电动力学笔记

郭蒙

中山大学物理学院，广东，广州，510275

目录

Chapter 1

电磁现象的普遍规律

1.1 电荷和电场

1.1.1 库伦定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q‘的作用力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F}=\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1}$$

其中 ε_0 为真空介电常量。

现代观点认为两电荷之间的作用力是通过场传递的，由上式可知电荷受到的作用力与电荷量 Q 成正比，我们定义电场强度 $\boldsymbol{E}(x)$ 来表述电荷之间的作用力

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{Q'E} \tag{1.2}$$

结合两式可以直接表达出电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.3}$$

在实际情况中，由于电场具有叠加性，由物体的电荷密度球积分可以得到一个几何物体周围的电场强度分布

$$\boldsymbol{E}(x)=\int_V \frac{\rho\left(\boldsymbol{x'}\right)\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\mathrm{d}V' \tag{1.4}$$

1.1.2 高斯定理和电场散度

在研究电荷和电场的关系时，我们知道电荷 Q 发出的电场强度的通量总是正比于 Q，与附近其他电荷的存在无关，我们以点电荷周围的闭合曲面 S 的电场强度 E 的通量，由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.5}$$

将面元投影得到闭合曲面的通量

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \mathrm{d}\Omega=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.6}$$

其中 $d\Omega$ 为立体角元。相应的，对于已知的空间电荷分布，对相应的电荷求积分即可得到

$$\oint_s E\cdot \mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1.7}$$

当体积 V 不断缩小的时候，电场的通量可以改写为散度的形式，有

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}} \tag{1.8}$$

它是电场的一个基本微分方程，反映电场作用的局域性质：**空间某点领域上场的散度只和点上的电荷密度有关，而和其他地点的电荷分布无关**。特别的，在一般的运动电荷的前提下，远处的场不能用库伦定律表出。

1.1.3 静电场的旋度

旋度所反映的是场的环流性质，下面我们用库伦定律来证明电场没有旋度。在电场空间的某个环路中有下面的关系

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.9}$$

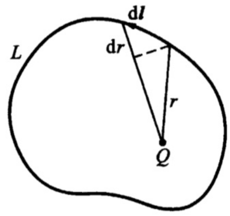

图 1.1: 电场环路

观察上式得到右边的被积函数是一个全微分，绕 L 的回路积分值为零。因此得到

$$\boxed{\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0} \tag{1.10}$$

将回路不断缩小，得到静电场的旋度表达

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.11}$$

电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷，在自由空间中电场线连续通过；在静电情形下电场没有旋涡状结构。

1.2 电流和磁场

在介绍磁场性质之前，先给出两个电流分布的基本规律。

1.2.1 电荷守恒定律

一个系统的总电荷严格保持不变。以电流和电荷的关系用连续性方程表示为

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V \tag{1.12}$$

化简得到微分方程

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1.13}$$

上式被称为**电流连续性方程**。特别的，当研究的对象是恒定电流时，物理量不随时间变化，此时 $\partial\rho/\partial t = 0$，所以在恒定电流情况下

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{1.14}$$

这一点也可以印证恒定电流的分布是无源的，流线必为闭合曲线。

1.2.2 毕奥-萨伐尔定律

该定律描述了两个电流之间的作用力，一个电流元在磁场中受到的力可以表示为

$$d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{1.15}$$

给出电流密度之后表示场点上的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}'\right)\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V' \tag{1.16}$$

当电流集中在细导线上，改写定律为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.17}$$

1.2.3 磁场的环量和旋度

磁场沿闭合曲线的环量与通过闭合曲线所围曲面的电流 I 成正比

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I \tag{1.18}$$

上式称为安培环路定律，可以通过毕奥-萨伐尔定律证明，在此不多赘述。

求得微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J} \tag{1.19}$$

1.2.4 磁场的散度

磁感应强度是无源场，对任何闭合曲面的总通量为零

$$\oint_s\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{1.20}$$

微分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.21}$$

1.2.5 磁场旋度和散度公式的证明

1.3 麦克斯韦方程组

在之前的章节里我们已经讨论了静电磁场的散度和旋度，下面我们考虑变化的电磁场的关系，主要是考虑新增的两个物理量之间的联系

1. 变化的磁场激发电场

2. 变化的电场激发磁场

1.3.1 电磁感应定律

我们引入线圈 L 上的感应电动势，已知它和磁通量的变化率成正比。对于闭合线圈而言，感应电动势的存在表面线圈中存在电场，且感应电动势是电场强度沿闭合回路的线积分，综合上述得到

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\mathscr{E}=-\frac{d}{dt}\int_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.22}$$

微分形式

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\tag{1.23}$$

感应电场是有旋场。

1.3.2 位移电流

在上一节我们指出恒定电流是闭合的，在交变的情况下，电流分布不再是闭合的——可以用带电容器的电路为例，实际上该处的电流是中断的。

恒定电流满足安培环路定律1.18，对式子两边取散度，由于 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}\equiv 0$，上式只有当 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ 的时候成立，而恒定电流下无磁场产生，因此两者相互矛盾。

我们假设存在一个位移电流 $\boldsymbol{J}_D$，使得它和电流 $\boldsymbol{J}$ 合起来构成闭合的电流，满足

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}})=0\tag{1.24}$$

这样可以解决前文的矛盾，现在只需要表示出位移电流，联立

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{gathered}\tag{1.25}$$

得到 $\boldsymbol{J}_D$ 的一个可能的表达式[1]

$$\boldsymbol{J}_{\mathbf{D}}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{1.26}$$

综上所述，得到 MaxWell 方程组

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\end{gathered}}\tag{1.27}$$

1.3.3 洛伦兹力公式

场对电荷体系的作用分别表述为电场和磁场之间的作用，通过库仑定律和安培定律体现，分别是

$$\begin{gathered}\vec{F}=Q\vec{E}\\ d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}=\vec{J}\times\vec{B}dV\end{gathered}\tag{1.28}$$

两者相加并写作力密度的形式

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}\tag{1.29}$$

对于单个点电荷，很容易得到关系 $\vec{J}=\rho\vec{v}$

化简得

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}\tag{1.30}$$

[1]实际上由式1.24可以得到多个可能的解，只是该解是最简单的求解

1.4 介质的电磁性质

介质是一个带电粒子系统，在介质被极化的时候，由正点中心和负电中心是否重合分为两类：重合的介质在

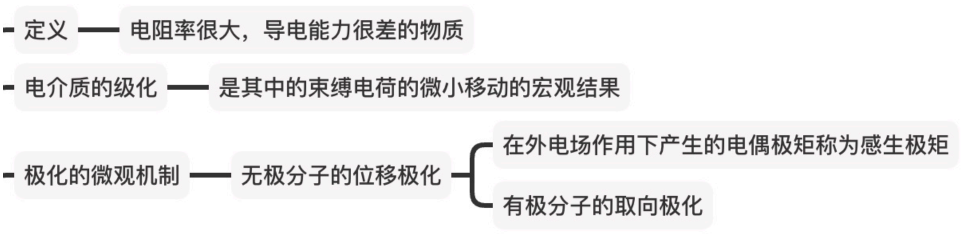

图 1.2: 电磁介质

1.4.1 介质的极化

在外场的作用下，介质中的正负电子对会一致取向排列，形成有图的排列。如果正电荷在外，那么介质中便有等量的负电荷来维持介质的整体电中性。**这种由于极化而出现的电荷分布称为束缚电荷**，以 ρ_p 表示束缚电荷密度，有关系

$$\int_V \rho_{\mathrm{P}} \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}S \tag{1.31}$$

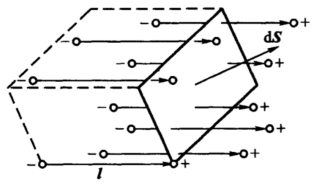

图 1.3: 介质的极化

对于体积分的表示，则可以表达为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{1.32}$$

非均匀介质极化后整个介质内部都有束缚电荷出现，而在均匀介质内，束缚电荷字出现在自由电荷附近和介质界面处。我们需要特别说明的是介质分界面上束缚电荷的表示，由上图1.3可以得知——在两个介质的分界面，介质 1 和介质 2 分别都有本介质极化后的剩余电荷和另一个介质“漂移”过来的电荷，在分界面薄层出现的净余电荷就可以表示为 $-(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中有束缚电荷面密度 σ_p，则进一步表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}} \mathrm{d}S = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.33}$$

$$\sigma_{\mathrm{P}} = -\boldsymbol{e}_{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \tag{1.34}$$

介质内的电现象包括两个方面. 一方面电场使介质极化而产生束缚电荷分布，另一方面这些束缚电荷又反过来激发电场，两者是互相制约的。**介质对宏观电场的作用就是通过束缚电荷激发电场**。

所以整体仍然满足 Maxwell 方程

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{p}} \tag{1.35}$$

由于束缚电荷不易测量，更容易得到的是自由电荷，我们引入辅助量电位移矢量 $\mathbf{D}$，定义为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1.36}$$

可以看出，$\mathbf{D}$ 并不能代表介质中的场强，仅仅有着辅助的作用代入上式得到关系

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \tag{1.37}$$

极化强度矢量毫无疑问与外电场强度呈某种比例关系，对于一般的各向同性线性介质，极化强度和

电场强度有着线性关系

$$\boldsymbol{P}=\chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1.38}$$

联立上式很容易得到关系

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\bar{E} \tag{1.39}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0,\quad \varepsilon_{\mathrm{r}}=1+\chi_{\mathrm{e}} \tag{1.40}$$

ε 称为介质的电容率, ε_{r} 为相对电容率。

我们需要明确的是

1. 电场 E 是电场的基本物理量，代表介质中的总宏观电场强度

2. 电位移矢量仅仅只是一个辅助量，用于方便的建立与介质自由电荷之间的关系

1.4.2 介质的磁化

目前介质磁化的理论解释有两种——分子电流观点和磁荷观点，我们在这里以分子电流为例。

为使得介绍的流程更加明晰，我们先直接写出麦克斯韦方程组在介质中的满足的方程

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.41}$$

其中 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ 为介质中的自由电流密度，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}$ 为介质中的磁化电流密度，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}$ 为介质中的极化电流密度，后两者一并称为**诱导电流密度**。下面介绍它们的形成机理。

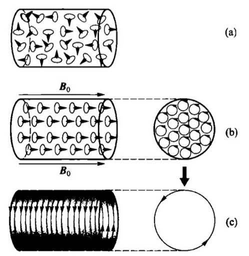

图 1.4: 分子电流磁化

对于磁化电流密度。为描述磁介质的磁化状态，引入磁化强度矢量，定义为单位体积内分子磁矩的矢量和，我们把宏观体积元内的分子看作电流环，那么只要刚刚与面边缘相交的环对介质磁化有着共贡献，那么可以得到关系

$$\oint_L M\cdot\mathrm{d}l=\sum_{(L\text{ 内})}I' \tag{1.42}$$

相应的微分形式为

$$J_M=\nabla\times M \tag{1.43}$$

而对于极化电流密度而言，是电场变化导致的介质极化强度变化而产生的电流，满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}=\frac{\sum_i e_i\boldsymbol{v}_i}{\Delta V}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}} \tag{1.44}$$

和介质的电场规律一样，自由电流的分布可以直接通过实验测得，我们希望引入一个物理量使得它仅由介质性质和自由电流的分布决定，由上式变化得

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.45}$$

引入磁场强度 $\mathbf{H}$，定义为

$$\mathbf{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\mathbf{M} \tag{1.46}$$

这样就有关系

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.47}$$

从式1.41和式1.47可以看出，磁感应强度 B 描述了介质内整体的宏观磁场，而 H 仅仅只是一个辅助物理量，为能完备的描述 H 和 B 之间的关系，我们还需要介质的磁化率 χ_M。对于各向同性非铁磁物质而言，上式的几个物理量之间有着线性关系[2]

$$\mathbf{M} = \chi_{\mathrm{M}}\mathbf{H} \tag{1.48}$$

$$B = \mu\mathbf{H} \tag{1.49}$$

$$\mu = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0, \quad \mu_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{M}} \tag{1.50}$$

1.4.3 介质中的 Maxwell 方程组

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned}} \tag{1.51}$$

式中出现的 ρ 等符号都是直接代指自由电荷和自由电流的分布。

上述方程组想要求解还需要下面的一些关系

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon\bar{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{J} &= \sigma\bar{E} \end{aligned} \tag{1.52}$$

注意，这只在部分的各向同性介质中成立，对于更复杂的异性介质，可能需要张量式来描述

在介质中电场磁场相应的对应关系为

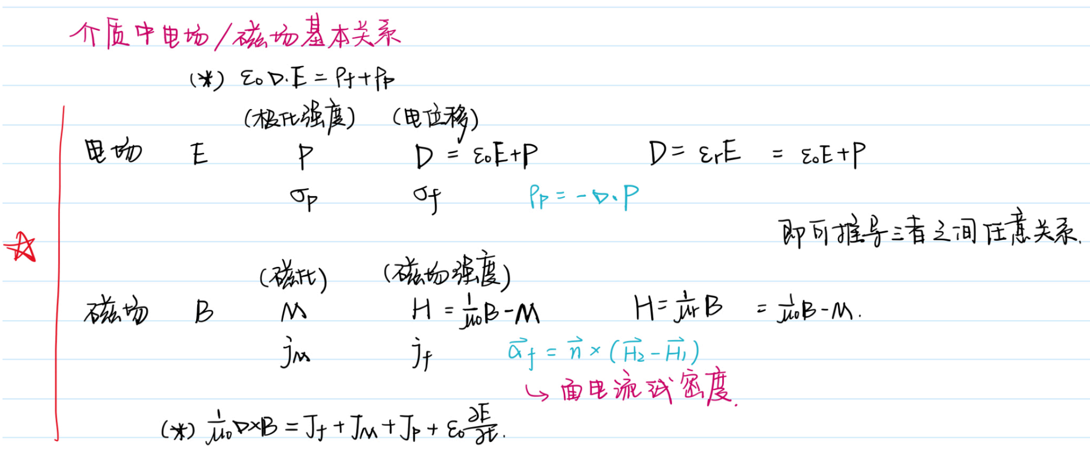

图 1.5: 介质中电场磁场对应关系

[2]为什么讨论磁介质的时候要考虑极化带来的影响，而讨论极化的时候没有与磁化相关的项

1.5 电磁场边值关系

我们在本节的开始直接给出积分形式的介质内麦克斯韦方程组，根据下式我们可以很直观的推导出电磁场的边值关系

$$\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}} \\
&\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0
\end{aligned} \tag{1.53}$$

1.5.1 法向分量的关系

总电场的 Maxwell 方程组有

$$\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_{\mathrm{f}} + Q_{\mathrm{P}} \tag{1.54}$$

如果在边界面上取一个厚度几乎为零的圆柱体，那么上式的面积分就等价于 $(E_{2\mathrm{n}} - E_{1\mathrm{n}})\,\Delta S$，对于上式而言，及方程左边化为面密度的物理量，即

$$\varepsilon_0\,(E_{2\mathrm{n}} - E_{1\mathrm{n}}) = \sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}} \tag{1.55}$$

本式在前文讨论介质极化的时候已经提到过，见式1.35

同样的，根据介质极化的相关结论，我们可以得到

$$P_{2\mathrm{n}} - P_{1\mathrm{n}} = -\sigma_{\mathrm{P}} \tag{1.56}$$

$$\boxed{D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}} = \sigma_{\mathrm{f}}} \tag{1.57}$$

可以看出，与介质极化相关的这三个物理量，以及三者在法向上的跃变，分别受不同的电荷面密度影响。

相应的，对于磁场满足

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.58}$$

同样的利用取薄圆柱体的方法，容易得到

$$\boxed{B_{2\mathrm{n}} = B_{1\mathrm{n}}} \tag{1.59}$$

1.5.2 切向分量的关系

先明确面电流分布——及体电流分布在宏观上等效于表面电流分布的一种考虑情况，我们假设面电流线密度为 α，则垂直流过一段距离的电流表示为

$$\Delta I = \alpha \Delta l \tag{1.60}$$

根据式1.53第二式可以得知求解磁场的边值关系需要的两个物理量——I_f 和 $\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$。

我们选取介质表面一个宽度趋近于零的矩形，面电流的方向垂直于平面方向，如图1.7。

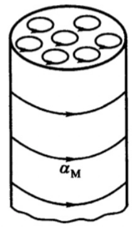

图 1.6: 磁化面电流示意图

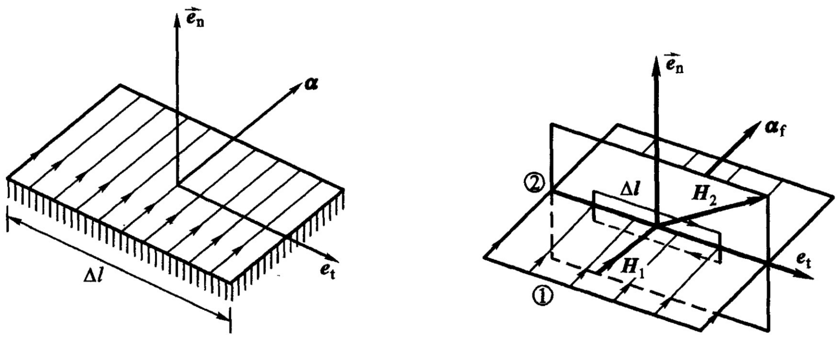

图 1.7: 切向分量边值关系示意图

由于这个回路的面积趋近于零且电位移矢量 D 有限大，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \to 0 \tag{1.61}$$

另一项的推导也非常的明显

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = (H_{2t} - H_{1t})\Delta l = \alpha_f \Delta l \tag{1.62}$$

即

$$H_{2\mathrm{t}} - H_{1\mathrm{t}} = \alpha_f \tag{1.63}$$

刚刚给出的分量形式的边值关系，对于一般的矢量

$$\boxed{\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f} \tag{1.64}$$

同理，电场的情况就要简单很多

$$\boxed{\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0} \tag{1.65}$$

对于自由电荷面密度 σ 和自由电流线密度 $\boldsymbol{\alpha}_f$ 我们能够总结出边值关系为（其中 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 是由介质 1 指向介质 2 的单位法向量。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \\
&\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha} \\
&\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma \\
&\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0
\end{aligned} \tag{1.66}$$

1.6 电磁场的能量和能流

1.6.1 场与电荷系统的能量守恒关系

由于场的运动能量具有方向性，在不同方向相同距离测量场源发射的强度可能会得到不同的结果，所以对于场的能量的描述，需要两个物理量

1. 场的能量密度 ω，它代表场内单位体积的能量，与空间位置和时间有关
2. 场的能流密度 $\boldsymbol{S}$，它代表能量在场内的传播，在数值上等于单位时间垂直流过单位横截面的能量，其方向代表能量传输的方向

对于空间中某区域 V，我们考虑外界流入能量、区域内场和电荷相互作用引起的能量改变、区域内场的总能量的变化这三者之间的关系。首先以 $\boldsymbol{f}$ 表示场对电荷作用力的密度，$\boldsymbol{v}$ 表示电荷运动的速度，则场对电荷作用的功率为

$$\int_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

同样给出区域内场的能量增加率

$$\frac{d}{dt}\int_V \omega dV$$

以上的两个量都可以视作区域内场和电荷体系的“内能”，通过界面 S 进入区域的能量为

$$-\oint_S \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

由能量守恒定律，内部能量变化等于与外界进行的能量交换

$$-\oint_S \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{dt}\int_V \omega dV + \int_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.67}$$

给出微分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S} + \frac{\partial\omega}{\partial t} = -\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.68}$$

特别的，如果我们选取的是全空间作为区域，则不存在与外部的能量交换 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0$。这样就代表场对电荷作用的功率等于场自身的能量变化，证明了场和电荷组成的体系能量守恒。

1.6.2 电磁场能量密度和能流密度的表达式

由麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式进行推导，用洛伦兹力公式表示场对电荷的功率

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} = (\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \tag{1.69}$$

将上式整理为与电磁场场量相关的物理量表示即可

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} = (\nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

用矢量分析公式得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}) &= -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\\ &= -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

代入上式得到关系

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.70}$$

对比式1.68可以找到能量密度和能流密度。其中能流密度也称为 Poynting 矢量。

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\ \frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{gathered}} \tag{1.71}$$

我们在两种最常见的情况下讨论我们的结果

I. 真空中电荷分布的情形

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

直接代入式1.68，可以得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \\
\omega &= \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

II. 介质中分布的情形。在介质中，原本场和自由电荷之间的关系增加了一个与介质的关系，这时候磁化能和极化能需要一起归入考虑。一般的，可以写作

$$\delta\omega = \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B} \tag{1.73}$$

特别的，在线性介质中我们可以和真空的情况一起考虑

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

代表电导率和磁导率与空间位置无关，这种情况下取微分就等于

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\cdot\right) \tag{1.74}$$

Chapter 2

静电场

Chapter 3

静磁场

Chapter 4

电磁波的传播

4.1 平面电磁波

4.1.1 电磁场波动方程的导出

考虑在没有自由电荷分布的自由空间或均匀绝缘介质中的电磁场运动形式的情况下（即 $\rho = 0, J = 0$ 的情况下），麦克斯韦方程可以写作

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

先讨论在真空情形中 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 的情况，联立上述两式，并结合式4.1可以得到

$$\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{4.2}$$

上式两边同时取旋度得到

$$\nabla \times (\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{4.3}$$

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 t} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{4.4}$$

根据式4.1第三项和第四项可以得到 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，整理上式得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 t} = \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 t} = 0 \tag{4.5}$$

同理，如果对磁场进行相应的操作可以得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial^2 t} = 0 \tag{4.6}$$

式4.5和4.6统称为波动方程，c 是电磁波在真空中的传播速度。请务必明确上面是在没有自由电荷分布的自由空间或均匀绝缘介质中才成立。[1]

4.1.2 时谐电磁波

时谐电磁波，即电磁波的激发源以一定频率正弦振荡激发的电磁波称为时谐电磁波，亦称为单色波。一个非时谐的电磁波也可以使用傅立叶分析转化为时谐电磁波的叠加。

我们讨论一定频率的电磁波，设角频率为 ω，电磁场对时间的依赖关系就是 $\cos \omega t$，或者以复数的形式代为表示以简化之后的计算量[2]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} e^{-i\omega t} \\ cos(\omega t) \end{gathered} \tag{4.8}$$

[1] 对于介质中的传播形式，我们在这里不赘述，详细请翻阅教材

[2] 我们可以发现转换为复数形式之后其实相较于原来的物理意义多出了 $i \sin \omega t$ 项，国内的大多数教材对于这里的解释是不够清晰的。其实两者在物理意义上是不相等的。这里主要强调的是一种对应关系，以复数形式代为进行计算以简化计算的难度，对应关系和相等关系是有区别的，更为严谨的写法应该是 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}]$。在之后涉及到瞬时能流密度计算的时候会变回实部，我们在那时给出相应的理解。

代入麦克斯韦方程组可以直接消去共同因子 $e^{i\omega t}$ 得到[3]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

上一节推导真空电磁场波动方程的流程依然适用，

$$\boxed{\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\nabla^2\boldsymbol{E} = \omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}} \tag{4.10}$$

得到[4]，该式称为 Helmholtz 方程，是一定频率电磁波的基本方程，其解 $\boldsymbol{E}(x)$ 是电磁波场强在空间中的分布情况，每一种可能的形式称为一种波模。

$$\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} &= 0 \\ k &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.11}$$

代入麦氏方程可以得到磁场[5]

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{E} \tag{4.12}$$

4.1.3 平面电磁波

我们假设一种最基本的解，它是平面波。设电磁波沿 x 轴方向传播，其场强在与 x 轴正交的平面上各点具有相同的值。这种情况下 Helmholtz 方程退化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.13}$$

求解上式并加上时谐项可以得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = \boldsymbol{E}(\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)) \tag{4.14}$$

对于实际存在的场强应该理解为上式只取实数部分

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}\cos(kx-\omega t) \tag{4.15}$$

我们直接考虑相位因子 $\cos(kx-\omega t)$ 的意义，它给出了电磁场随位置和时间变化的关系；考虑 t=0 的情况时，有波峰在 x=0 处，在 $t = 1/\omega$ 时，这一波峰移到 $x = 1/k$，我们可以计算得到相速度

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.16}$$

[3]在 $\omega \neq 0$ 的情况下，这四个方程不是独立的，有第一式可以推导第二式，第三式可以推导第四式

[4]在假定了条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ 之后才能够直接写成这种形式

[5]如果用磁场的方式给出这个方程，则为

$$\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{B} + k^2\boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{B} &= \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{\mu\varepsilon}}\nabla\times\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

为保证文本的连贯性，不在正文中直接给出

我们已经知道在真空中这一速度是光速，相应的在介质中就可以表示为

$$v = \frac{c}{\mu_r \varepsilon_r} \tag{4.17}$$

上述的计算是由于我们选择了情况最简单的一个坐标系——波矢量刚好和 x 轴的方向平行，对于一般的情况波矢量和空间上任意一个位矢应该表示为 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$，或者用位矢在波矢量方向上的投影 x'，记作 kx'[6]。如果我们以 x'作垂直于波矢量的平面，就可以得到一个等相位的平面。

在求解式4.15之前，我们要明确该式的得出需要满足4，我们直接对式4.15取散度得到

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} = \mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} = \mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.18}$$

即

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.19}$$

表示电场的波动是横波，$\boldsymbol{E}$ 的取向称为电磁波的偏振方向。如果我们选垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的两个相互正交的方向作为偏振方向，我们可以称对于每一个 $\boldsymbol{k}$ 都有两个独立的偏振波。

下面考虑磁场，根据式4.12

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}[\nabla \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}] \times \boldsymbol{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{E} \tag{4.20}$$

可以看出同样是横波。且和相位项无关，电场波和磁场波同相。

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v \tag{4.21}$$

v 为当前介质下的光速。

4.1.4 电磁场的能量和能流

由式1.74可以得到线性介质中能量密度的表达式。在平面电磁波中有 $\varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu}B^2$，即平面电磁波中电场和磁场的能量相等，即

$$\omega = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu}B^2 \tag{4.22}$$

根据式4.21，可以计算能流密度

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{e}_k \tag{4.23}$$

可以直接写作与能量密度相关的形式

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}w\boldsymbol{e}_k = vw\boldsymbol{e}_k} \tag{4.24}$$

v 为电磁波的相速度。现在形式下能量密度和能流密度的关系就十分的明显，更像是“力”与“功率”之间的关系。

下面计算能量密度和能流密度的瞬时值，这时候不能把场强中的复数项直接代入计算，只能取实数

[6]这里的 k 已经退化成一个标量，我们一般称为波数，等于

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

项[7]。

$$w=\varepsilon E_0^2\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2[1+\cos 2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)] \tag{4.25}$$

相较于上面这个瞬时值的式子，我们更在意的是一个周期内它的平均值，我们知道余弦函数在一个周期内的平均值是 $1/2$[8]，我们就可以直接得到它们的平均值[9]

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\omega\rangle&=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2\\ \langle\boldsymbol{S}\rangle&=\frac{1}{2}c\varepsilon_0E_0^2\boldsymbol{e}_k\end{aligned}} \tag{4.26}$$

4.2 电磁波在介质界面上的反射和折射

本节的主要内容可以看作是对1.5节在电磁波具体方程形式下的拓展

4.2.1 反射和折射定律

式1.66给出了电磁场的边值关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)&=0\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)&=\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)&=\sigma\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)&=0\end{aligned} \tag{4.27}$$

由于对于时谐电磁波而言麦氏方程只有两个方程独立，则只需要用到[10]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)&=0\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)&=\boldsymbol{\alpha}\end{aligned} \tag{4.28}$$

设反射波和折射波也是平面波 (由下面所得结果可知这假定是正确的). 设入射波、反射波和折射波的频率相同, 电场强度分别为 E E' 和 E'', 波矢量分别为 k k' 和 k''. 它们的平面波表示式分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}'\cdot x-\omega t\right)}\\ \boldsymbol{E}'&=\boldsymbol{E}_0'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}'\cdot x-\omega t\right)}\\ \boldsymbol{E}''&=\boldsymbol{E}_0''\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}'\cdot x-\omega t\right)}\end{aligned}$$

代入式4.28第一项，得到

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{i}\cdot x}+\boldsymbol{E'}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot x}\right)=\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{E}_0''\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot x}$$

若分界面取在 $z=0$，这个分界面上的任意 x 和 y 都应该满足上式

$$\vec{n}\times\vec{E}_0e^{i(k_xx+k_yy)}+\vec{n}\times\vec{E}_0'e^{i\left(k_x'x+k_y'y\right)}=\vec{n}\times\vec{E}_0''e^{i\left(k_x''x+k_y''y\right)}$$

[7]因为在之前的平均强度计算中，是 $|\boldsymbol{E}|^2$，取模之后复数项是不会计算结果的，在瞬时值计算的时候，复数项就不能纳入考虑了

[8]这里有个计算技巧，因为有关系 $\sin^2x+\cos^2x=1$，在一个完整周期内两者的地位对称，则一个完整周期内 $\cos^2x$ 的平均值为 $1/2$。更严格来说有

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(kz-2\pi t/T+\delta)dt=\frac{1}{2}$$

[9]Question：在这里笔者仍保有疑惑，格里菲斯教材对4.23和4.24的理解是宏观情况下电磁波包含许多个周期，而考虑一个周期的平均能流的时候就只取 $1/2$，是否有些牵强?

[10]在介质的表述中 $\boldsymbol{H}$ 直接和表面电流相关，更为方便

两边同时除以

$$e^{i(k_x''x+k_y''y)}$$

可以得到

$$\vec{n}\times\vec{E}_0e^{i\left[\left(k_x-k_x''\right)x+\left(k_y-k_y''\right)y\right]}+\vec{n}\times\vec{E}_0'e^{i\left[\left(k_x'-k_x''\right)x+\left(k_y'-k_y''\right)y\right]}=\vec{n}\times\vec{E}_0''$$

对任意 x、y 都成立，只能满足

$$k_x=k_x'=k_x''\quad k_y=k_y'=k_y''$$

结合相速度关系式4.16并将分量写成矢量乘角度的形式，得到[11]

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{k''}{k'}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\approx\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}\tag{4.29}$$

即

$$\boxed{n_1\sin\theta=n_2\sin\theta''\quad(\mu=\mu_0)}\tag{4.30}$$

4.2.2 振幅关系与菲涅尔公式

分为电场垂直于入射面和平行于入射面射入的情况

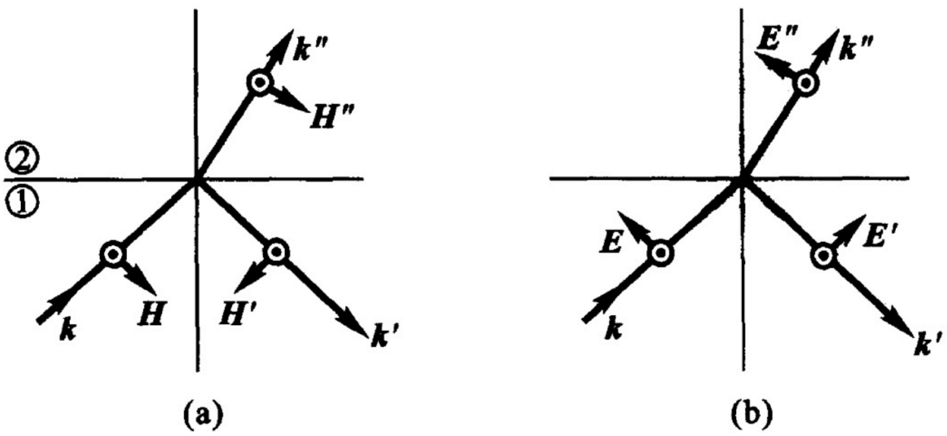

图 4.1: 电场入射方向

(1) 电场垂直于入射面。直接根据边值关系写出

$$\begin{gathered}E+E'=E''\\H\cos\theta-H'\cos\theta'=H''\cos\theta''\end{gathered}\tag{4.31}$$

利用关系 $H=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$ 和 $\mu=\mu_0$，并利用折射定律化简可以得到

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{E'}{E}&=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=-\frac{\sin\left(\theta-\theta''\right)}{\sin\left(\theta+\theta''\right)}\\\frac{E''}{E}&=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin\left(\theta+\theta''\right)}\end{aligned}}\tag{4.32}$$

[11] 除铁磁质以外，一般的介质都满足 $\mu\approx\mu_0$

(2) 电场平行于入射面。同理

$$\begin{aligned} H + H' &= H'' \\ E\cos\theta - E'\cos\theta' &= E''\cos\theta'' \end{aligned} \tag{4.33}$$

同样代换电场和磁场可以得到

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E'}{E} &= \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')} \\ \frac{E''}{E} &= \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')} \end{aligned}} \tag{4.34}$$

上式4.32和式4.34称为菲涅尔公式，阐述了入射波、反射波和折射波的强度关系。对于正常的电磁波，有各个方向偏振的成分，但是我们可以看到电场偏振方向的不同会有不同的反折射关系。恰好对于 $\theta + \theta' = 90°$ 的情况，根据式4.34可知，平行于边界面入射的电场反射波为零，即这时的反射波全部为垂直偏振的偏振光。**这是光学中的布儒斯特定律，满足 $\theta + \theta' = 90°$ 的角称为布儒斯特角**。

菲涅尔公式也同样可以得出半波损失的结论——当 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ 时有 $\theta > \theta'$，则 E'/E 为负数，反射波电场和入射波电场反相。

4.2.3 全反射关系

由于全反射涉及到上节没有纳入考虑的一个新的波模，故另起一节做记录