

电动力学笔记

郭蒙

中山大学物理学院，广东，广州，510275

目录

| | |
|------------------------|-----------|
| 1 电磁现象的普遍规律 | 1 |
| 1.1 电荷和电场 | 2 |
| 1.1.1 库伦定律 | 2 |
| 1.1.2 高斯定理和电场散度 | 2 |
| 1.1.3 静电场的旋度 | 3 |
| 1.2 电流和磁场 | 3 |
| 1.2.1 电荷守恒定律 | 3 |
| 1.2.2 毕奥-萨伐尔定律 | 4 |
| 1.2.3 磁场的环量和旋度 | 4 |
| 1.2.4 磁场的散度 | 4 |
| 1.2.5 磁场旋度和散度公式的证明 | 4 |
| 1.3 麦克斯韦方程组 | 4 |
| 1.3.1 电磁感应定律 | 4 |
| 1.3.2 位移电流 | 5 |
| 1.3.3 洛伦兹力公式 | 5 |
| 1.4 介质的电磁性质 | 6 |
| 1.4.1 介质的极化 | 6 |
| 1.4.2 介质的磁化 | 7 |
| 1.4.3 介质中的 Maxwell 方程组 | 8 |
| 1.5 电磁场边值关系 | 9 |
| 1.5.1 法向分量的关系 | 9 |
| 1.5.2 切向分量的关系 | 9 |
| 1.6 电磁场的能量和能流 | 10 |
| 1.6.1 场与电荷系统的能量守恒关系 | 10 |
| 1.6.2 电磁场能量密度和能流密度的表达式 | 11 |
| 2 静电场 | 13 |
| 2.1 静电场的标势和微分方程 | 14 |
| 2.1.1 静电场的标势 | 14 |
| 2.1.2 静电势的微分方程和边值关系 | 14 |
| 2.1.3 静电场能量 | 15 |
| 2.2 唯一性定理 | 15 |
| 2.2.1 静电问题的唯一性定理 | 15 |
| 2.2.2 有导体存在时的唯一性定理 | 15 |
| 2.3 Laplace 方程与分离变量法 | 15 |
| 2.4 镜像法 | 16 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 目 录 | II |
| 2.5 格林函数 | 16 |
| 2.5.1 格林函数的定义 | 16 |
| 2.6 电多极矩 | 16 |
| 3 静磁场 | 17 |
| 4 电磁波的传播 | 18 |
| 4.1 平面电磁波 | 19 |
| 4.1.1 电磁场波动方程的导出 | 19 |
| 4.1.2 时谐电磁波 | 19 |
| 4.1.3 平面电磁波 | 20 |
| 4.1.4 电磁场的能量和能流 | 21 |
| 4.2 电磁波在介质界面上的反射和折射 | 22 |
| 4.2.1 反射和折射定律 | 22 |
| 4.2.2 振幅关系与菲涅尔公式 | 23 |
| 4.2.3 全反射关系 | 24 |
| 4.3 电磁波在导体内的传播 | 25 |
| 4.3.1 导体内的自由电荷的分布 | 25 |
| 4.3.2 导体内的电磁波 | 26 |
| 4.3.3 趋肤效应和穿透深度 | 27 |
| 4.3.4 在导体表面的反射 | 27 |
| 4.4 谐振腔和波导 | 28 |
| 4.4.1 有界空间空间中的电磁波 | 28 |
| 4.4.2 谐振腔 | 28 |
| 5 电磁波的辐射 | 30 |
| 5.1 电磁场的矢势和标势 | 31 |
| 5.1.1 用势描述电磁场 | 31 |
| 5.1.2 达朗贝尔方程 | 31 |
| 5.2 推迟势 | 32 |
| 5.3 几种常见的辐射形式 | 33 |
| 5.3.1 计算辐射场的一般公式 | 33 |
| 5.3.2 电偶极辐射 | 34 |
| 5.3.3 高频电流分布的磁偶极矩和电四极矩 | 35 |
| 5.3.4 磁偶极辐射 | 35 |
| 5.3.5 电四极辐射 | 36 |
| 5.4 电磁波的衍射 | 36 |
| 5.4.1 基尔霍夫公式 | 36 |
| 5.4.2 夫琅和费衍射 | 36 |
| 5.5 电磁场的动量 | 37 |
| 5.5.1 麦克斯韦应力张量 | 37 |
| 5.5.2 动量守恒 | 37 |
| 5.6 切连科夫辐射 | 37 |

Chapter 1

电磁现象的普遍规律

1.1 电荷和电场

1.1.1 库伦定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 \mathbf{F} 为

$$\mathbf{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

其中 ϵ_0 为真空介电常量。

现代观点认为两电荷之间的作用力是通过场传递的，由上式可知电荷受到的作用力与电荷量 Q 成正比，我们定义电场强度 $\mathbf{E}(x)$ 来表述电荷之间的作用力

$$\mathbf{F} = Q' \mathbf{E} \quad (1.2)$$

结合两式可以直接表达出电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3)$$

在实际情况下，由于电场具有叠加性，由物体的电荷密度球积分可以得到一个几何物体周围的电场强度分布

$$\mathbf{E}(x) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' \quad (1.4)$$

1.1.2 高斯定理和电场散度

在研究电荷和电场的关系时，我们知道电荷 Q 发出的电场强度的通量总是正比于 Q ，与附近其他电荷的存在无关，我们以点电荷周围的闭合曲面 S 的电场强度 \mathbf{E} 的通量，由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

将面元投影得到闭合曲面的通量

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

其中 $d\Omega$ 为立体角元。相应的，对于已知的空间电荷分布，对相应的电荷求积分即可得到

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.7)$$

当体积 V 不断缩小的时候，电场的通量可以改写为散度的形式，有

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.8)$$

它是电场的一个基本微分方程，反映电场作用的局域性质：空间某点领域上场的散度只和点上的电荷密度有关，而和其他地点的电荷分布无关。特别的，在一般的运动电荷的前提下，远处的场不能用库伦定律表出。

1.1.3 静电场的旋度

旋度所反映的是场的环流性质，下面我们用库伦定律来证明电场没有旋度。在电场空间的某个环路中有下面的关系

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.9)$$

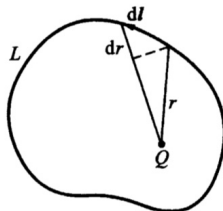


图 1.1: 电场环路

观察上式得到右边的被积函数是一个全微分，绕 L 的回路积分值为零。因此得到

$$\boxed{\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0} \quad (1.10)$$

将回路不断缩小，得到静电场的旋度表达

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.11)$$

电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷，在自由空间中电场线连续通过；在静电情形下电场没有旋涡状结构。

1.2 电流和磁场

在介绍磁场性质之前，先给出两个电流分布的基本规律。

1.2.1 电荷守恒定律

一个系统的总电荷严格保持不变。以电流和电荷的关系用连续性方程表示为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.12)$$

化简得到微分方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

上式被称为**电流连续性方程**。特别的，当研究的对象是恒定电流时，物理量不随时间变化，此时 $\partial \rho / \partial t = 0$ ，所以在恒定电流情况下

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.14)$$

这一点也可以印证恒定电流的分布是无源的，流线必为闭合曲线。

1.2.2 毕奥-萨伐尔定律

该定律描述了两个电流之间的作用力，一个电流元在磁场中受到的力可以表示为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.15)$$

给出电流密度之后表示场点上的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1.16)$$

当电流集中在细导线上，改写定律为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.17)$$

1.2.3 磁场的环量和旋度

磁场沿闭合曲线的环量与通过闭合曲线所围曲面的电流 I 成正比

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (1.18)$$

上式称为安培环路定律，可以通过毕奥-萨伐尔定律证明，在此不多赘述。

求得微分形式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.19)$$

1.2.4 磁场的散度

磁感应强度是无源场，对任何闭合曲面的总通量为零

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.20)$$

微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.21)$$

1.2.5 磁场旋度和散度公式的证明

1.3 麦克斯韦方程组

在之前的章节里我们已经讨论了静电磁场的散度和旋度，下面我们考虑变化的电磁场的关系，主要是考虑新增的两个物理量之间的联系

1. 变化的磁场激发电场
2. 变化的电场激发磁场

1.3.1 电磁感应定律

我们引入线圈 L 上的感应电动势，已知它和磁通量的变化率成正比。对于闭合线圈而言，感应电动势的存在表面线圈中存在电场，且感应电动势是电场强度沿闭合回路的线积分，综合上述得到

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.22)$$

微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.23)$$

感应电场是有旋场。

1.3.2 位移电流

在上一节我们指出恒定电流是闭合的，在交变的情况下，电流分布不再是闭合的——可以用带电容器的电路为例，实际上该处的电流是中断的。

恒定电流满足安培环路定律1.18，对式子两边取散度，由于 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$ ，上式只有当 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 的时候成立，而恒定电流下无磁场产生，因此两者相互矛盾。

我们假设存在一个位移电流 \mathbf{J}_D ，使得它和电流 \mathbf{J} 合起来构成闭合的电流，满足

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) = 0 \quad (1.24)$$

这样可以解决前文的矛盾，现在只需要表示出位移电流，联立

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.25)$$

得到 \mathbf{J}_D 的一个可能的表达式¹

$$\mathbf{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.26)$$

综上所述，得到 Maxwell 方程组

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (1.27)$$

1.3.3 洛伦兹力公式

场对电荷体系的作用分别表述为电场和磁场之间的作用，通过库仑定律和安培定律体现，分别是

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q\vec{E} \\ d\vec{F} &= Id\vec{l} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} dV \end{aligned} \quad (1.28)$$

两者相加并写作力密度的形式

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.29)$$

对于单个点电荷，很容易得到关系 $\vec{J} = \rho\vec{v}$

化简得

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.30)$$

¹实际上由式1.24可以得到多个可能的解，只是该解是最简单的求解

1.4 介质的电磁性质

介质是一个带电粒子系统，在介质被极化的时候，由正点中心和负电中心是否重合分为两类：重合的介质在

- 定义 —— 电阻率很大，导电能力很差的物质
- 电介质的级化 —— 是其中的束缚电荷的微小移动的宏观结果
- 极化的微观机制 —— 无极分子的位移极化
 - 在外电场作用下产生的电偶极矩称为感生极矩
 - 有极分子的取向极化

图 1.2: 电磁介质

1.4.1 介质的极化

在外场的作用下，介质中的正负电子对会一致取向排列，形成有图的排列。如果正电荷在外，那么介质中便有等量的负电荷来维持介质的整体电中性。这种由于极化而出现的电荷分布称为束缚电荷，以 ρ_p 表示束缚电荷密度，有关系

$$\int_V \rho_p dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.31)$$

对于体积分的表示，则可以表达为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.32)$$

非均匀介质极化后整个介质内部都有束缚电荷出现，而在均匀介质内，束缚电荷只出现在自由电荷附近和介质界面处。我们需要特别说明的是介质分界面上束缚电荷的表示，由上图1.3可以得知——在两个介质的分界面，介质 1 和介质 2 分别都有本介质极化后的剩余电荷和另一个介质“漂移”过来的电荷，在分界面薄层出现的净余电荷就可以表示为 $-(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S}$ ，其中有束缚电荷面密度 σ_p ，则进一步表示为

$$\sigma_p dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.33)$$

$$\sigma_p = -\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (1.34)$$

介质内的电现象包括两个方面. 一方面电场使介质极化而产生束缚电荷分布，另一方面这些束缚电荷又反过来激发电场，两者是互相制约的。介质对宏观电场的作用就是通过束缚电荷激发电场。

所以整体仍然满足 Maxwell 方程

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p \quad (1.35)$$

由于束缚电荷不易测量，更容易得到的是自由电荷，我们引入辅助量电位移矢量 \mathbf{D} ，定义为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.36)$$

可以看出， \mathbf{D} 并不能代表介质中的场强，仅仅有着辅助的作用代入上式得到关系

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.37)$$

极化强度矢量毫无疑问与外电场强度呈某种比例关系，对于一般的各向同性线性介质，极化强度和

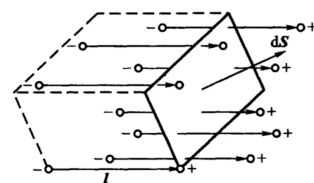


图 1.3: 介质的极化

电场强度有着线性关系

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.38)$$

联立上式很容易得到关系

$$\mathbf{D} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \quad (1.39)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.40)$$

ε 称为介质的电容率, ε_r 为相对电容率。

我们需要明确的是

1. 电场 \mathbf{E} 是电场的基本物理量, 代表介质中的总宏观电场强度
2. 电位移矢量仅仅只是一个辅助量, 用于方便的建立与介质自由电荷之间的关系

1.4.2 介质的磁化

目前介质磁化的理论解释有两种——分子电流观点和磁荷观点, 我们在这里以分子电流为例。

为使得介绍的流程更加明晰, 我们先直接写出麦克斯韦方程组在介质中的满足的方程

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.41)$$

其中 \mathbf{J}_f 为介质中的自由电流密度, \mathbf{J}_M 为介质中的磁化电流密度, \mathbf{J}_P 为介质中的极化电流密度, 后两者一并称为**诱导电流密度**。下面介绍它们的形成机理。

对于磁化电流密度。为描述磁介质的磁化状态, 引入磁化强度矢量, 定义为单位体积内分子磁矩的矢量和, 我们把宏观体积元内的分子看作电流环, 那么只要刚刚与面边缘相交的环对介质磁化有着共贡献, 那么可以得到关系

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{(L \text{ 内})} I' \quad (1.42)$$

相应的微分形式为

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.43)$$

而对于极化电流密度而言, 是电场变化导致的介质极化强度变化而产生的电流, 满足

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\sum_i e_i \mathbf{v}_i}{\Delta V} = \mathbf{J}_P \quad (1.44)$$

和介质的电场规律一样, 自由电流的分布可以直接通过实验测得, 我们希望引入一个物理量使得它仅由介质性质和自由电流的分布决定, 由上式变化得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.45)$$

引入磁场强度 \mathbf{H} , 定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.46)$$

这样就有关系

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.47)$$

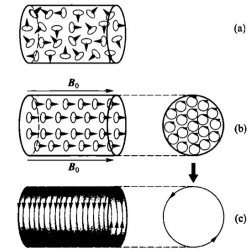


图 1.4: 分子电流磁化

从式1.41和式1.47可以看出，磁感应强度 \mathbf{B} 描述了介质内整体的宏观磁场，而 \mathbf{H} 仅仅只是一个辅助物理量，为能完备的描述 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 之间的关系，我们还需要介质的磁化率 χ_M 。对于各向同性非铁磁物质而言，上式的几个物理量之间有着线性关系²

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.49)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_M \quad (1.50)$$

1.4.3 介质中的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

式中出现的 ρ 等符号都是直接代指自由电荷和自由电流的分布。

上述方程组想要求解还需要下面的一些关系

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \bar{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (1.52)$$

注意，这只在部分的各向同性介质中成立，对于更复杂的异性介质，可能需要张量式来描述

在介质中电场磁场相应的对应关系为

介质中电场/磁场基本关系

| | | | |
|--|----------------|----------------|---|
| (*) $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p$ | | | |
| | (极化强度) | (电位移) | |
| 电场 | \mathbf{E} | \mathbf{P} | $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ |
| | σ_p | σ_f | $\mathbf{D} = \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ |
| | | | $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ |
| ☆ | 即可推导三者之间任意关系 | | |
| | (磁化) | (磁场强度) | |
| 磁场 | \mathbf{B} | \mathbf{M} | $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ |
| | \mathbf{j}_m | \mathbf{j}_f | $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ |
| | | | $\mathbf{j}_f = \nabla \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ |
| | | | ↳ 面电流密度 |
| (*) $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ | | | |

图 1.5: 介质中电场磁场对应关系

²为什么讨论磁介质的时候要考虑极化带来的影响，而讨论极化的时候没有与磁化相关的项

1.5 电磁场边值关系

我们在本节的开始直接给出积分形式的介质内麦克斯韦方程组，根据下式我们可以很直观的推导出电磁场的边值关系

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q_f \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0\end{aligned}\tag{1.53}$$

1.5.1 法向分量的关系

总电场的 Maxwell 方程组有

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_f + Q_P\tag{1.54}$$

如果在边界面上取一个厚度几乎为零的圆柱体，那么上式的面积分就等价于 $(E_{2n} - E_{1n}) \Delta S$ ，对于上式而言，及方程左边化为面密度的物理量，即

$$\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma_f + \sigma_P\tag{1.55}$$

本式在前文讨论介质极化的时候已经提到过，见式1.35

同样的，根据介质极化的相关结论，我们可以得到

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_P\tag{1.56}$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f}\tag{1.57}$$

可以看出，与介质极化相关的这三个物理量，以及三者在法向上的跃变，分别受不同的电荷面密度影响。

相应的，对于磁场满足

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0\tag{1.58}$$

同样的利用取薄圆柱体的方法，容易得到

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}}\tag{1.59}$$

1.5.2 切向分量的关系

先明确面电流分布——及体电流分布在宏观上等效于表面电流分布的一种考虑情况，我们假设面电流线密度为 α ，则垂直流过一段距离的电流表示为

$$\Delta I = \alpha \Delta l\tag{1.60}$$

根据式1.53第二式可以得知求解磁场的边值关系需要的两个物理量—— I_f 和 $\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 。

我们选取介质表面一个宽度趋近于零的矩形，面电流的方向垂直于平面方向，如图1.7。



图 1.6: 磁化面电流示意图

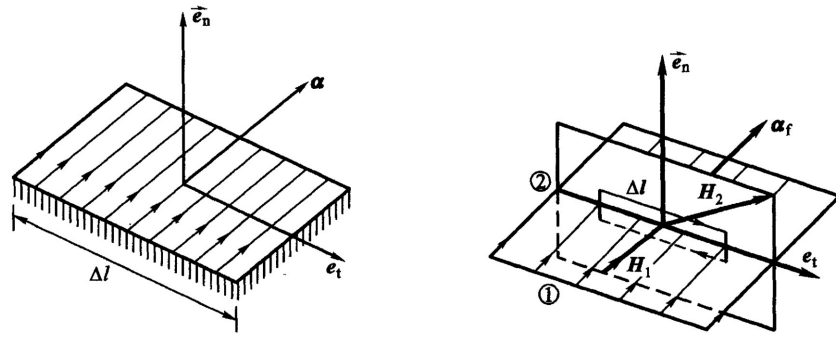


图 1.7: 切向分量边值关系示意图

由于这个回路的面积趋近于零且电位移矢量 D 有限大，则

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad (1.61)$$

另一项的推导也非常的明显

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{2t} - H_{1t})\Delta l = \alpha_f \Delta l \quad (1.62)$$

即

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f \quad (1.63)$$

刚刚给出的分量形式的边值关系，对于一般的矢量

$$\boxed{\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha_f} \quad (1.64)$$

同理，电场的情况就要简单很多

$$\boxed{\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0} \quad (1.65)$$

对于自由电荷面密度 σ 和自由电流线密度 α_f 我们能够总结出边值关系为（其中 \mathbf{e}_n 是由介质 1 指向介质 2 的单位法向量。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \alpha_f \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

1.6 电磁场的能量和能流

1.6.1 场与电荷系统的能量守恒关系

由于场的运动能量具有方向性，在不同方向相同距离测量场源发射的强度可能会得到不同的结果，所以对于场的能量的描述，需要两个物理量

1. 场的能量密度 ω ，它代表场内单位体积的能量，与空间位置和时间有关
2. 场的能流密度 \mathbf{S} ，它代表能量在场内的传播，在数值上等于单位时间垂直流过单位横截面的能量，其方向代表能量传输的方向

对于空间中某区域 V ，我们考虑外界流入能量、区域内场和电荷相互作用引起的能量改变、区域内场的总能量的变化这三者之间的关系。首先以 \mathbf{f} 表示场对电荷作用力的密度， \mathbf{v} 表示电荷运动的速度，则场对电荷作用的功率为

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

同样给出区域内场的能量增加率

$$\frac{d}{dt} \int_V \omega dV$$

以上的两个量都可以视作区域内场和电荷体系的“内能”，通过界面 S 进入区域的能量为

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

由能量守恒定律，内部能量变化等于与外界进行的能量交换

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{dt} \int_V \omega dV + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.67)$$

给出微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.68)$$

特别的，如果我们选取的是全空间作为区域，则不存在与外部的能量交换 $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ 。这样就代表场对电荷作用的功率等于场自身的能量变化，证明了场和电荷组成的体系能量守恒。

1.6.2 电磁场能量密度和能流密度的表达式

由麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式进行推导，用洛伦兹力公式表示场对电荷的功率

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1.69)$$

将上式整理为与电磁场场量相关的物理量表示即可

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = (\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

用矢量分析公式得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

代入上式得到关系

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.70)$$

对比式1.68可以找到能量密度和能流密度。其中能流密度也称为 Poynting 矢量。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

(1.71)

我们在两种最常见的情况下讨论我们的结果

I. 真空中电荷分布的情形

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

直接代入式1.68，可以得到

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ \omega &= \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)\end{aligned}\tag{1.72}$$

II. 介质中分布的情形。在介质中，原本场和自由电荷之间的关系增加了一个与介质的关系，这时候磁化能和极化能需要一起归入考虑。一般的，可以写作

$$\delta\omega = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}\tag{1.73}$$

特别的，在线性介质中我们可以和真空的情况一起考虑

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

代表电导率和磁导率与空间位置无关，这种情况下取微分就等于

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)\tag{1.74}$$

Chapter 2

静电场

2.1 静电场的标势和微分方程

2.1.1 静电场的标势

静电场满足

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho\end{aligned}\quad (2.1)$$

可以得到静电场的无旋性，意味着我们可以直接引入一个标势来描述静电场，直接给出定义

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2)$$

有两点之间的电势差为

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3)$$

显然电场强度可以用势表示

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (2.4)$$

注意电势是一个相对值而非一个绝对值，必须给出一个电势基准才有实际的意义，一般选取无穷远处为电势零点。当然对于包含无穷远电荷分布的时候不能这样取。

我们也很容易可以从电场的公式得到电势的公式

$$\varphi(P) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_V \frac{\rho(x')dV'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.5)$$

2.1.2 静电势的微分方程和边值关系

在均匀各向同性线性介质中, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, 可以通过麦氏方程得到静电势满足的基本微分方程—**Poisson** 方程

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad (2.6)$$

有边值关系

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma\end{aligned}\quad (2.7)$$

可以分别导出电势的边值关系

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 \\ \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= -\sigma\end{aligned}\quad (2.8)$$

σ 为介质分界面自由电荷面密度。

可以由此发现，在导体问题中，导体内部有自由电子就会在电场的作用中运动。因此在静止的情况下，导体内部的电场必须为零，且表面上的电场分布切向分量为零。由此可以总结出导体的静电条件：

1. 导体内部不带净电荷，电荷值分布于表面上
2. 导体内部电场为零
3. 导体表面的电场一定沿着法线方向，整个导体的电势相等

2.1.3 静电场能量

由式1.74可以用电势写出静电场的总能量

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = -\nabla \varphi \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \rho \varphi$$

对于化简后的第一个式子可以求积分得到

$$\int_V \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV = \oint_S \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

该式在无穷远处为零, 则在 $r \rightarrow \infty$ 时, 静电场的总能量

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad (2.9)$$

2.2 唯一性定理

本节只直接给出唯一性定理的结论而不证明, 关于证明请详细翻阅教材

2.2.1 静电问题的唯一性定理

唯一性定理: 设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$, 在 V 的边界 S 上给定其中任意一个

(1) 电势 $\varphi|_s$

(2) 电势的法线方向偏导数 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s$

则 V 内的电场唯一确定。

2.2.2 有导体存在时的唯一性定理

相应的条件变为—

(1) 给定每个导体上的电势

(2) 给定每个导体上的总电荷 Q

2.3 Laplace 方程与分离变量法

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta, \phi) = & \sum_{n,m} \left(a_{nm} R^n + \frac{b_{nm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \\ & + \sum_{n,m} \left(c_{nm} R^n + \frac{d_{nm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

⁰这一式仅在电荷分布的区域内才不等于零, 故不能代表能量密度

2.4 镜像法

2.5 格林函数

2.5.1 格林函数的定义

2.6 电多极矩

Chapter 3

静磁场

Chapter 4

电磁波的传播

4.1 平面电磁波

4.1.1 电磁场波动方程的导出

考虑在没有自由电荷分布的自由空间或均匀绝缘介质中的电磁场运动形式的情况下（即 $\rho = 0, J = 0$ 的情况下），麦克斯韦方程可以写作

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

先讨论在真空情形中 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 的情况，联立上述两式，并结合式4.1可以得到

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}\tag{4.2}$$

上式两边同时取旋度得到

$$\nabla \times (\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})\tag{4.3}$$

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial^2 t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}\tag{4.4}$$

根据式4.1第三项和第四项可以得到 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，整理上式得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial^2 t} = \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial^2 t} = 0\tag{4.5}$$

同理，如果对磁场进行相应的操作可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial^2 t} = 0\tag{4.6}$$

式4.5和4.6统称为波动方程， c 是电磁波在真空中的传播速度。请务必明确上面是在没有自由电荷分布的自由空间或均匀绝缘介质中才成立。¹

4.1.2 时谐电磁波

时谐电磁波，即电磁波的激发源以一定频率正弦振荡激发的电磁波称为时谐电磁波，亦称为单色波。一个非时谐的电磁波也可以使用傅立叶分析转化为时谐电磁波的叠加。

我们讨论一定频率的电磁波，设角频率为 ω ，电磁场对时间的依赖关系就是 $\cos \omega t$ ，或者以复数的形式代为表示以简化之后的计算量²

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{4.7}$$

¹对于介质中的传播形式，我们在这里不赘述，详细请翻阅教材

²我们可以发现转换为复数形式之后其实相较于原来的物理意义多出了 $i \sin \omega t$ 项，国内的大多数教材对于这里的解释是不够清晰的。其实两者在物理意义上是不相等的。这里主要强调的是一种对应关系，以复数形式代为进行计算以简化计算的难度，对应关系和相等关系是有区别的，更为严谨的写法应该是 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$ 。在之后涉及到瞬时能流密度计算的时候会变回实部，我们在那时给出相应的理解。

代入麦克斯韦方程组可以直接消去共同因子 $e^{i\omega t}$ 得到³

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\tag{4.8}$$

上一节推导真空电磁场波动方程的流程依然适用，

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}}\tag{4.9}$$

得到⁴，该式称为 **Helmholtz 方程**，是一定频率电磁波的基本方程，其解 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 是电磁波场强在空间中的分布情况，每一种可能的形式称为一种波模。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \\ k &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon}\end{aligned}\tag{4.10}$$

代入麦氏方程可以得到磁场⁵

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \varepsilon} \nabla \times \mathbf{E}\tag{4.11}$$

4.1.3 平面电磁波

我们假设一种最基本的解，它是平面波。设电磁波沿 x 轴方向传播，其场强在与 x 轴正交的平面上各点具有相同的值。这种情况下 Helmholtz 方程退化为

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{E}(x) + k^2 \mathbf{E}(x) = 0\tag{4.12}$$

求解上式并加上时谐项可以得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \mathbf{E}(\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t))\tag{4.13}$$

对于实际存在的场强应该理解为上式只取实数部分

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} \cos(kx - \omega t)\tag{4.14}$$

我们直接考虑相位因子 $\cos(kx - \omega t)$ 的意义，它给出了电磁场随位置和时间变化的关系；考虑 $t=0$ 的情况时，有波峰在 $x=0$ 处，在 $t = 1/\omega$ 时，这一波峰移到 $x = 1/k$ ，我们可以计算得到相速度

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}\tag{4.15}$$

³在 $\omega \neq 0$ 的情况下，这四个方程不是独立的，有第一式可以推导第二式，第三式可以推导第四式

⁴在假定了条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 之后才能够直接写成这种形式

⁵如果用磁场的方式给出这个方程，则为

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{\omega \mu \varepsilon} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{i}{k \sqrt{\mu \varepsilon}} \nabla \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

为保证文本的连贯性，不在正文中直接给出

我们已经知道在真空中这一速度是光速，相应的在介质中就可以表示为

$$v = \frac{c}{\mu_r \varepsilon_r} \quad (4.16)$$

上述的计算是由于我们选择了情况最简单的一个坐标系——波矢量刚好和 \mathbf{x} 轴的方向平行，对于一般的情况波矢量和空间上任意一个位矢应该表示为 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ ，或者用位矢在波矢量方向上的投影 x' ，记作 kx' ⁶。如果我们以 x' 作垂直于波矢量的平面，就可以得到一个等相位的平面。

在求解式4.14之前，我们要明确该式的得出需要满足4，我们直接对式4.14取散度得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.17)$$

即

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.18)$$

表示电场的波动是横波， \mathbf{E} 的取向称为电磁波的偏振方向。如果我们选垂直于 \mathbf{k} 的两个相互正交的方向作为偏振方向，我们可以称对于每一个 \mathbf{k} 都有两个独立的偏振波。

下面考虑磁场，根据式4.11

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \varepsilon} [\nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu \varepsilon} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad (4.19)$$

可以看出同样是横波。且和相位项无关，电场波和磁场波同相。

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = v \quad (4.20)$$

v 为当前介质下的光速。

4.1.4 电磁场的能量和能流

由式1.74可以得到线性介质中能量密度的表达式。在平面电磁波中有 $\varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$ ，即平面电磁波中电场和磁场的能量相等，即

$$\omega = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 \quad (4.21)$$

根据式4.19，可以计算能流密度

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{e}_k \quad (4.22)$$

可以直接写作与能量密度相关的形式

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} w \mathbf{e}_k = v w \mathbf{e}_k} \quad (4.23)$$

v 为电磁波的相速度。现在形式下能量密度和能流密度的关系就十分的明显，更像是“力”与“功率”之间的关系。

下面计算能量密度和能流密度的瞬时值，这时候不能把场强中的复数项直接代入计算，只能取实数

⁶这里的 \mathbf{k} 已经退化成一个标量，我们一般称为波数，等于

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

项⁷。

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (4.24)$$

相较于上面这个瞬时值的式子，我们更在意的是一个周期内它的平均值，我们知道余弦函数在一个周期内的平均值是 $1/2$ ⁸，我们就可以直接得到它们的平均值⁹

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2 电磁波在介质界面上的反射和折射

本节的主要内容可以看作是对1.5节在电磁波具体方程形式下的拓展

4.2.1 反射和折射定律

式1.66给出了电磁场的边值关系

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

由于对于时谐电磁波而言麦氏方程只有两个方程独立，则只需要用到¹⁰

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (4.27)$$

设反射波和折射波也是平面波（由下面所得结果可知这假定是正确的）。设入射波、反射波和折射波的频率相同，电场强度分别为 E 、 E' 和 E'' ，波矢量分别为 k 、 k' 和 k'' 。它们的平面波表示式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \end{aligned}$$

代入式4.27第一项，得到

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{E}'_0 e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}}) = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}''_0 e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}}$$

若分界面取在 $z = 0$ ，这个分界面上的任意 x 和 y 都应该满足上式

$$\vec{n} \times \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y)} + \vec{n} \times \vec{E}'_0 e^{i(k'_x x + k'_y y)} = \vec{n} \times \vec{E}''_0 e^{i(k''_x x + k''_y y)}$$

⁷因为在之前的平均强度计算中，是 $|\mathbf{E}|^2$ ，取模之后复数项是不会计算结果的，在瞬时值计算的时候，复数项就不能纳入考虑了
⁸这里有个计算技巧，因为有关系 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ，在一个完整周期内两者的地位对称，则一个完整周期内 $\cos^2 x$ 的平均值为 $1/2$ 。更严格来说有

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - 2\pi t/T + \delta) dt = \frac{1}{2}$$

⁹Question：在这里笔者仍保有疑惑，格里菲斯教材对4.22和4.23的理解是宏观情况下电磁波包含许多个周期，而考虑一个周期的平均能流的时候就只取 $1/2$ ，是否有些牵强？

¹⁰在介质的表述中 \mathbf{H} 直接和表面电流相关，更为方便

两边同时除以

$$e^{i(k'_x x + k'_y y)}$$

可以得到

$$\vec{n} \times \vec{E}_0 e^{i[(k_x - k'_x)x + (k_y - k'_y)y]} + \vec{n} \times \vec{E}'_0 e^{i[(k'_x - k''_x)x + (k'_y - k''_y)y]} = \vec{n} \times \vec{E}''_0$$

对任意 x 、 y 都成立，只能满足

$$k_x = k'_x = k''_x \quad k_y = k'_y = k''_y$$

结合相速度关系式4.15并将分量写成矢量乘角度的形式，得到¹¹

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{k''}{k'} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.28)$$

即

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'' \quad (\mu = \mu_0) \quad (4.29)$$

4.2.2 振幅关系与菲涅尔公式

分为电场垂直于入射面和平行于入射面射入的情况

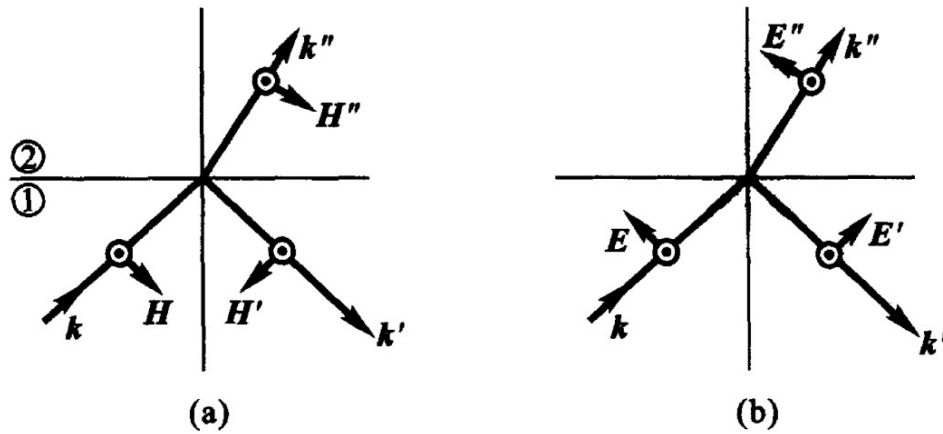


图 4.1: 电场入射方向

(1) 电场垂直于入射面。直接根据边值关系写出

$$\begin{aligned} E + E' &= E'' \\ H \cos \theta - H' \cos \theta' &= H'' \cos \theta'' \end{aligned} \quad (4.30)$$

利用关系 $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$ 和 $\mu = \mu_0$ ，并利用折射定律化简可以得到

$$\begin{aligned} \frac{E'}{E} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \\ \frac{E''}{E} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \end{aligned} \quad (4.31)$$

¹¹除铁磁质以外，一般的介质都满足 $\mu \approx \mu_0$

(2) 电场平行于入射面。同理

$$\begin{aligned} H + H' &= H'' \\ E \cos \theta - E' \cos \theta' &= E'' \cos \theta'' \end{aligned} \quad (4.32)$$

同样代换电场和磁场可以得到

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E'}{E} &= \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \\ \frac{E''}{E} &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \end{aligned}} \quad (4.33)$$

上式4.31和式4.33称为菲涅尔公式，阐述了入射波、反射波和折射波的强度关系。对于正常的电磁波，有各个方向偏振的成分，但是我们可以看到电场偏振方向的不同会有不同的反折射关系。恰好对于 $\theta + \theta' = 90^\circ$ 的情况，根据式4.33可知，平行于边界面入射的电场反射波为零，即这时的反射波全部为垂直偏振的偏振光。这是光学中的布儒斯特定律，满足 $\theta + \theta' = 90^\circ$ 的角称为布儒斯特角。

菲涅尔公式也同样可以得出半波损失的结论——当 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ 时有 $\theta > \theta'$ ，则 E'/E 为负数，反射波电场和入射波电场反相。

我们经常用到反射系数 R 和投射系数 T ，分别代表光波强度的比值

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{I_R}{I_1} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{01}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \\ T &\equiv \frac{I_T}{I_1} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0T}}{E_{01}} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.2.3 全反射关系

由于全反射涉及到上节没有纳入考虑的一个新的波模，故另起一节做记录。由于折射角大于 90° 之后就没有实数值能够表达了，我们需要另外寻找一个满足条件的波模。

之前折射的关系仍然成立

$$k_x'' = k_x = k \sin \theta$$

且根据振幅关系

$$k'' = k \frac{v_1}{v_2} = k n_{21}$$

可以表达出 z 轴方向的波矢量分量，其已经表示为了一个虚数

$$k_z'' = \sqrt{k''^2 - k_x''^2} = i k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} \quad (4.35)$$

简记

$$\kappa = k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}$$

则表示折射波电场

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0'' e^{-\kappa z} e^{i(k_x'' x - \omega t)} \quad (4.36)$$

注意这个波模在之前没有纳入考虑是因为在 $z \rightarrow -\infty$ 的时候 $\mathbf{E}'' \rightarrow \infty$ ，所以只出现在上半平面。相较于之前的波，它多了一个衰减项，该衰减层的厚度为

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \quad (4.37)$$

这种情况下菲涅尔公式依然适用，只是需要把 $\sin \theta$ 的定义改变为

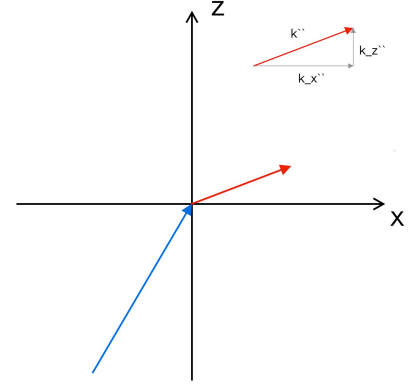
$$\begin{aligned}\sin \theta'' &\rightarrow \frac{k_x''}{k''} = \frac{\sin \theta}{n_{21}} \\ \cos \theta'' &\rightarrow \frac{k_z''}{k''} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1}\end{aligned}\quad (4.38)$$

就可以直接代入进行计算

在全反射过程中，介质二是起作用了的，在半个周期的时候，电磁能量透过第二介质并在界面的薄层储存起来，在另一个半周这些能量都释放出来变为反射能量。我们可以从折射层的能流密度看出，结合式4.19计算 \mathbf{H} 并由能流密度平均值公式4.25可以分别计算出 x, z 方向上的能流密度

$$\begin{aligned}\bar{S}_x'' &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_y''^* H_z'') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} |E_0''|^2 e^{-2kz} \frac{\sin \theta}{n_{21}} \\ \bar{S}_z'' &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_y''^* H_x'') = 0\end{aligned}\quad (4.39)$$

即进入介质层二的能流密度全都沿着 x 传播¹²



电磁场折射示意图

4.3 电磁波在导体内的传播

导体内的自由电子会收到电磁波的作用运动，反过来衰减电磁波的传播。在这个过程中，电磁能量不断转化为热量。

4.3.1 导体内的自由电荷的分布

我们首先来考虑导体中自由电荷运动满足的规律，我们可以知道电荷相对更聚集的地方就会自发的向周围流动，用数学语言表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (4.40)$$

由电荷守恒定律

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

可以解得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t)} \quad (4.41)$$

可以发现电荷密度随时间衰减，衰减的特征时间为

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (4.42)$$

如果入射电磁波的频率满足 $\omega \ll \tau^{-1}$ ，电磁波就会在介质电荷变化不大的时候快速通过，可以认为这时候

$$\rho(t) = 0$$

或者表示为

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1 \quad (4.43)$$

¹²Question: 在 z 方向没有能流密度的话为什么该衰减层还有厚度呢?

我们称为**良导体条件**。如果电磁波的频率不太高，一般金属导体都可以视作良导体，良导体内部没有净的自由电荷积聚，电荷都分布在导体表面上。

4.3.2 导体内的电磁波

相较于介质中的电磁波，我们只需要加入一个电流引起的变化项，直接给出对于一定频率的电磁波在导体内的麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\tag{4.44}$$

我们也可以直接把由导体电荷分布引起的这一项和之前的介电常数合并写作“复电容率”，记为

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\tag{4.45}$$

则麦氏方程的第二项写作

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon'\mathbf{E}$$

方程其他项完全一致，只需要将介质中的解的 ε 项改为复电容率就可以得到介质中的解。

简单介绍一下复电容率各项的物理意义，其实数项代表位移电流的作用，不消耗电场的功率；复数项为传导电流的作用，会引起能量耗散¹³。

引入复电容率后我们就可以直接写出 Helmholtz 公式

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \\ k &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\end{aligned}\tag{4.46}$$

为进一步考虑 k 变为复数对整个电磁波解的影响，我们将 k 写作实部和虚部的分量形式¹⁴

$$k = \beta + i\alpha\tag{4.47}$$

则还是考虑最简单的平面电磁波的情况，其电磁波可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha\cdot\mathbf{x}} e^{i(\beta\cdot\mathbf{x} - \omega t)}\tag{4.48}$$

很明显，虚部 α 是一个衰减常数。

我们希望能够用具体的物理量表示出 α 和 β 。代入复电容率的关系得到

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha \cdot \beta = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right)$$

比较实部和虚部就可以得到

$$\begin{aligned}\beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon \\ \alpha \cdot \beta &= \frac{1}{2} \omega \mu \sigma\end{aligned}\tag{4.49}$$

由于 α 和 β 的方向还不确定，只靠上式还不能具体给出其表达式，需结合边界条件给出¹⁵。

¹³其实对于介质而言，我们将电磁场在介质中耗散的情况，介质的电容率也是一个复数

¹⁴其实可能你已经发现了，在上一节讨论全反射关系的时候就已经考虑到 k 为复数的情况了——这会给电磁波解带来一个衰减项

¹⁵郭硕鸿先生的教材中举了一个简单的例子，有兴趣可自行翻阅

4.3.3 趋肤效应和穿透深度

我们简述一下电磁波在导体内传播的规律：电磁波一般只在介质中和导体之外的地方传播。在导体界面上，电磁波和导体的自由电荷作用形成传导电流，电流的存在使电磁波向外反射，一部分电磁能量透入导体内，随传导电流的作用逐渐转换为焦耳热。

我们考虑最简单的垂直入射的情况，因为这样就只需要考虑 z 方向的分量。可以将式4.48写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

确定 α 和 β 的方向之后就可以根据式4.49可以解出 α 和 β ：

$$\begin{aligned}\beta &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.50)$$

这个式子还是显得有些繁琐，对于良导体的情形， k^2 的实部可以忽略，有近似关系式

$$\begin{aligned}k^2 &\approx i\omega\mu\sigma \\ k &\approx \sqrt{i\omega\mu\sigma} \approx \beta + i\alpha\end{aligned}\quad (4.51)$$

可以得到¹⁶

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\quad (4.52)$$

还记得我们最开始的目的就是试图表达电磁波在导体的穿透深度。我们将波幅降至导体表面原值的 $1/e$ 时的传播距离称为穿透深度 σ ，很显然就是 α 的平方

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}\quad (4.53)$$

可以看到穿透深度的平方和电导率以及电磁波的频率成反比。我们想要知道电场和磁场谁在导体中的传播更加重要，同样给出两者的比值

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega\mu} (\beta + i\alpha) \mathbf{e}_n \times \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &\approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \mathbf{e}_n \times \mathbf{E} \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left| \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{E}} \right| &= \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1\end{aligned}\quad (4.54)$$

可以看到在良导体中，电磁波的能量主要是磁场能量¹⁷

4.3.4 在导体表面的反射

只考虑垂直入射的情况，我们有关系

$$E - E' = E'', \quad H - H' = H''$$

¹⁶为方便记忆你可以认为由4.49直接拆开得到

¹⁷Question：在一般单位制下可以直接理解为磁场要比电场强吗，这样的话由式4.20可以说在真空中电磁场的主要能量是电场能量？

分别结果真空和介质中磁场的关系可以（参见式4.19和4.54）转化为电场写出第二式

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)E''$$

就可以连立写出电场的比值为

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}} \quad (4.55)$$

更常用的是反射系数

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2 + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \quad (4.56)$$

从上式可以看出，电导率越高越容易反射，波长越长的电磁波越容易被反射。

4.4 谐振腔和波导

4.4.1 有界空间空间中的电磁波

由上一节得到的结果可知，电磁波主要是在导体以外的空间或绝缘介质内传播的，只有很小一部分电磁能量透入导体表面。因此导体表面自然构成电磁波存在的边界，故可以利用金属材料来约束一定频率的电磁波。

这类有界空间中的电磁波传播问题属于边值问题，对于时谐电磁波我们已知只有两个独立的麦克斯韦方程

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} &= \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (4.57)$$

加上电磁波的边值条件1.66就可以得到电磁波的基本传播方式。当然对具体的波模我们还有一个条件

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

一般而言可以先看是否满足这个条件。

4.4.2 谐振腔

我们分析最一般的矩形谐振腔，其各点的坐标标注如下图所示，腔内的电磁波满足 Helmholtz 方程，且在正交方向上两两独立，有

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

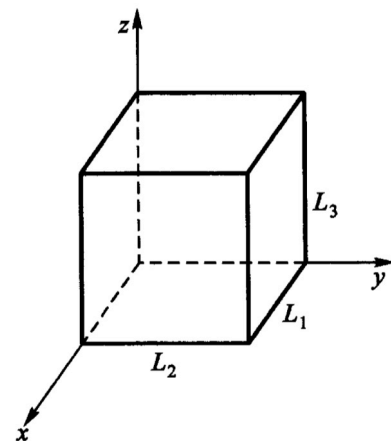
可以分离变量为

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \quad (4.59)$$



谐振腔示意图

每一个式都可以得到一个驻波解

$$u(x, y, z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x) (C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y) \\ \cdot (C_3 \cos k_z z + D_3 \sin k_z z)$$

我们可以从边值关系非常简单的给出具体解的形式：以 x 方向的解为例，因为要求满足

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} = 0$$

则在关于 x 解的表达式中没有 $\sin k_x x$ 项；因为要求满足

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = 0$$

则在关于 x 解的表达式中没有 $\cos k_y y$ 和 $\cos k_z z$ 项

综上，可以依次写出各自的解为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

Chapter 5

电磁波的辐射

5.1 电磁场的矢势和标势

5.1.1 用势描述电磁场

我们对电磁场也引入矢势和标势，我们从之前引入的磁场矢势入手

$$\nabla \times \mathbf{B}$$

在一般的情况下，磁场依然保持无源场的性质，但是在电磁波中电场同时具有有源和有旋场的性质，这意味着电场关系式中也会出现磁矢势

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \quad (5.1)$$

上面的式子可以用一个标势的负梯度描述：

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad (5.2)$$

因而得到电场表达式¹

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (5.3)$$

5.1.2 达朗贝尔方程

我们用麦克斯韦方程和上面的电磁场势进行推导，首先有关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned}$$

可以得到电磁场矢势和标势满足下面这两个关系

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (5.4)$$

将真空光速的定义式代入进行化简可以得到

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_n} \end{aligned} \quad (5.5)$$

为保证电磁场的矢势和标势的形式是对称的，在这里不采用库伦规范，我们采用洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.6)$$

则达朗贝尔方程即为

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}} \quad (5.7)$$

¹这一项是满足规范变换的，即势做规范变换时，所有物理量和物理规律都应该保持不变，这种不变性称为规范不变性。

方程在形式上可以看出, 电荷产生标势波动, 电流产生矢势波动。离开电荷电流分布区域之后, 两者都以波动的形式在空间中传播。

5.2 推迟势

由达朗贝尔导出, 对于静态情形²

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\quad (5.8)$$

有两个熟知的解

$$\begin{aligned}V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dV \\ V(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{J}')}{r} dV\end{aligned}\quad (5.9)$$

其中 r 为源点到场点的距离。而在非静止的情况下, 由于电磁波以光速传播, 当一个事件从源点传到场点的时候, 中间应该经过了一段推迟的时间 r/c , 或者我们可以理解成在 t 时刻场点受到的作用实际上来自 $t - r/c$ 时刻的源点, 我们将它称为推迟势。

我们直接由静态情况下的解猜测推迟势的解为

$$\boxed{V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau'} \quad (5.10)$$

其中 $t_r = t - r/c$

下面我们来验证这一假设解确实是达朗贝尔方程的解³

²这一节采用了格里菲斯教材的思路, 回避了对达朗贝尔方程求解的具体过程, 求解过程部分详细可参见郭硕鸿先生教材

³笔者更喜欢把大段的数学推导放在脚注以保持物理图像的连贯性。在计算 $V(\mathbf{r}, t)$ 的拉普拉斯算子时, 特别要注意的是积分在两处依赖 r : 显含在分母中的 ($r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) 和隐含在分子中的 $t_r \equiv t - r/c$

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[(\nabla \rho) \frac{1}{2} + \rho \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\tau'$$

和

$$\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla r$$

(式中的点表示对时间的微分) 现在有 $\nabla r = \hat{r}$ 和 $\nabla(1/r) = -\hat{r}/r^2$, 故

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{r}}{r} - \rho \frac{\hat{r}}{r^2} \right] d\tau'$$

取散度,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\frac{\hat{r}}{r} \cdot (\nabla \dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) \right] - \left[\frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right] \right\} d\tau'$$

但

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \nabla r = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \hat{r}$$

这同式 (10.21) 中的一样, 并且

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2}$$

和

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(r)$$

故有

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{2} - 4\pi\rho\delta^3(r) \right] d\tau' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$$

证明了推迟势确实是达朗贝尔方程的解

根据推迟势公式，当 ρ 和 \mathbf{J} 给定之后就可以得到势，而根据下式可以算出电磁场

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi\end{aligned}\quad (5.11)$$

事实上场会反作用于电荷电流分布，故激发区的电荷电流不能随意分布，我们之后为详细介绍这一点。

5.3 几种常见的辐射形式

⁴我们已知球壳的面积是 $4\pi r^2$ ，即能流密度的减少量不能快于 $1/r^2$ ：因为如果它以 $1/r^3$ 的速度减少，则无限远处能流密度的积分应该是零——这是不符合常理的，因为能流密度在任意远的地方积分都应该相等。下面我们以静止的电荷为例，由库伦定律可知电场以 $1/r^2$ 减少，由毕奥-萨法尔定律可知磁场也以 $1/r^2$ （或更快）的方式减少，则能流密度以 $1/r^4$ 的速度减少，故**静止的源不产生辐射**。但与时间相关的场，包含一些以 $1/r$ 变化的项，正是这些项导致了电磁辐射。

5.3.1 计算辐射场的一般公式

计算辐射场的基本是推迟势公式

对于推迟势公式，以矢势为例

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau'$$

计算得到电磁场的矢势之后，就可以经过下式计算电磁场量

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B}\end{aligned}}\quad (5.12)$$

在矢势公式中有三个距离的线度需要纳入考虑：电荷分布区域的线度 l ，波长 λ ，电荷到场点的距离 r 。本节中我们都研究的是小区域内电荷产生的辐射，即满足

$$l \ll \lambda, \quad l \ll r$$

而对于后两个量同样可以按照线度的大小关系分为：

- (1). 近区 ($r \ll \lambda$)，在近区内电磁场保持着恒定场的主要特点
- (2). 感应区 ($r \sim \lambda$)，性质介于两者之间
- (3). 辐射区 ($r \gg \lambda$)，在辐射区内电磁场变为横向的辐射场

我们对矢势中的 r 展开得到⁵

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \mathbf{J}(x') (1 - ik\mathbf{e}_R \cdot x' + \dots) dV' \quad (5.13)$$

⁴本段内容来自格里菲斯版电动力学内容

⁵Unfinished. 啊啊啊啊复习不完了复习不完了，这里跳过了展开步骤，以后有空补上

5.3.2 电偶极辐射

电偶极辐射来源于5.13展开式中的第一项

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \mathbf{J}(x') dV' \quad (5.14)$$

其中积分项就是电偶极矩对时间的偏导数

$$\int_V \mathbf{J}(x') dV' = \sum q \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum q \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}$$

可以直接写出电偶极辐射的公式

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}} \quad (5.15)$$

根据势的公式计算电磁场的时候，因为分母中的 R 是我们专门展开需要的，故 ∇ 项就只需要作用在相因子上，意味着对于以下算符可以代换为

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla &\rightarrow ik\mathbf{e}_R \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega \end{aligned}} \quad (5.16)$$

可以计算得到辐射场⁶

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \mathbf{e}_R \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R \\ \mathbf{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_R = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R \end{aligned} \quad (5.17)$$

在这种情况下，辐射区的电磁场 $1/R$ ，能流密度 $1/R^2$ ，对球面积分之后总功率与球的半径无关，保证了电磁能量可以传播到任意远处，和之前的理论吻合。

辐射能流、功率与角分布

电偶极辐射的平均能流密度可以计算得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{c}{2\mu_0} \text{Re}[(\mathbf{B}^* \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{e}_R = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_R \end{aligned} \quad (5.18)$$

式中 \sin^2 项即体现了辐射的角分布，可以用平均能流密度对球面积分可以得到总辐射功率⁷

$$\begin{aligned} P &= \oint |\bar{\mathbf{S}}| R^2 d\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint \sin^2 \theta d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} \end{aligned} \quad (5.19)$$

结合关系式5.16可以得到，总辐射功率正比于 ω^4 ，当电偶极子振荡频率增高的时候辐射功率迅速增

⁶我们都将结果写作只含 ϵ_0 和 k 的形式，用关系代换掉 μ_0

⁷可以用整个球的立体角定义来记忆立体角的积分公式

$$\frac{dS}{d\Omega} = \frac{S}{\Omega} = \frac{4\pi R^2}{4\pi} = R^2$$

加。

短天线辐射和辐射电阻

8

5.3.3 高频电流分布的磁偶极矩和电四极矩

笔者还没搞明白对称张量分离的办法，格里菲斯上的推导办法还没来得及看，这里先直接给出公式和结论

现在我们计算矢势展开的第二项

$$\mathbf{A} = \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}') dV' \quad (5.20)$$

直接给出结果

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \left(-\mathbf{e}_R \times \mathbf{m} + \frac{1}{6} \mathbf{e}_R \cdot \dot{\mathcal{D}}_{ij} \right) \quad (5.21)$$

其中 \mathcal{D} 为体系的电四极矩

$$\mathcal{D}_{ij} = \sum 3q\mathbf{x}'\mathbf{x}'$$

式中括号第一项为磁偶极辐射势，第二项为电四极辐射势。他们在电磁矢势的同一级展开式中体现。

5.3.4 磁偶极辐射

我们考虑磁偶极辐射的性质，即

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{e}_R \times \mathbf{m} \quad (5.22)$$

计算电磁场⁹

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = ik\mathbf{e}_R \times \mathbf{A} \\ &= k^2 \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} (\mathbf{e}_R \times \mathbf{m}) \times \mathbf{e}_R \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R \\ \mathbf{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \end{aligned} \quad (5.23)$$

我们知道电场和磁场在真空中有良好的对称性，我们比较上式和5.16可以发现只需以下代换就可以使两者等价

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c} \\ \mathbf{E} &\rightarrow c\mathbf{B} \\ c\mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.24)$$

在对称性的体现上，即得在自由空间中，麦氏方程组对变换 $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}, c\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ 是对称的。若电磁场 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 是麦克斯韦方程组的解，则代换后的电磁场也是麦克斯韦方程组的解。

⁸Unfinished: 留坑

⁹这里和之前一样，都使用了

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = (-i\omega)^2 = -\omega^2$$

结合 \mathbf{k} 的定义来化简，其中负号吸收进了矢积改变了乘积方向

可以用代换直接得到磁偶极辐射的能流密度

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_R \quad (5.25)$$

总辐射功率

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{12\pi c^3} \quad (5.26)$$

5.3.5 电四极辐射

对于第二个展开项

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \mathbf{e}_R \cdot \dot{\mathcal{D}}_{ij} \quad (5.27)$$

本节也直接给出结果，定义矢量

$$\mathcal{D}'_{ij} = \mathbf{e}_R \cdot \mathcal{D}_{ij}$$

则辐射区的电磁场为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= ik\mathbf{e}_R \times \mathbf{A} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R} \ddot{\mathcal{D}}'_{ij} \times \mathbf{e}_R \\ \mathbf{E} &= c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_R = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} \left(\ddot{\mathcal{D}}'_{ij} \times \mathbf{e}_R \right) \times \mathbf{e}_R \end{aligned} \quad (5.28)$$

辐射平均能流密度暂且不表。直接给出结论：电四极辐射和磁偶极辐射的功率是同数量级的。

5.4 电磁波的衍射

5.4.1 基尔霍夫公式

电磁场任一分量都满足亥姆霍兹方程，即

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

如果我们忽略其他电磁场分量的影响，把 ψ 看作一个标量场，用边界上的 $\psi \frac{\partial \psi}{\partial n}$ 表出边界条件，这种理论就是标量衍射理论。

可以用格林函数变形得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\psi(\mathbf{x}') \nabla' \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla' \psi(\mathbf{x}') \right] \cdot d\mathbf{S}' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{e}_n \cdot \left[\nabla' \psi + \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \psi \right] dS' \end{aligned} \quad (5.29)$$

上式为基尔霍夫公式，是惠更斯原理的数学表示。

5.4.2 夫琅和费衍射

碍于记录的时间原因，这里直接给出结果¹⁰

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_{S_0} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}'} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{e}_n dS' \\ &= -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_{S_0} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}'} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dS' \end{aligned} \quad (5.30)$$

¹⁰Unfinished

式中 θ_1 为入射波矢 \mathbf{k}_1 与法线方向 \mathbf{e}_n 的夹角, θ_2 为衍射波矢 \mathbf{k}_2 与 \mathbf{e}_n 的夹角. $\cos \theta_1 + \cos \theta_2$ 称为倾斜因子。

5.5 电磁场的动量

5.5.1 麦克斯韦应力张量

我们已知单位体积电荷收到的力可以表示为

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (5.31)$$

用麦克斯韦方程组展开并且加入一项 $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$ 以保持结果中电场和磁场形式的对称 (因为 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等于零, 对结果没有任何影响), 这样就有

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (5.32)$$

引入麦克斯韦应力张量¹¹可以大幅简化上式的形式¹²:

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (5.33)$$

麦克斯韦应力张量矢量写法和标量写法之间有关系

$$(a \cdot \overleftrightarrow{T})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad (5.34)$$

特别的, 对于 \overleftrightarrow{T} 散度的第 j 个分量可以表示为

$$(\nabla \cdot \overleftrightarrow{T})_j = \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \quad (5.35)$$

这恰恰和 \mathbf{f} 中的形式一致, 则力密度可以用很简洁的形式表示

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.36)$$

5.5.2 动量守恒

5.6 切连科夫辐射

在真空中匀速运动的粒子不产生辐射电磁场, 但是在介质中会产生诱导电流激发次波, 当带电粒子超过介质中光速时这些次波与运动粒子的电磁场相互干涉, 可以形成辐射电磁场, 称为切连科夫辐射

¹¹一般二阶张量可以用双箭头表示

$$\overleftrightarrow{T}$$

¹²其是一个对称张量, 或者直接用矩阵表示为

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 (E_x^2 - E^2/2) + \frac{1}{\mu_0} (B_x^2 - B^2/2) & \epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y) & \epsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_z) \\ \epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y) & \epsilon_0 (E_y^2 - E^2/2) + \frac{1}{\mu_0} (B_y^2 - B^2/2) & \epsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} (B_y B_z) \\ \epsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_z) & \epsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} (B_y B_z) & \epsilon_0 (E_z^2 - E^2/2) + \frac{1}{\mu_0} (B_z^2 - B^2/2) \end{pmatrix}$$

张量中的 ij 元素诠释为, 朝著 i -轴方向, 施加于 j -轴的垂直平面, 单位面积的作用力
Unfinished. 这里矩阵的间距太窄不够美观, 有时间修复