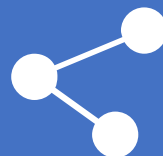




Generalized-ICP (GICP)

Aleksandr V. Segal, Dirk Haehnel, Sebastian Thrun
Robotics: Science and Systems, 2009

智能网络与优化实验室





1

问题提出



问题提出

- 将概率模型引入到ICP的计算过程
- 对ICP的迭代过程进行优化修改
- 引入要匹配的两帧点云中所包含的局部结构特征（面特征）

参考：

- <https://blog.csdn.net/pingjun5579/article/details/119029370>
- <https://littlebearsama.github.io/2019/06/10/Registration/GeneralizedICP/>

源码：

- <https://github.com/avsegal/gicp>



2

论文主体



ICP算法

对于两个3D坐标下的点云 $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}, i = 1, 2, \dots, N$, ICP求解位姿 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} 时 , 使用的是优化下L2范式 :

$$E(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^N e_i(\mathbf{R}, \mathbf{t})^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{R}a_i + \mathbf{t} - m_i\|^2$$

式中 m_i 是 a_i 位姿转换后 , B 中离 a_i 最近的点 , 即

$$m_i = \underset{m_i \in B}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{R}a_i + \mathbf{t} - m_i\|$$

对于给定的初始 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} , ICP迭代用上面的两个式子计算出最优解。

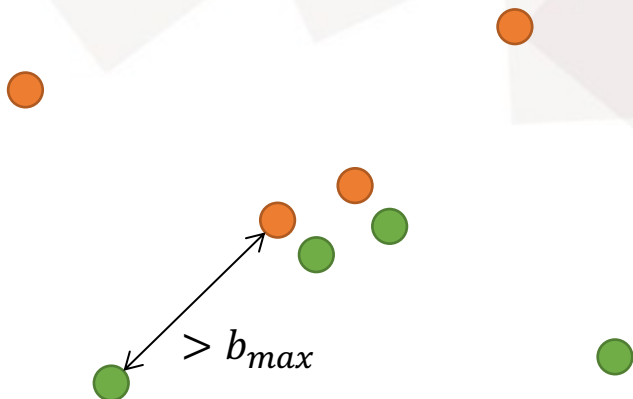


ICP算法

标准的ICP算法可以分成两步：

- (1) 确定两组点云之间的点的对应关系；
- (2) 计算能够使具有对应关系的点对距离最小的位姿变化 R 和 t 。

通过两步之间的不断迭代可以使得得到两组点云之间的变换逐渐收敛。由于两次测量 (scan) 中仅有部分重叠区域，作者提出可以通过添加最大匹配阈值 (距离) d_{max} 解决此问题。 d_{max} 代表了收敛性和准确性之间的一种权衡。并且 d_{max} 对算法执行效果的影响也成为了本文后面评估时的重要指标。



input : Two pointclouds: $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$

An initial transformation: T_0

output: The correct transformation, T , which aligns A and B

```

1  $T \leftarrow T_0$ ;
2 while not converged do
3   for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do
4      $m_i \leftarrow \text{FindClosestPointInA}(T \cdot b_i)$ ;
5     if  $\|m_i - T \cdot b_i\| \leq d_{max}$  then
6        $w_i \leftarrow 1$ ;
7     else
8        $w_i \leftarrow 0$ ;
9     end
10  end
11   $T \leftarrow \underset{T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_i w_i \|T \cdot b_i - m_i\|^2 \right\}$ ;
12 end
```

Algorithm 1: Standard ICP



Point-to-plane

Point-to-plane是ICP的一种变体，相比于ICP最小化误差 $\sum_{i=1}^N \|\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{m}_i\|^2$ ，Point-to-plane沿着法线方向修改误差函数为如下

$$E(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^N w_i \|\eta_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{m}_i)\|$$

原ICP算法中，迭代过程位姿修正变为

$$\mathbf{T} \leftarrow \operatorname{argmin}_T \sum_{i=1}^N w_i \|\eta_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{m}_i)\|$$

其中， η_i 是点 b_i 在点云 B 中对应切面的法向量



Point-to-plane

Point-to-plane使用 $\operatorname{argmin}_T \sum_{i=1}^N w_i \|\eta_i \cdot (T \cdot b_i - m_i)\|$ 的原因 :

(推导过程略) 要求解 $\sum_{i=1}^N w_i \|\eta_i \cdot (T \cdot b_i - m_i)\|$ 可以近似求解

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_x E(x) = (Q^T Q)^{-1} Q^T p, \quad \hat{x} = \{\alpha, \beta, \gamma, t_x, t_y, t_z\}^T$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \eta_{1x} & \eta_{1y} & \eta_{1z} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \eta_{2x} & \eta_{2y} & \eta_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N1} & q_{N2} & q_{N3} & \eta_{Nx} & \eta_{Ny} & \eta_{Nz} \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} (b_1 - a_1)^T \cdot \eta_1 \\ (b_2 - a_2)^T \cdot \eta_2 \\ \dots \\ (b_N - a_N)^T \cdot \eta_N \end{bmatrix}$$

$$q_{i1} = \eta_{iz} a_{iy} - \eta_{iy} a_{iz}$$

$$q_{i2} = \eta_{ix} a_{iz} - \eta_{iz} a_{ix}$$

$$q_{i3} = \eta_{iy} a_{ix} - \eta_{ix} a_{iy}$$



Generalized-ICP

1. GICP对ICP算法中寻找 m_i 的过程不发生变动，保留使用欧几里得距离的方法（使用kd-tree），GICP主要是对ICP算法中位姿变换矩阵 T 的求取方法引入概率模型进行改动。

2. 由于仅修改位姿变换矩阵 T 的求取方法，因此此处假设点云 $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ 已经按照索引编号——对应，即 a_i 和 b_i 已经是相邻最近的点对，并且假设 $\|m_i - T \cdot b_i\| > d_{max}$ 的点已经被去除。

3. 引入概率模型，假设有 $\hat{A} = \{\hat{a}_i\}, \hat{B} = \{\hat{b}_i\}$ 使得

$$a_i \sim \mathcal{N}(\hat{a}_i, C_i^A), b_i \sim \mathcal{N}(\hat{b}_i, C_i^B)$$

其中 $\{C_i^A\}, \{C_i^B\}$ 为协方差矩阵

假设 T^* 是正确（最佳）的位姿变换，那么应该有

$$\hat{b}_i = T^* \hat{a}_i$$



Generalized-ICP

4. 定义

$$d_i^{(T)} = b_i - T a_i$$

那么，根据正态分布，则有

$$d_i^{(T^*)} \sim \mathcal{N}(\hat{b}_i - T^* \hat{a}_i, C_i^B + (T^*) C_i^A (T^*)^T) = \mathcal{N}(0, C_i^B + (T^*) C_i^A (T^*)^T)$$

利用极大似然估计计算 T

$$T = \operatorname{argmax}_T \prod_i p(d_i^{(T)}) = \operatorname{argmax}_T \sum_i \ln(p(d_i^{(T)}))$$

利用概率分布，将式子化为

$$T = \operatorname{argmin}_T \sum_i \left(d_i^{(T)} \right)^T (C_i^B + T C_i^A T^T)^{-1} d_i^{(T)}$$



Generalized-ICP

$$T = \operatorname{argmin}_T \sum_i \left(d_i^{(T)} \right)^T \left(C_i^B + T C_i^A T^T \right)^{-1} d_i^{(T)}$$

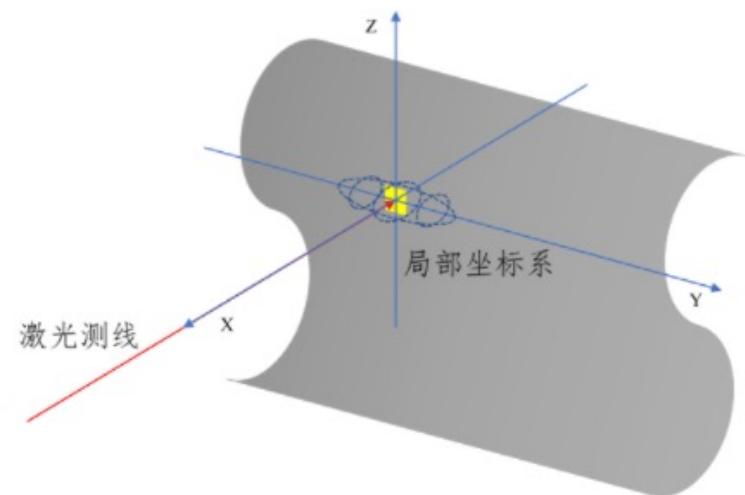
5. 协方差的取值

- ICP方法可以假设 $C_i^A = 0, C_i^B = I$
- Point-to-plane方法利用了曲面的法向量
- GICP：现实世界中的表面基本上都是分段可微的，因此可以假设点云中的某个点处于局部平面

本质上，每个测量点只提供沿其曲面法线的约束。为了模拟这种结构，考虑每个采样点沿其局部平面分布具有高协方差，并且在表面法线方向上非常低的协方差。对于局部坐标系下点，取协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中， ϵ 为服从正态分布的极小常量，将点视为沿法向量 $e_1 = (1, 0, 0)^T$ 的方差较小，而在其他两个正交方向的方差较大



局部坐标系下测量协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Generalized-ICP

5. 协方差的取值

$$\mathbf{T} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{T}} \sum_i \left(d_i^{(T)} \right)^T \left(C_i^B + \mathbf{T} C_i^A \mathbf{T}^T \right)^{-1} d_i^{(T)}$$

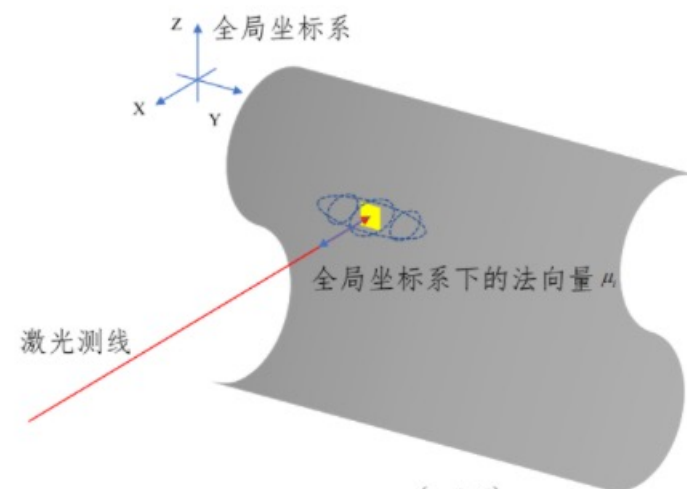
$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1), \epsilon \rightarrow 0$$

这种方式并没有反应点在平面上的位置情况，因此，给定 b_i 和 a_i 各自所在位置的全局法向量 μ_i 和 ν_i ，那么 C_i^B 和 C_i^A 的计算就可以通过旋转上面的协方差矩阵得到下式

$$C_i^B = R_{\mu_i} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\mu_i}^T$$

$$C_i^A = R_{\nu_i} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\nu_i}^T$$

其中 R_x 为旋转矩阵，可以将 e_1 旋转为与 x 相同的方向



全局坐标系下测量协方差矩阵为 $\mathbf{R}_{\mu} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\mu}^T$



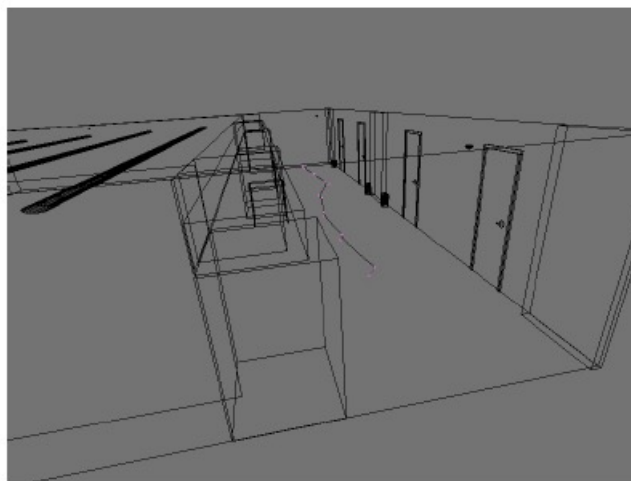
3

结果

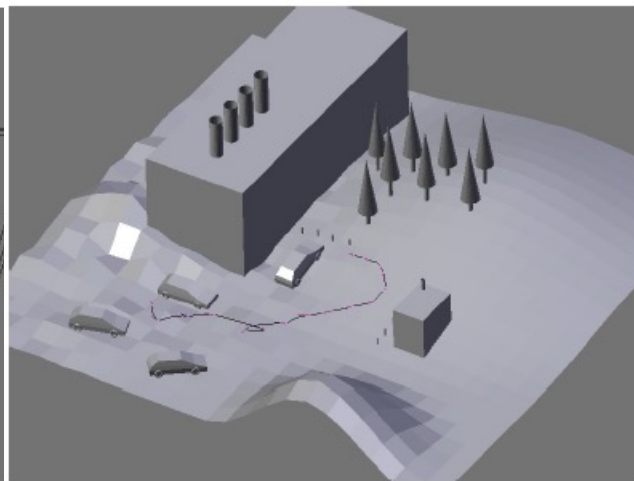


实验结果

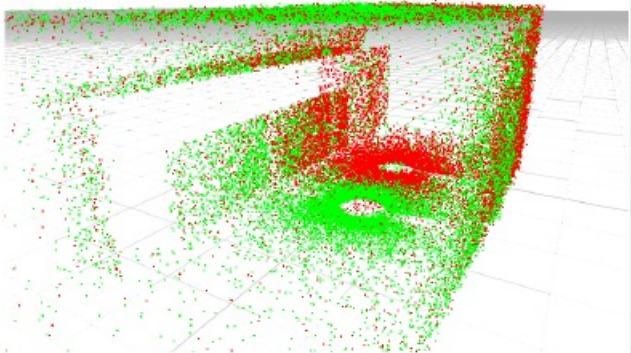
对于标准ICP，设迭代次数为250次，而对Point-to-plane和GICP，设为50次。



(a) indoor scene

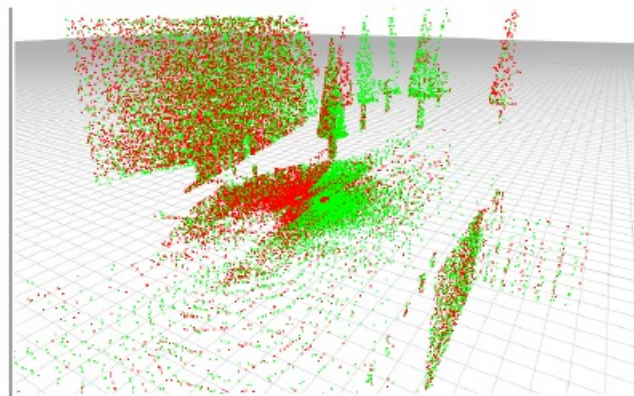


(b) outdoor scene



(a) indoor scene

2023/5/5



(b) outdoor scene

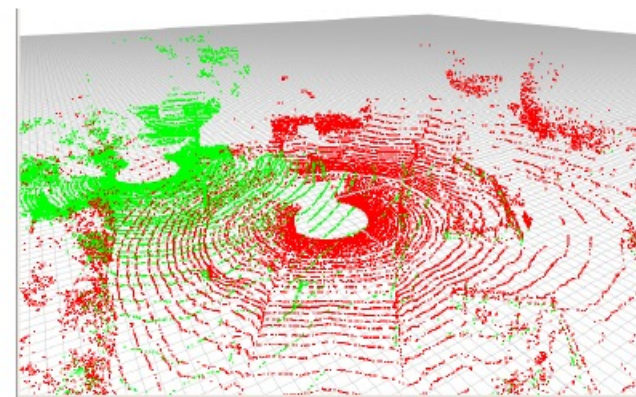


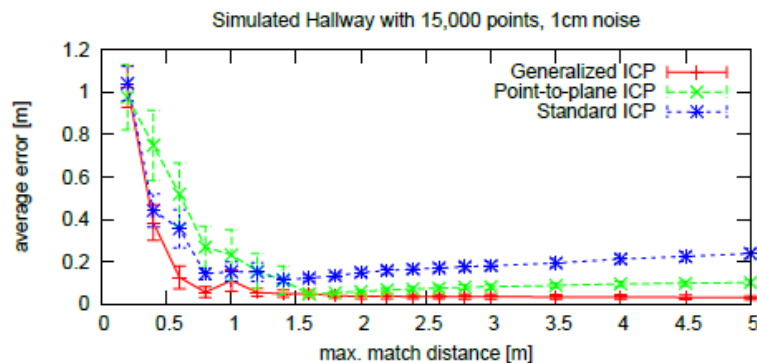
Fig. 4. Velodyne scans – scan A is shown in green, scan B in red



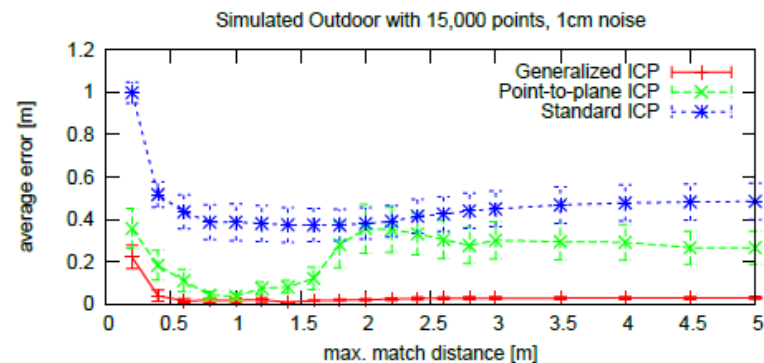
实验结果

d_{max} 的取值问题

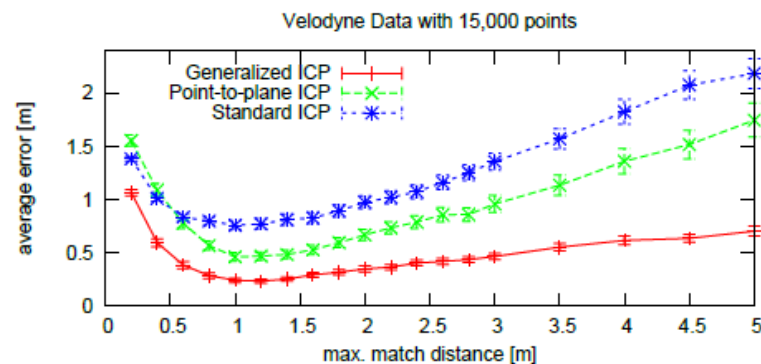
在仿真环境中 d_{max} 的取值似乎对数值较大时的变化不敏感，而在真实环境下，似乎GICP也不太敏感：模拟数据和真实数据之间的差异可以通过其各自频率剖面的差异来解释。模拟环境有手工建模的高级特征，但真实世界的数据包含更详细的特征数据。这增加了共享一个共同表面方向的不正确对应的可能性——GICP没有考虑这种情况。正因为GICP对 d_{max} 的影响削弱，这也使得在 d_{max} 取值较大时误差也能维持的较好。



(a) simulated indoor



(b) simulated outdoor



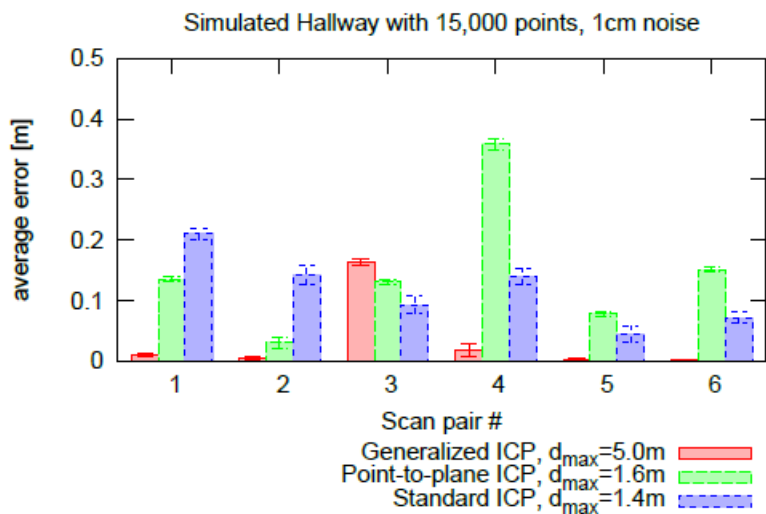
(c) Velodyne data



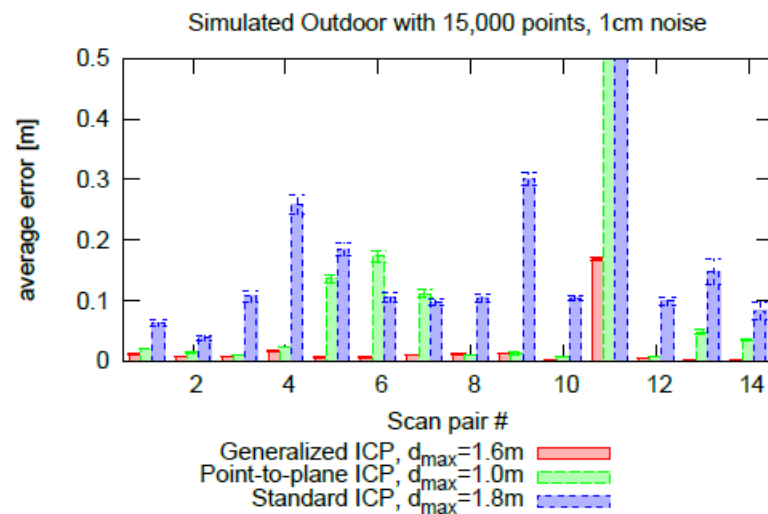
实验结果

横轴scan pair指不同的扫描点云对，可以看出，GICP的误差是相对较小的，并且对 d_{max} 很大的情况也具有很好的表现。结果中，纵轴average error的定义为

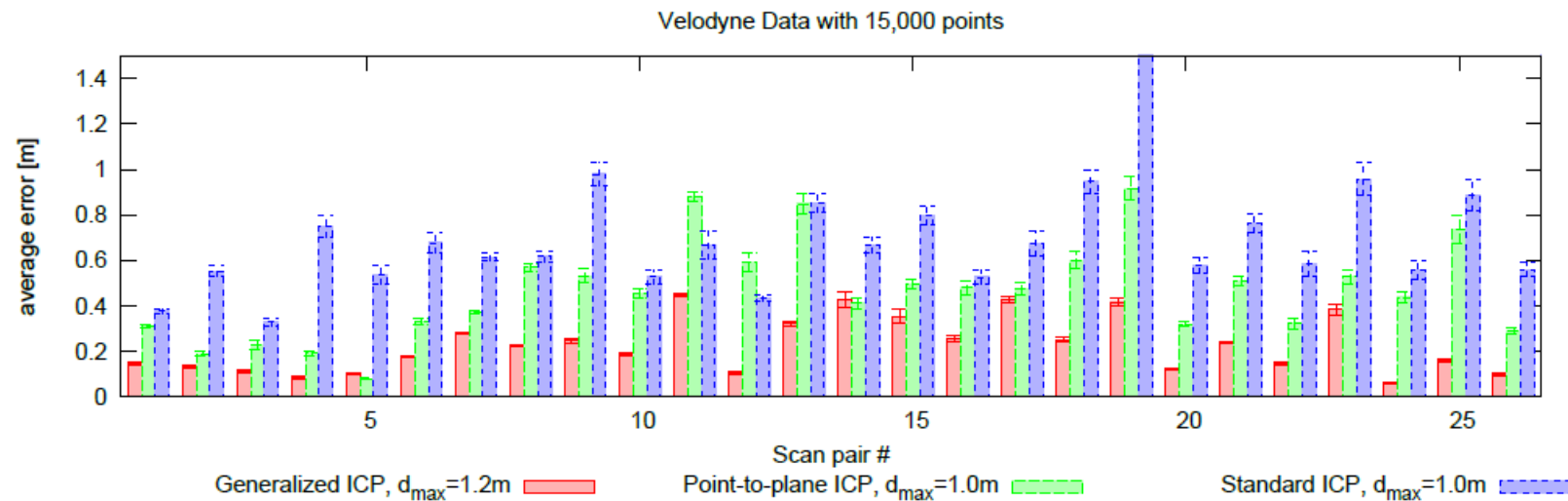
$$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



(a) simulated indoor



(b) simulated outdoor



(c) Velodyne data #1 - #26



谢谢

Thank You

THANKS

