

《激光原理》习题解答第一章习题解答

1 为了使氦氖激光器的相干长度达到 1KM, 它的单色性 $\Delta\lambda/\lambda_0$ 应为多少?

解答: 设相干时间为 τ , 则相干长度为光速与相干时间的乘积, 即

$$L_c = \tau \cdot c$$

根据相干时间和谱线宽度的关系 $\Delta\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{L_c}$

$$\text{又因为 } \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right| = \left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right|, \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}, \quad \lambda_0 = 632.8nm$$

由以上各关系及数据可以得到如下形式:

$$\text{单色性} = \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right| = \left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right| = \frac{\lambda_0}{L_c} = \frac{632.8nm}{1 \times 10^{12}nm} = 6.328 \times 10^{-10}$$

解答完毕。

2 如果激光器和微波激射器分别在 $10\mu m$ 、 $500nm$ 和 $\gamma = 3000MHz$ 输出 1 瓦连续功率, 问每秒钟从激光上能级向下能级跃迁的粒子数是多少。

解答: 功率是单位时间内输出的能量, 因此, 我们设在 dt 时间内输出的能量为 dE , 则功率 $= dE/dt$

激光或微波激射器输出的能量就是电磁波与普朗克常数的乘积, 即

$dE = nh\nu$, 其中 n 为 dt 时间内输出的光子数目, 这些光子数就等于腔内处在高能级的激发粒子在 dt 时间辐射跃迁到低能级的数目 (能级间的频率为 ν)。

由以上分析可以得到如下的形式:

$$n = \frac{dE}{h\nu} = \frac{\text{功率} \times dt}{h\nu}$$

每秒钟发射的光子数目为: $N = n/dt$, 带入上式, 得到:

$$\text{每秒钟发射的光子数} = N = \frac{n}{dt} = \frac{\text{功率}}{h\nu} = \frac{1(J/s)}{6.626 \times 10^{-34}(J \cdot s) \times \nu} (s^{-1})$$

$$\text{根据题中给出的数据可知: } \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^8 ms^{-1}}{10 \times 10^{-6} m} = 3 \times 10^{13} Hz$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \times 10^8 ms^{-1}}{500 \times 10^{-9} m} = 1.5 \times 10^{15} Hz$$

$$\nu_3 = 3000 \times 10^6 Hz$$

把三个数据带入, 得到如下结果: $N_1 = 5.031 \times 10^{19}$, $N_2 = 2.5 \times 10^{18}$, $N_3 = 5.031 \times 10^{23}$

3 设一对激光能级为 E_1 和 E_2 ($f_1=f_2$), 相应的频率为 ν (波长为 λ), 能级上的粒子数密度分别为 n_2 和 n_1 , 求

(a) 当 $\nu = 3000$ 兆赫兹, $T=300K$ 的时候, $n_2/n_1=?$

(b) 当 $\lambda = 1\mu m$, $T=300K$ 的时候, $n_2/n_1=?$

(c) 当 $\lambda = 1\mu m$, $n_2/n_1=0.1$ 时, 温度 $T=?$

解答: 在热平衡下, 能级的粒子数按波尔兹曼统计分布, 即:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{f_2}{f_1} \exp \frac{-h\nu}{k_b T} = \exp \frac{-(E_2 - E_1)}{K_b T} \quad (\text{统计权重 } f_1 = f_2)$$

其中 $k_b = 1.38062 \times 10^{-23} JK^{-1}$ 为波尔兹曼常数, T 为热力学温度。

$$(a) \frac{n_2}{n_1} = \exp \frac{-h\nu}{k_b T} = \exp \frac{-6.626 \times 10^{-34}(J \cdot s) \times \nu}{1.38062 \times 10^{-23}(J \cdot K^{-1}) \times T} = 0.99$$

$$(b) \frac{n_2}{n_1} = \exp \frac{-h\nu}{k_b T} = \exp \frac{-6.626 \times 10^{-34} (J \cdot s) \times \frac{c}{\lambda}}{1.38062 \times 10^{-23} (J \cdot K^{-1}) \times T} = 1.38 \times 10^{-21}$$

$$(c) T = - \frac{h\nu}{k_b \times \ln \frac{n_2}{n_1}} = - \frac{6.626 \times 10^{-34} (J \cdot s) \times \frac{c}{\lambda}}{k_b \times \ln \frac{n_2}{n_1}} = 6.26 \times 10^3 K$$

4 在红宝石调 Q 激光器中, 有可能将几乎全部 C_r^{+3} 离子激发到激光上能级并产生激光巨脉冲。设红宝石棒直径为 1cm, 长度为 7.5cm, C_r^{+3} 离子浓度为 $2 \times 10^{19} cm^{-3}$, 巨脉冲宽度为 10ns, 求激光的最大能量输出和脉冲功率。

解答: 红宝石调 Q 激光器在反转能级间可产生两个频率的受激跃迁, 这两个跃迁几率分别是 47% 和 53%, 其中几率占 53% 的跃迁在竞争中可以形成 694.3nm 的激光, 因此, 我们可以把激发到高能级上的粒子数看成是整个激发到高能级的 C_r^{+3} 粒子数的一半 (事实上红宝石激光器只有一半的激发粒子对激光有贡献)。

设红宝石棒长为 L, 直径为 d, 体积为 V, C_r^{+3} 总数为 N, C_r^{+3} 粒子的浓度为 n, 巨脉冲的时间宽度为 τ , 则 C_r^{+3} 离子总数为:

$$N = n \times V = n \times \frac{\pi d^2 L}{4}$$

根据前面分析部分, 只有 N/2 个粒子能发射激光, 因此, 整个发出的脉冲能量为:

$$E = \frac{N}{2} \times h\nu = \frac{\pi n L d^2}{8} \times h\nu =$$

脉冲功率是单位时间内输出的能量, 即

$$P = \frac{E}{\tau} = \frac{\pi n L d^2 h\nu}{8\tau} = \text{解答完毕。}$$

5 试证明, 由于自发辐射, 原子在 E_2 能级的平均寿命为 $\tau_s = \frac{1}{A_{21}}$ 。

证明如下: 根据自发辐射的定义可以知道, 高能级上单位时间粒子数减少的量, 等于低能级在单位时间内粒子数的增加。即:

$$\frac{dn_2}{dt} = - \left(\frac{dn_{21}}{dt} \right)_{sp} \text{-----} \textcircled{1} \quad \left(\text{其中等式左边表示单位时间内高能级上粒子数的变化, 高能级粒子数随时间减少。右边的表示低能级上单位时间内接纳的从高能级上自发辐射下来的粒子数。} \right)$$

再根据自发辐射跃迁几率公式:

$$A_{21} = \frac{dn_{21}}{dt} \times \frac{1}{n_2}, \text{ 把 } \left(\frac{dn_{21}}{dt} \right)_{sp} = A_{21} n_2 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 式,}$$

$$\text{得到: } \frac{dn_2}{dt} = -A_{21} n_2$$

对时间进行积分, 得到: $n_2 = n_{20} \exp(-A_{21} t)$ (其中 n_2 随时间变化, n_{20} 为开始时候的高能级具有的粒子数。)

按照能级寿命的定义, 当 $\frac{n_2}{n_{20}} = e^{-1}$ 时, 定义能量减少到这个程度的时间为能级寿命,

用字母 τ_s 表示。

因此, $A_{21}\tau_s = 1$, 即: $\tau_s = \frac{1}{A_{21}}$ 证明完毕

6 某一分子的能级 E_4 到三个较低能级 E_1 E_2 和 E_3 的自发跃迁几率分别为 $A_{43}=5 \times 10^7 s^{-1}$, $A_{42}=1 \times 10^7 s^{-1}$, $A_{41}=3 \times 10^7 s^{-1}$, 试求该分子 E_4 能级的自发辐射寿命 τ_4 。若 $\tau_1=5 \times 10^{-7} s$, $\tau_2=6 \times 10^{-9} s$, $\tau_3=1 \times 10^{-8} s$, 在对 E_4 连续激发且达到稳态时, 试求相应能级上的粒子数比值 n_1/n_4 , n_2/n_4 和 n_3/n_4 , 并说明这时候在哪两个能级间实现了集居数

解: (1) 由题意可知 E_4 上的粒子向低能级自发跃迁几率 A_4 为:

$$A_4 = A_{41} + A_{42} + A_{43} = 5 \times 10^7 + 1 \times 10^7 + 3 \times 10^7 = 9 \times 10^7 s^{-1}$$

则该分子 E_4 能级的自发辐射寿命:

$$\tau_4 = \frac{1}{A_4} = \frac{1}{9 \times 10^7} = 1.1 \times 10^{-8} s$$

结论: 如果能级 u 发生跃迁的下能级不止 1 条, 能级 u 向其中第 i 条自发跃迁的几率为 A_{ui} 则能级 u 的自发辐射寿命为:

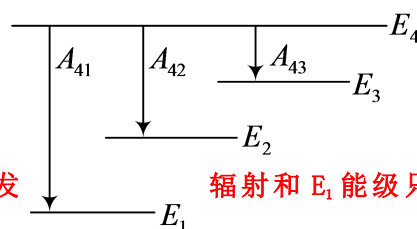
$$\tau_N = \frac{1}{\sum_i A_{ui}}$$

(2) 对 E_4 连续激发并达到稳态, 则有:

$$\Delta n_1 = \Delta n_2 = \Delta n_3 = \Delta n_4 = 0$$

$$n_1 \frac{1}{\tau_1} = n_4 A_{41}, \quad n_2 \frac{1}{\tau_2} = n_4 A_{42}, \quad n_3 \frac{1}{\tau_3} = n_4 A_{43}$$

(上述三个等式的物理意义是: 在只考虑高能级自发辐射和 E_1 能级只与 E_4 能级间有受激吸收过程, 见图)



宏观上表现为各能级的粒子数没有变化

由题意可得:

$$n_1 \frac{1}{\tau_1} = n_4 A_{41}, \text{ 则 } \frac{n_1}{n_4} = A_{41} \tau_1 = 3 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-7} = 15$$

$$\text{同理: } \frac{n_2}{n_4} = A_{42} \tau_2 = 1 \times 10^7 \times 6 \times 10^{-9} = 0.06, \quad \frac{n_3}{n_4} = A_{43} \tau_3 = 5 \times 10^7 \times 1 \times 10^{-8} = 0.5$$

$$\text{进一步可求得: } \frac{n_1}{n_2} = 250, \quad \frac{n_2}{n_3} = 0.12$$

由以上可知: 在 E_2 和 E_4 ; E_3 和 E_4 ; E_2 和 E_3 能级间发生了粒子数反转。

7 证明, 当每个模式内的平均光子数 (光子简并度) 大于 1 时, 辐射光中受激辐射占优势。

证明如下: 按照普朗克黑体辐射公式, 在热平衡条件下, 能量平均分配到每一个可以存在的模上, 即 $E = \frac{h\gamma}{\exp \frac{h\gamma}{k_b T} - 1} = \bar{n} \cdot h\gamma$ (\bar{n} 为频率为 γ 的模式内的平均光子数)

$$\text{由上式可以得到: } \bar{n} = \frac{E}{h\gamma} = \frac{1}{\exp \frac{h\gamma}{k_b T} - 1}$$

$$\text{又根据黑体辐射公式: } \rho_\gamma = \frac{8\pi h \gamma^3}{c^3} \times \frac{1}{\exp \frac{h\gamma}{k_b T} - 1} \Rightarrow \frac{1}{\exp \frac{h\gamma}{k_b T} - 1} = \frac{\rho_\gamma}{\frac{8\pi h \gamma^3}{c^3}} = \bar{n}$$

根据爱因斯坦辐射系数之间的关系式 $\frac{8\pi h \gamma^3}{c^3} = \frac{A_{21}}{B_{21}}$ 和受激辐射跃迁几率公式

$W_{21} = B_{21} \rho_\gamma$ ，则可以推导出以下公式：

$$\bar{n} = \frac{\rho_\gamma}{\frac{8\pi h \gamma^3}{c^3}} = \frac{\rho_\gamma}{\frac{A_{21}}{B_{21}}} = \frac{B_{21} \rho_\gamma}{A_{21}} = \frac{W_{21}}{A_{21}}$$

如果模内的平均光子数 (\bar{n}) 大于 1，即

$$\bar{n} = \frac{W_{21}}{A_{21}} > 1, \text{ 则受激辐射跃迁几率大于自发辐射跃迁几率,}$$

即辐射光中受激辐射占优势。证明完毕

8 一质地均匀的材料对光的吸收系数为 0.01 mm^{-1} ，光通过 10cm 长的该材料后，出射光强为入射光强的百分之几？

如果一束光通过长度为 1M 地均匀激励的工作物质，如果出射光强是入射光强的两倍，试求该物质的增益系数。

解答：设进入材料前的光强为 I_0 ，经过 z 距离后的光强为 $I(z)$ ，根据损耗系数 $\alpha = -\frac{dI(z)}{dz} \times \frac{1}{I(z)}$ 的定义，可以得到：

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z)$$

则出射光强与入射光强的百分比为：

$$k_z = \frac{I(z)}{I_0} \times 100\% = (\exp - \alpha z) \times 100\% = e^{-(0.01 \text{ mm}^{-1} \times 100 \text{ mm})} \times 100\% = 36.8\%$$

根据小信号增益系数的概念： $g^0 = \frac{dI(z)}{dz} \times \frac{1}{I(z)}$ ，在小信号增益的情况下，

上式可通过积分得到

$$I(z) = I_0 \exp g^0 z \Rightarrow \exp g^0 z = \frac{I(z)}{I_0} \Rightarrow g^0 z = \ln \frac{I(z)}{I_0} \Rightarrow g^0 =$$

$$\frac{\ln \frac{I(z)}{I_0}}{z} = \frac{\ln 2}{1000} = 6.93 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

解答完毕。

《激光原理》习题解答第二章习题解答

1 试利用往返矩阵证明共焦腔为稳定腔，即任意傍轴光线在其中可以往返无限次，而且两次往返即自行闭合。

证明如下：（共焦腔的定义——两个反射镜的焦点重合的共轴球面腔为共焦腔。共焦腔分为实共焦腔和虚共焦腔。公共焦点在腔内的共焦腔是实共焦腔，反之是虚共焦腔。两个反射镜曲率相等的共焦腔称为对称共焦腔，可以证明，对称共焦腔是实双凹腔。）

根据以上一系列定义，我们取具对称共焦腔为例来证明。

设两个凹镜的曲率半径分别是 R_1 和 R_2 ，腔长为 L ，根据对称共焦腔特点可知：

$$R_1 = R_2 = R = L$$

因此，一次往返转换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L \left(1 - \frac{L}{R_2} \right) \\ - \left[\frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} \left(1 - \frac{2L}{R_1} \right) \right] & - \left[\frac{2L}{R_1} - \left(1 - \frac{2L}{R_1} \right) \left(1 - \frac{2L}{R_2} \right) \right] \end{bmatrix}$$

把条件 $R_1 = R_2 = R = L$ 带入到转换矩阵 T, 得到:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

共轴球面腔的稳定判别式子 $-1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1$

如果 $\frac{1}{2}(A+D) = -1$ 或者 $\frac{1}{2}(A+D) = 1$, 则谐振腔是临界腔, 是否是稳定腔要根据情况来定。本题中, 因此可以断定是介稳腔 (临界腔), 下面证明对称共焦腔在近轴光线条件下属于稳定腔。

经过两个往返的转换矩阵式 T^2 , $T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

坐标转换公式为: $\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = T^2 \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$

其中等式左边的坐标和角度为经过两次往返后的坐标, 通过上边的式子可以看出, 光线经过两次往返后回到光线的出发点, 即形成了封闭, 因此得到近轴光线经过两次往返形成闭合, 对称共焦腔是稳定腔。

2 试求平凹、双凹、凹凸共轴球面腔的稳定条件。

解答如下: 共轴球面腔的 $\frac{1}{2}(A+D) \equiv 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2}$, 如果满足 $-1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1$,

则腔是稳定腔, 反之为非稳腔, 两者之间存在临界腔, 临界腔是否是稳定腔, 要具体分析。下面我们就根据以上的内容来分别求稳定条件。

对于平凹共轴球面腔, $\frac{1}{2}(A+D) = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} = 1 - \frac{2L}{R_2} \quad (R_1 \rightarrow \infty)$

所以, 如果 $-1 < 1 - \frac{2L}{R_2} < 1$, 则是稳定腔。因为 L 和 R_2 均大于零, 所以不等式的后半部分

一定成立, 因此, 只要满足 $\frac{L}{R_2} < 1$, 就能满足稳定腔的条件, 因此, $\frac{L}{R_2} < 1$ 就是平凹腔的

稳定条件。

类似的分析可以知道,

凸凹腔的稳定条件是: $R_1 < 0 \quad R_2 > L$, 且 $R_1 + R_2 < L$ 。

双凹腔的稳定条件是: $R_1 > L, R_2 > L$ (第一种情况)

$R_1 < L, R_2 < L$ 且 $R_1 + R_2 > L$ (第二种情况)

$R_1 = R_2 = R > \frac{L}{2}$ (对称双凹腔)

求解完毕。

3 激光腔的谐振腔由一曲率半径为 $1M$ 的凸和曲率半径为 $2M$ 的凹面镜构成, 工作物质长度为 $0.5M$, 其折射率为 1.52 , 求腔长 L_1 在什么范围内谐振腔是稳定的。

解答如下: 设腔长为 L_1 , 腔的光学长度为 L , 已知 $R_1 = -1M, R_2 = 2M, L_0 = 0.5M, \eta_1 = 1, \eta_2 = 1.52$,

根据 $\frac{1}{2}(A+D) = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2}$, 代入已知的凸凹镜的曲率半径, 得到:

$$\frac{1}{2}(A+D)=1+\frac{2L}{1M}-\frac{2L}{2M}-\frac{2L^2}{1M \times 2M}=1+L-L^2$$

因为含有工作物质，已经不是无源腔，因此，这里 L 应该是光程的大小（或者说是利用光线在均匀介质里传播矩阵）。

即 $L = \frac{L_1 - L_0}{\eta_1} + \frac{L_0}{\eta_2} = \frac{L_1 - 0.5}{1} + \frac{0.5}{1.52}$ ，代入上式，得到：

$$\frac{1}{2}(A+D)=1+L-L^2=1+\frac{L_1-0.5}{1}+\frac{0.5}{1.52}-\left(\frac{L_1-0.5}{1}+\frac{0.5}{1.52}\right)^2$$

要达到稳定腔的条件，必须是 $-1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1$ ，按照这个条件，得到腔的几何长度为：

$1.17 < L_1 < 2.17$ ，单位是米。解答完毕。

5 有一方形孔径共焦腔氦氖激光器，腔长 $L=30\text{CM}$ ，方形孔径边长为 $d=2a=0.12\text{CM}$ ， $\lambda=632.8\text{nm}$ ，镜的反射率为 $r_1=1$ ， $r_2=0.96$ ，其他损耗以每程 0.003 估计。此激光器能否做单模运转？如果想在共焦镜面附近加一个方形小孔光阑来选择 TEM_{00} 模，小孔的边长应为多大？试根据图 2.5.5 作一大略的估计。氦氖激光器增益由公式 $e^{g^0 l} = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \frac{l}{d}$ 估算，其

中的 l 是放电管长度。

分析：如果其他损耗包括了衍射损耗，则只考虑反射损耗及其他损耗的和是否小于激光器的增益系数，增益大于损耗，则可产生激光振荡。

如果其他损耗不包括衍射损耗，并且菲涅尔数小于一，则还要考虑衍射损耗，衍射损耗的大小可以根据书中的公式 $\delta_{00}=10.9 \cdot 10^{-4} \cdot 94N$ 来确定，其中的 N 是菲涅尔数。

解答：根据 $e^{g^0 l} = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \frac{l}{d}$ ，可以知道单程增益 $g^0 L = \ln(1 + 0.0003L/d) = 0.0723$

由于反射不完全引起的损耗可以用公式 2.1.24 或者 2.1.25 来衡量
根据 2.1.24 得到：

$$\delta r \approx -0.51 \ln r_1 r_2 = 0.0204$$

根据题意，总的损耗为反射损+其他损耗，因此单程总损耗系数为

$$\delta = 0.0204 + 0.0003 < g^0 L$$

如果考虑到衍射损耗，则还要根据菲涅尔数来确定衍射损系数：

此方形共焦腔氦氖激光器的菲涅尔数为： $N = a^2 / (L \lambda) = 7.6$ ，菲涅尔数大于一很多倍，因此可以不考虑衍射损耗的影响。

通过以上分析可以断定，此谐振腔可以产生激光振荡。又根据氦氖激光器的多普勒展宽达到 1.6GHz ，而纵模及横模间隔根据计算可知很小，在一个大的展宽范围内可以有后很多具有不同模式的光波振荡，因此不采取技术措施不可能得到基模振荡。

为了得到基模振荡，可以在腔内加入光阑，达到基模振荡的作用。在腔镜上，基模光斑半径为：

$$\omega_{os} = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} = 2.46 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

因此，可以在镜面上放置边长为 $2\omega_{os}$ 的光阑。

解答完毕。

6 试求出方形镜共焦腔面上 TEM_{30} 模的节线位置，这些节线是等距分布吗？

解答如下：

方形镜共焦腔自再现模满足的积分方程式为

$$v_{mn}(x, y) = \gamma_{mn} \left(\frac{i}{L\lambda} e^{-ikL} \right) \int_{-a}^a \int_{-a}^a v_{mn}(x', y') e^{ik \frac{xx' + yy'}{L}} dx' dy'$$

经过博伊德—戈登变换，在通过厄密-高斯近似，可以用厄密-高斯函数表示镜面上场的函数

$$v_{mn}(x, y) = C_{mn} H_m \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L\lambda}} x \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L\lambda}} y \right) e^{-\frac{c(x^2 + y^2)}{(L\lambda/\pi)}}$$

$$v_{30}(x, y) = C_{30} H_3 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L\lambda}} x \right) H_0 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L\lambda}} y \right) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{(L\lambda/\pi)}} = C_{30} \left(8 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L\lambda}} x \right)^3 - 12 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L\lambda}} x \right) \right) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{(L\lambda/\pi)}}$$

使 $v_{30}(x, y) = 0$ 就可以求出节线的位置。由上式得到：

$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}, \text{ 这些节线是等距的。解答完毕。}$$

7 求圆形镜共焦腔 TEM_{20} 和 TEM_{02} 模在镜面上光斑的节线位置。

解答如下：圆形镜共焦腔场函数在拉盖尔—高斯近似下，可以写成如下的形式

$$v_{mn}(r, \varphi) = C_{mn} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_{0s}} \right)^m L_m^n \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}} \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (\text{这个场对应于 } TEM_{mn}, \text{ 两个三角})$$

函数因子可以任意选择，但是当 m 为零时，只能选余弦，否则整个式子将为零)

$$\text{对于 } TEM_{20}: v_{20}(r, \varphi) = C_{20} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_{0s}} \right)^2 L_0^2 \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}} \begin{cases} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\text{并且 } L_0^2 \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) = 1, \text{ 代入上式，得到}$$

$$v_{20}(r, \varphi) = C_{20} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_{0s}} \right)^2 e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}} \begin{cases} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{cases}, \text{ 我们取余弦项,}$$

$$\text{根据题中所要求的结果，我们取 } v_{20}(r, \varphi) = C_{20} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_{0s}} \right)^2 e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}} \cos 2\varphi = 0, \text{ 就能}$$

求出镜面上节线的位置。既

$$\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

对于 TEM_{02} ，可以做类似的分析。

$$v_{02}(r, \varphi) = C_{02} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_{0s}} \right)^0 L_2^0 \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}} = C_{02} L_2^0 \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}}$$

$$L_2^0 \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) = 1 - \frac{4r^2}{\omega_{0s}^2} + \frac{2r^4}{\omega_{0s}^4}, \text{ 代入上式并使光波场为零，得到}$$

$$u_{02}(r, \varphi) = C_{02} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_{0s}} \right)^0 \left(1 - \frac{4r^2}{\omega_{0s}^2} + \frac{2r^4}{\omega_{0s}^4} \right) e^{-\frac{r^2}{\omega_{0s}^2}} = 0$$

显然，只要 $L_2^0 \left(\frac{2r^2}{\omega_{0s}^2} \right) = 1 - \frac{4r^2}{\omega_{0s}^2} + \frac{2r^4}{\omega_{0s}^4} = 0$ 即满足上式

最后镜面上节线圆的半径分别为：

$$r_1 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \omega_{0s}, r_2 = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \omega_{0s}$$

解答完毕。

8 今有一球面腔，两个曲率半径分别是 $R_1=1.5M$ ， $R_2=-1M$ ， $L=80CM$ ，试证明该腔是稳定腔，求出它的等价共焦腔的参数，在图中画出等价共焦腔的具体位置。

解：共轴球面腔稳定判别的公式是 $-1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1$ ，这个公式具有普适性（教材 36 页中间文字部分），对于简单共轴球面腔，可以利用上边式子的变换形式 $0 < g_1 g_2 < 1$ 判断稳定性，其中 $g_i = 1 - \frac{L}{R_i}$ 。

$$\text{题中 } g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1 - \frac{8}{15}, g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = 1 - \frac{8}{10}$$

$g_1 g_2 = 0.093$ ，在稳定腔的判别范围内，所以是稳定腔。

任意一个共焦腔与无穷多个稳定球面腔等价，一个一般稳定球面腔唯一对应一个共焦腔，他们的行波场是相同的。

等价共焦腔的参数包括：以等价共焦腔的腔中心为坐标原点，从坐标原点到一般稳定球面两个腔镜面的坐标 Z_1 和 Z_2 ，再加上它的共焦腔的镜面焦距 F ，这三个参数就能完全确定等价共焦腔。

根据公式（激光原理 p66-2.8.4）得到：

$$Z_1 = \frac{L(R_2 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} = \frac{0.8 \times (1 - 0.8)}{(0.8 - 1.5) + (0.8 - 1)} = -0.18M$$

$$Z_2 = \frac{-L(R_1 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} = \frac{-0.8 \times (1.5 - 0.8)}{(0.8 - 1.5) + (0.8 - 1)} = 0.62M$$

$$F^2 = \frac{L(R_2 - L)(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)}{[(L - R_1) + (L - R_2)]^2} = \frac{0.8 \times (1 - 0.8) \times (1.5 - 0.8) \times (1.5 + 1 - 0.8)}{[(0.8 - 1.5) + (0.8 - 1)]^2} = 0.235$$

因此 $F = 0.485M$

等价共焦腔示意图略。

9 某二氧化碳激光器采用平-凹腔， $L=50CM$ ， $R=2M$ ， $2a=1CM$ ，波长 $\lambda=10.6 \mu m$ ，试计算镜面上的光斑半径、束腰半径及两个镜面上的损耗。

解：此二氧化碳激光器是稳定腔，其中平面镜的曲率半径可以看作是无穷大。

根据公式（激光原理 p67-2.8.6 或 2.8.7）得到：

$$\omega_{s1} = \omega_{0s} \left[\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)} \right]^{1/4} = \sqrt{L\lambda/\pi} \left[\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)} \right]^{1/4} = 1.687 \times 10^{-6} \times 1.316 = 2.22 \times 10^{-6} M$$

$$\omega_{s2} = \omega_{0s} \left[\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)} \right]^{1/4} = \sqrt{L\lambda/\pi} \left[\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)} \right]^{1/4} = 1.687 \times 10^{-6} \times 5.333 = 8.997 \times 10^{-6} M$$

其中第一个腰斑半径对应平面镜。上式中 $\omega_{0s} = \sqrt{L\lambda/\pi}$ 是这个平凹腔的等价共焦腔镜面上的腰斑半径，并且根据一般稳定球面腔与等价共焦腔的性质，他们具有同一个束腰。

根据共焦腔束腰光斑半径与镜面上光斑半径的关系可知：

$$\omega_0 = \frac{\omega_{0s}}{\sqrt{2}} = \frac{1.687}{1.414} = 1.193 \mu M$$

作为稳定腔，损耗主要是衍射损，衍射损耗与镜面上的菲涅尔数有关，在损耗不大的情况下，是倒数关系。

即：

$$\delta = \frac{1}{N}$$

根据公式（激光原理 p69-2.8.18 或 2.8.19）分别求出两个镜面的菲涅尔数

$$N_{ef1} = \frac{a_1^2}{\pi \omega_{s1}^2} = \frac{0.25 \times 10^{-4}}{3.1416 \times (2.22 \times 10^{-6})^2} = 1.615 \times 10^6$$

$$N_{ef2} = \frac{a_2^2}{\pi \omega_{s2}^2} = \frac{0.25 \times 10^{-4}}{3.1416 \times (8.997 \times 10^{-6})^2} = 9.831 \times 10^4$$

根据衍射损耗定义，可以分别求出：

$$\delta_1 = \frac{1}{N_{ef1}} = 6.2 \times 10^{-7}, \quad \delta_2 = \frac{1}{N_{ef2}} = 1.02 \times 10^{-5}$$

10 证明在所有菲涅尔数 $N = \frac{a^2}{L\lambda}$ 相同而曲率半径 R 不同的对称稳定球面腔中，共焦腔的衍射损耗最低。这里 L 表示腔长，a 是镜面的半径。

证明：

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 &= 2L \\ \text{在对称共焦腔中, } R_1 &= R_2 \\ f &= \frac{R_1}{2} = \frac{R_2}{2} \end{aligned} \right\}$$

11 今有一平面镜和一个曲率半径为 R=1M 的凹面镜，问：应该如何构成一个平—凹稳定腔以获得最小的基模远场发散角，画出光束发散角与腔长的关系。

解答：

我们知道，远场发散角不仅和模式（频率）有关，还和腔的结构有关。根据公式 2.6.14

得到： $\theta_0 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{f\pi}}$ ，如果平面镜和凹面镜构成的谐振腔所对应的等价共焦腔焦距最大，则

可以获得最小的基模光束发散角。

$$f^2 = \frac{L(R_2 - L)(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)}{[(L - R_1) + (L - R_2)]^2} \Rightarrow f_{\max} = 0.25m$$

代入发散角公式，就得到最小发散角为：

$$\theta_0 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{f\pi}} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{0.25\pi}} = 4\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

发散角与腔长的关系式：

$$\theta_0 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{f\pi}} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{l(1-l)}\pi}}$$

13 某二氧化碳激光器材永平凹腔，凹面镜的 $R=2M$ ，腔长 $L=1M$ ，试给出它所产生的高斯光束的束腰半径的大小和位置，该高斯光束的焦参数和基模发散角。

解答：

$$F = \sqrt{\frac{L(R_2 - L)(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)}{[R_1 + R_2 - 2L]^2}} = 1M$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F\lambda}{\pi}} = \sqrt{\frac{10.6}{3.1416}} = 1.84\mu M$$

$$\theta_0 = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0} = 1.128\sqrt{\frac{\lambda}{F}} = 3.67 \times 10^{-3} rad$$

14 某高斯光束束腰半径为 $1.14MM$ ，波长 $\lambda=10.6\mu M$ 。求与束腰相距 30 厘米、100 厘米、1000 米远处的光斑半径及相应的曲率半径。

解答：根据公式（激光原理 p71-2.9.4, 2.9.6）

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right)^2}$$

把不同距离的数据代入，得到：

$$\omega(30cm) = 1.45MM, \quad \omega(10m) = 2.97CM, \quad \omega(1000m) = 2.97M$$

$$\text{曲率半径 } R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z}\right)^2 \right]$$

与不同距离对应的曲率半径为：

$$R(30cm) = 0.79M, \quad R(10m) = 10.015M, \quad R(1000m) = 1000M$$

15 若已知某高斯光束的束腰半径为 0.3 毫米，波长为 632.8 纳米。求束腰处的 q 参数值，与束腰距离 30 厘米处的 q 参数值，与束腰相距无限远处的 q 值。

解答：

束腰处的 q 参数值实际上就是书中的公交参量（激光原理 p73-2.9.12）：

$$q_0 = if = i \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} = 44.68i$$

根据公式（激光原理 p75-2.10.8）

$q(z) = q_0 + z$ ，可以得到 30 厘米和无穷远处的 q 参数值分别为

$$q(30) = q_0 + 30 = 30 + 44.68i$$

无穷远处的参数值为无穷大。

16 某高斯光束束腰半径为 1.2 毫米，波长为 10.6 微米。现在用焦距 $F=2cm$ 的透镜聚焦，当束腰与透镜距离分别为 10 米，1 米，10 厘米和 0 时，求焦斑大小和位置，并分析结果。

解答：

根据公式（激光原理 p78-2.10.17 和 2.10.18）

当束腰与透镜距离 10 米时

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}} = 2.4\mu M$$

同理可得到：

解答完毕

17 二氧化碳激光器输出波长为 10.6 微米的激光，束腰半径为 3 毫米，用一个焦距为 2 厘米的凸透镜聚焦，求欲得到焦斑半径为 20 微米及 2.5 微米时，透镜应该放在什么位置。

解答：根据公式（激光原理 p78-2.10.18）

$$\omega_0'^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

上式中束腰到透镜的距离 l 就是我们要求的参数，其他各个参数都为已知，代入题中给出的数据，并对上式进行变换，得到

$$|l-F| = \sqrt{\frac{F^2 \omega_0^2}{\omega_0'^2} - \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

当焦斑等于 20 微米时， $l = 1.395M$ （透镜距束腰的距离）

当焦斑等于 2.5 微米时， $l = 23.87M$

此提要验证

18 如图 2.2 所示，入射光波长为 10.6 微米，求 ω_0'' 及 l_3 。

解答：经过第一个透镜后的焦斑参数为：

$$\omega_0'^2 = \frac{F_1^2 \omega_0^2}{(F_1 - l_1)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2} \quad l' = F_1 + \frac{(l_1 - F_1)F_1^2}{(l_1 - F_1)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

经过第二个透镜后的焦参数为：

$$\omega_0''^2 = \frac{F_2^2 \omega_0'^2}{(F_2 - l'')^2 + \left(\frac{\pi \omega_0'^2}{\lambda}\right)^2} \quad l_3 = F_1 + \frac{(l'' - F_2)F_2^2}{(l'' - F_2)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0'^2}{\lambda}\right)^2}$$

$$l' + l'' = l_2$$

解方程可以求出题中所求。

19 某高斯光束束腰半径为 1.2 毫米，波长为 10.6 微米。现在用一个望远镜将其准直。主镜用曲率半径为 1 米的镀金反射镜，口径为 20 厘米；副镜为一个焦距为 2.5 厘米，口径为 1.5 厘米的锗透镜；高斯光束束腰与透镜相距 1 米，如图所示。求该望远镜系统对高斯光束的准直倍率。

解答：

根据公式（激光原理 p84-2.11.19）

$$M' = M \sqrt{1 + \left(\frac{l}{f}\right)^2} = M \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda l}{\pi \omega_0^2}\right)^2}, \text{ 其中 } M = \frac{F_2}{F_1}, \text{ 为望远镜主镜与副镜的焦距}$$

比。题中的反射镜，相当于透镜，且曲率半径的一半就是透镜的焦距。

$$\text{已知: } \omega_0 = 1.2MM, \lambda = 10.6\mu M, F_1 = 2.5CM, F_2 = \left|\frac{R}{2}\right| = 50CM, 2a_1 = 1.5CM$$

$$2a_2 = 20CM, l = 1M$$

（经过验证，光斑在第一个透镜表面形成的光斑半径小于透镜镜面尺寸，衍射效应很小，因此可以用准直倍率公式）

代入准直倍率公式得到：

$$M' = M \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda l}{\pi \omega_0^2} \right)^2} = \frac{F_2}{F_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda l}{\pi \omega_0^2} \right)^2} = 50.97$$

解答完毕。

20 激光器的谐振腔有两个相同的凹面镜组成，它出射波长为 λ 的基模高斯光束，今给定功率计，卷尺以及半径为 a 的小孔光阑，试叙述测量该高斯光束焦参数 f 的实验原理及步骤。

设计如下：

首先明确焦参数的构成元素为腰斑半径 ω_0 ，波长 λ 及 π 参数，根据提供的数据，激光器的波长为已知，我们不可能直接测量腔内的腰斑半径（因为是对称腔，束腰在腔内），只

能通过技术手段测量发射出来的光波场的腰斑半径，然后利用 $\omega(z) = \sqrt{\frac{f\lambda}{\pi}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f} \right)^2}$ 这

里的 z 是由激光器腔中心到光功率计的距离，用卷尺可以测量。光功率计放置在紧贴小孔光阑的后面，沿着光场横向移动，测量出 $\omega(z)$ 。把测量的 $\omega(z)$ 和 z 代入公式，可以求出焦参数。

设计完毕（以上只是在理论上的分析，实际中的测量要复杂得多，实验室测量中会用透镜扩束及平面镜反射出射光，增加距离进而增加测量精度）

21 二氧化碳激光谐振腔由两个凹面镜构成，两个镜面的曲率半径分别是 1 米和两米，光腔长度为 0.5 米。

问：如何选择高斯光束腰斑的大小和位置，才能使它构成该谐振腔的自再现光束。

解答：

高斯光束的自再现条件是（激光原理 p84-2.12.1 及 2.12.2）：

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega'_0 \\ l = l' \end{cases}$$

$$q_c(l_c = l) = q(0)$$

根据公式（激光原理 p78-2.10.17 及 2.10.18）

$$\omega_0'^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F - l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2}$$

经过曲率半径为 1 米的反射镜后，为了保证自再现条件成立，腔内的束腰半径应该与经过反射镜的高斯光束的束腰相同，因此得到：

$$1 = \frac{F_1^2}{(F_1 - l_1)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2} \quad 1$$

同理，经过第二个反射镜面也可以得到：

$$1 = \frac{F_2^2}{(F_2 - l_2)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2} \quad 2$$

$$l_1 + l_2 = L \quad 3$$

根据以上三个式子可以求出 l_1 ， l_2 ， ω_0

$$l_1 = 0.375M, \quad l_2 = 0.125M, \quad \omega_0 = 1.63\mu M$$

解答完毕。

22 (1) 用焦距为 F 的薄透镜对波长为 λ 、束腰半径为 ω_0 的高斯光束进行变换，并使变换后的高斯光束的束腰半径 $\omega_0' < \omega_0$ （此称为高斯光束的聚焦），在 $F > f$ 和 $F < f$ ($f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$) 两种情况下，如何选择薄透镜到该高斯光束束腰的距离？(2) 在聚焦过程中，如果薄透镜到高斯光束束腰的距离不变，如何选择透镜的焦距 F ？

解答：

$$(1) \text{ 根据 } \omega_0'^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2} = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + f^2} \text{ 可知}$$

$$\frac{\omega_0'^2}{\omega_0^2} = \frac{F^2}{(F-l)^2 + f^2} < 1, \text{ 即 } l^2 - 2Fl + f^2 > 0$$

通过运算可得到：

$$l > F + \sqrt{F^2 + f^2} \text{ 或者 } l < F - \sqrt{F^2 + f^2} \text{ (舍去)}$$

(2) 参考《激光原理》p81-2. l 一定时， ω_0' 随焦距变化的情况。

23 试用自变换公式的定义式 $q_c(l_c = l) = q_0$ （激光原理 p84-2. 12. 2），利用 q 参数来推导出自变换条件式 $F = \frac{1}{2}l \left[1 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda l} \right)^2 \right]$

证明：

设高斯光束腰斑的 q 参数为 $q_0 = if = i \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$ ，腰斑到透镜的距离为 l ，透镜前表面和后表面的 q 参数分别为 q_1 、 q_2 ，经过透镜后的焦斑处 q 参数用 q_c 表示，焦斑到透镜的距离是 $l_c = l$ ，透镜的焦距为 F 。

根据 q 参数变换，可以求出前表面、后表面、及焦斑处的 q 参数，分别是：

$$\text{透镜前表面: } q_1 = q_0 + l$$

$$\text{透镜后表面: } \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{F}$$

$$\text{焦斑的位置: } q_c = q_2 + l_c$$

把经过变换的 $q_2 = \frac{Fq_1}{F - q_1}$ 代入到焦斑位置的 q 参数公式，并根据自再现的条件，得到：

$$\left. \begin{aligned} q_c &= q_2 + l_c = \frac{Fq_1}{F - q_1} + l_c \\ l_c &= l \\ q_c &= q_0 = if = i \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \\ q_1 &= q_0 + l \end{aligned} \right\} \text{由此可以推导出 } F = \frac{1}{2} l \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda l} \right)^2 \right]$$

证明完毕。

24 试证明在一般稳定腔中，其高斯模在腔镜面处的两个等相位面的曲率半径必分别等于各镜面的曲率半径。

证明

设一般稳定腔的曲率半径分别是 R_1 、 R_2 ，腔长为 L ，坐标取在这个稳定腔的等价共焦腔中心上，并且坐标原点到镜面的距离分别是 z_1 和 z_2 ，等价共焦腔的焦距为 f 。

根据

25 试从式 $\frac{1}{l_1 + L} - \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R_2}$ 和 $\frac{1}{l_2 + L} - \frac{1}{l_1} = \frac{2}{R_1}$ 导出 $l_1^2 + Bl_1 + C = 0$ ，其中的

$$B = \frac{2L(L - R_2)}{2L - R_1 - R_2}, \quad C = \frac{LR_1(L - R_2)}{2L - R_1 - R_2}, \text{ 并证明对双凸腔 } B^2 - 4C > 0$$

解答：略

26 试计算 $R_1 = 1M$ ， $L = 0.25M$ ， $a_1 = 2.5CM$ ， $a_2 = 1CM$ 的虚共焦腔的 $\xi_{\text{单程}}$ 和 $\xi_{\text{往返}}$ 。若想保持 a_1 不变并从凹面镜 M_1 端单端输出，应如何选择 a_2 ？反之，若想保持 a_2 不变并从凸面镜 M_2 输出， a_1 如何选择？在这两种情况下， $\xi_{\text{单程}}$ 和 $\xi_{\text{往返}}$ 各为多大？

解答：

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} &= L \\ 2g_1g_2 &= g_1 + g_2 \\ \text{虚共焦腔的特点: } m_1 &= \frac{a_1'}{a_1} = 1 \\ m_2 &= \frac{a_2'}{a_2} = \left| \frac{R_1}{R_2} \right| \\ M &= m_1m_2 = \left| \frac{R_1}{R_2} \right| \end{aligned} \right\} \text{激光原理 p91, 96}$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\text{单程}} &= 1 - \frac{1}{M} \\ \xi_{\text{往返}} &= 1 - \frac{1}{M^2} \end{aligned} \right\} \text{激光原理 p97-2. 1511, 2. 15. 12}$$

根据 $\xi_{\text{单程}} = 1 - \frac{1}{M} = 1 - \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \Rightarrow \xi_{\text{单程}} = 50\%$,

$$R_2 = 2L - R_1 = -0.5m$$

同理： $\xi_{\text{往返}} = 1 - \frac{1}{M^2} = 75\%$

单端输出：如果要从虚共焦非稳定腔的凸面镜单端输出平面波，并使腔内振荡光束全部通过激活物质，则凹面镜和凸透镜的选区要满足： $a_1 \geq a_0$ ， $a_2 \approx \frac{a_0}{M}$ ，其中的 a 分别代表

（按角标顺序）工作物质的半径、凹面镜半径、凸面镜半径

1 实施意义上的单面输出（从凸面镜端输出）：按照图（激光原理 p96-图 2.15.2a）为了保证从凸面镜到凹面镜不发生能量损失，则根据图要满足：

$$\left| \frac{\left(\frac{R_2}{2} \right)}{\left(\frac{R_1}{2} \right)} \right| = \left| \frac{R_2}{R_1} \right| = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{因为凸面镜的尺寸不变，所以在曲率半径给定的条件下，凹面镜}$$

的半径应该为：

$$a_1 = a_2 \cdot \left| \frac{R_1}{R_2} \right| = 2CM$$

2 从凹面镜端输出，只要保证有虚焦点发出的光到达凹面镜后的反射光（平行光）正好在凸面镜的限度范围内，则可保证从凹面镜单端输出。

因此，此时只要满足 $a_1 = a_2$ 即可，因此 $a_2 = 2.5CM$

这两种情况下的单程和往返损耗略。

解答完毕。

第三章习题

1. 试由式 (3.3.5) 导出式 (3.3.7)，说明波导模的传输损耗与哪些因素有关。在其他条件不变时，若波导半径增大一倍，损耗将如何变化？若 λ 减小到原来的 1/2，损耗又将如何变化？在什么条件下才能获得低的传输损耗？

解：由 $\gamma_{nm} \approx k[1 - \frac{1}{2}(\frac{u_{nm}}{ka})^2(1 - i\frac{2\eta_n}{ka})]$ 及 $\gamma_{nm} = \beta_{nm} + i\alpha_{nm}$ 可得：

$$\beta_{nm} = \text{Re}\{\gamma_{nm}\} = k[1 - \frac{1}{2}(\frac{u_{nm}}{ka})^2(1 + \frac{2}{ka}\text{Im}\{\eta_n\})]$$

$$\alpha_{nm} = \text{Im}\{\gamma_{nm}\} = -\frac{1}{2}k(\frac{u_{nm}}{ka})^2 \frac{2}{ka} \text{Re}\{\eta_n\} = (\frac{u_{nm}}{2\pi})^2 \frac{\lambda_0^2}{a^3} \text{Re}\{\eta_n\}$$

波导模的传输损耗 α_{nm} 与波导横向尺寸 a ，波长 λ_0 ，波导材料的折射率实部以及不同波导模对应得不同 u_{nm} 值有关。

(a) 波导半径增大一倍，损耗减为原来的 $\frac{1}{8}$ 。

(b) 波长减小到原来的一半，损耗减为原来的 $\frac{1}{4}$ 。

获得低的传输损耗应增大波导横向尺寸，选择折射率实部小的介质材料和 u_{nm} 小的波导模。

2. 试证明，当 η 为实数时，若 $\eta > 2.02$ ，最低损耗模为 TE_{01} 模，而当 $\eta < 2.02$ 时，为 EH_{11} 模，并证明 TE_{01} 模的损耗永远比 TM_{01} 模低。

证明：

$$\alpha_{nm} = \left(\frac{u_{nm}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_0^2}{a^3} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, & \text{对 } TE_{0m} \text{ 模} \\ \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, & \text{对 } TM_{0m} \text{ 模} \\ \frac{1}{2} \frac{\eta^2 + 1}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, & \text{对 } EH_{nm} \text{ 模} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

对于以上三种不同模，参看书表中表 3.1，对于同一种模式， m 越小，损耗越小，因此以下考虑 TE_{01} ， TM_{01} ， EH_{11} 模之间谁最小（ EH_{11} 中 $n=1$ 最小）题中设 η 为实数，显然 $\eta > 1$ ，所以 $\alpha_{01}^{TM_{01}} > \alpha_{01}^{TE_{01}}$ ，只需考虑 TE_{01} 与 EH_{11} ：

$$\text{当 } \frac{\alpha_{01}^{TE_{01}}}{\alpha_{11}^{EH_{11}}} = \frac{u_{01}^2}{u_{11}^2} \frac{2}{\eta^2 + 1} > 1 \text{ 时， } EH_{11} \text{ 小} \Rightarrow \eta < 2.02$$

$$\text{当 } \frac{\alpha_{01}^{TE_{01}}}{\alpha_{11}^{EH_{11}}} < 1 \text{ 时， } TE_{01} \text{ 小} \Rightarrow \eta > 2.02$$

3. BeO 在 $10.6\mu m$ 波长时 $\text{Re}\{\eta_n\} = 0.033$ ，试求在内径为 $2a = 1.4mm$ 的 BeO 波导管中 EH_{11} 模和 EH_{12} 模的损耗 α_{11} 和 α_{12} ，分别以 cm^{-1} ， m^{-1} 以及 dB/m 来表示损耗的大小。当通过 $10cm$ 长的这种波导时， EH_{11} 模的振幅和强度各衰减了多少（以百分数表示）？

$$\text{解：由 } \alpha_{nm} = \left(\frac{u_{nm}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_0^2}{a^3} \text{Re}\{\eta_n\}$$

$$\alpha_{11} = 1.58 \times 10^{-5} cm^{-1} = 1.58 \times 10^{-3} m^{-1}, \quad L_{11} = 8.686 \alpha_{11} = 1.37 \times 10^{-2} dB/m$$

$$\alpha_{12} = 8.34 \times 10^{-5} cm^{-1} = 8.34 \times 10^{-3} m^{-1}, \quad L_{12} = 7.24 \times 10^{-2} dB/m。$$

$$\text{当 } z = 10cm \text{ 时， } 1 - \frac{E(z)}{E(0)} \approx 0.02\%, \quad 1 - \frac{I(z)}{I(0)} \approx 0.04\%$$

4. 试计算用于 $10.6\mu m$ 波长的矩形波导的 α_{11} 值，以 cm^{-1} 及 dB/m 表示，波导由 BeO 制成， $\text{Re}\{\eta_n\} = 0.033$ ， $2a = 1.4mm$ ，计算由 SiO_2 制成的同样的波导的 α_{11} 值，计算中取 $\text{Re}\{\eta_n\} = 1.37$ 。

$$\text{解： } \alpha_{11} = \frac{1}{8} \frac{\lambda_0^2}{a^3} \text{Re}\{\eta_n\}$$

$$BeO: \alpha_{11} = 1.35 \times 10^{-3} m^{-1} = 1.35 \times 10^{-5} cm^{-1}$$

$$L_{11} = 8.686 \alpha_{11} = 0.012 dB/m$$

$$SiO_2: \alpha_{11} = 0.056 m^{-1} = 5.6 \times 10^{-4} cm^{-1}$$

$$L_{11} = 8.686 \alpha_{11} = 0.487 dB/m。$$

5. 某二氧化碳激光器用 SiO_2 作波导管，管内径 $2a = 1.4mm$ ，取 $\text{Re}\{\eta_n\} = 1.37$ ，管长 $10cm$ ，两端对称地各放一面平面镜作腔镜。试问：为了 EH_{11} 模能产生振荡，反射镜与波导口距离最大不得超过多少？计算中激活介质增益系数 $0.01cm^{-1}$ 。

$$\text{解： } \alpha_{11} = \left(\frac{u_{11}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda^2}{a^3} \text{Re}\{\eta_n\} = 6.575 \times 10^{-4} cm^{-1},$$

$$z = 10cm \text{ 时， } e^{gz} = e^{(g_0 - 2\alpha_{11})z} = 1.0907,$$

而平面反射镜所产生的耦合损耗为 ($\frac{z}{f} < 0.4$) : $C_{11} = 0.57 \times \left(\frac{z}{f}\right)^{\frac{3}{2}}$, 其中

$$f = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}, \omega_0 = 0.6435a。$$

为使 EH_{11} 模能产生振荡则要求 $e^{g_z}(1 - C_{11}) > 1$, 得:

$z < 0.277f = 1.66\text{cm}$, 即反射镜与波导口距离不得超过 1.66cm.

第四章

1 静止氦原子的 $3S_2 \rightarrow 2P_4$ 谱线中心波长为 632.8 纳米, 设氦原子分别以 0.1C、0.4C、0.8C 的速度向着观察者运动, 问其表观中心波长分别变为多少?

解答:

根据公式 (激光原理 P136)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$$\lambda \nu = \nu$$

由以上两个式子联立可得:

$$\lambda = \sqrt{\frac{C - v}{C + v}} \times \lambda_0$$

代入不同速度, 分别得到表观中心波长为:

$$\lambda_{0.1C} = 572.4\text{nm}, \lambda_{0.4C} = 414.26\text{nm}, \lambda_{0.9C} = 210.9\text{nm}$$

解答完毕 (验证过)

2 设有一台迈克尔逊干涉仪, 其光源波长为 λ , 试用多普勒原理证明, 当可动反射镜移动距离 L 时, 接收屏上的干涉光强周期性的变化 $2L/\lambda$ 次。

证明:

对于迈氏干涉仪的两个臂对应两个光路, 其中一个光路上的镜是不变的, 因此在这个光路中不存在多普勒效应, 另一个光路的镜是以速度 v 移动, 存在多普勒效应。在经过两个光路返回到半透镜后, 这两路光分别保持本来频率和多普勒效应后的频率被观察者观察到 (从半透镜到观察者两个频率都不变), 观察者感受的是光强的变化, 光强和振幅有关。以上是分析内容, 具体解答如下:

无多普勒效应的光场: $E_v = E_0 \cos(2\pi\nu \cdot t)$

产生多普勒效应光场: $E_{v'} = E_0 \cos(2\pi\nu' \cdot t)$

在产生多普勒效应的光路中, 光从半透经到动镜产生一次多普勒效应, 从动镜回到半透镜又产生一次多普勒效应 (是在第一次多普勒效应的基础上)

第一次多普勒效应: $\nu' = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

第二次多普勒效应: $\nu'' = \nu' \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \approx \nu \left(1 + \frac{2v}{c}\right)$

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \left\{ \cos(2\pi\nu \cdot t) + \cos\left(2\pi\nu \left(1 + \frac{2v}{c}\right) \cdot t\right) \right\} =$$

在观察者处:

$$= 2E_0 \cos\left(2\pi\nu \cdot t + \frac{v}{c} 2\pi\nu \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{v}{c} 2\pi\nu \cdot t\right)$$

观察者感受到的光强：
$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ 1 + \cos \left[2\pi \left(2\nu \cdot \frac{\nu}{c} \right) \cdot t \right] \right\}$$

显然，光强是以频率 $2\nu \cdot \frac{\nu}{c}$ 为频率周期变化的。

因此，在移动的范围 L 内，光强变化的次数为：

$$\left(2\nu \cdot \frac{\nu}{c} \right) \times L = \left(2\nu \cdot \frac{\nu}{c} \right) \times \frac{L}{\nu} = \frac{2\nu \cdot L}{c} = \frac{2L}{\lambda}$$

证明完毕。（验证过）

3 在激光出现以前， K_r^{86} 低气压放电灯是最好的单色光源。如果忽略自然加宽和碰撞加宽，试估计在 77K 温度下它的 605.7 纳米谱线的相干长度是多少？并与一个单色性 $\Delta\lambda/\lambda=10^{-8}$ 的 H_e-N_e 激光器比较。

解：根据相干长度的定义可知， $L_c = \frac{c}{\Delta\nu}$ 。其中分母中的 $\Delta\nu$ 是谱线加宽项。从气体物质的加

宽类型看，因为忽略自然和碰撞加宽，所以加宽因素只剩下多普勒加宽的影响。

根据 P138 页的公式 4.3.26 可知，多普勒加宽：

$$\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

因此，相干长度为：

$$L_c = \frac{c}{\Delta\nu_D} = \frac{c}{7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}}} = 89.4 \text{ cm}$$

根据题中给出的氦氖激光器单色性及氦氖激光器的波长 632.8 纳米，可根据下述公式得到氦氖激光器的相干长度：

$$L_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{c}{\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda/\lambda} = 632.8 \times 10^{-9} \times 10^8 = 6328 \text{ cm}$$

可见，即使以前最好的单色光源，与现在的激光光源相比，相干长度相差 2 个数量级。说明激光的相干性很好。

4 估算 CO_2 气体在 300K 下的多普勒线宽 $\Delta\nu_D$ ，若碰撞线宽系数 $\alpha=49\text{MHz/Pa}$ ，讨论在什么气压范围内从非均匀加宽过渡到均匀加宽。

解：根据 P138 页的公式 4.3.26 可知，多普勒加宽：

$$\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 53 \text{ MHz}$$

因为均匀加宽过渡到非均匀加宽，就是 $\Delta\nu_D \approx \Delta\nu_L$ 的过程，据此得到：

$$\Delta\nu_D \approx \Delta\nu_L = \alpha P, \text{ 得出 } P = \frac{\Delta\nu_D}{\alpha} = 1.08 \times 10^3 \text{ Pa}$$

结论：气压 P 为 $1.08 \times 10^3 \text{ Pa}$ 时，是非均匀加宽与均匀加宽的过渡阈值，当气压远远大于 $1.08 \times 10^3 \text{ Pa}$ 的情况下，加宽主要表现为均匀加宽。

（验证过）

5 氦氖激光器有下列三种跃迁，即 $3S_2-2P_4$ 的 632.8 纳米， $2S_2-2P_4$ 的 1.1523 微米和 $3S_2-3P_4$ 的 3.39 微米的跃迁。求 400K 时他们的多普勒线宽，并对结果进行分析。

解：根据 P138 页的公式 4.3.26，可分别求出不同跃迁的谱线加宽情况。

$3S_2-2P_4$ 的 632.8 纳米的多普勒加宽：

$$\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 7.16 \times 10^{-7} \frac{c}{\lambda_0} \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.5 \text{ GHz}$$

2S₂-2P₄ 的 1.1523 微米的多普勒加宽:

$$\Delta \nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 7.16 \times 10^{-7} \frac{c}{\lambda_0} \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.83 \text{GHz}$$

3S₂-3P₄ 的 3.39 微米的多普勒加宽:

$$\Delta \nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 7.16 \times 10^{-7} \frac{c}{\lambda_0} \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.28 \text{GHz}$$

由以上各个跃迁的多普勒线宽可见, 按照结题结果顺序, 线宽是顺次减少, 由于题中线宽是用频率进行描述, 因此频率线宽越大, 则单色性越好。

(验证过)

6 考虑二能级工作系统, 若 E₂ 能级的自发辐射寿命为 τ_s , 无辐射跃迁寿命为 τ_{nr} 。假设 t=0 时激光上能级 E₂ 的粒子数密度为 $n_2(0)$, 工作物质的体积为 V, 发射频率为 ν , 求:

(1) 自发辐射功率随时间的变化规律。(2) E₂ 能级的原子在其衰减过程中发出的自发辐射光子数。(3) 自发辐射光子数与初始时刻 E₂ 能级上的粒子数之比 η_2 。

解:

(1) 根据 P11 相关内容, 考虑到 E₂ 的能级寿命不仅仅是自发辐射寿命, 还包括无辐射跃迁寿命, 因此, E₂ 能级的粒子数变化规律修正为:

$$n_2(t) = n_2(0) e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ 其中的 } \tau \text{ 与 } \tau_s, \tau_{nr} \text{ 的关系为 } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_{nr}}, \text{ 为 } E_2 \text{ 能级的寿命。}$$

在时刻 t, E₂ 能级由于自发和无辐射跃迁而到达下能级的总粒子数为:

$$n_2(t)V$$

由于自发辐射跃迁而跃迁到激光下能级的粒子数为 $n_2(t)VA_{21}$, 因此由于自发辐射而发射的功率随时间的变化规律可以写成如下形式:

$$P_{21}(t) = n_2(t)VA_{21}h\nu = n_2(0)V \frac{1}{\tau_s} h\nu e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(2) 由上式可知, 在 t-t+dt 时间内, E₂ 能级自发辐射的光子数为:

$$dn_{21} = \frac{P_{21}(t)}{h\nu} dt = n_2(t)VA_{21}dt = n_2(0)V \frac{1}{\tau_s} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

则在 0-∞ 的时间内, E₂ 能级自发辐射的光子总数为:

$$n_{21} = \int dn_{21} = \int_0^\infty \frac{P_{21}(t)}{h\nu} dt = \int_0^\infty n_2(t)VA_{21}dt = n_2(0)V \frac{1}{\tau_s} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{\tau}{\tau_s} n_2(0)V$$

(3) 自发辐射光子数与初始时刻能级上的粒子数之比为:

$$\eta_2 = \frac{n_{21}}{n_2(0)V} = \frac{\tau}{\tau_s}$$

此题有待确认

7 根据激光原理 4.4 节所列红宝石的跃迁几率数据, 估算抽运几率 W_{13} 等于多少时红宝石对波长 694.3 纳米的光透是明的 (对红宝石, 激光上、下能级的统计权重为 $f_1 = f_2 = 4$, 且计算中可不考虑光的各种损耗)

解答: 已知红宝石的 $S_{32} = 0.5 \times 10^7 \text{S}^{-1}$, $A_{31} = 3 \times 10^5 \text{S}^{-1}$, $A_{21} = 0.3 \times 10^3 \text{S}^{-1}$, $S_{21} \approx 0$,

$$S_{31} \approx 0$$

分析如下：增益介质对某一频率的光透明，说明介质对外界光场的吸收和增益相等，或者吸收极其微弱，以至于对进入的光场强度不会产生损耗。对于本题中的红宝石激光器，透明的含义应该属于前者。

根据公式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_3}{dt} &= n_1 W_{13} - n_3 (A_{31} + S_{32}) \\ \frac{dn_2}{dt} &= n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} \\ n_1 + n_2 + n_3 &= n \\ B_{12} f_1 &= B_{21} f_2 \Rightarrow B_{12} = B_{21} \end{aligned} \right\} \text{ (激光原理 P146-4. 4. 22)}$$

由上边的第二项和第四项，可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} = \\ &= B_{21} \rho (n_1 - n_2) - n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} \\ &\quad \text{-----1} \end{aligned}$$

又因为小信号下（粒子数翻转刚刚达到阈值） $S_{32} \gg A_{21}$ ，因此 $n_3 \approx 0$ ，且 $\frac{dn_3}{dt} \approx 0$

由此，方程组的第一个式子可以转变为： $n_3 = \frac{n_1 W_{13}}{A_{31} + S_{32}}$ ，代入 1 式，得到：

$$\frac{dn_2}{dt} = B_{21} \rho (n_1 - n_2) - n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} = B_{21} \rho (n_1 - n_2) - n_2 (A_{21} + S_{21}) + \frac{n_1 W_{13} S_{32}}{A_{31} + S_{32}}$$

既然对入射光场是透明的，所以上式中激光能级发射和吸收相抵，即激光上能级的粒子数密度变化应该与光场无关，并且小信号时激光上能级的粒子数密度变化率为零，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= B_{21} \rho (n_1 - n_2) - n_2 (A_{21} + S_{21}) + \frac{n_1 W_{13} S_{32}}{A_{31} + S_{32}} = -n_2 (A_{21} + S_{21}) + \frac{n_1 W_{13} S_{32}}{A_{31} + S_{32}} = 0 \\ B_{21} \rho (n_1 - n_2) &= 0 \Rightarrow n_1 - n_2 \end{aligned} \right\}$$

最后得到：

$$W_{13} \approx A_{21} \left(1 + \frac{A_{31}}{S_{32}} \right) = 3.18 \times 10^2 S^{-1}$$

解答完毕。（验证过）

11 短波长（真空紫外、软 X 射线）谱线的主要加宽是自然加宽。试证明峰值吸收截面为

$$\sigma = \frac{\lambda_0^2}{2\pi}。$$

证明：根据 P144 页吸收截面公式 4. 4. 14 可知，在两个能级的统计权重 $f_1=f_2$ 的条件下，在自然加宽的情况下，中心频率 ν_0 处吸收截面可表示为：

$$\sigma_{12} = \frac{A_{21} \nu^2}{4\pi^2 \nu_0^2 \Delta \nu_N}$$

$$\text{上式 } \Delta \nu_N = \frac{1}{2\pi\tau_s} \quad (\text{P133 页公式 4.3.9})$$

又因为 $A_{21} = \frac{1}{\tau_s}$ ，把 A_{21} 和 $\Delta \nu_N$ 的表达式代入 1 式，得到：

$$\sigma_{21} = \frac{\lambda_0^2}{2\pi}$$

证毕。（验证过）

12 已知红宝石的密度为 3.98g/cm^3 ，其中 Cr_2O_3 所占比例为 0.05%（质量比），在波长为 694.3nm 附近的峰值吸收系数为 0.4cm^{-1} ，试求其峰值吸收截面（ $T=300\text{K}$ ）。

解：

分析：红宝石激光器的 Cr^{3+} 是工作物质，因此，所求峰值吸收截面就是求 Cr^{3+} 的吸收截面。根据题中所给资料可知：

Cr_2O_3 的质量密度为 $3.98\text{g/cm}^3 \times 0.05\% = 1.99 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$ ，摩尔质量为 $52 \times 2 + 16 \times 3 = 152\text{g/mol}$ 设 Cr^{3+} 的粒子数密度为 n ，则 $n = 2 \times (1.99 \times 10^{-3} / 152) \times 6.02 \times 10^{23} = 1.576 \times 10^{19}/\text{cm}^3$

根据 $\alpha = \sigma_{12} \Delta n$ 可知， $\sigma_{12} = \frac{\alpha}{\Delta n}$

根据 $n \approx n_1 + n_2$ ， $\Delta n = n_1 - n_2$ ，且 $\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{h\nu}{KT}}$ ，其中 $\frac{h\nu}{KT} = \frac{6.62 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{694.3 \times 10^{-9}}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 69$ ，可

知 E_2 能级粒子数密度接近于零，可求出 $\Delta n = n_1 = 1.576 \times 10^{19}/\text{cm}^3$ ，代入到 $\sigma_{12} = \frac{\alpha}{\Delta n}$ ，可求

出：

$$\sigma_{12} = \frac{\alpha}{\Delta n} = \frac{0.4/\text{cm}^{-1}}{1.576 \times 10^{19}/\text{cm}^3} = 2.55 \times 10^{-20} \text{cm}^2$$

解答完毕。

13 略

14 在均匀加宽工作物质中，频率为 ν_1 、强度为 I_{ν_1} 的强光增益系数为 $g_H(\nu_1, I_{\nu_1})$ ， $g_H(\nu_1, I_{\nu_1})$ —— ν_1 关系曲线称为大信号增益曲线，试求大信号增益曲线的宽度 $\Delta \nu_H$ 。

解：

大信号增益系数表达式为 P153-4.5.17：

$$g_H(\nu_1, I_{\nu_1}) = g_H^0(\nu_0) \frac{\left(\frac{\Delta \nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta \nu_H}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right]}$$

根据谱线宽度的定义：增益下降到增益最大值的一半时，所对应的频率宽度，叫做大信号增益线宽。

根据大信号增益曲线表达式可知，其中心频率处具有最大增益，即 $\nu_1 = \nu_0$ 时。在此条件下，增益最大值为：

$$g_{H\max}(\nu_0, I_{\nu_1}) = g_H^0(\nu_0) \frac{1}{\left[1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right]}$$

根据 $g_H(\nu_1, I_{\nu_1}) = \frac{1}{2} g_{H\max}(\nu_0, I_{\nu_1})$ ，可求出当 $|\nu_1 - \nu_0| = \frac{\Delta \nu_H}{2} \sqrt{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}}$ 时满足增益线宽条

件，因此，线宽位：

$$\Delta\nu = 2|\nu_1 - \nu_0| = \Delta\nu_H \sqrt{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S}}$$

解答完毕。

15 有频率为 ν_1 、 ν_2 的两强光入射，试求在均匀加宽情况下：

(1) 频率为 ν 的弱光的增益系数。

(2) 频率为 ν_1 的强光增益系数表达式。

(设频率为 ν_1 和 ν_2 的光在介质里的平均光强为 I_{ν_1} 、 I_{ν_2})

解：在腔内多模振荡条件下，P151-4.5.7 应修正为：

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S(\nu_1)} + \frac{I_{\nu_2}}{I_S(\nu_2)} + \dots} = \frac{\Delta n^0}{1 + \sum_i \frac{I_{\nu_i}}{I_S(\nu_i)}}$$

根据 P150-4.5.5 可知，增益系数与反转粒子数成正比，即：

$$g = \Delta n \sigma_{21}(\nu, \nu_0)$$

把修正后的反转粒子数表达式代入上式，得到：

$$g = \Delta n \sigma_{21}(\nu, \nu_0) = \frac{\sigma_{21}(\nu, \nu_0) \Delta n^0}{1 + \sum_i \frac{I_{\nu_i}}{I_S(\nu_i)}}$$

因此，所求第一问“频率为 ν 的弱光的增益系数”为：

$$g_H(\nu, I_{\nu_1}, I_{\nu_2}) = \Delta n \sigma_{21}(\nu, \nu_0) = \frac{g_H^0(\nu)}{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S(\nu_1)} + \frac{I_{\nu_2}}{I_S(\nu_2)}}$$

第二问“频率为 ν_1 的强光增益系数表达式”为：

$$g_H(\nu_1, I_{\nu_1}, I_{\nu_2}) = \Delta n \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) = \frac{g_H^0(\nu_1)}{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S(\nu_1)} + \frac{I_{\nu_2}}{I_S(\nu_2)}}$$

解答完毕。

17 激光上下能级的粒子数密度速率方程表达式为 P147-4.4.28 所示。

(1) 试证明在稳态情况下，在具有洛伦兹线型的均匀加宽介质中，反转粒子数表达式具有如下形式：

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \phi \tau_{21} \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) \nu N_l}, \text{ 其中 } \phi = \delta \left[1 + \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_2} (1 - \delta) \right], \delta = \frac{\tau_2}{\tau_{21}}, \Delta n^0 \text{ 是小信号反}$$

转粒子数密度。

(2) 写出中心频率处饱和光强 I_s 的表达式。

(3) 证明 $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$ 时， Δn 和 I_s 可由 P152-4.5.13 及 P151-4.5.11 表示。

解：1 稳态工作时，由激光上、下能级的粒子数密度速率方程 (4.4.28) 可得：

$$0 = \frac{dn_2}{dt} = R_2 - \frac{n_2}{\tau_2} - (n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1) \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) \nu N_l$$

1

$$0 = \frac{dn_1}{dt} = R_1 - \frac{n_1}{\tau_1} + \frac{n_2}{\tau_{21}} + (n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1) \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) \nu N_l$$

2

$$\Delta n = n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1$$

3

其中 $R_1 \approx 0$, $R_2 = n_0 W_{03} \tau_2$

由(3)式和(2)式可得:

$$\begin{aligned} n_2 &= \Delta n + \frac{f_2}{f_1} n_1 = \Delta n + \frac{f_2}{f_1} [\tau_1 (\Delta n \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l + \frac{n_2}{\tau_{21}})] = \\ &= \Delta n [1 + \frac{f_2}{f_1} \tau_1 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l] + \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_{21}} n_2 \end{aligned}$$

整理得:

$$n_2 = \frac{1 + \frac{f_2}{f_1} \tau_1 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l}{1 - \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_{21}}} \Delta n$$

将(4)代入(1)式:

$$R_2 \tau_2 - \frac{1 + \frac{f_2}{f_1} \tau_1 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l}{1 - \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_{21}}} \Delta n = \Delta n \tau_2 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l$$

整理得:

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{R_2 \tau_2}{\tau_2 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l + \frac{1 + \frac{f_2}{f_1} \tau_1 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l}{1 - \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_{21}}}} = \\ &= \frac{n_0 W_{03} \tau_2 (1 - \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_{21}})}{1 + \tau_2 \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l (1 - \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_{21}}) + \frac{f_2}{f_1} \tau_1 \sigma_{21} v N} = \\ &= \frac{\Delta n^0}{1 + \phi \tau_{21} \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) v N_l} \end{aligned}$$

其中 $\phi = \delta \left[1 + \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_2} (1 - \delta) \right]$, $\delta = \frac{\tau_2}{\tau_{21}}$, Δn^0 是小信号反转粒子数密度。

(2)

$$\text{当 } \nu_1 = \nu_0 \text{ 时, } I_S(\nu_0) = \frac{h\nu_0}{\tau_2\sigma_{21}(1 - \frac{f_2}{f_1}\frac{\tau_1}{\tau_{21}}) + \frac{f_2}{f_1}\tau_1\sigma_{21}} = \frac{h\nu_0}{\tau_2\sigma_{21} + \frac{f_2}{f_1}\sigma_{21}(\tau_1 - \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_{21}})}$$

当 $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$ 时, Δn 和 I_s 可由 P152-4.5.13 及 P151-4.5.11 表示

分析：

设外界光场以速度 $v_{\text{入}}$ 入射, 作为增益介质, 感受到的表观频率为:

而发生粒子数翻转所对应的速度为:

正方向: $v_z = c \cdot \frac{(v - v_0)}{v_0}$

$$\text{负方向: } v_z = c \cdot \frac{(\nu_0 - \nu)}{\nu_0}$$

一、当都是正方向入射时，两束光对应的速度分别为：

$$v_{z1} = c \cdot \frac{(\nu_1 - \nu_0)}{\nu_0} = c \cdot \frac{(\nu_0 + \delta\nu - \nu_0)}{\nu_0} = \frac{c \cdot \delta\nu}{\nu_0}$$

$$v_{z2} = c \cdot \frac{(\nu_2 - \nu_0)}{\nu_0} = c \cdot \frac{(\nu_0 - \delta\nu - \nu_0)}{\nu_0} = -\frac{c \cdot \delta\nu}{\nu_0}$$

也就是说在反转粒子数按速度分布图上，在速度等于 v_{z1} 和 v_{z2} 处形成反转粒子数饱和效应。根据公式（激光原理 p156-4.6.7）

$$\text{对于 } v_{z1}, \text{ 孔的深度为: } \Delta n^0(\nu_1) - \Delta n(\nu_1) = \frac{I_{\nu_1}}{I_{\nu_1} + I_S} \Delta n^0(\nu_1)$$

$$\text{对于 } v_{z2}, \text{ 孔的深度为: } \Delta n^0(\nu_2) - \Delta n(\nu_2) = \frac{I_{\nu_2}}{I_{\nu_2} + I_S} \Delta n^0(\nu_2)$$

又因为线型函数以 ν_0 为对称形式，且两个入射光产生烧孔的位置也以 ν_0 为中心对称分布，因此，产生烧孔的两个对称位置处的小信号反转粒子数相等，即 $\Delta n^0(\nu_1) = \Delta n^0(\nu_2)$ ，因此，两个烧孔的深度相比，因为 $I_{\nu_1} > I_{\nu_2}$ ，所以两个孔的深度入射光强大的反转粒子数深度大。即：

$$\text{两孔深度比: } \alpha = \frac{\Delta n^0(\nu_1) - \Delta n(\nu_1)}{\Delta n^0(\nu_2) - \Delta n(\nu_2)} = \frac{\frac{I_{\nu_1}}{I_{\nu_1} + I_S} \Delta n^0(\nu_1)}{\frac{I_{\nu_2}}{I_{\nu_2} + I_S} \Delta n^0(\nu_2)} = \frac{I_1 I_2 + I_1 I_S}{I_1 I_2 + I_2 I_S} > 1$$

二、两束光相对进入增益介质

类似上面的分析可得到：

$$v_{z1} = v_{z2} = \frac{c \delta\nu}{\nu_0}, \text{ 可见烧孔位置重合，烧一个孔}$$

因为两个光强不同的外场同时作用于某一品率处而产生增益饱和（反转粒子数饱和），因此，次品率处的光强是两个光强的和，因此，烧孔深度为 $\frac{(I_{\nu_1} + I_{\nu_2})}{(I_{\nu_1} + I_{\nu_2}) + I_S} \Delta n^0(\nu_2)$

解答完毕。

第五章 激光振荡特性

2. 长度为 10cm 的红宝石棒置于长度为 20cm 的光谐振腔中，红宝石 694.3nm 谱线的自发辐射寿命 $\tau_s \approx 4 \times 10^{-3} \text{ s}$ ，均匀加宽线宽为 $2 \times 10^5 \text{ MHz}$ 。光腔单程损耗 $\delta = 0.2$ 。求

(1) 阈值反转粒子数 Δn_t ；

(2) 当光泵激励产生反转粒子数 $\Delta n = 1.2 \Delta n_t$ 时，有多少个纵模可以振荡？（红宝石折射率为 1.76）

解：(1) 阈值反转粒子数为：

$$\begin{aligned} \Delta n_t &= \frac{\delta}{\sigma_{21} l} = \frac{4\pi^2 \Delta \nu_H \eta^2 \tau_s \delta}{l \lambda^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \times 2 \times 10^{11} \times 1.76^2 \times 4 \times 10^{-3} \times 0.2}{10 \times (694.3 \times 10^{-7})^2} \text{ cm}^{-3} \\ &= 4.06 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

(2) 按照题意 $g_m = 1.2g_t$ ，若振荡带宽为 $\Delta\nu_{osc}$ ，则应该有

$$1.2g_t \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_{osc}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2} = g_t$$

由上式可以得到

$$\Delta\nu_{osc} = \sqrt{0.2}\Delta\nu_H = 8.94 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

相邻纵模频率间隔为

$$\begin{aligned} \Delta\nu_q &= \frac{c}{2l'} = \frac{c}{2(l \times 1.76 + (L-l))} = \frac{3 \times 10^{10}}{2(10 \times 1.76 + 10)} \\ &= 5.43 \times 10^8 \text{ Hz} \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta\nu_{osc}}{\Delta\nu_q} = \frac{8.94 \times 10^{10}}{5.43 \times 10^8} = 164.6$$

所以有 164~165 个纵模可以起振。

3. 在一理想的三能级系统如红宝石中，令泵浦激励几率在 $t=0$ 瞬间达到一定值 W_{13} ， $W_{13} > (W_{13})_t$ [$(W_{13})_t$ 为长脉冲激励时的阈值泵浦激励几率]。经 τ_d 时间后系统达到反转状态并产生振荡。试求 $\tau_d - W_{13} / (W_{13})_t$ 的函数关系，并画出归一化 $\tau_d / \tau_s - W_{13} / (W_{13})_t$ 的示意关系曲线 (令 $\eta_F = 1$)。

解：根据速率方程 (忽略受激跃迁)，可以知道在达到阈值之前，在 t 时刻上能级的粒子数密度 $n_2(t)$ 与时间 t 的关系为

$$n_2(t) = \frac{nW_{13}}{A_{21} + W_{13}} \left[1 - e^{-(A_{21} + W_{13})t} \right] \quad (1)$$

当 $t = \tau_d$ 时， $\Delta n = \Delta n_t$ ，即

$$\begin{aligned} n_2(\tau_d) &= \frac{nW_{13}}{A_{21} + W_{13}} \left[1 - e^{-(A_{21} + W_{13})\tau_d} \right] \\ &= \frac{n + \Delta n_t}{2} \approx \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)可知，当时间 t 足够长的时候

$$n_2(t) \approx \frac{nW_{13}}{A_{21} + W_{13}}$$

由上式可知

$$(W_{13})_t = A_{21}$$

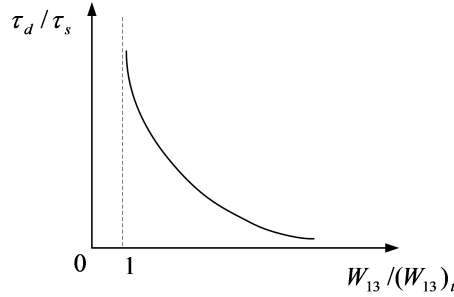
由(2)式可得

$$\begin{aligned}\tau_d &= \frac{1}{A_{21} + W_{13}} \ln \left(\frac{2W_{13}}{W_{13} - A_{21}} \right) \\ &= \frac{1}{(W_{13}) \left[1 + \frac{W_{13}}{(W_{13})_t} \right]} \ln \left(\frac{\frac{2W_{13}}{(W_{13})_t}}{\frac{W_{13}}{(W_{13})_t} - 1} \right)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\tau_d}{\tau_s} = \frac{1}{1 + \frac{W_{13}}{(W_{13})_t}} \ln \left(\frac{\frac{2W_{13}}{(W_{13})_t}}{\frac{W_{13}}{(W_{13})_t} - 1} \right)$$

所以归一化 $\tau_d / \tau_s - W_{13} / (W_{13})_t$ 的示意关系曲线为



4. 脉冲掺钕钇石榴石激光器的两个反射镜透过率 T_1 、 T_2 分别为 0 和 0.5。工作物质直径 $d=0.8\text{cm}$ ，折射率 $\eta=1.836$ ，总量子效率为 1，荧光线宽 $\Delta\nu_F = 1.95 \times 10^{11}\text{Hz}$ ，自发辐射寿命 $\tau_s = 2.3 \times 10^{-4}\text{s}$ 。假设光泵吸收带的平均波长 $\lambda_p = 0.8\mu\text{m}$ 。试估算此激光器所需吸收的阈值泵浦能量 E_{pt} 。

$$\text{解: } \delta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1-T_2} \right) = 0.35$$

$$\begin{aligned}E_{pt} &= \frac{h\nu_p \delta \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{\eta_1 \sigma_{32}} = \frac{hc \delta d^2 \pi^3 \eta^2 \Delta\nu_H \tau}{\lambda_p \lambda_0^2} \\ &= \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 0.35 \times 3 \times 10^{10} \times \pi^3 \times 1.836^2 \times 1.95 \times 10^{11} \times 0.8^2 \times 2.3 \times 10^{-4}}{0.8 \times 10^{-4} \times (1.06 \times 10^{-4})^2} \text{J} \\ &= 0.073\text{J}\end{aligned}$$

5. 测出半导体激光器的一个解理端面不镀膜与镀全反射膜时的阈值电流分别为 J_1 与 J_2 。试由此计算激光器的分布损耗系数 α (解理面的反射率 $r \approx 0.33$)。

解：不镀膜的时候，激光器端面的反射率即为 r ，镀了全发射膜之后的反射率为 $R=1$ ，设激光器的长度为 l ，则有

$$\begin{aligned}J_1 &= \alpha \frac{1}{l} \left(\ln \frac{1}{r} + \alpha l \right) \\ J_2 &= \alpha \frac{1}{l} \left(\ln \frac{1}{R} + \alpha l \right)\end{aligned}$$

由这两式可以解得

$$\alpha = \frac{\frac{J_1}{J_2} \ln \frac{1}{R} - \ln \frac{1}{r}}{l(1 - \frac{J_1}{J_2})} = \frac{\ln 3}{l(J_1/J_2 - 1)}$$

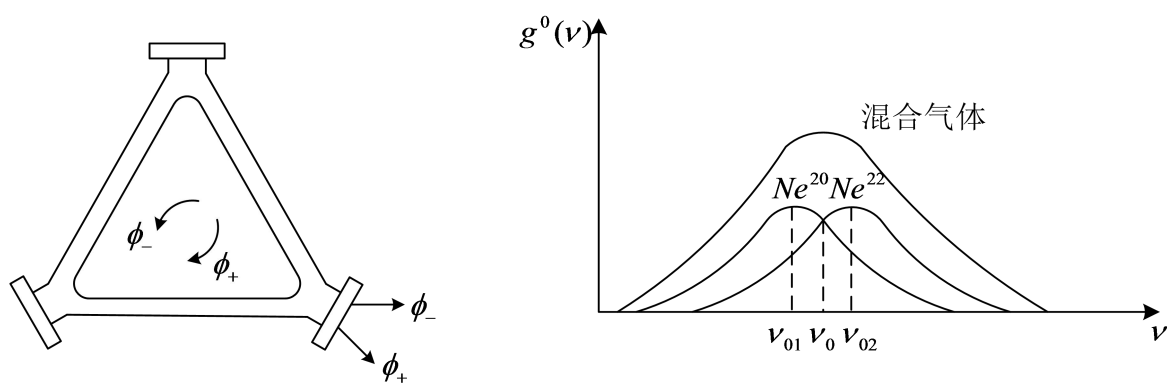
即得到了激光器的分布损耗系数。

7. 如图 5.1 所示环形激光器中顺时针模式 ϕ_+ 及逆时针模式 ϕ_- 的频率为 ν_A ，输出光强为 I_+ 及 I_- 。

(1) 如果环形激光器中充以单一氖同位素气体 Ne^{20} ，其中心频率为 ν_{01} ，试画出 $\nu_A \neq \nu_{01}$ 及 $\nu_A = \nu_{01}$ 时的增益曲线及反转粒子数密度的轴向速度分布曲线。

(2) 当 $\nu_A \neq \nu_{01}$ 时激光器可输出两束稳定的光，而当 $\nu_A = \nu_{01}$ 时出现一束光变强，另一束光熄灭的现象，试解释其原因。

(3) 环形激光器中充以适当比例的 Ne^{20} 及 Ne^{22} 的混合气体，当 $\nu_A = \nu_{01}$ 时，并无上述一束



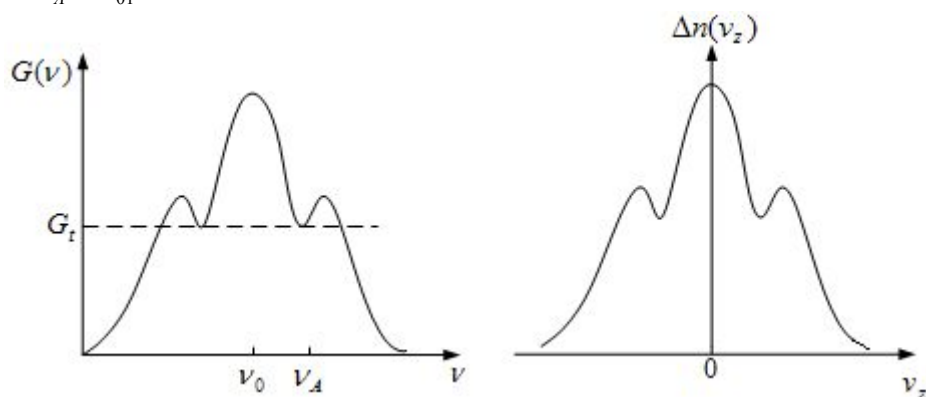
光变强，另一束光变弱的现象，试说明其原因 (图 5.2 为 Ne^{20} 、 Ne^{22} 及混合气体的增益曲线)， ν_{01} 、 ν_{02} 及 ν_0 分别为 Ne^{20} 、 Ne^{22} 及混合气体增益曲线的中心频率， $\nu_{02} - \nu_{01} \approx 890\text{MHz}$ 。

图 5.1

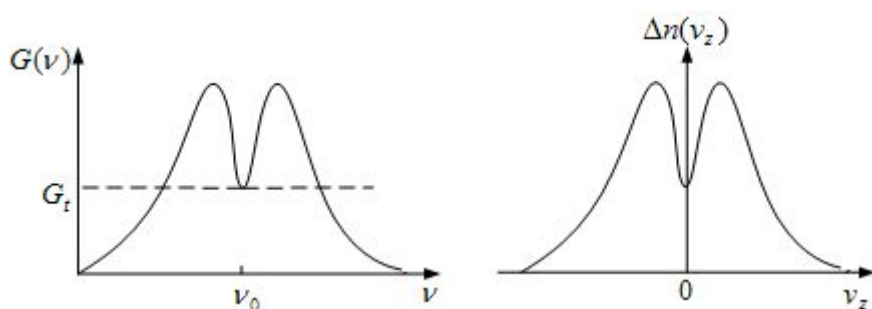
图 5.2

(4) 为了使混合气体的增益曲线对称，两种氖同位素中哪一种应多一些。

解：(1) $\nu_A \neq \nu_{01}$ 时



$\nu_A = \nu_{01}$ 时



(2) $\nu_A \neq \nu_{01}$ 时, ϕ_+ 及 ϕ_- 分别使用不同速度的反转原子, ϕ_+ 使用速度为 ν_+ 的高能级原子, ϕ_- 使用速度为 ν_- 的高能级原子, 这样 ϕ_+ 和 ϕ_- 不会彼此的争夺高能级原子, 所以激光器可以输出两束稳定的激光。

$\nu_A = \nu_{01}$ 的时候, ϕ_+ 和 ϕ_- 均使用速度为 0 的高能级原子, 两个模式剧烈竞争, 竞争的结果是一束光变强, 另一束光熄灭。

(3) ϕ_+ 使用 $\nu_z = \frac{\nu_0 - \nu_{02}}{\nu_{02}} c$ 的 Ne^{22} 原子以及 $\nu_z = \frac{\nu_0 - \nu_{01}}{\nu_{01}} c$ 的 Ne^{20} 原子。 ϕ_- 使用 $\nu_z = -\frac{\nu_0 - \nu_{02}}{\nu_{02}} c$ 的 Ne^{22} 原子以及 $\nu_z = -\frac{\nu_0 - \nu_{01}}{\nu_{01}} c$ 的 Ne^{20} 原子, 因此两个模式使用不同高能级原子, 没有了模式竞争效应, 因此两个模式均可以稳定的存在, 没有了上面所说的一束光变强, 另一束光熄灭的现象。

(4) 要是混合气体的增益曲线对称, 必须使得 Ne^{20} 和 Ne^{22} 的增益曲线高度相等, 即要满足:

$$g^0(\nu_{01}) = g^0(\nu_{02})$$

而

$$\begin{aligned} \frac{g^0(\nu_{02})}{g^0(\nu_{01})} &\approx \frac{\Delta \nu_{D01} \Delta n_{02}^0}{\Delta \nu_{D02} \Delta n_{01}^0} = \sqrt{\frac{M_{02}}{M_{01}}} \cdot \frac{\Delta n_{02}^0}{\Delta n_{01}^0} \\ &= \sqrt{\frac{22}{20}} \cdot \frac{\Delta n_{02}^0}{\Delta n_{01}^0} \end{aligned}$$

欲使得 $g^0(\nu_{01}) = g^0(\nu_{02})$, 应使

$$\frac{\Delta n_{02}^0}{\Delta n_{01}^0} = \sqrt{\frac{20}{22}} = \frac{1}{1.05}$$

因此, Ne^{20} 应该多一些。

8. 考虑氦氖激光器的 632.8nm 跃迁, 其上能级 $3S_2$ 的寿命 $\tau_2 \approx 2 \times 10^{-8} \text{s}$, 下能级 $2P_4$ 的寿命 $\tau_1 \approx 2 \times 10^{-8} \text{s}$, 设管内气压 $p=266 \text{Pa}$:

(1) 计算 $T=300\text{K}$ 时的多普勒线宽 $\Delta \nu_D$;

(2) 计算均匀线宽 $\Delta \nu_H$ 及 $\Delta \nu_D / \Delta \nu_H$;

(3) 当腔内光强为 (1) 接近 0; (2) $10 \text{W}/\text{cm}^2$ 时谐振腔需多长才能使烧孔重叠。

(计算所需参数可查阅附录一)

解: (1) $T=300\text{K}$ 时的多普勒线宽 $\Delta \nu_D$ 为

$$\begin{aligned}\Delta\nu_D &= 2\nu_0 \left(\frac{2KT}{mc^2} \ln 2 \right)^2 = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 7.16 \times 10^{-7} \times \frac{3 \times 10^8}{632.8 \times 10^{-9}} \left(\frac{300}{20} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1314.7 \text{MHz}\end{aligned}$$

(2) 均匀线宽包括自然线宽 $\Delta\nu_N$ 和碰撞线宽 $\Delta\nu_L$ 两部分, $\Delta\nu_H = \Delta\nu_L + \Delta\nu_N$, 其中

$$\Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2}{2 \times 10^{-8}} = 15.9 \text{MHz}$$

$$\Delta\nu_L = \alpha p = 720 \times 10^3 \times 266 = 191.5 \text{MHz}$$

所以

$$\Delta\nu_H = \Delta\nu_L + \Delta\nu_N = 207.4 \text{MHz}$$

$$\Delta\nu_D / \Delta\nu_H = 6.34$$

(3) 设腔内光强为 I , 则激光器烧孔重叠的条件为

$$\begin{aligned}\frac{c}{2l} &< \Delta\nu_H \sqrt{1 + \frac{I}{I_s}} \\ l &> \frac{c}{2\Delta\nu_H \sqrt{1 + \frac{I}{I_s}}}\end{aligned}$$

取 $I_s = 15 \text{W/cm}^2$ 进行计算。

当腔内光强接近 0 的时候

$$l > \frac{c}{2\Delta\nu_H} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 207.4 \times 10^6} \text{m} = 0.72 \text{m}$$

当腔内光强为 10W/cm^2 的时候

$$l > \frac{3 \times 10^8}{2 \times 207.4 \times 10^6 \times \sqrt{1 + 10/15}} \text{m} = 0.56 \text{m}$$

9. 某单模 632.8nm 氦氖激光器, 腔长 10cm , 而反射镜的反射率分别为 100% 及 98% , 腔内损耗可忽略不计, 稳态功率输出是 0.5mW , 输出光束直径为 0.5mm (粗略地将输出光束看成横向均匀分布的)。试求腔内光子数, 并假设反转原子数在 t_0 时刻突然从 0 增加到阈值的 1.1 倍, 试粗略估算腔内光子数自 1 噪声光子/腔模增至计算所得之稳态腔内光子数须经多长时间。

解: 稳态时的功率输出可以表示为

$$P = I_v^+ TA = \frac{1}{2} N_l h \nu \nu A T$$

稳态时的光子数为

$$\Phi = N_l A l = \frac{2Pl\lambda}{Tc^2 h} = 5.31 \times 10^7$$

下面来计算所需要的时间:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Delta n \sigma_{21} c \Phi - \frac{\Phi}{\tau_R} = \Phi c \left(\Delta n \sigma_{21} - \frac{1}{c\tau_R} \right) = \Phi c \left(G^0 - \frac{\delta}{l} \right)$$

根据题意有 $G^0 = 1.1 G_t = 1.1 \frac{\delta}{l}$, 则

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.1 \frac{\delta}{l} c \Phi$$

所以

$$t = \frac{l}{0.1\delta c} \int_1^{5.3 \times 10^7} \frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{l}{0.1\delta c} \ln \Phi \Big|_1^{5.3 \times 10^7}$$

因为 $2\delta = T$ ，所以 $\delta = \frac{T}{2}$ ，所以有

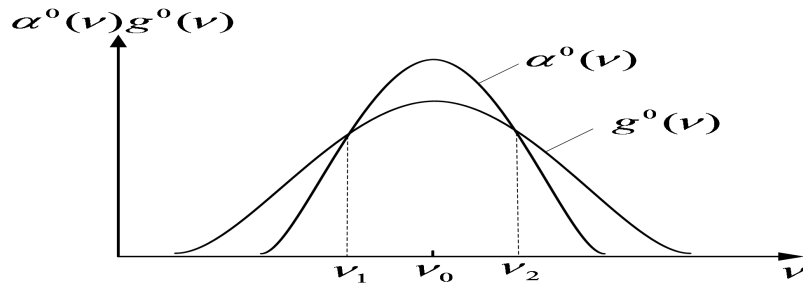
$$t = \frac{2l}{0.1Tc} \ln 5.3 \times 10^7 = 5.93 \mu s$$

10. 腔内均匀加宽增益介质具有最佳增益系数 g_m 及饱和光强 I_{sg} ，同时腔内存在一均匀加宽吸收介质，其最大吸收系数为 α_m ，饱和光腔为 I_{sa} 。假设二介质中心频率均为 ν_0 ， $\alpha_m > g_m$ ， $I_{sa} < I_{sg}$ ，试问：

(1) 此激光能否起振？

(2) 如果瞬时输入一足够强的频率为 ν_0 的光信号，此激光能否起振？写出其起振条件；讨论在何种情况下能获得稳态振荡，并写出稳态振荡时腔内光强。

解：(1) 若增益介质和吸收介质的线宽分别为 $\Delta\nu_{HG}$ 和 $\Delta\nu_{Ha}$ ，若 $\Delta\nu_{Ha} \geq \Delta\nu_{HG}$ ，则在任何频率下， $g^0(\nu)$ 均小于 $\alpha^0(\nu)$ ，因此不能起振。如果 $\Delta\nu_{Ha} < \Delta\nu_{HG}$ （如下图所示），则当 $\nu_1 < \nu < \nu_2$ 时不能振荡，当 $\nu < \nu_1$ 或者 $\nu > \nu_2$ 才能振荡。



(2) 若入射光强为 I_{ν_0} ，则增益介质的增益系数为

$$g(\nu_0) = \frac{g_m}{1 + \frac{I_{\nu_0}}{I_{SG}}}$$

吸收介质的吸收系数为

$$\alpha(\nu_0) = \frac{\alpha_m}{1 + \frac{I_{\nu_0}}{I_{S\alpha}}}$$

假设增益介质的长度跟吸收介质的长度相等，则当满足 $g(\nu_0) > \alpha(\nu_0)$ 的时候激光器起振，所以激光器起振的条件为

$$\frac{g_m}{1 + \frac{I_{\nu_0}}{I_{SG}}} > \frac{\alpha_m}{1 + \frac{I_{\nu_0}}{I_{S\alpha}}}$$

即

$$I_{\nu_0} > \frac{(\alpha_m - g_m)I_{SG}I_{S\alpha}}{I_{SG}g_m - I_{S\alpha}\alpha_m} \quad (1)$$

$$I_{SG}g_m > I_{S\alpha}\alpha_m \quad (2)$$

当两个介质的参量满足(2)式，入射光强满足(1)式的时候，激光器就可以起振，腔内光强不断增加，当腔内光强 $I_{\nu_0}(t)$ 增加到

$$I_{\nu_0}(t) = I_{\nu_0} + \frac{(\alpha_m - g_m)I_{SG}I_{S\alpha}}{I_{SG}g_m - I_{S\alpha}\alpha_m}$$

时去掉入射信号，此时可得稳定光强

$$I = \frac{(\alpha_m - g_m)I_{SG}I_{S\alpha}}{I_{SG}g_m - I_{S\alpha}\alpha_m}$$

11. 低增益均匀加宽单模激光器中，输出镜最佳透射率 T_m 及阈值透射率 T_t 可由实验测出，试求往返净损耗 a 及中心频率小信号增益系数 g_m (假设振荡频率 $\nu = \nu_0$)。

解：输出光强

$$I = I_s T \left(\frac{2g_m l}{a + T} - 1 \right) \quad (1)$$

阈值时有： $2g_m l = a + T$

$T = T_m$ 时，

$$\left(\frac{dI}{dT} \right)_{T=T_m} = 2g_m I_s \left[\frac{1}{a + T_m} - \frac{T_m}{(a + T_m)^2} \right] - I_s = 0 \quad (2)$$

由(1)、(2)式可得：

$$a = \frac{T_m^2}{T_t - 2T_m}$$

$$g_m = \frac{(T_t - T_m)^2}{2l(T_t - 2T_m)}$$

12. 有一氪灯激励的连续掺钕钇铝石榴石激光器(如图 5.3 所示)。由实验测出氪灯输入电功率的阈值 p_{pt} 为 2.2kW，斜效率 $\eta_s = dP/dp_p = 0.024$ (P 为激光器输出功率， p_p 为氪灯输入电功率)。掺钕钇铝石榴石棒内损耗系数 $\alpha_i = 0.005\text{cm}^{-1}$ 。试求：

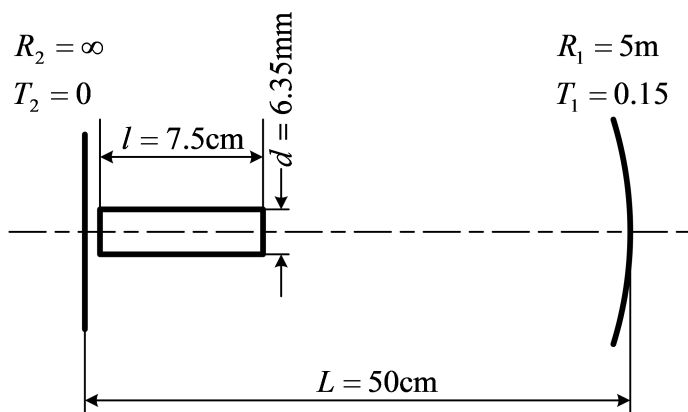
(1) p_p 为 10kW 时激光器的输出功率;

图 5.3

(2) 反射镜斜效率(更换反射变化忽略不计;假 TEM_{00} 模);

(3) 图 5.3 成 0.1 时的斜效输出功率。

解: 均匀加功率可以表示为



1 换成平面镜时的镜引起的衍射损耗设激光器振荡于

所示激光器中 T_1 换

宽连续激光器输出

$$P = \frac{1}{2} A I_s T_1 \left(\frac{g^0 l}{\delta} - 1 \right) = \frac{1}{2} A I_s T_1 \left(\frac{p_p}{p_{pt}} - 1 \right)$$

$$\eta_s = \frac{1}{2} \frac{A I_s T_1}{p_{pt}}$$

(1) p_p 为 10kW 时激光器的输出功率为:

$$\begin{aligned} P &= \eta_s p_{pt} \left(\frac{p_p}{p_{pt}} - 1 \right) \\ &= 0.024 \times 2.2 \times \left(\frac{10}{2.2} - 1 \right) \text{KW} = 187.2 \text{W} \end{aligned}$$

(2) 图 5.3 所示的激光器

$$\begin{aligned} A &= \pi \omega_0^2 = \pi \frac{\lambda}{\pi} [L(R_1 - L)]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1.06 \times 10^{-6} \times [0.5 \times (5 - 0.5)]^{\frac{1}{2}} \text{m}^2 = 15.9 \text{mm}^2 \end{aligned}$$

反射镜 1 换成平面镜之后

$$A' = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 3.14 \times \left(\frac{6.35}{2} \right)^2 \text{mm}^2 = 31.67 \text{mm}^2$$

斜效率 η'_s 应为

$$\eta'_s = \frac{A'}{A} \eta_s = \frac{31.67}{15.9} \times 0.024 = 0.48$$

(3) 图 5.3 所示激光器的单程损耗为

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{2} \ln(1 - T_1) + \alpha_i l \\ &= -\frac{1}{2} \ln 0.85 + 7.50 \times 0.005 = 0.119 \end{aligned}$$

反射镜 1 的透过率改成 $T'_1 = 0.1$ 之后, 单程损耗变为

$$\begin{aligned}\delta' &= -\frac{1}{2} \ln(1-T_1') + \alpha_i l \\ &= -\frac{1}{2} \ln 0.9 + 7.50 \times 0.005 = 0.09\end{aligned}$$

阈值泵浦功率为

$$\begin{aligned}p_{pt}' &= p_{pt} \frac{\delta'}{\delta} = 2.2 \times \frac{0.09}{0.119} \text{ KW} = 1.66 \text{ KW} \\ \eta_s'' &= \frac{1}{2} \frac{A I_s T_1'}{p_{pt}'} = \eta_s \frac{T_1'}{T_1} \frac{p_{pt}}{p_{pt}'} = 0.024 \times \frac{0.1}{0.15} \times \frac{2.2}{1.66} = 0.021\end{aligned}$$

当 $p_p = 10 \text{ KW}$ 时, 输出功率为

$$P = \eta_s'' p_{pt}' \left(\frac{p_{pt}}{p_{pt}'} - 1 \right) = 0.021 \times 1.66 \times \left(\frac{10}{1.66} - 1 \right) \text{ KW} = 175 \text{ W}$$

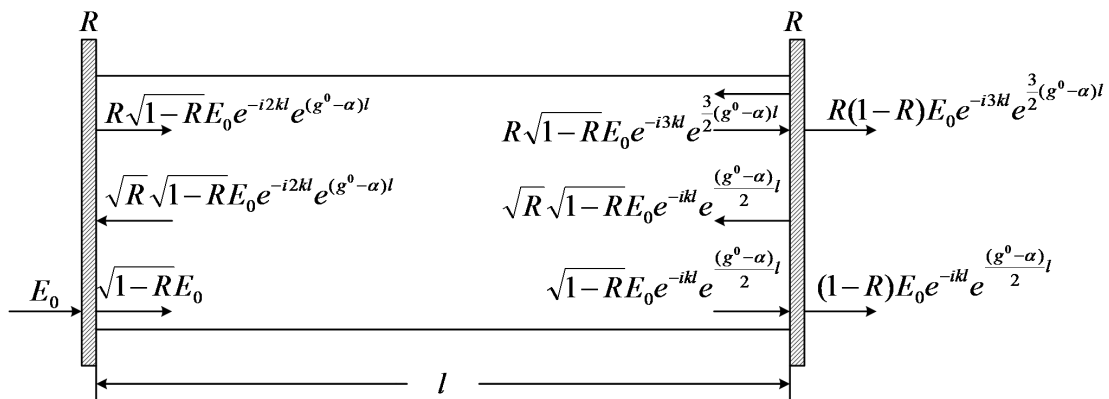
第六章 激光放大特性

习题

1. 在增益工作物质两端设置二反射率为 r 的反射镜, 形成一个法布里-珀罗再生式放大器, 如图 6.1.1 所示。入射光频率为 ν , 谐振腔频率为 ν_c 。工作物质被均匀激励, 其小信号增益系数为 g^0 , 损耗系数为 α 。试求:

- (1) 用多光束干涉方法求再生放大器的小信号增益 $G^0 = I(l)/I_0$;
- (2) $\nu = \nu_c$ 时再生放大器的增益 G_m^0 ;
- (3) 再生放大器的带宽 $\delta\nu$;
- (4) 若无反射镜时放大器的增益为 3, 试作 $G_m^0 - r$ 及 $\delta\nu - r$ 的曲线;
- (5) 再生放大器正常工作时 r 的范围。

解: (1) 若设入射光场为 E_0 , 若忽略色散效应, 则电场的传播情况如图所示, 图中 $k = \frac{2\pi\nu}{\nu}$, 在输出端将各分波相加可得总的输出电场。(这里的 R 即为反射镜的反射率 r)



这样就有:

$$E_l = (1-R)E_0 e^{-ikl} e^{\frac{1}{2}(g^0-\alpha)l} [1 + R e^{-i2kl} e^{(g^0-\alpha)l} + \dots]$$

其中中括号的内部是一个无穷等比数列，这样上式就可以写为：

$$E_l = E_0 \frac{(1-R)e^{-ikl} e^{\frac{1}{2}(g^0-\alpha)l}}{1 - R e^{-i2kl} e^{(g^0-\alpha)l}}$$

放大器的小信号增益为：

$$\begin{aligned} G^0 &= \frac{I(l)}{I_0} = \frac{E_l E_l^*}{E_0 E_0^*} = \frac{(1-R)^2 e^{(g^0-\alpha)l}}{1 + R^2 e^{2(g^0-\alpha)l} - 2R e^{(g^0-\alpha)l} \cos 2kl} \\ &= \frac{(1-R)^2 e^{(g^0-\alpha)l}}{[1 - R e^{(g^0-\alpha)l}]^2 + 4R e^{(g^0-\alpha)l} \sin^2 kl} \end{aligned}$$

(2) $\nu = \nu_c$ 的时候， $\nu = \nu_c = \frac{m\nu}{2l}$ (m 为正整数)

$$\sin^2 kl = \sin^2 m\pi = 0$$

所以有

$$G_m^0 = \frac{(1-R)^2 e^{(g^0-\alpha)l}}{[1 - R e^{(g^0-\alpha)l}]^2}$$

(3) $\nu = \nu_c + \frac{\delta\nu}{2}$ 时， $G^0 = \frac{1}{2} G_m^0$ ，比较 G^0 和 G_m^0 的表达式有：

$$\begin{aligned} 4R e^{(g^0-\alpha)l} \sin^2 \frac{2\pi}{\nu} (\nu_c + \frac{\delta\nu}{2}) l &= 4R e^{(g^0-\alpha)l} \sin^2 \frac{\pi\delta\nu}{\nu} l \\ &= [1 - R e^{(g^0-\alpha)l}]^2 \end{aligned}$$

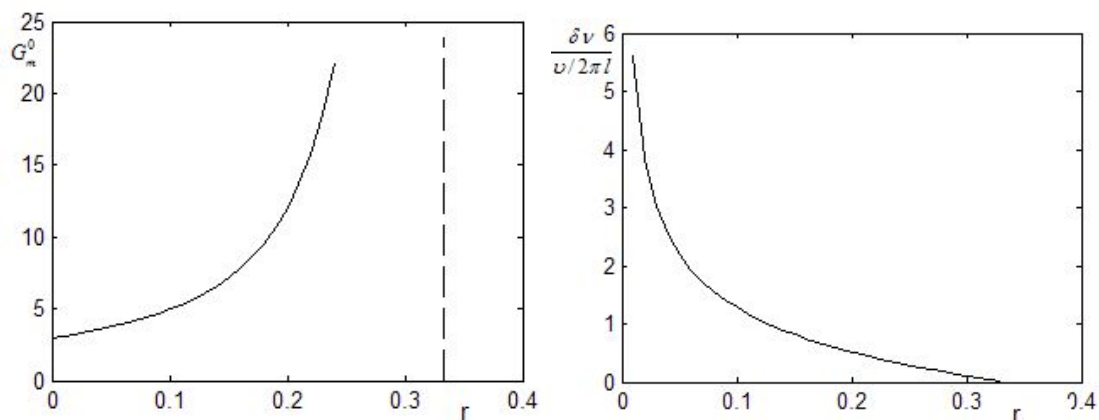
因为 $\delta\nu$ 远小于 $\nu/l\pi$ ，所以 $\sin^2 \frac{\pi\delta\nu}{\nu} l \approx (\frac{\pi\delta\nu}{\nu} l)^2$ ，由上式可得：

$$\delta\nu = \frac{\nu}{2\pi l} \frac{1 - R e^{(g^0-\alpha)l}}{\sqrt{R e^{(g^0-\alpha)l}}}$$

(4) 根据题意知 $e^{(g^0-\alpha)l} = 3$ ，可得：

$$G_m^0 = \frac{3(1-R)^2}{(1-3R)^2}, \quad \delta\nu = \frac{\nu}{2\pi l} \frac{1-3R}{\sqrt{3R}}$$

$G_m^0 - r$ 及 $\delta\nu - r$ 的曲线如下图所示。



(5) 再生放大器正常工作时应有

$$0 < r < \frac{1}{3}$$

$r \geq \frac{1}{3}$ 的时候产生自激振荡。

3. 有一均匀激励的均匀加宽增益盒被可变光强的激光照射, 当入射光频率为中心频率 ν_0 时, 盒内的小信号增益是 10dB, 增益物质谱线线宽 $\Delta\nu_H = 1\text{GHz}$, 饱和光强 $I_s = 10\text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$, 假设增益盒的损耗为 0。

(1) 入射光频率 $\nu = \nu_0$, 求增益(以 dB 表示)和入射光强 I_0 的表达式;

(2) $|\nu - \nu_0| = 0.5\text{GHz}$, 求增益和 I_0 的表达式;

(3) $\nu = \nu_0$ 时, 求增益较最大增益下降 3dB 时的输出光强 I_l 。

解: (1) 设入射光光强为 I_0 , 输出光光强为 I_l , 并且令 $\beta_0 = I_0 / I_s$, $\beta_l = I_l / I_s$, 则有

$$G_m l = \ln \frac{\beta_l}{\beta_0} + \beta_l - \beta_0$$

根据题意有 $10 \log e^{G_m l} = 10$, 得 $G_m l = \ln 10 = 2.3$

$$\text{所以, } \ln \frac{\beta_l}{\beta_0} + \beta_l - \beta_0 = 2.3$$

即得到增益(以 dB 表示)和入射光强 I_0 的关系表达式

$$\ln G + G I_0 / I_s - I_0 / I_s = 2.3$$

(2) $|\nu - \nu_0| = 0.5\text{GHz}$ 时, 若 I 为工作物质内光强, 则

$$\frac{dI}{Idz} = \frac{G_m \left(\frac{\Delta \nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta \nu_H}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{I}{I_s}\right)} = \frac{G_m}{2 + \frac{I}{I_s}}$$

即 $\frac{d\beta}{\beta dz} = \frac{G_m}{2 + \beta}$

由上式积分可得

$$2 \ln \frac{\beta_l}{\beta_0} + \beta_l - \beta_0 = G_m l$$

将 $G_m l$ 的值代入即得此时增益和 I_0 的表达式为：

$$2 \ln G + G I_0 / I_s - I_0 / I_s = 2.3$$

(3) 当增益较最大增益下降 3dB 时

$$10 \log G = 10^{-3}$$

求得 $G = 10^{0.7} = 5$ 。

代入(1)中得到的关系式，得

$$I_0 = \frac{0.69}{4 I_s} = 1.73 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$I_l = G I_0 = 8.6 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$$

即增益较最大增益下降 3dB 时的输出光强为 $8.6 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ 。

5. 已知掺铒光纤放大器中铒离子浓度 $n = 2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ， $\sigma_{12}(\nu) = \sigma_{21}(\nu) = 2 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$ ，

$\sigma_{13}(\nu_p) = 4 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$ ， $l=15\text{m}$ 。当泵浦光功率 $P_{p0} = 5.5\text{mW}$ 时放大器的小信号增益 $G_{\text{dB}}^0 = 0\text{dB}$ ，

试求 $P_{p0} = 100\text{mW}$ 时光纤放大器的小信号增益(以 dB 为单位)。

解： $\ln \left[\gamma \frac{I_{po}}{I_{pth}} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta_p l - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\beta_p}{\beta} \ln G^0 \right] + \frac{1}{\gamma+1} \beta_p l - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\beta_p}{\beta} \ln G^0 = \ln \left(\gamma \frac{I_{po}}{I_{pth}} \right)$

其中的 $\gamma = \frac{\sigma_{12}(\nu)}{\sigma_{21}(\nu)} = 1$, $\beta = n \sigma_{12}(\nu) = 4 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, $\beta_p = n \sigma_{13}(\nu_p) = 8 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$

当泵浦光功率为 $P_{p0} = 5.5\text{mW}$ 的时候， $G_{\text{dB}}^0 = 0\text{dB}$ ，代入上式可得

$$P_{pth} = 0.914\text{mW}$$

所以，当 $P_{p0} = 100\text{mW}$ 的时候，代入上式可得：

$$G^0 \approx 360 \approx 25.6\text{dB}$$

$P_{p0} = 100\text{mW}$ 时光纤放大器的小信号增益为 25.6dB。

6. 证明在无损脉冲放大器中：

(1) 若入射光脉冲极其微弱，则能量增益

$$G_E = \exp[\Delta n^0 l \sigma_{21}]$$

(2) 若入射光极强，则能量增益

$$G_E = 1 + \frac{\Delta n^0 l}{2J(0)}$$

证明：(1) 无损脉冲放大器中，能量增益的表达式为：

$$G_E = \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \ln \left\{ 1 + \left[e^{2\sigma_{21}J(0)} - 1 \right] e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l} \right\}$$

如果入射光脉冲极其微弱，则上式可以改写为：

$$\begin{aligned} G_E &= \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \left[e^{2\sigma_{21}J(0)} - 1 \right] e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l} = \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} 2\sigma_{21}J(0) e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l} \\ &= e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l} \end{aligned}$$

得证。

(2) 如果入射光脉冲极强，则

$$\begin{aligned} G_E &= \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \ln \left\{ 1 + \left[e^{2\sigma_{21}J(0)} - 1 \right] e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l} \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \ln \left\{ e^{-2\sigma_{21}J(0)} + \left[1 - e^{-2\sigma_{21}J(0)} \right] e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l} \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \sigma_{21}\Delta n^0 l + \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \ln \left\{ 1 - e^{-2\sigma_{21}J(0)} + e^{-2\sigma_{21}J(0) - \sigma_{21}\Delta n^0 l} \right\} \\ &\approx 1 + \frac{\Delta n^0 l}{2J(0)} + \frac{1}{2\sigma_{21}J(0)} \left[-e^{-2\sigma_{21}J(0)} + e^{-2\sigma_{21}J(0) - \sigma_{21}\Delta n^0 l} \right] \\ &\approx 1 + \frac{\Delta n^0 l}{2J(0)} \end{aligned}$$

得证。

7. 用一脉宽 $\tau = 2\text{ns}$ 的矩形光脉冲照射增益盒，光脉冲的波长恰好等于增益物质中心波长 ($1\mu\text{m}$)，增益物质的发射截面 $\sigma = 10^{-14}\text{cm}^2$ ，增益盒的小信号增益为 30dB，其损耗为零，单位截面光脉冲能量为 W_0 ，当① $W_0 = 2\mu\text{J} \cdot \text{cm}^{-2}$ ；② $W_0 = 20\mu\text{J} \cdot \text{cm}^{-2}$ ；③ $W_0 = 200\mu\text{J} \cdot \text{cm}^{-2}$ 时，试

求增益盒输出脉冲在起始和终了时的光强 I_1 和 I_2 及功率增益 $G_p(L/c)$ 和 $G_p(L/c + \tau)$ 。

解：考虑到放大器的工作物质是三能级系统，则有

$$G_p(t) = \frac{1}{1 - [1 - \exp(-\sigma \Delta N_0 L)] \exp[-2\sigma I_0(t - \frac{L}{c})]}$$

所以输出端的光子流强度为

$$I(t) = \frac{\frac{W_0}{\tau \cdot h\nu}}{1 - [1 - \exp(-\sigma \Delta N_0 L)] \exp[-2\sigma \frac{W_0}{\tau \cdot h\nu} (t - \frac{L}{c})]}$$

由已知条件，增益盒的小信号增益为 30dB，所以

$$\exp(\sigma \Delta N_0 L) = 10^3$$

输出脉冲在起始点 $t = L/c$ 时，光强为

$$I_1 = h\nu I(\frac{L}{c}) = \frac{W_0}{\tau} \exp(\sigma \Delta N_0 L) = 10^3 \frac{W_0}{\tau}$$

$$G_p(L/c) = 10^3$$

输出脉冲终了 $t = L/c + \tau$ 时，光强为

$$I_2 = h\nu I(\frac{L}{c} + \tau) = \frac{\frac{W_0}{\tau}}{1 - [1 - 10^{-3}] \exp(-2\sigma \frac{W_0}{h\nu})} \approx \frac{W_0 / \tau}{1 - \exp(-2\sigma \frac{W_0}{h\nu})}$$

$$G_p(L/c + \tau) \approx \frac{1}{1 - \exp(-2\sigma \frac{W_0}{h\nu})}$$

将 W_0 的三个值代入上面得到的公式，列出结果为

$W_0 (\mu\text{J} \cdot \text{cm}^{-2})$	$I_1 (\text{W} \cdot \text{cm}^{-2})$	$I_2 (\text{W} \cdot \text{cm}^{-2})$	$G_p(L/c)$	$G_p(L/c + \tau)$
2	10^6	5.49×10^3	10^3	5.49
20	10^7	1.15×10^4	10^3	1.15
200	10^8	1×10^5	10^3	1

第七章 激光特性的控制与改善

习题

1. 有一平凹氦氖激光器，腔长 0.5m，凹镜曲率半径为 2m，现欲用小孔光阑选出 TEM_{00} 模，试求光阑放于紧靠平面镜和紧靠凹面镜处的两种情况下小孔直径各为多少？（对于氦氖激光器，

当小孔光阑的直径约等于基模半径的 3.3 倍时，可选出基模。)

解：腔长用 L 表示，凹镜曲率半径用 R_1 表示，平面镜曲率半径用 R_2 表示，则

$$L = 0.5\text{m}, R_1 = 2\text{m}, R_2 = \infty$$

由稳定腔求解的理论可以知道，腔内高斯光束光腰落在平面镜上，光腰半径为

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{[L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)]^{\frac{1}{4}}}{(R_1 + R_2 - 2L)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} [L(R_1 - L)]^{\frac{1}{4}} \\ &\approx 0.42\text{mm} \end{aligned}$$

$$\text{共焦参量为 } f = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi \times 0.42^2}{6328 \times 10^{-7}} \approx 0.87\text{m}$$

$$\text{凹面镜光斑半径为 } w_1 = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{f}\right)^2} = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L}{f}\right)^2} \approx 0.484\text{mm}$$

$$\text{所以平面镜端光阑直径为 } D_{\text{平}} = 3.3 \times w_0 = 1.386\text{mm}$$

$$\text{凹面镜端光阑直径为 } D_{\text{凹}} = 3.3 \times w_1 = 1.597\text{mm}$$

2. 图 7.1 所示激光器的 M_1 是平面输出镜， M_2 是曲率半径为 8cm 的凹面镜，透镜 P 的焦距 $f=10\text{cm}$ ，用小孔光阑选 TEM_{00} 模。试标出 P 、 M_2 和小孔光阑间的距离。若工作物质直径是 5mm，试问小孔光阑的直径应选多大？

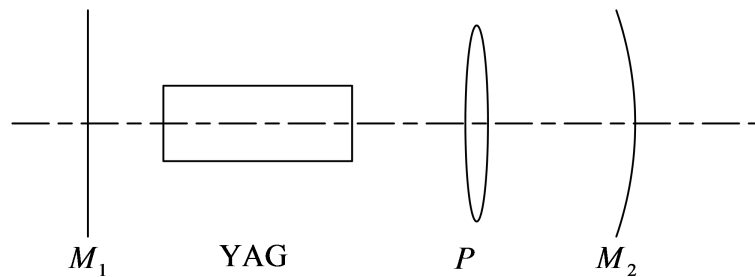
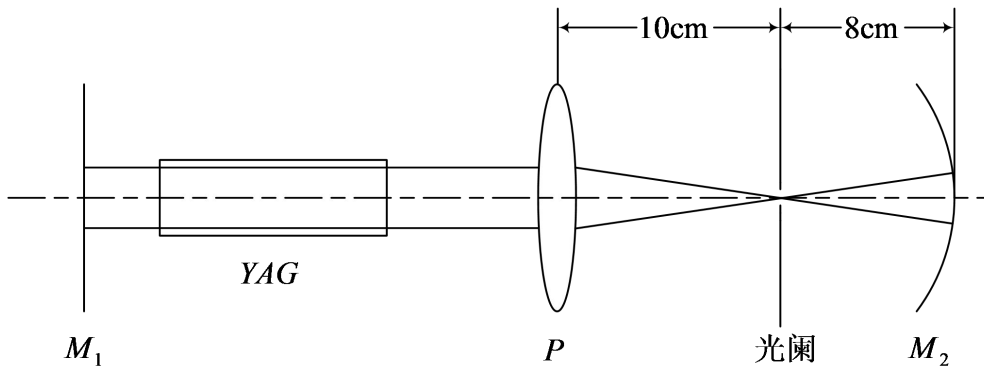


图 7.1

解：如下图所示：



小孔光阑的直径为：

$$d = 2 \frac{\lambda}{\pi} \frac{f}{a} = 2 \times \frac{1.06 \times 10^{-3} \times 100}{\pi \times 2.5} \text{mm} \approx 0.027 \text{mm}$$

其中的 a 为工作物质的半径。

3. 激光工作物质是钕玻璃，其荧光谱宽 $\Delta \nu_F = 24.0 \text{nm}$ ，折射率 $n = 1.50$ ，能用短腔选单纵模吗？

解：谐振腔纵模间隔

$$\Delta \nu_q = \frac{c}{2nL}$$

$$\Delta \lambda_q = \frac{\lambda^2}{2nL}$$

所以若能用短腔选单纵模，则最大腔长应该为

$$L = \frac{\lambda^2}{2n\Delta \lambda} \approx 15.6 \mu\text{m}$$

所以说，这个时候用短腔选单纵模是不可能的。

6. 若调 Q 激光器的腔长 L 大于工作物质长 l ， n 及 n' 分别为工作物质及腔中其余部分的折射率，试求峰值输出功率 P_m 表示式。

解：列出三能级系统速率方程如下：

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_{21} c N \Delta n \frac{l}{L'} - \frac{N}{\tau_R} \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -2\sigma_{21} \nu N \Delta n \quad (2)$$

式中， $L' = nl + n'(L - l)$ ， n 及 n' 分别为工作物质及腔中其余部分的折射率， N 为工作物

质中的平均光子数密度， $\nu = c/n$ ， $\tau_R = L'/c\delta$ 。

由式(1)求得阈值反转粒子数密度为：

$$\Delta n_t = \frac{L'}{\sigma_{21} c \tau_R l}$$

式(1)和(2)可以改写为:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\Delta n}{\Delta n_t} - 1 \right) \frac{N}{\tau_R} \quad (3)$$

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -2 \left(\frac{\Delta n}{\Delta n_t} \right) \frac{N}{\tau_R} \frac{L'}{\eta l} \quad (4)$$

(3)式除以(4)式可得:

$$\frac{dN}{d\Delta n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta n_t}{\Delta n} - 1 \right) \frac{\eta l}{L'} \quad (5)$$

将(5)式积分可得:

$$N = N_i + \frac{1}{2} \left(\Delta n_i - \Delta n + \Delta n_t \cdot \ln \frac{\Delta n}{\Delta n_i} \right) \frac{\eta l}{L'}$$

当 $\Delta n = \Delta n_t$ 时, $N = N_m$, 忽略初始光子数密度 N_i , 可由上式求出:

$$N_m = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \Delta n_t \left(\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - \ln \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - 1 \right)$$

设工作物质的截面积为 S , 输出反射镜透射率为 T , 则峰值功率为:

$$P_m = \frac{1}{2} N_m \frac{c}{\eta} h \nu S T = \frac{1}{4} \frac{l}{L'} c h \nu S T \Delta n_t \left(\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - \ln \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - 1 \right)$$

7. 图 7.3 所示 Nd:YAG 激光器的两面反射镜的透过率分别为 $T_2=0$, $T_1=0.1$, $2\omega_0 = 1\text{mm}$, $l=7.5\text{cm}$, $L=50\text{cm}$, Nd:YAG 发射截面 $\sigma = 8.8 \times 10^{-19} \text{cm}^2$, 工作物质单通损耗 $T_i=6\%$, 折射率 $\eta=1.836$, 所加泵浦功率为不加 Q 开关时阈值泵浦功率的二倍, Q 开关为快速开关。试求其峰值功率、脉冲宽度、光脉冲输出能量和能量利用率。

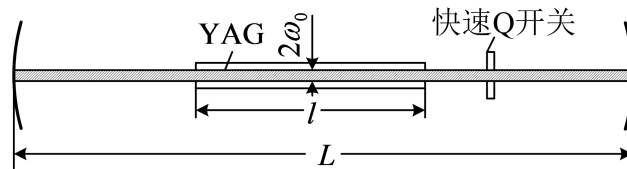


图 7.3

解:

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{(1-T_1)(1-T_2)(1-T_i)^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{0.9 \times 0.94^2} = 0.11 \\
\Delta n_i &= \frac{\delta}{\sigma l} = \frac{0.11}{8.8 \times 10^{-19} \times 7.5} = 1.7 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3} \\
N_m &= \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \Delta n_i \left(\frac{\Delta n_i}{\Delta n_i} - \ln \frac{\Delta n_i}{\Delta n_i} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1.836 \times 7.5}{7.5 \times 1.836 + 42.5} (2 - \ln 2 - 1) \times 1.7 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3} \\
&= 6.38 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}
\end{aligned}$$

峰值功率为:

$$\begin{aligned}
P_m &= \frac{1}{2} N_m \frac{c}{\eta} h\nu ST \\
&= \frac{1}{2} \times 6.38 \times 10^{14} \times 6.626 \times 10^{-34} \times \frac{(3 \times 10^{10})^2}{1.836 \times 1.06 \times 10^{-4}} \times \pi \times \left(\frac{0.1}{2}\right)^2 \times 0.1 \\
&= 767.7 \text{ W}
\end{aligned}$$

由图 7.3.5 可以查得, 当 $\Delta n_i / \Delta n_i = 2$ 的时候, 能量利用率 $\mu = 0.797$ 。

所以光脉冲的输出能量为:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{T}{2\delta} \mu (h\nu \cdot S \cdot l \frac{\Delta n_i}{2}) = \frac{T}{2\delta} \mu (h\nu \cdot S \cdot l \Delta n_i) \\
&= \frac{0.1}{2 \times 0.11} \times 0.797 \times 6.626 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^{10}}{1.06 \times 10^{-4}} \times \pi \times \left(\frac{0.1}{2}\right)^2 \times 7.5 \times 1.7 \times 10^{16} \\
&= 0.068 \text{ mJ}
\end{aligned}$$

脉冲宽度为:

$$\tau \approx \frac{E}{P_m} = \frac{0.068 \times 10^{-3}}{767.7} = 0.89 \text{ ns}$$

8. Q开关红宝石激光器中, 红宝石棒截面积 $S=1\text{cm}^2$, 棒长 $L=15\text{cm}$, 折射率为 1.76, 腔长 $L=20\text{cm}$, 铬离子浓度 $N=1.58 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 受激发射截面 $\sigma=1.27 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$, 光泵浦使激光上能级的初始粒子数密度 $n_{2i}=10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 假设泵浦吸收带的中心波长 $\lambda=0.45\mu\text{m}$, E_2 能级的寿命 $\tau_2=3\text{ms}$, 两平面反射镜的反射率与透射率分别为 $r_1=0.95$, $T_1=0$, $r_2=0.7$, $T_2=0.3$ 。试求:

(1) 使 E_2 能级保持 $n_{2i}=10^{19} \text{ cm}^{-3}$ 所需的泵浦功率 P_p ;

(2) Q开关接通前自发辐射功率 P_s ;

(3) 脉冲输出峰值功率 P_m ;

(4) 输出脉冲能量 E ;

(5) 脉冲宽度 τ (粗略估算)。

解: (1) 欲使 $n_2 = n_{2i} = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 所需要的泵浦功率为:

$$P_p = \frac{n_{2i}}{\tau_2} h\nu_{21} \cdot S \cdot l = \frac{10^{19} \times 6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 1 \times 15}{3 \times 10^{-3} \times 0.45 \times 10^{-6}} = 22.1 \text{ KW}$$

(2) Q 开关接通前自发辐射功率

$$P = \frac{n_{2i}}{\tau_2} h\nu_{21} \cdot S \cdot l = P_p \cdot \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} = 22.1 \times \frac{0.45}{0.6943} = 14.3 \text{ KW}$$

(3)

$$\delta = -\frac{1}{2} \ln r_1 r_2 = -\frac{1}{2} \ln(0.7 \times 0.95) = 0.2$$

$$\Delta n_t = \frac{\delta}{\sigma l} = \frac{0.2}{1.27 \times 10^{-20} \times 15} = 1.05 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$\Delta n_i = n_{2i} - (n - n_{2i}) = 2n_{2i} - n = 10^{19} \times (2 - 1.58) \text{ cm}^{-3} = 4.2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$P_m = \frac{1}{4} \frac{l}{L'} ch\nu_{21} S T_2 \Delta n_t \left(\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - \ln \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - 1 \right) = \frac{1}{4} \times \frac{15}{1.76 \times 15 + 5} \times (3 \times 10^{10})^2 \times 6.626 \times 10^{-34} \times \frac{0.3 \times 1.05 \times 10^{18}}{0.6943 \times 10^{-4}} \times \left(\frac{4.2}{1.05} - \ln \frac{4.2}{1.05} - 1 \right) = 522 \text{ MW}$$

(4) 由 $\Delta n_i / \Delta n_t = 4$, 可以从图 7.3.5 查得能量利用率 $\mu = 0.98$, 输出能量为:

$$E = \frac{T_2}{2\delta} \mu (h\nu_{21} \cdot S \cdot l \frac{\Delta n_i}{2}) = \frac{0.3}{0.4} \times 0.98 \times 6.626 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{0.6943 \times 10^{-6}} \times 1 \times 15 \times \frac{4.2 \times 10^{18}}{2} = 6.63 \text{ J}$$

$$(5) \tau \approx \frac{E}{P_m} = \frac{6.63}{522 \times 10^6} = 12.7 \text{ ns}$$

9. 若有一四能级调 Q 激光器, 有严重的瓶颈效应(即在巨脉冲持续的时间内, 激光低能级积累的粒子数不能清除)。已知比值 $\Delta n_i / \Delta n_t = 2$, 试求脉冲终了时, 激光高能级和低能级的粒子数 n_2 和 n_1 (假设 Q 开关接通前, 低能级是空的)。

解: 列出速率方程如下:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\Delta n}{\Delta n_t} - 1 \right) \frac{N}{\tau_R} \quad (1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -\sigma_{21} \nu N \Delta n \quad (2)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = \sigma_{21} \nu N \Delta n \quad (3)$$

由(2)和(3)式可以得到:

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -2\sigma_{21} \nu N \Delta n = -2 \frac{\Delta n}{\Delta n_t} \frac{N}{\tau_R} \quad (4)$$

(1)式和(4)式与三能级系统速率方程完全一样, 所以, 脉冲终了时有

$$\Delta n_i - \Delta n_f + \Delta n_t \ln \frac{\Delta n_f}{\Delta n_t} = 0$$

根据已知条件 $\Delta n_i / \Delta n_t = 2$ 可以求得

$$\Delta n_f = 0.407 \Delta n_t$$

脉冲终了时

$$n_1 + n_2 = \Delta n_i$$

$$n_2 - n_1 = \Delta n_f$$

$$n_1 = \frac{\Delta n_i - \Delta n_f}{2} \approx 0.8 n_t = 0.4 n_i$$

$$n_2 = \Delta n_i - n_1 \approx 0.6 \Delta n_i$$

11. 一锁模 He-Ne 激光器振荡带宽为 600MHz, 输出谱线形状近似于高斯函数, 试计算其相应的脉冲宽度。

解: 输出谱线的形状近似于高斯函数

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a} \right]$$

脉冲的宽度是对时域而言的, 现在知道的是频域特性。根据傅立叶分析, 时域特性可以通过傅立叶逆变换由频域特性得到, 即

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{E_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a} + i\omega t\right] d\omega \\
&= \frac{E_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a}[\omega - (\omega_0 + iat)]^2 + i\omega_0 t - \frac{at^2}{2}\right\} d\omega \\
&= \frac{E_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(i\omega_0 t - \frac{at^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a}[\omega - (\omega_0 + iat)]^2\right\} d\omega
\end{aligned}$$

利用关系式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

可以得到

$$E(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 \exp(i\omega_0 t) \exp\left(-\frac{at^2}{2}\right)$$

时域里脉冲的宽度是 $E(t)$ 函数的半功率点所对应的时间间隔，当 $t = 0$ 时

$$E^2(0) = E(0)E^*(0) = \left(\frac{\sqrt{2}E_0}{4}\right)^2 = \frac{E_0^2}{8}$$

另 $t = t_1$ 时为半功率点，则

$$E^2(t_1) = \frac{1}{2} E^2(0) = \frac{E_0^2}{16}$$

又有关系

$$E^2(t_1) = E(t_1)E^*(t_1) = \frac{1}{8} \left[E_0 \exp\left(-\frac{at_1^2}{2}\right) \right]^2$$

另上两式左端相等，可以得到

$$\left[\exp\left(-\frac{at_1^2}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

求得 $t_1 = \sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$

脉冲的宽度为 $\tau = 2t_1 = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$

下面来求 a 的值，在频域中进行求解，
因为

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2a}\right]$$

当 $\omega = \omega_0$ 的时候, $E^2(\omega_0) = \left(\frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^2$

令 $\omega = \omega_1$ 时为半功率点, $E^2(\omega_1) = \frac{1}{2} E^2(\omega_0)$

又因为

$$E^2(\omega_1) = E(\omega_1)E^*(\omega_1) = \left(\frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^2 \exp\left[-\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{a}\right]$$

所以有

$$\frac{1}{2} E^2(\omega_0) = E^2(\omega_0) \exp\left[-\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{a}\right]$$

$$\omega_1 - \omega_0 = \sqrt{a \ln 2}$$

半功率点的带宽为

$$\Delta \nu = 2 \frac{\omega_1 - \omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{a \ln 2}}{\pi}$$

$$a = \frac{(\pi \Delta \nu)^2}{\ln 2}$$

将 a 的值代入 τ 的表达式中去, 可以得到锁模脉宽为:

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{\ln 2}{a}} = \frac{2 \ln 2}{\pi \Delta \nu} \approx 0.74 \text{ ns}$$

12. 一锁模氩离子激光器, 腔长 1m, 多普勒线宽为 6 000MHz, 未锁模时的平均输出功率为

3W。试粗略估算该锁模激光器输出脉冲的峰值功率、脉冲宽度及脉冲间隔时间。

解: 相邻纵模的频率间隔为

$$\Delta \nu_q = c/2L = 1.5 \times 10^8 \text{ Hz}$$

该锁模激光器输出脉冲的脉冲宽度为:

$$\tau = \frac{1}{\Delta \nu_q (2N + 1)} = \frac{1}{\Delta \nu_{osc}} \approx \frac{1}{\Delta \nu_D}$$

将 $\Delta \nu_D = 6000 \text{ MHz}$ 代入得:

$$\tau = 0.167 \text{ ns}$$

$$(2N + 1) = \frac{\Delta \nu_D}{\Delta \nu_q} = 40$$

脉冲时间间隔为:

$$T_0 = \frac{1}{\Delta \nu_q} = 6.67 \text{ ns}$$

输出脉冲的峰值功率为：

$$I_m = (2N+1)^2 E_0^2 = 40^2 \times 3 = 4.8 \text{ KW}$$