$

注意，这只在部分的各向同性介质中成立，对于更复杂的异性介质，可能需要张量式来描述

在介质中电场磁场相应的对应关系为

介质中电场/磁场基本关系

(*) $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p$					
		(极化强度)	(电位移)		
电场	\mathbf{E}	\mathbf{P}	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	
		σ_p	σ_f	$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$	
		即可推导三者之间任意关系			
(*) $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$					
		(磁化)	(磁化强度)		
磁场	\mathbf{B}	\mathbf{M}	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	
		\mathbf{j}_M	\mathbf{j}_f	$\bar{\mathbf{a}}_f = \bar{\mathbf{n}} \times (\bar{\mathbf{H}}_2 - \bar{\mathbf{H}}_1)$	
		↳ 面电流密度			

图 1.5: 介质中电场磁场对应关系

1.4.4 电磁场边值关系

1.4.5 法向分量的关系

总电场的 Maxwell 方程组有

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_f + Q_p \quad (1.53)$$

如果在边界面上取一个厚度几乎为零的圆柱体，那么上式的面积分就等价于 $(E_{2n} - E_{1n}) \Delta S$ ，对于上式而言，及方程左边化为面密度的物理量，即

$$\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma_f + \sigma_p \quad (1.54)$$

本式在前文讨论介质极化的时候已经提到过，见式1.35

同样的，根据介质极化的相关结论，我们可以得到

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_P \quad (1.55)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \quad (1.56)$$

可以看出，与介质极化相关的这三个物理量，以及三者在法向上的跃变，分别受不同的电荷面密度影响。

相应的，对于磁场满足

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.57)$$

同样的利用取薄圆柱体的方法，容易得到

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (1.58)$$

1.4.6 切向分量的关系

先明确面电流分布——及体电流分布在宏观上等效于表面电流分布的一种考虑情况，我们假设面电流线密度为 α ，则垂直流过一段距离的电流表示为

$$\Delta I = \alpha \Delta l \quad (1.59)$$



图 1.6: 磁化面电流示意图