

京东

# 京东最优库存策略分析

数据挖掘与机器学习期末项目

姓名： 郭瀚中 何育书 蒋凌波 于浩龙 周泳棋

学号： 18353015 18310009 18327043 18332039 18355091

指导教师： 王杉

学院： 岭南学院

# 京东最优库存策略分析

## ——基于测量误差的报童模型

摘要: 面对日益激烈的市场竞争, 供应链及库存管理的优化是增强公司竞争力的强有力手段之一, 因此本文基于京东提供的商品、顾客数据, 经过对异常值的分析和处理, 通过机器学习建立预测商品销量均值和标准差的模型, 并结合带有误差的报童模型, 得到了最优的库存策略, 文章发现: 通过挖掘有解释力的因子, 销量均值的预测可以达到较高的精度, 而标准差的预测则存在偏误 (相比精度较低), 文章发现可以使用带有测量误差的 **minimax** 方法决策最优库存, 本文最后虽然没有提出优于 **minimax** 的最优库存的启发式算法, 但是在一定程度上为库存管理提供了研究的思路。

关键词: 机器学习 测量误差 报童模型 启发式算法

## 目录

1.	背景分析 .....	3
1.1.	引言 .....	3
1.2.	文献综述 .....	4
2.	数据探索与预处理 .....	5
2.1.	描述性统计 .....	5
2.2.	因子构建 .....	17
3.	预测模型构建 .....	19
3.1.	模型介绍 .....	19
3.1.1	线性回归 .....	20
3.1.2	神经网络 .....	20
3.1.3	XGBoost .....	21
3.2.	模型结果比较 .....	21
3.2.1	均值预测结果 .....	22
3.2.2	标准差预测结果 .....	25
4.	库存策略 .....	28
4.1.	模型假设 .....	29
4.2.	模型构建 .....	29
4.3.	模型求解 .....	31
4.3.1	Robust 方法 .....	31
4.3.2	误差修正后的 Robust 方法 .....	33
4.4.	启发式学习 .....	34
4.5.	数值模拟 .....	36
5.	结论及反思 .....	37
	参考文献 .....	38

## 1. 背景分析

### 1.1. 引言

近年来电商业务形态的迅猛增长产生了众多新问题,例如电商的战略规划问题、运营管理问题、物流的运输规划问题和库存问题等。京东(JD.com)是这些问题的方案解决者之一。根据京东的企业介绍“京东一直致力于提供高质量的正品和快速便捷的物流服务,引领了线上购物的品质、速度的行业标准建设”,其线上购物可选择的品类非常广,从新鲜蔬菜到最新款电子产品以及美妆产品均被覆盖。对于物流产业的布局,京东选择玩家较少的建设全链条供应链赛道,以实施产品质量的全面监控,提供高品质的线上购物体验。京东的物流版图发展至今,已覆盖了全国超过 99%的人口,且能够提供标准化的、明日达配送服务。

目前,京东结合了大数据的库存管理体系已基本形成,主要由 5 部分组成:销量预测,补货系统,健康库存,供应商管理,智慧选品及定价。销量预测部分,京东利用过往的销售数据,再结合季节的变化、促销等因素来预测未来的趋势,确定库存及未来销售量,建立了新品模型、保守模型、不动销模型、决策树模型、月均价格模型、市场需求回归模型等销量预测模型。

然而,面对日益激烈的市场竞争,京东必须不断提高服务质量,与供应链的上游企业之间更好地配合,更有效率地进行运作。从某种意义上讲,现在的竞争已经由企业间的竞争转向供应链之间的竞争,而库存是联结供应链上各个成员的重要纽带。在满足顾客需求的前提下,京东应该尽可能降低库存水平,从而提高其经济利润及竞争力。

因此,库存管理问题的进一步优化是京东不可以回避的战略规划之一,高效的库存管理不仅可以节约企业资源,减少调度货物的时间和成本,还可以提高企业的供应链竞争力和整体利润,使其在市场竞争中立于不败之地。但库存管理问题中的两大困难是难以预测商品未来的销量及实施如何的订购策略才能使得成本最小。关于库存管理的研究经久不衰,许多学者在经典的报童模型基础上,研究发表了众多计算最优订货决策和最优库存管理的方法,如蔡连侨等人(2003)研究了可替代性产品库存管理问题,并给出了最优订货量应该满足的条件。

基于对京东库存管理问题的讨论,本文提出了以下研究问题:

- 什么样的消费者行为及商品属性会对商品未来销量的均值产生较大的影响？
- 商品未来销量的均值和标准差是可以预测的吗？什么样的模型可以表现出更优越的预测能力？
- 在已知未来销量的均值和标准差的情况下，什么样的库存订购策略可以使京东的总成本最小？

通过本文的研究，本文挖掘了一些对销量均值预测影响较大的因子，并且商品未来销量的均值和标准差是可以预测的，均值的预测精度较高，而标准差的预测精度相比较低，对于在该问题下的库存分配策略，本文发现利用 Yue(2006)提出的 minimax 的最优库存的解在本文的所有建议库存策略中最优。

本文的研究创新主要体现在如下几个方面：1.本文利用消费者行为、商品属性等多个维度利用多种机器学习和深度学习模型对商品未来销量的均值和标准差进行预测；2.提出了在存在测量误差下的 minimax 方法，并基于对商品销售的理解提出了最优库存策略的启发式算法。

## 1.2.文献综述

报童模型作为供应链理论的基础模型，主要解决随机需求情况下如何确定产品的最佳订货量，使得期望损失最小的库存管理问题。报童模型反映了许多现实情况，目前已被广泛应用于诸多领域中，例如制造及零售业的辅助决策，航空和旅馆的管理容量和评估预订等。（李雪敏,缪立新,徐青青（2008））

事实上，报童模型是许多库存管理策略的基石。（Zheng 1992, Chen and Zheng 1998, Hariga and Ben-Daya 1990）目前对报童模型的研究已在原模型基础上扩充了决策变量及模型中常数的确定方法，并且降低了对产品需求分布已知的要求，Pearson 等（2000）提出了使用绩效度量指标来对供应水平进行优化的模型，该方法以需求分布均值为已知条件，不需要知道产品实际需求分布。Lin 等（2004）取消需求分布假设并假定订购量为任意值，顾客到达率和订购数量的一次三阶矩已知，使用 Shore 的分段线性近似理论得到了更为通用的最优订购量。

此外，报童模型的研究还加入了时间因素并且考虑了可追加补货的条件。蔡清波等（2003）及李明琨等（2003）分别从需求分布为正态分布及均匀分布条件下研究了时间因素对报童问题的影响。Chung, Flynn（2000）提出了两次订购模型，即考虑追加订购量小于等于容量  $M$  的情况下将最小成本作为目标函数的两次订购模型。宋海涛等（2003）在 Chung 等（2000）的基础上，证明了在给定最大追加订购量的情况下存在最优库存量，提出了二次进货二次销售的报童模型，并分析了该模型与经典报童问题的最优订购量及收益关系。

而对于只有需求分布的均值和标准差是已知的情况下，以往文献主要采用的是 minimax 方法求解，即找出成本函数的上界，在成本函数为上界的基础上取小值得到“最坏情况”的最有库存策略，对于该类库存问题研究的困难在于，由于需求的分布函数不可得知，因此对于不同的需求分布函数，最优库存的表达式会有所差异。而在 minimax 方法研究中，Scarf（1958）提出能找到一个库存水平使得满足均值和方差的所有需求分布的最优成本均小于等于该库存水平下的成本（只有一个销地的情况下），并求出在成本函数上界的最小值的库存量。在 Scarf 之后，Gallego and Moon(1993) 提供了一种成本函数上确界的新的证明方式，并给出了成本函数的下确界。在后续的研究中，一些学者提出了联合期望分布信息值(EVDI)。其定义为在给定（默认）分布函数的最优决策的成本和所设计的订购策略下的成本差值，Gallego and Moon(1993) 用正态分布评估了 Scarf 的订购策略，发现其 EVDI 相对较小，但由于分布函数有无穷多个，Yue(2006)证明了当需求分布是两点分布的时候，其 EVDI 是最大的，并且 Yue 给出了在两点分布下求解最优库存的方法。本文基于先验知识，提出启发式算法，利用 Scarf(1958)和 Yue(2006)提出的 minimax 求解方法作为比较基准，判断启发式算法在京东库存管理问题上的优劣。

## 2. 数据探索与预处理

### 2.1. 描述性统计

为了挖掘与目标变量销售额具有强预测性的因子，本部分将致力于探寻现有因子与目标变量的关系。本文首先归纳了以下可能与销售额具有相关关系的因子：

购买特定商品的平均用户等级、购买特定商品的用户平均城市等级、特定商品的购买页面被点击的次数、特定商品从点击到购买的转化率、点击购买页面的 APP 渠道占比、PC 端占比、WeChat 端占比、特定商品平均承诺运送时长、平均实际运送市场与超时配送占比。

表 2-1 探索因子名称与含义

探索因子名称	因子含义	探索因子名称	因子含义
平均用户等级	特定时间区间内，购买非 礼物品类 sku 的消费者平 均 user level	实际配送时长	特定时间内，非礼物品 类 sku 的实际配送时长 均值
平均城市等级	特定时间区间内，购买非 礼物品类 sku 的消费者平 均 city level	超时配送订单占 比	特定时间区间内，非礼 物品类 sku 实际配送时 长大于承诺运送时长的 订单占比
点击次数	特定时间区间内，非礼物 品类 sku 的购买页面被点 击的次数	商品类型	不同商品有自营与非自 营区别
点击转化率	特定时间区间内，非礼物 品类 sku 的购买量除以点 击次数	商品所属品牌	不同商品所属品牌不同
APP 端占比	特定时间区间内，非礼物 品类 sku 的购买页面被点 击的渠道是 APP 占所有 渠道的占比	商品关键属性	每类商品有两个衡量其 性能的关键属性变量 attr ibute1 及 attribute2。
PC 端占比	特定时间区间内非礼物品 类 sku 的购买页面被点击 的渠道是 PC 端占比	商品折扣	特定时间区间内，每类 商品因不同优惠减掉的 价格和与原价的比值

	特定时间区间内，非礼物	用户会员人数	特定时间区间内，购买
WeChat 端占	品类 sku 的购买页面被点		每类商品的消费者中会
比	击的渠道是 WeChat 端占		员人数
	所有渠道的占比		
	特定时间区间内，非礼物		特定时间区间内，购买
承诺运送时长	品类 sku 的承诺运送时长	购买力水平	不同类商品的消费者购
	的中位数		买力总和

2.1.1 平均用户等级

选取非礼物品类的 sku，分别计算 1-30 号购买对应 sku 的用户的平均用户等级，作反应频数的条形图查看它与销售量的关系。本文发现销售量较高的 sku 对应的平均用户等级几乎都处于[2,4]区间内，该区间外的 sku 销售量普遍比区间内的 sku 少。销售量与平均用户等级不是线性相关，调整后的 R 方为 0.004888，线性模型的拟合度较差。该因子的离群点有 6 个，sku\_id 分别是 65046559c8、73eb91aa04、a1ab23c162、0b3e7bbc7a、3bcc2d0275、53eebb0959，他们的 Type 类别都是 2，会员数几乎没有或为 0，销售量非常少均小于 10。本文猜测 user\_level 出现异常是因为其数据量不大，仅能反应这六个 sku 特定的用户群体的等级性质。

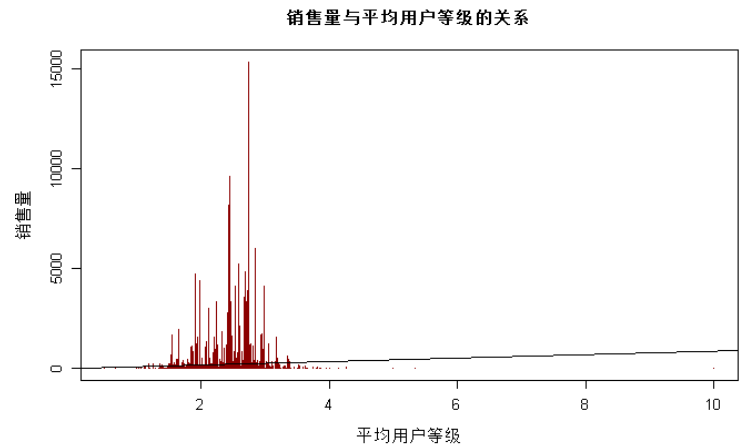


图 2-1 销量与用户条形图



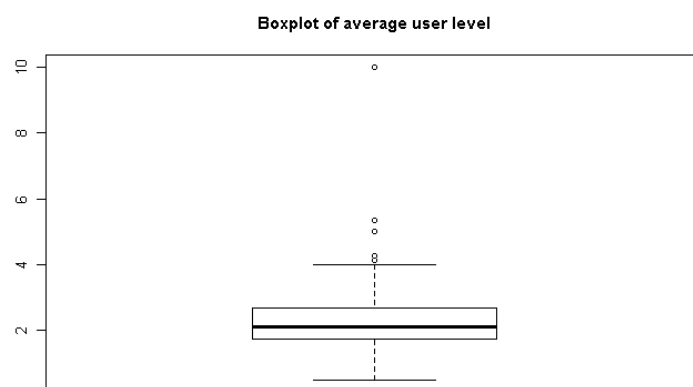


图 2-2 平均用户等级箱型图

## 2.1.2 平均城市等级

同样地选取非礼物品类的 sku，分别计算 1-30 号购买对应 sku 的用户的平均城市等级，作反应频数的条形图查看它与销售量的关系。本文发现销售量较高的 sku 对应的平均城市等级几乎都处于[1,2]区间内，该区间外的 sku 销售量普遍比区间内的 sku 少。销售量与平均城市等级不是线性相关，调整后的 R 方为 0.002328，线性模型的拟合度一般。该因子的离群点较多，偏离程度最高的 5 个 sku 的 id 分别是 74a5f9be63、91b8ca849b、aad5dee442、baa6201f01、c7c8a99118，它们的会员数几乎没有或为 0，用户的购买力很低，为-1 或 1。

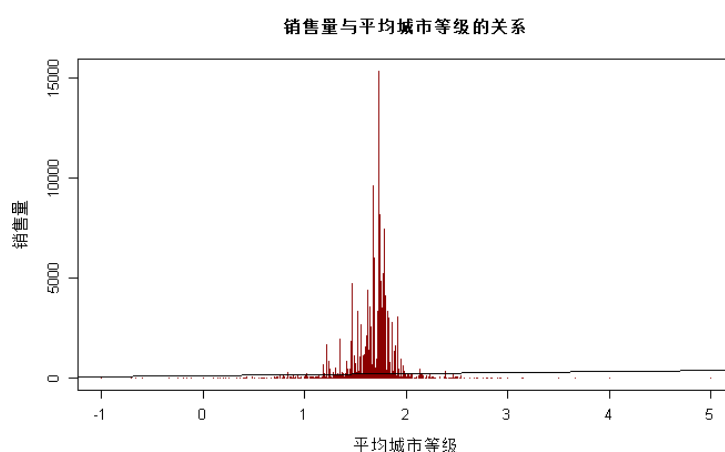


图 2-3 销量与城市等级条形图

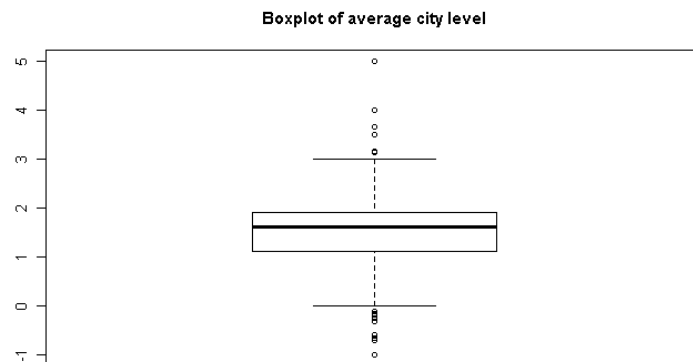


图 2-4 平均城市等级箱型图

### 2.1.3 点击次数

同样地选取非礼物品类的 sku，分别计算 1-30 号购买对应 sku 的购买页面被点击的总次数，作点击次数与销售量的散点图。本文发现购买页面点击次数与对应 sku 的销售量成线性关系，二者的线性回归模型的 P 值显著性水平为 $<2e-16$ ，调整后的 R 方为 0.892，线性模型的拟合度较好，线性回归模型系数是 0.0301803。该因子的离群点较多，集中程度较差，四分位距是 2733.25，平均差是 891.0426，均偏大。

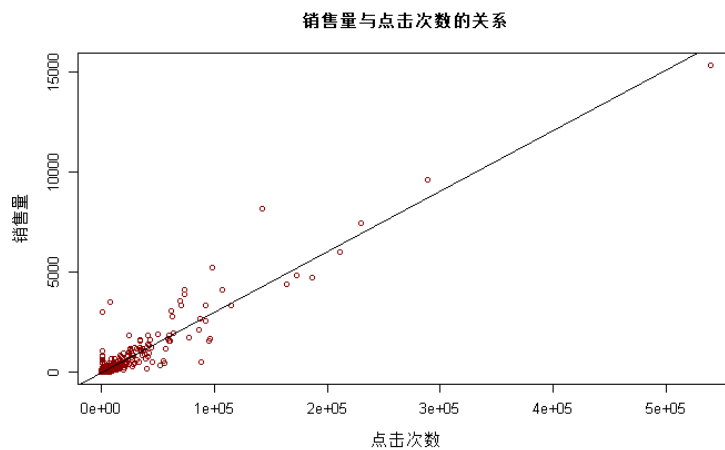


图 2-5 销量与点击次数散点图

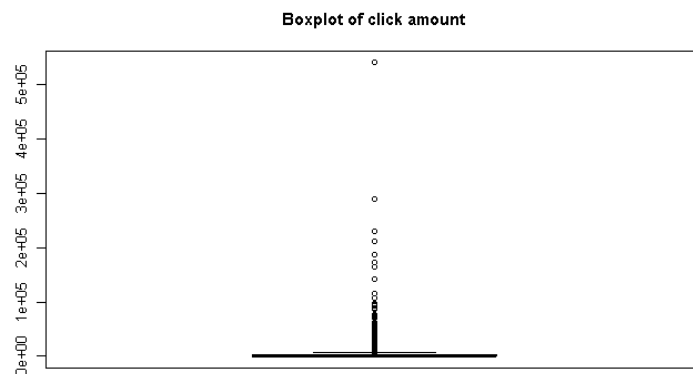


图 2-6 点击次数箱型图

### 2.1.4 点击转化率

同样地选取非礼物品类的 sku，分别计算 1-30 号购买对应 sku 的购买量与购买页面被点击的总次数的比值，将该比值作为点击转化率（click value rate），作反映频数的点击转化率与销售量的条形图。本文发现销售量较大的 sku 对应的点击转化率均处于区间 $[0.013, 0.03]$ ，点击转化率大于该区间的 sku 被判定是离群值点。点击转化率与对应 sku 的销售量不成线性关系，二者的线性回归模型的调整后的 R 方为-0.000353，线性模型的拟合度一般。该因子的离群点较多，集中程度较差，未删除离群值点前的平均值是 0.2815，删除了转化率最高的 10%sku 后的平均值是 0.0235，四分位距偏大为 0.0146。

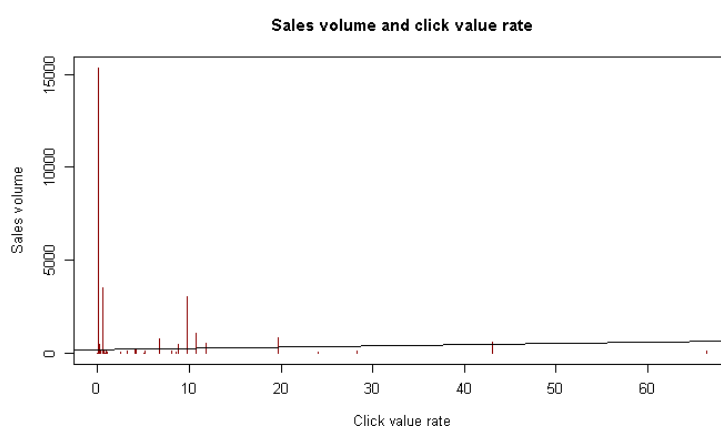


图 2-7 销量与点击转化率条形图

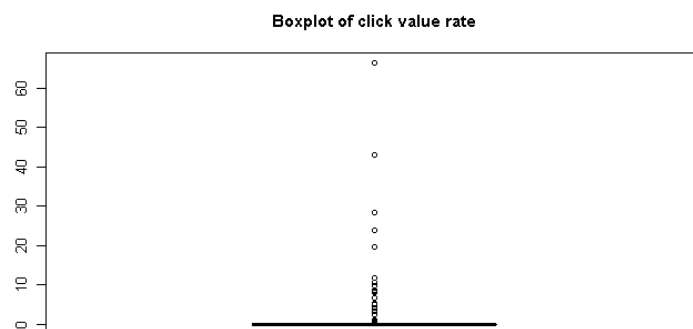


图 2-8 点击转化率箱型图

## 2.1.5 APP 端渠道占比

选取非礼物品类的 sku，分别统计 1-30 号对应 sku 的购买页面的四种点击渠道数量，并计算相应的 APP 端渠道点击占比。作反映频数的 APP 端渠道占比与销售量的条形图。本文发现销售量较大的 sku 对应的 APP 渠道占比均处于区间  $[0.6, 0.9]$ ，APP 端渠道占比与对应 sku 的销售量不成线性关系，二者的线性回归模型的调整后的 R 方为 0.0121，线性模型的拟合度一般。综合 PC 端渠道占比情况和 WeChat 端渠道占比情况，可以发现 APP 渠道占比越大，销售量有可能越大。

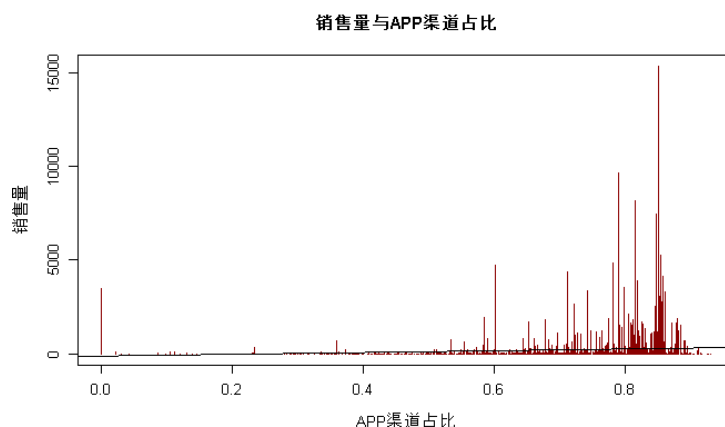


图 2-9 销量与 app 占比条形图

## 2.1.6 PC 端渠道占比

获得上述的 sku 购买页面的四种点击渠道数量后，计算 PC 端渠道点击占比。作反映频数的 PC 端渠道占比与销售量的条形图。本文发现销售量较大的 sku 对

应的 PC 端渠道占比均处于区间 $[0.0,0.1]$ ，PC 端占比明显低于 APP 端占比。占比 PC 端渠道占比与对应 sku 的销售量不成线性关系，二者的线性回归模型的调整后的 R 方为 0.01003，线性模型的拟合度一般。该因子的离群点较多，集中程度较差。

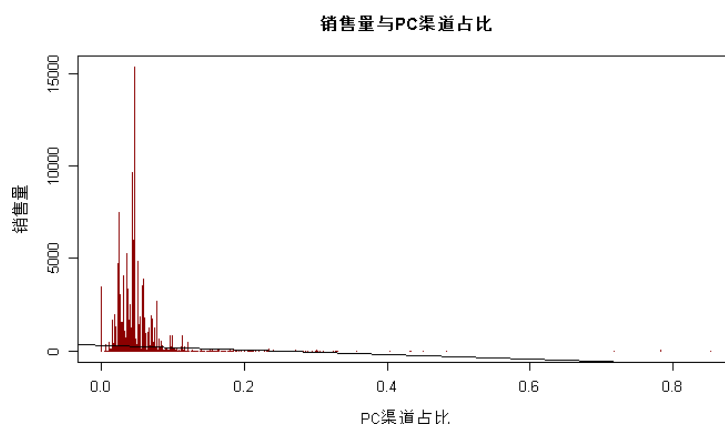


图 2-10 销量与 pc 占比条形图

### 2.1.7 WeChat 端渠道占比

用同样的方式计算 WeChat 端渠道点击占比，作反映频数的 WeChat 端渠道占比与销售量的条形图。本文发现销售量较大的 sku 对应的 WeChat 渠道占比均处于区间 $[0.07,0.2]$ ，比 PC 端占比稍高。WeChat 端占比与销售量的线性回归模型调整后 R 方为 0.0146，线性模型的拟合度一般。

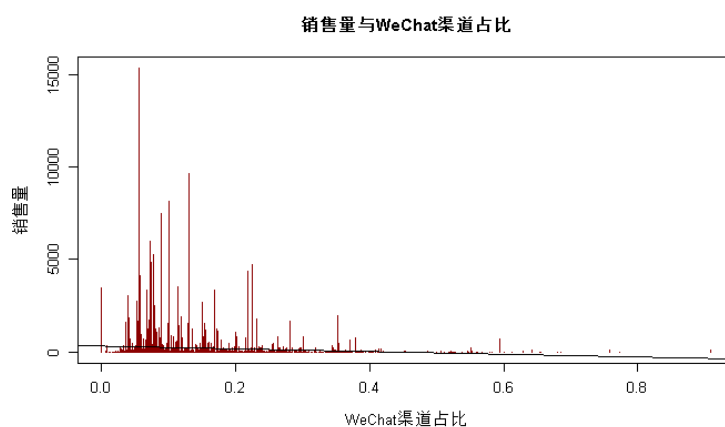


图 2-11 销量与 WeChat 占比条形图

## 2.1.8 承诺运送时长

对于每一个非礼物品类 sku，统计所有包含它的订单的承诺运送时长的中位数（Promise），作承诺运送时长中位数与销售量的散点图。本文发现承诺运送时长越靠近 1 天，包含的 sku 数目越多，出现高销售量的概率越高。

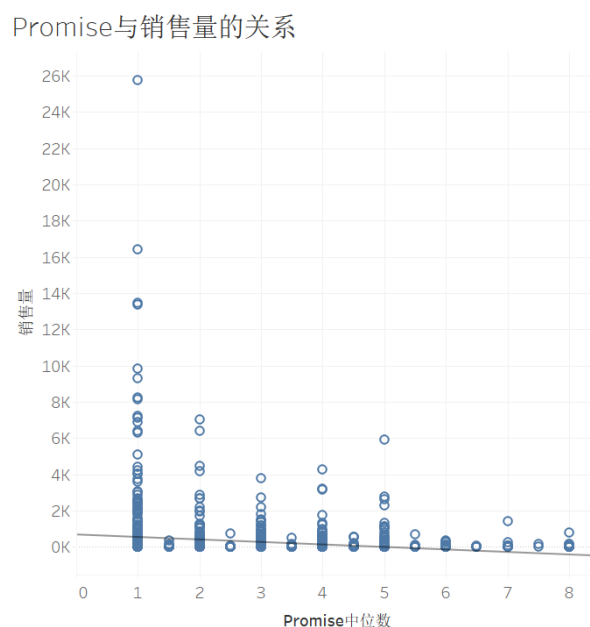


图 2-12 承诺送达时间与销量散点图

## 2.1.9 实际配送时长

对于每一个非礼物品类 sku，统计所有包含它的订单的平均运送时长，作反映频数的平均运送时长与销售量的条形图。本文发现大多数商品的实际配送时长大于 33 小时、小于 55 小时，且销售量较高的 sku 的配送时长也在这个范围内。因此实际配送时长越低，销售量可能越低。

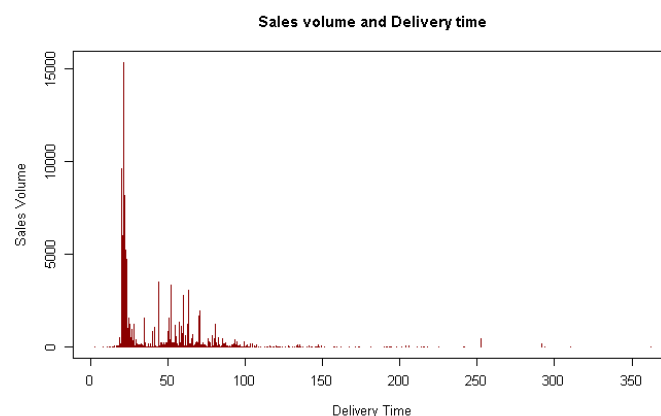


图 2-13 销量与配送时间条形图

## 2.1.10 商品类型

根据 JD\_order\_data 表及 type 变量说明，商品类型变量是一个分类变量，当变量为 1 时，代表该商品为自营商品，变量为 2 时，代表该商品为非自营商品。统计出不同商品类型订单出现次数以及不同商品类型的销量，如下图所示。从图中我们能看出自营与非自营的商品销量大致相等，但非自营商品订单数远小于自营商品订单数，所以本文推测商品类型与商品销量有关。

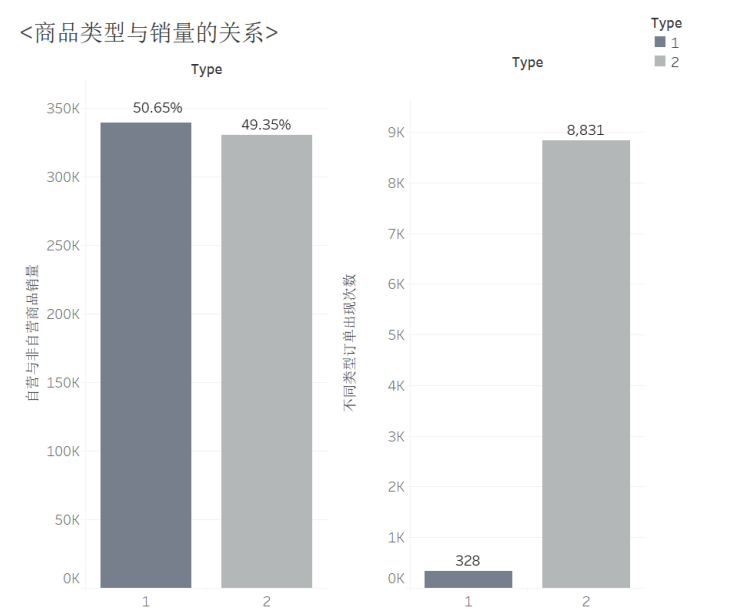


图 2-14 商品类型与销量条形图

## 2.1.11 商品所属品牌

本文认为商品所属品牌与商品销量应存在一定的关系，从 JD\_sku\_data 表能得到每类商品的品牌 ID，将表 JD\_sku\_data 与表 JD\_order\_data 关于 sku\_id 合并后进行统计，合并后的数据显示共有 1890 个不同品牌 ID，不同品牌的商品销量如图所示，图中仅保留了销量 10000 以上的品牌并且删除了缺失值。从图中可看出商品所属品牌不同其销量不同，因此本文可推测商品品牌与销量有关。

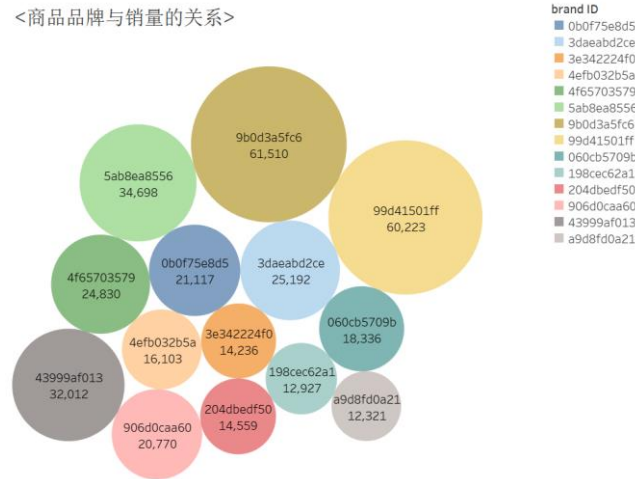


图 2-15 商品品牌与销量气泡图

### 2.1.12 商品关键属性

根据 attribute1、attribute2 的变量说明，attribute1、attribute2 代每类商品的两个关键属性，其中 attribute1 有 4 个取值：1、2、3 及 4，attribute2 取值在 30 到 100 之间，且为整十数，并且取值越大表示商品在该类属性上表现越好，即商品有更优的性能。在表 JD\_sku\_data 中得到了 attribute1 及 attribute2 的数据，经初步统计后发现均有缺失值，去掉缺失值后，attribute1 与 attribute2 同商品销量的关系如下图所示。

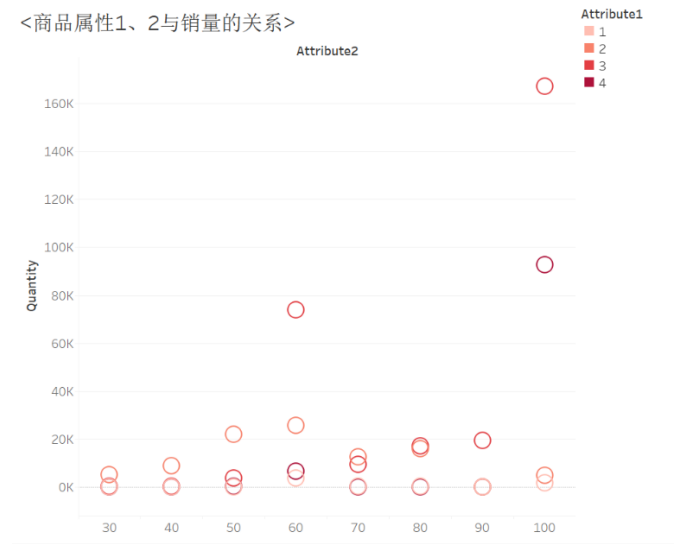


图 2-16 商品属性 1,2 与销量散点图

图中 attribute2 为横坐标，属性 1、2 不同取值对应的销量为横坐标，attribute1



由不同颜色区分，从图中发现若商品只有属性 1 或属性 2 得分较高，其销量往往较低。因此可推测商品销量与其属性有关。

### 2.1.13 商品折扣

本文认为商品折扣与商品销量同样应存在相关关系。在计算商品折扣时，将每一商品因不同优惠而减掉的价格和与原价的比值作为折扣代理变量，统计不同 sku\_id 商品的折扣与其销量，得到关系图如下。由图中可看出折扣区间为 0.1 到 0.5 间的商品销量较高，尽管与一般情况下商品折扣越高其销量越高的逻辑不符，但造成该情况的原因可能是因为未考虑到商品作为赠品附送等情况，商品折扣与销量的关系仍需进一步探索。

<折扣与销量的关系>

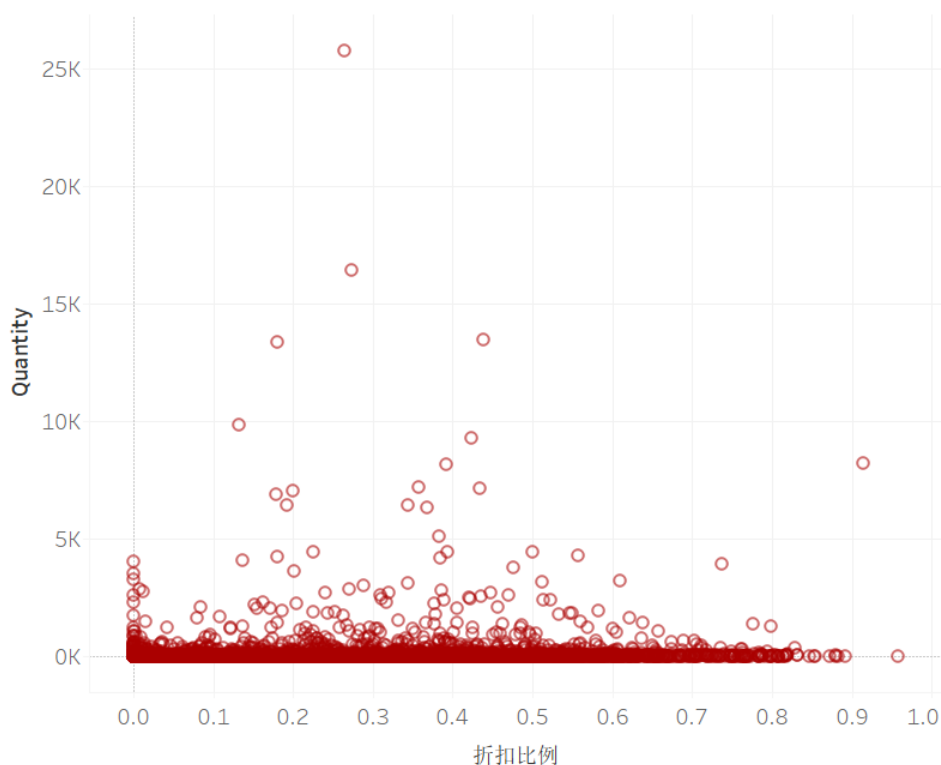


图 2-17 折扣与销量散点图

### 2.1.14 用户会员人数与购买力水平

从用户角度出发，本文认为若用户为京东会员则其更有可能购买商品，因此在统计了购买每一商品的用户中会员人数后得到与商品销量的关系，如下图左所

示。并且本文推测用户购买力同样与销量存在一定的关系，因此本文统计了购买不同类商品（依据 sku\_id 分类）的用户购买力总和，从而得到了用户购买力与销量的关系，如下右图所示。

<购买商品的用户中会员人数与销量的关系>

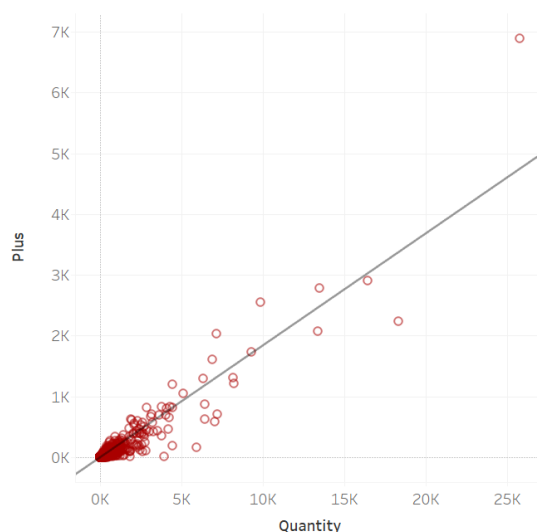


图 2-18 会员人数与销量散点图

<用户购买力与销量的关系>

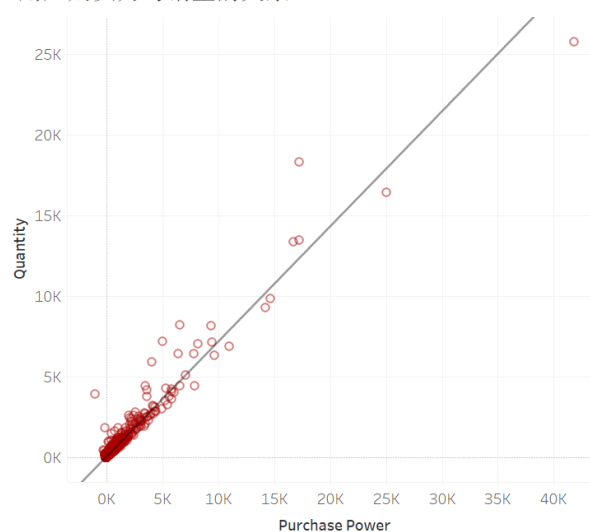


图 2-19 用户购买力与销量散点图

从两图中看出购买商品的会员人数与商品销量存在正的相关关系，而商品的  
用户购买力与销量存在同样的关系。

## 2.2.因子构建

本文从客户性质、商品性质、客户行为三个方面挖掘了 19 个因子用以预测

未来的销量，具体的变量及它们的计算方式如下表所示。

表 2-2 预测变量名称及数据来源

变量类别	变量名称	数据来源
商品性质	type	order 表原始数据
	promise	order 表原始数据
	brand	sku 表原始数据
	attribute 1	sku 表原始数据
	attribute 2	sku 表原始数据
	前 20 天单品折扣	order 表计算得到
	前 20 天优惠比例	order 表计算得到
	前 20 天销量	order 表计算得到
	前 20 天销售额	order 表计算得到
	前 20 天平均配送时间	order 表+delivery 表计算得到
	前 20 天配送超时占比	order 表+delivery 表计算得到
客户性质	前 20 天购买者平均购买力	order 表+uer 表计算得到
	前 20 天购买者平均城市等级	order 表+uer 表计算得到
	前 20 天购买者 plus 会员占比	order 表+uer 表计算得到
	前 20 天购买者平均用户等级	order 表+uer 表计算得到
客户行为	前 20 天商品点击次数	click 表计算得到
	前 20 天夜晚点击次数	click 表计算得到
	前 20 天点击转化率	order 表+click 表计算得到
	前 20 天被点击的渠道占比	click 表计算得到

人们购买商品时会根据商品自身的性质做出决策。京东平台上，自营商品使用京东自有物流，且往往更有质量保证，这在一定程度上会影响消费者对于商品的选择，故本文选择 type（是否为自营商品）作为预测变量。商品的品牌和性能

是消费者购物时的关注点，故本文选择 `brand`, `attribute1` 和 `attribute2` 作为预测变量。网购时，消费者往往更加偏好那些运达时间更短的商品，因此本文选择 `promise`（承诺送达时间）、前 20 天商品平均配送时间和前 20 天配送超时占比作为预测变量。商品的优惠力度也是影响消费者购物选择的因素之一，故本文选择前 20 天单品折扣和前 20 天优惠比例作为预测变量。最后，一种商品过往的销量反映它的受欢迎程度，而受欢迎程度可能会影响未来的销量，故本文选择前 20 天销量作为预测变量。

对于一个特定的商品，以往购买该商品顾客的特征能够从侧面反映商品的市场定位和特征，从而对商品未来的销量有一定的预测效果。本文选取前 20 天购买该商品的顾客平均购买力、平均城市等级、`plus` 会员占比和平均用户等级作为反映商品目标客户特征的变量，猜想它们能够预测该商品的未来销量。

无论是否购买一种商品，顾客的点击行为能够反映大量的信息，从而对商品的未来销量具有预测效果。商品被点击的次数能够反映商品的曝光率，而曝光率决定了潜在的客户群体，故本文选择前 20 天商品点击次数作为预测变量。夜晚是人们一天中最为空闲的时间，此时人们更有可能浏览购物平台上的商品并下单购买，故本文选择前 20 天夜晚点击次数作为预测变量。在点击一种商品的用户中，最终购买该商品的用户比例体现了商品的吸引力，故本文选取前 20 天点击的转化率作为预测变量。最后，本文认为由于点击的目的不同，不同渠道浏览同一商品的用户购买该商品的可能性不尽相同，故本文选取前 20 天被点击的渠道占比作为预测变量。

### 3. 预测模型构建

#### 3.1. 模型介绍

本部分是利用所筛选的因子对未来的销量进行拟合，首先采用不同模型对每件商品的  $\mu$  和  $\sigma$  进行预测，并采用平均平方误差作为评价指标，进行模型的最终选择，对模型预测结果的偏误将在下文详细介绍。

### 3.1.1 线性回归<sup>1</sup>

线性回归模型（Linear Regression）是最常见的预测模型，它试图在因变量 $y$ 和一个或多个自变量 $\mathbf{x}$ 之间建立一种线性关系：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + \varepsilon = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon \quad (1)$$

其中 $\varepsilon$ 为误差项（常设定 $E(\varepsilon) = 0$ ）。对于给定训练集 $D = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 中的训练例 $(\mathbf{x}_i, y_i)$ ，因变量真实值为 $y_i$ ，预测值为 $\hat{y}_i$ ，定义其损失函数，

$$J(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad (2)$$

最优拟合系数 $\boldsymbol{\beta}^*$ 通过最小化目标损失函数得到，即 $\boldsymbol{\beta}^* = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2$ ，为了获得一致估计并保持有效性，常使用极大似然估计（Maximum Likelihood Estimation, MLE）对参数进行估计。本文采用线性回归的原因为 1.线性回归计算较为简单，运算时间短；2.线性回归相比机器学习有着更好的解释性，即可以从回归系数看出不同因子对未来销量均值、方差的影响程度。

### 3.1.2 神经网络<sup>2</sup>

人工神经网络（Artificial Neural Network）是由生物神经元发展而来的网络结构，较为常见的神经网络是由 MP 神经元全连接组成的前馈网络。在该网络中，输入特征和输出变量间没有同层的反馈连接，整体保持由上至下的纵向层级结构，每一层由多个激活函数构成的神经元组成。

以某一神经元为例，设其接受的输入为 $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_M]$ ，对应的连接权记为 $\mathbf{w}$ ，偏置记作 $b$ ，激活函数记为 $f(\cdot)$ ，则该神经元的输出为

$$o = f(\sum_{i=1}^m w_i x_i + b) \quad (3)$$

前馈神经网络主要通过误差逆传播算法（Error Backpropagation, BP）进行训练，由于神经网络具有强大的非线性拟合能力及表示力，因此常用于复杂函数关系的描述和预测问题。

<sup>1</sup> 线性回归的拟合优度 $R^2$ 为 0.84（预测均值）和 0.4（预测标准差）。（由于只有线性回归定义拟合优度 $R^2$ 才有经济含义，只对线性回归展示拟合优度）

<sup>2</sup> 本文使用 MLPRegressor 模型进行建模，设置了 7 层隐藏层，节点数分别为 10, 8, 6, 2, 4, 8，优化器选用“adam”，正则化系数 $L_2$ 设置为 $10^{-5}$ 。

### 3.1.3 XGBoost

Extreme Gradient Boosting (简称 XGBoost), 是经过优化的分布式梯度提升库, 串行地生成模型, 取所有模型的和为输出。相比其他模型, 其在模型训练速度上有着明显的优势。

其原理是使用  $K$  个树的每棵树对样本的预测值的和作为该样本在 XGBoost 系统中的预测, 定义函数如下:

$$\hat{y}_i = \phi(x_i) = \sum_{k=1}^K f_k(x_i) \quad f_k \in F \quad (4)$$

$$F = \{f(x) = w_{q(x)}\} (q: \mathbb{R}^m \rightarrow T, w \in \mathbb{R}^T) \quad (5)$$

其中  $q$  表示每棵树的结构映射每个样本到相应的叶节点的分数, 即  $q$  表示一个树的模型, 输入一个样本, 根据模型将样本映射到叶节点输出预测的分数;  $w_{q(x)}$  表示树  $q$  的所有叶节点的分数组成集合;  $T$  是树  $q$  的叶节点的得分。XGBoost 的目标是学习  $K$  个树模型  $f(x)$ 。为了学习模型  $f(x)$ , 本文定义下面的目标函数:

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_i \iota(\hat{y}_i, y_i) + \sum_k \Omega(f_k) \quad (6)$$

$$\text{where } \Omega(f_k) = \gamma T + \frac{1}{2} \lambda \|w\|^2 \quad (7)$$

$$\hat{y}_i^{(t)} = \hat{y}_i^{(t-1)} + f_k(x_i) \quad (8)$$

即通过不同轮模型的训练和迭代, 找到最优的每个树的权重并且得到最后的预测值。并且对于缺失值和异常值, XGBoost 也可以自动学习出他们的存在并且加之处理, 但 XGBoost 需要遍历数据集, 当数据集很大的时候, 占据很大的内存。本文所采用的数据集数量和样本空间比较少, 因此采用 XGBoost 的时候不用消耗太大的内存, 并且 XGBoost 可以较好的处理过拟合和异常值的问题。

本文利用 XGBoost 的原因首先是: 1.XGBoost 作为集成学习的模型, 在保持训练速度较快的同时, 可以很好的防止训练过拟合问题; 2.XGBoost 由于是基于树模型, 相比简单的回归模型 (例如线性回归等), 对数据非线性处理上具有较好的性质。

### 3.2. 模型结果比较

本文采用多种模型, 利用前文所述因子 (数据集的前 20 天) 对每件商品未

来十天（数据集中的第 21 天到 30 天）的均值（ $\mu$ ）和标准差（ $\sigma$ ）进行预测，同时采用均方根误差（RMSE）作为评价指标，进行模型的最终选择。同时以保证结果的稳定性及模型的优越性，本文使用了不同的随机数种子划分训练集和测试集，并采用了多种模型进行对比分析。在模型的选择方面中，本文采用了线性回归、神经网络、XGBoost、随机森林、Tobit 回归等多种模型<sup>3</sup>，限于篇幅，在此只展示线性回归、神经网络、XGBoost 的模型结果及对比分析。

### 3.2.1 均值预测结果

首先使用各模型对销量进行预测，在使用不同的随机数种子划分测试集和训练集后，三种模型在测试集上的均方根误差（RMSE）如表一所示，可以看出在不同随机数种子<sup>4</sup>中，ANN(BP)神经网络的表现都最好，而具体各个模型的拟合状况如下图所示。

表 3-1 RMSE 对比表（销量均值 $\mu$ ）

模型	均方根误差（RMSE）	
	种子 1	种子 2
linear regression	177.86	211.15
ANN(BP)	159.91	201.79
XGBoost	181.14	213.30

根据图一、图二、图三可以发现，预测值与真值之间的大小关系并不显著，并且由于神经网络与 XGBoost 是非线性拟合，在整体效果上好于线性回归，但提升效果有效。

<sup>3</sup> 对于每种模型，由于均值与标准差均为非负数，最终的预测结果如下所示：

$$\hat{y} = \begin{cases} \hat{y} & \text{if } \hat{y} > 0 \\ 0 & \text{if } \hat{y} \leq 0 \end{cases}$$

<sup>4</sup> 本文设置了多个随机数种子，结果相对稳健，限于篇幅，只展示两个随机数种子的结果

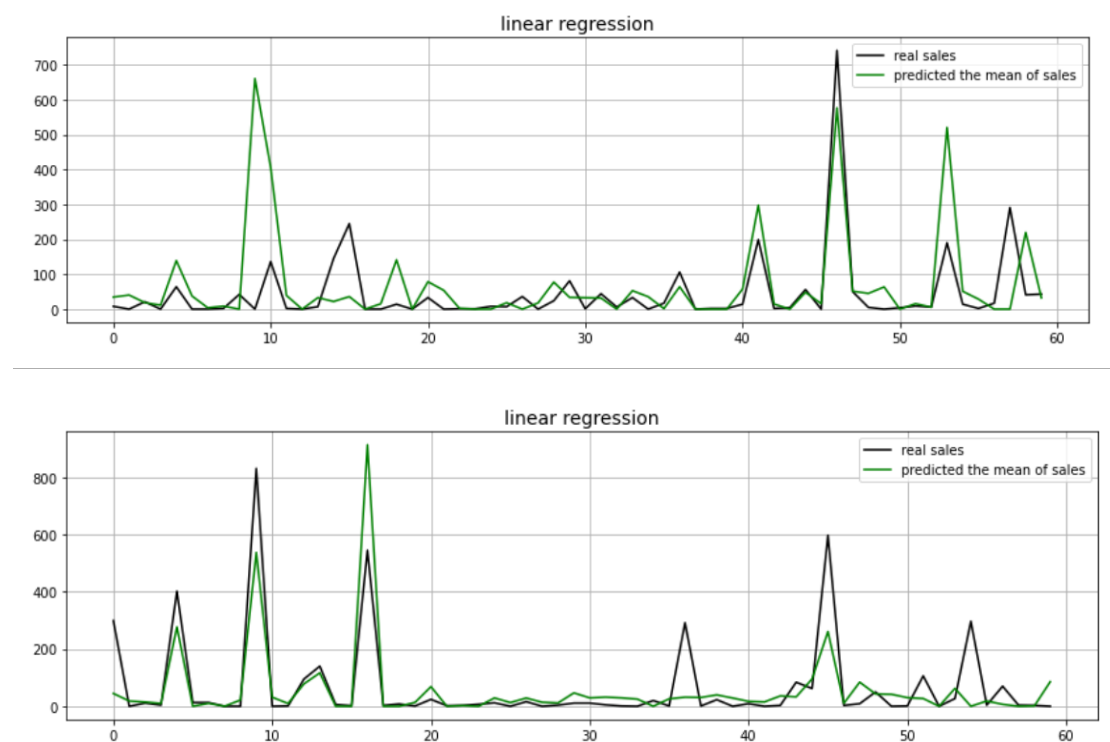


图 3-1 线性模型拟合情况 (  $\mu$  )

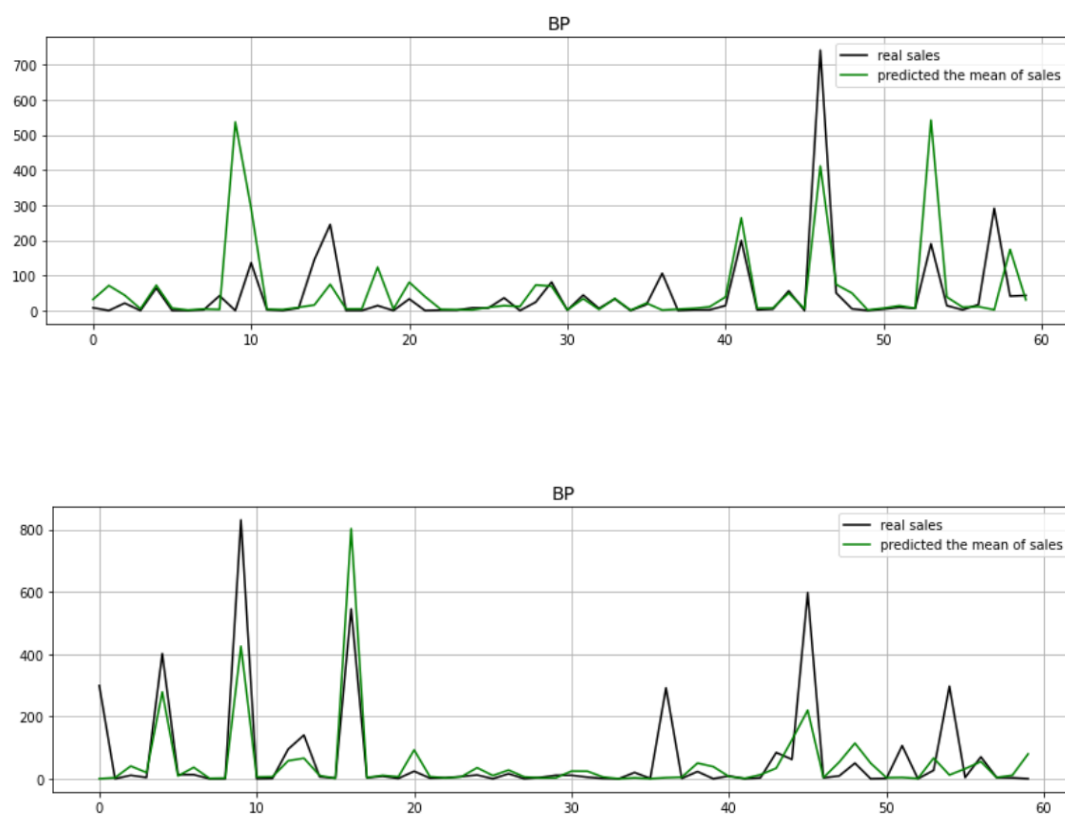


图 3-2 BP 神经网络拟合情况 (  $\mu$  )



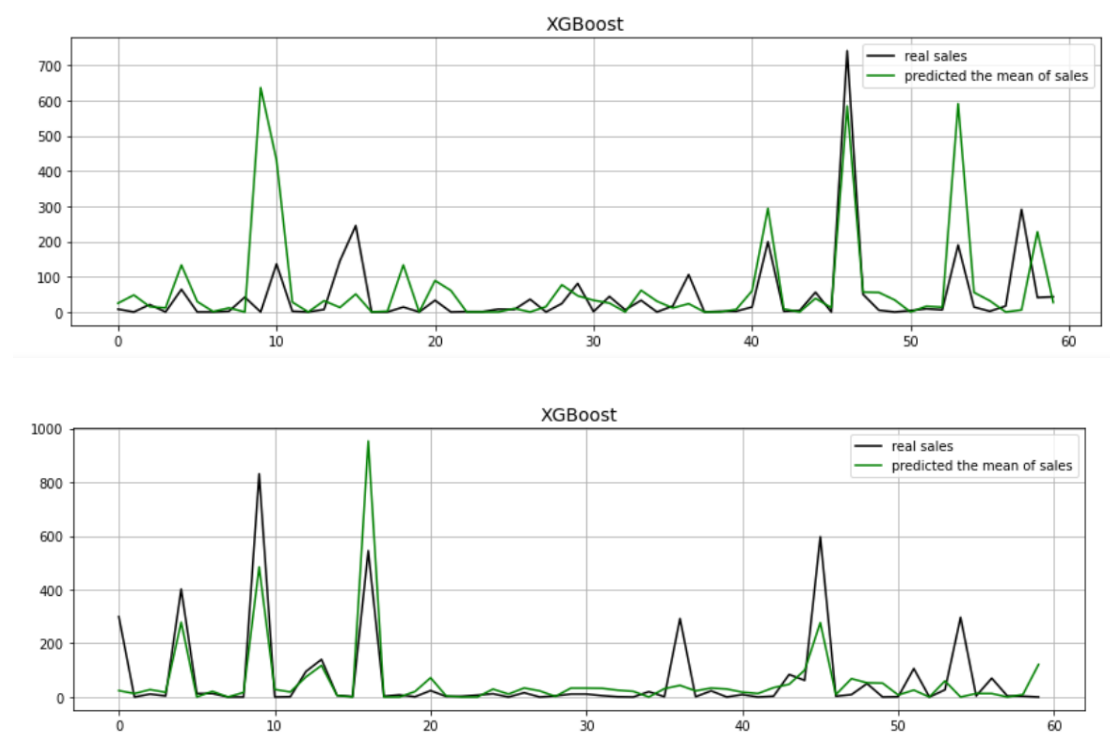


图 3-3 XGBoost 拟合情况 (  $\mu$  )

为了更加直观的展示三种模型的拟合效果，本文对三种模型进行了横向比较，绘制了三种模型的全样本拟合图，而由于大部分商品的销量较低，本文又分别绘制原始销量均值大于 10 和原始销量均值大于 100 的商品拟合图，便于观察模型在销量较大的样本上的拟合情况，结果如下图所示，可以发现由于大部分商品销量的均值均不大，对于销量均值较大的预测，三种模型表现均表现一般，后文将详细如何讨论在预测结果存在偏误的情况。

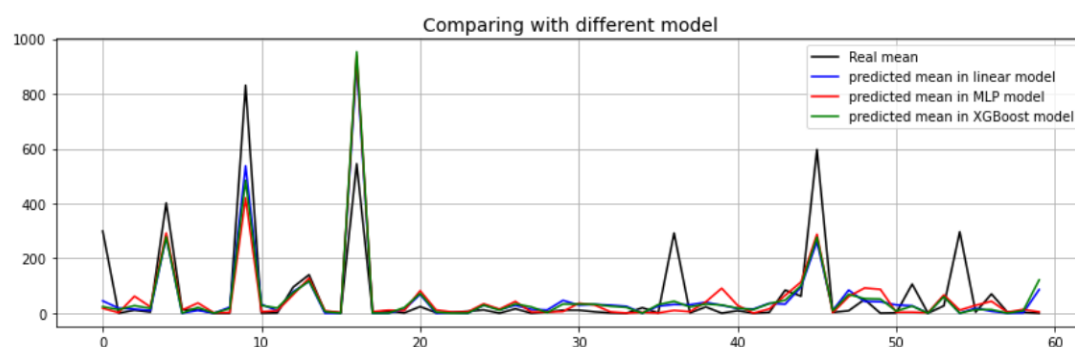


图 3-4 模型比较图（全样本）

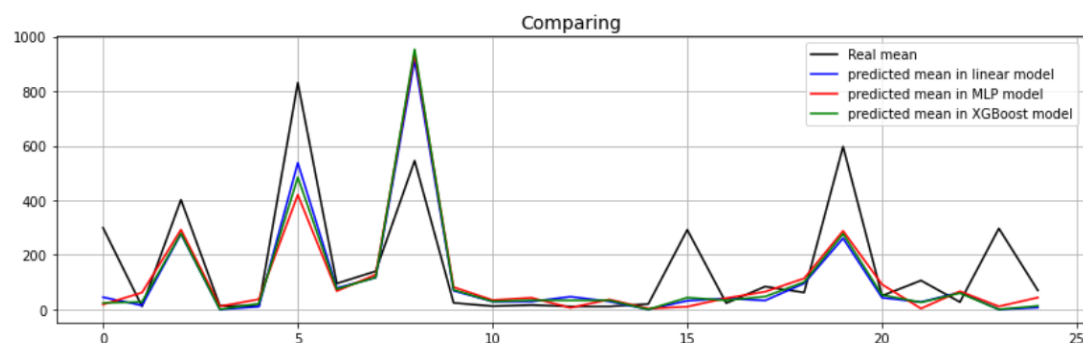


图 3-5 模型比较图 ( $\mu > 10$ )

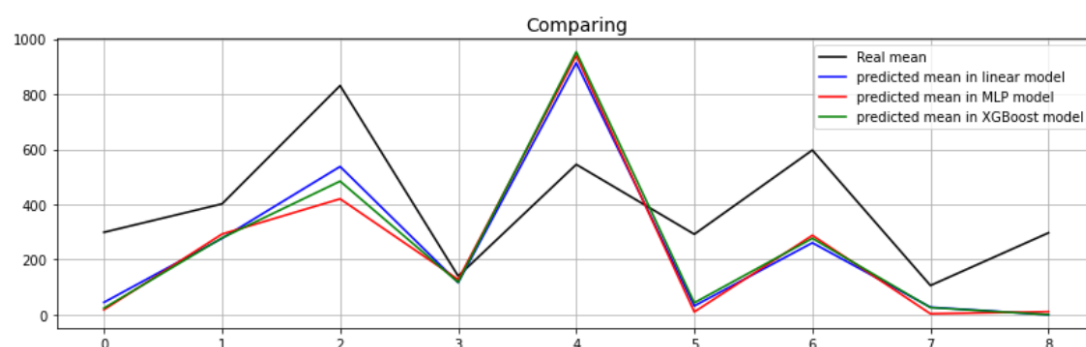


图 3-6 模型比较图 ( $\mu > 100$ )

### 3.2.2 标准差预测结果

与对均值的预测结果分析相同，本文接着使用各模型对标准差 ( $\sigma$ ) 进行预测，在使用不同的随机数种子后，三种模型的 RMSE 如下表所示：

表 3-2 RMSE 对比表 ( $\sigma$ )

模型	均方根误差 (RMSE)	
	种子 1	种子 2
linear regression	110.72	31.04
ANN(BP)	108.98	30.89
XGBoost	99.01	29.47

与对均值 ( $\mu$ ) 的模型评估结果不同的是，XGBoost 在对标准差 ( $\sigma$ ) 的预测表现最好，而具体各个模型的拟合状况如下图所示。

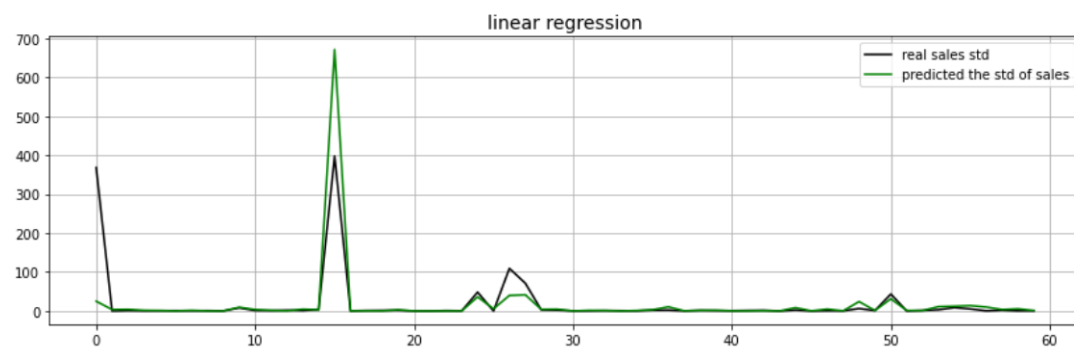
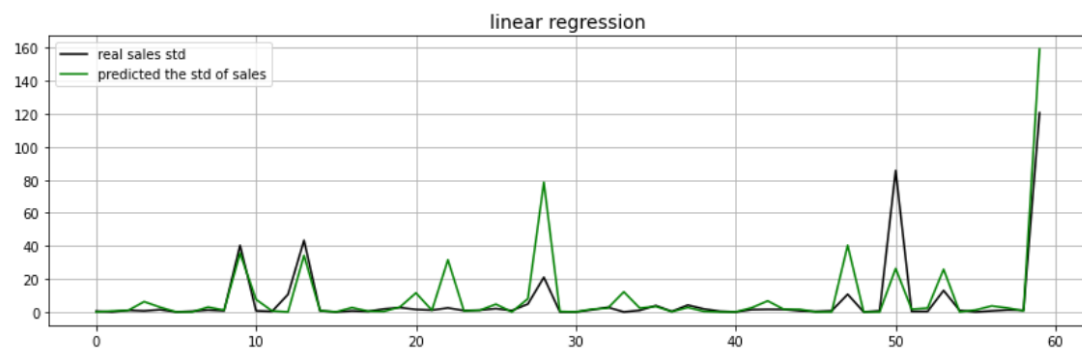
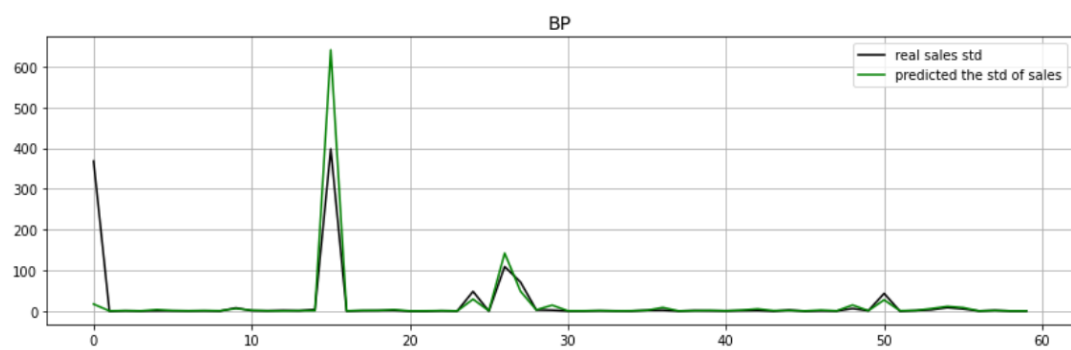


图 3-7 线性模型拟合情况 (  $\sigma$  )



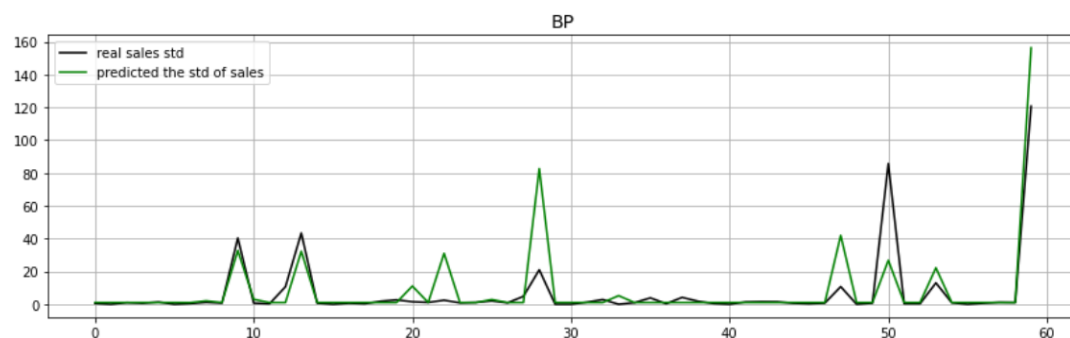


图 3-8 BP 神经网络拟合情况 (  $\sigma$  )

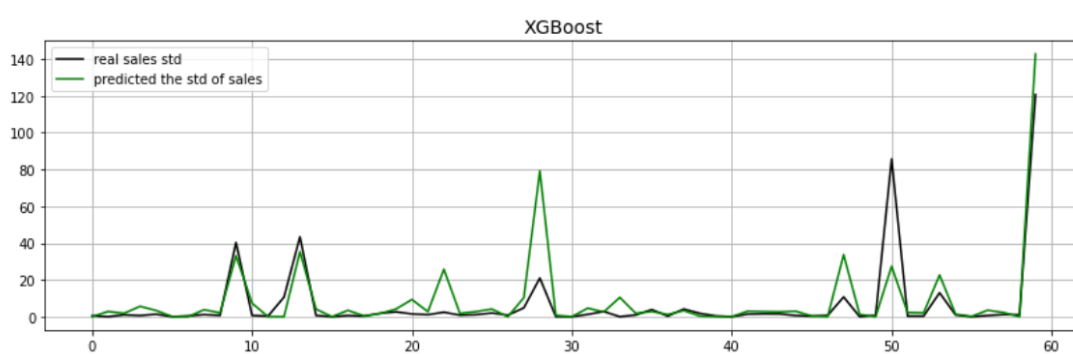
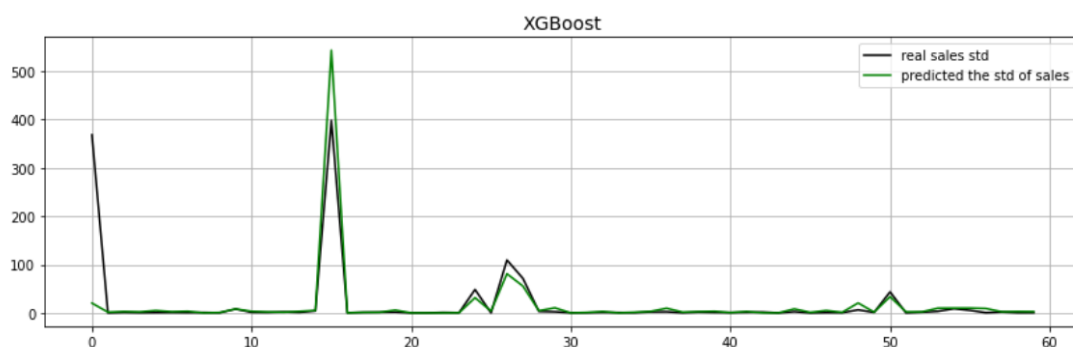


图 3-9 XGBoost 拟合情况 (  $\sigma$  )

同样的，为了更加直观的展示三种模型的拟合效果，本文对三种模型进行了横向比较，绘制了三种模型的全样本拟合图，而由于大部分商品的  $\sigma$  较低，本文又分别绘制标准差 (  $\sigma$  ) 大于 10 和标准差 (  $\sigma$  ) 大于 20 的模型拟合图，便于观察模型在标准差 (  $\sigma$  ) 较大的样本上的拟合情况，结果如下图所示，可以发现对于标准差的预测结果，三种模型在预测上的误差情况相似。

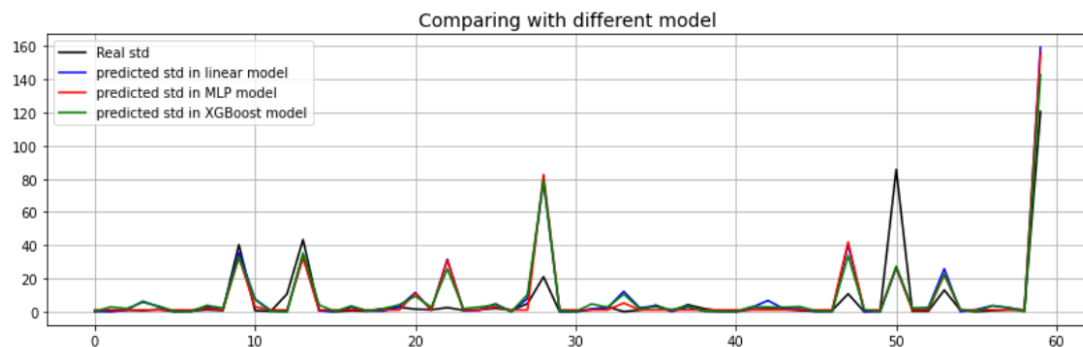


图 3-10 模型比较图（全样本）

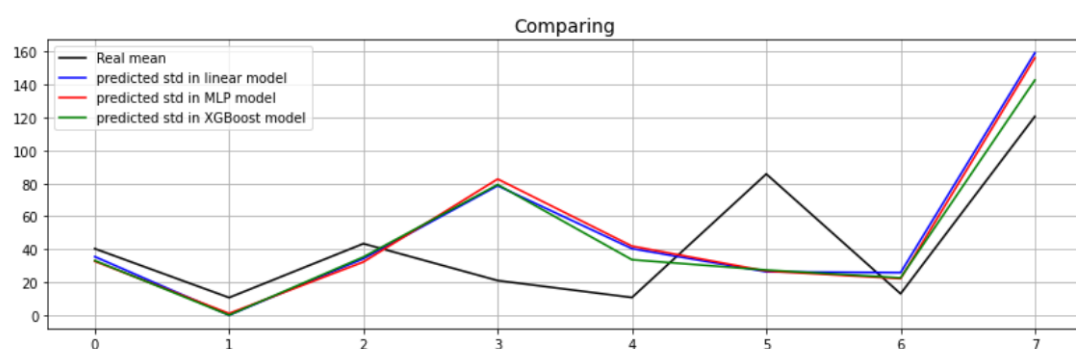


图 3-11 模型比较图（ $\sigma > 10$ ）

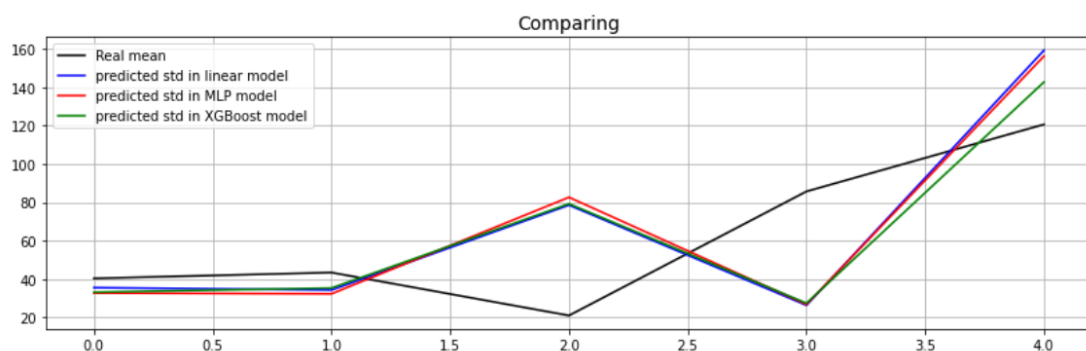


图 3-12 模型比较图（ $\sigma > 20$ ）

## 4. 库存策略

上文建立并选择了预测未来 10 天在各个地区（DC）每种产品销量的均值和方差的模型。然而，由于需求是一个随机变量，其并没有一个确定的数值。若库存与实际需求大小无法精确匹配，则会产生一系列的成本。本部分进一步建立一个衡量这种由于库存量和需求不匹配而产生的成本的模型，并对其进行求解，得

出最小化成本的最优库存方案。最后利用数值模拟衡量该方法的有效性。

#### 4.1. 模型假设

为了简化问题，本文提出的模型基于以下几个假设。

第一，每个销地的销量是相互独立的。

第二，每种商品在各个销地的分布不随时间的变化而变化。也就是说，未来 10 天内，每种产品的需求量在各个销地的分布与前 20 天相同。这样，本文能够把预测的各个产品的需求量依据前 20 天的销量分布分配到各个分配中心，以便后续的计算。

基于第一和第二个假设，本文可以根据预测得到的每种商品总体销量的均值和方差，得出每种商品在各个地区销量的分布情况。

第三，某个分配中心到其他分配中心的运输成本与到其他分配中心的平均运输时间成正比。这个假设方便后续运输费用的计算。

#### 4.2. 模型构建

假设商品  $j$  在分配中心  $i$  的真实需求量为  $d_{ij}$ ，商品  $j$  在分配中心  $i$  的最优库存为  $x_{ij}$ 。本文将库存与需求不匹配产生的总成本分为两个部分：运输成本和利润损失。

##### (1) 运输成本

只要一个分配中心某商品的库存与实际需求不匹配，就会产生运输成本。若库存不足，则需要从另外的分配中心调货；若库存过多，则需要将多出的商品运往其他需求不足的分配中心，用以满足那里的订单需要。由于不同分配中心与其他分配中心的距离不同，它们库存与实际需求不匹配而导致的运输成本也有所不同。对于京东而言，总体的运输成本等于每个运输中心每种商品的库存与需求之差的绝对值，与该运输中心的运输成本的乘积之和，可用以下的公式表示。

$$\sum_j \sum_i \bar{C}_i (d_{ij} - x_{ij})^2 \quad (9)$$

其中， $\bar{C}_i$  表示分配中心  $i$  到其他分配中心的运输成本。由本文的假设，某个分配中心到其他分配中心的运输成本与其到其他分配中心的平均运输时间成正比，故本文计算  $\bar{C}_i$  的方法为：前 20 天订单中分配中心  $i$  到其他所有分配中心的

运输时长的平均值，除以所有分配中心的这一平均值之和。

## (2) 利润损失

若一种商品在各分配中心的库存总和小于分配中心所在地的需求总和，那么有一部分需求就无法用运输的方法满足。商家本可以通过满足这部分需求赚取利润，却因为库存安排不合理导致了利润的损失。对于京东而言，总体的利润损失应为每种商品的价格与其总库存短缺量的乘积之和，可用如下的公式表示。

$$\sum_j P_j (\sum_i d_{ij} - \sum_i x_{ij})^+ \quad (10)$$

其中， $x^+ = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ ， $P_j$ 代表一单位商品 $j$ 的库存不足所导致的成本。由于折扣不同，不同产品在各个订单中的实付价格也不尽相同。而商家赚取的利润取决于商品的实付价格，所以本文计算 $P_j$ 的方法为：选择商品 $j$ 在前 20 天订单中该商品实付价格的平均值，除以研究对象中所有商品这一平均值之和。

综合考虑运输成本和利润损失，可以得到总成本的表达式。

$$E\{\sum_j P_j (\sum_i d_{ij} - \sum_i x_{ij})^+ + \sum_j \sum_i \bar{C}_i (d_{ij} - x_{ij})^2\} \quad (11)$$

本文的研究目标是找到每种商品在每个分配中心的最优库存 $x_{ij}$ ，使得总成本最小，故本文要求解的表达式为：

$$\min_{x_{ij}} E\{\sum_j P_j (\sum_i d_{ij} - \sum_i x_{ij})^+ + \sum_j \sum_i \bar{C}_i (d_{ij} - x_{ij})^2\} \quad (12)$$

上述公式中：若一种商品在各分配中心的总库存小于总需求，那么一些分配中心的需求无法用运输的方法满足，然而该公式既计算了该分配中心的运输成本，又算了利润损失；若一种商品在各分配中心的总库存大于总需求，那么一些库存过多的分配中心无需运出多余的产品，但上式同样计算了这部分运输成本。这看似会造成成本被高估的问题。然而，在本文的问题中，由于短缺会比多余造成更多成本，商家会更加倾向于准备大于需求量的库存，而不是承担库存短缺的风险，这与实际情况相符。而当总库存大于总需求时，无需运出多余产品的分配中心需要承担额外的存储成本，因此可以将它们的 $\bar{C}_i$ 看作存储成

本。所以，本文要求解的表达式可以比较合理地解释现实情况。

### 4.3. 模型求解

#### 4.3.1 Robust 方法

对于求解上述部分提出的目标函数的最优化问题，本部分借鉴以往文献中对求解报童模型<sup>5</sup>的求解最优解的方法。在本文及许多实际问题中，我们并不知道需求的实际分布函数并且我们也没有办法得知其分布函数，但通过上述机器学习模型，可以预测出需求这一随机变量的均值 $\mu$ 及标准差 $\sigma$ ，本文假设需求的分布函数 $f$ 属于均值为 $\mu$ 及标准差为 $\sigma$ 经点分布函数集合 $\mathcal{F}$ ，这一类仅基于部分分布信息的订单决策问题被称为“无分布决策”，

对于该类问题，由于需求取不同的分布函数 $f$ ，决策变量的取值和最小值都不同，因此对于该类问题的最优值求解，以往文献采用的方式是在“最坏的情况下最最小值（Robust 方法）”，即在会让目标函数最大的分布函数的情况下取最小值，假设在分布函数 $f$ 的目标函数为 $G_f(q)$ ，即求解如下 **minimax** 问题：

$$\min_q \max_{f \in \mathcal{F}} G_f(q) = \min_q G_{f^*}(q) \quad (13)$$

下面将介绍几种文献中常用的求解方法，并在原有基础上进行模型预测的修正，最终得到本文的最终订购策略。在进行求解方法之前，将原有目标函数进行一定的变化，本文提出的目标函数如下所示，由于每个商品、每个销地销售量的均值和标准差是相互独立的，因此目标函数可以转化为

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}} E\{\bar{P}_j(\sum_i d_{ij} - \sum_i x_{ij})^+ + \sum_i \bar{C}_l(d_{ij} - x_{ij})^2\} \\ \text{for } \forall j \in E_{sku} \end{aligned} \quad (14)$$

并且由于本部分是利用 minimax 方法求解最优订购策略，因此对目标函数进行一定放大，并将原问题转为求解放大后的目标函数的最小值，如下所示，故本

<sup>5</sup> 报童模型是在运营管理文献中十分流行的模型，报童模型可以充分解决大部分的商业决策，本文基于以下的报童模型进行进一步研究

$$\min_q G_f(q) \equiv c_u E(z - q)^+ + c_o E(q - z)^+$$

其中， $q$ 为决策变量（订购量）， $z$ 为随机变量（需求的随机变量）， $c_u$ ， $c_o$ 刻画库存不足的运输成本与库存过多的储存成本。



文的目标函数经过一定变化后可以转化为经典的报童模型，其中  $c_u = \overline{P_j} + \overline{C_i}$ ， $c_0 = \overline{C_i}$ 。

$$\begin{aligned} & \left( \sum_i d_{ij} - \sum_i x_{ij} \right)^+ \leq \sum_i (d_{ij} - x_{ij})^+ \\ \min_{x_{ij}} E \{ & \sum_i \overline{P_j} (d_{ij} - x_{ij})^+ + \sum_i \overline{C_i} (d_{ij} - x_{ij})^+ + \sum_i \overline{C_i} (x_{ij} - d_{ij})^+ \} \\ & \min_{x_{ij}} \sum_i E \{ (\overline{P_j} + \overline{C_i}) (d_{ij} - x_{ij})^+ + \overline{C_i} (x_{ij} - d_{ij})^+ \} \end{aligned}$$

首先，本文参照 Scarf(1958)提出的方法，Scarf(1958)得到了  $G_f$  的上界如下，Scarf(1958)得到了上界作为目标函数的“无分布决策”问题的最优订购策略  $q_u^*$ ，对于该结论，下一部分会详细讨论会如何结合本文的预测误差进行最终的决策。

$$\begin{aligned} G_u(q) & \equiv \frac{(c_0 - c_u)}{2} (q - \mu) + \frac{(c_0 + c_u)}{2} [\sigma^2 + (q - \mu)^2]^{1/2} \\ q_u^* & \equiv \mu + \frac{\sigma}{2} \left[ \left( \frac{c_u}{c_0} \right)^2 - \left( \frac{c_0}{c_u} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

其次，Yue(2006)证明了如果需求的分布是两点分布，此时的目标函数是所有可能取的分布函数中最大，并且 Yue(2006)给出了在两点分布下求解最优订购库存的方法，本文参考其的最优解作为第二种 minmax 方法的最优解，Yue(2006)假定销量是服从参数为  $\gamma$  的两点分布，具体形式如下所示：

$$w_1(\gamma) = \frac{c_u + \gamma}{c_u + c_0}, w_2(\gamma) = \frac{c_0 - \gamma}{c_u + c_0}$$

$w_1(\gamma), w_2(\gamma)$  分别为销量为  $\mu - \sigma \left( \frac{c_0 - \gamma}{c_u + c_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \mu + \sigma \left( \frac{c_u + \gamma}{c_0 - \gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$  的概率，由于两点分布的目标函数最大，因此只需要求解在该情况下的最有订购策略，即为 minmax 问题的最优订购策略，根据 Yue(2006)的做法，定义期望分布信息值(EVDI)为在真实分布函数  $f$  的目标函数与订购策略  $q$  的目标函数值的差距，Yue(2006)验证求解下述规划问题的解即为在销售服从两点分布情况下使目标函数最小的订购策略：

$$\begin{aligned} & \max_{q, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a} g(x, y) \\ & = \frac{xy}{x + y} \left[ \left( \frac{a - y}{1 + y} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1 - x}{a + x} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$a = \frac{c_u}{c_0}$$

对于求解出最优值 $x^*, y^*$ , Yue(2006)说明了 $q^e = \mu + \theta^e \sigma$ , 其中:

$$\theta^e = \frac{1}{x^* + y^*} \left[ y^* \left( \frac{a - y^*}{1 + y^*} \right)^{\frac{1}{2}} - x^* \left( \frac{1 - x^*}{a + x^*} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

### 4.3.2 误差修正后的 Robust 方法

基于本文假设(3), 由于对未来销量的标准差的预测存在误差, 因此把预测值当成真实值带入最优库存中会产生偏误, 但对于未来销量均值的预测相比较为准确, 因此本文主要研究在标准差预测存在偏误情况下对上述 minimax 问题最有库存的进一步优化。

假设未来销量的标准差的预测偏误服从正态分布, 并且未来销量的预测值为 $\hat{\sigma}$  (预测值), 标准差则为逆 Gamma 分布(inverse Gamma distribution)<sup>6</sup>。

由第二部分的预测结果可知, 对于每种模型本文利用均方根误差 (RMSE), 并且易证, 对于同一模型, 不同测试集和训练集的划分, 经过足够多次划分, 在测试集上的平均均方根误差和模型预测结果的标准差之间存在如下关系:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} RMSE_i}{n} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \overline{RMSE}$$

故未来销量的标准差服从均值为 $\hat{\sigma}$ , 标准差为 $\overline{RMSE}$ 的逆 Gamma 分布

由于假设(3), 对于未来销量的均值的预测本文认为为常数, 对于上文的两种 minimax 的最优库存策略, 本部分将考虑标准差的预测偏差, 得到 minimax 方法的最优库存下的目标函数的 90%的置信区间<sup>7</sup>的取值, 并且利用下文的启发式学习判断本文提出的启发式学习方法与 minimax 方法是否有显著优势, 假设 minimax 方法得到的最优库存策略为 $q^{minimax}$ , 令

$$F(D_1) = \int_0^D IGamma\Gamma(a) dx \equiv 0.05$$

$D_1$ 即为预测标准差的取值小于等于该值的概率为 5%的取值 (理解为置信区间), 右侧同理可得 $D_2$ , 设故修改上述 minimax 的最优库存如下:

<sup>6</sup> 根据现有文献, 当正态分布的总体均值已知时, 样本方差服从逆 Gamma 分布, 本文假设预测标准差的测量误差服从正态分布, 因此测量误差的标准差服从逆 Gamma 分布, 即预测的标准差服从逆 Gamma 分布

<sup>7</sup> 由于本文研究问题使最小化成本, 因此考虑左侧 10%的置信区间

$$q_u^* \equiv \mu + \frac{D^*}{2} \left[ \left( \frac{c_u}{c_0} \right)^2 - \left( \frac{c_0}{c_u} \right)^2 \right]$$

$$q_e^* = \mu + \theta^e D^*$$

其中 $D^*$ 为令目标函数最小的 $\sigma$ 的取值。令在该库存下的目标函数值分别为 $G_f^*(q_u^*)$ ,  $G_f^*(q_e^*)$ , 若其他形式的最优库存 $q$ 的目标函数值可以小于这两个值, 则对于本文研究问题, 可以在 10%的置信区间上可以认为订购策略 $q$ 好于 $q_u$ ,  $q_e$ 。

#### 4.4. 启发式学习

由于对于本文研究的京东库存问题, 商品的销量不是服从两点分布, 因此基于上文对 minimax 方法的运用及已知分布函数情况下报童模型最优值的求解, 本部分将提出几个最优订购库存跟销量均值和销量标准差的函数表达式, 并利用数值模拟进行比较, 观察在存在预测误差情况下, 本部分提出的最优订购策略相比 minimax 方法的最有订购库存是否可以在策略上有所提升。

泊松(Poisson)分布适合于描述单位时间内随机事件发生的次数, 它可以较为准确地描述真实销量的随机分布特点。所以本文假设每种商品在每个分配中心的销量 $d_{ij}$ 都服从泊松分布。总成本函数右端对 $x_{ij}$ 求一阶偏导, 可以得到:

$$- \sum_j P_j P\left(\sum_i d_{ij} > \sum_i x_{ij}\right) - 2 \sum_j \sum_i \bar{C}_i(d_{ij} - x_{ij})$$

$d_{ij}$ 服从 Poisson 分布。由于在本文的预测中,  $\sigma$ 的预测值存在更大的误差, 故本文使用 $\mu$ 作为 Poisson 分布的 $\lambda$ 。所以,  $d_{ij}$ 服从 $\lambda = \mu_{ij}$ 的 Poisson 分布; 那么 $\sum_i d_{ij}$ 服从 $\lambda = \sum_i \mu_{ij}$ 的 Poisson 分布。而 $P(\sum_i d_{ij} > \sum_i x_{ij}) = 1 - P(\sum_i d_{ij} \leq \sum_i x_{ij})$ , 其中,

$$P\left(\sum_i d_{ij} \leq \sum_i x_{ij}\right) = \frac{e^{-\sum_i \mu_{ij}}}{(\sum_i x_{ij})!} \sum_i \mu_{ij}^{\sum_i x_{ij}}$$

将上式带入一阶偏导, 令一阶条件等于 0, 可以得到:

$$- \sum_j P_j \left( 1 - \frac{e^{-\sum_i \mu_{ij}}}{(\sum_i x_{ij})!} \left( \sum_i \mu_{ij} \right)^{\sum_i x_{ij}} \right) - 2 \sum_j \sum_i \bar{C}_i(d_{ij} - x_{ij}) = 0$$

该式较为复杂, 无法直接求出 $x_{ij}$ 。本文猜想 $x_{ij}$ 与 $\mu_{ij}$ 较为接近且略大于 $\mu_{ij}$

的情况下，满足上式的一阶条件。理由如下：若  $x_{ij} = \mu_{ij}$ ，设  $\sum_i x_{ij} = A_1$ ， $\sum_i \mu_{ij} = A_2$ ，则  $A_1 = A_2$ 。上式的一阶偏导可化为：

$$-\sum_j P_j \left( 1 - \frac{A_2^{A_1}}{e^{A_2}} \frac{1}{A_1!} \right) - 0 \dots (1)$$

根据 Sterling 公式， $n! > \frac{n^n}{e^n}$ ，所以

$$-\sum_j P_j \left( 1 - \frac{A_2^{A_1}}{e^{A_2}} \frac{1}{A_1!} \right) - 0 < -\sum_j P_j (1 - 1) = 0$$

公式(1)对  $A_2$  求偏导，又  $A_2 > e$ ，可以得到：

$$-\sum_j P_j \left( \frac{A_2^{A_1} \ln A_2 e^{A_2} - e^{A_2} A_2^{A_1}}{e^{2A_2}} \frac{1}{A_1!} \right) = -\sum_j P_j \left( \frac{A_2^{A_1} e^{2A_2} (\ln A_2 - 1)}{e^{2A_2}} \frac{1}{A_1!} \right) < 0$$

所以，(1)式随  $A_2$  的增加而减小。故当  $x_{ij}$  略大于  $\mu_{ij}$  时， $A_1 > A_2$ ，且  $-2 \sum_j \sum_i \bar{C}_i (d_{ij} - x_{ij}) > 0$ ，一阶条件可能被满足。在此基础之上，本文根据问题给出的实际情况，提出启发式算法的模型。

根据本文提出的成本函数，商家更加倾向于储存更多的商品，而不是承担库存短缺的风险，故本文认为最优库存  $x_{ij}$  会比  $\mu_{ij}$  略大。另外，本文猜想随着分配中心  $n$  的增加，真实总需求  $d_j$  会更加趋近均值  $\mu_j$ ，总体需求的波动变小，那么所有分配中心的一种商品库存之和小于需求之和的可能性会变小，承担利润损失的风险也就越小。所以  $x_{ij}$  比  $\mu_{ij}$  多出的部分随着  $n$  的增加而减小。故本部分提出的第一个最优库存公式为：

$$x_{ij} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \times \mu_{ij}$$

另外，随着一个分配中心某商品的标准差  $\sigma_{ij}$  的增加，需求的波动也会增加，所以最优库存也应相应地增加，从而避免库存短缺的状况。故本部分提出的第二个最优库存公式将  $\sigma_{ij}$  纳入考虑范围，其计算公式为：

$$x_{ij} = \mu_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{n}$$

商家之所以更倾向于准备稍微多于需求均值的库存，是因为库存短缺的成本（运输费用+利润损失）高于库存多余的成本（仅运输费用）。那么，当利润损失相对于运输费用更加高昂，商家准备的最优库存比均值高出的程度就越

多。故本部分提出的第三个最优库存公式为：

$$x_{ij} = \frac{nC_i + P_j}{nC_i} \mu_{ij}$$

通过启发式算法，本部分提出以上三个计算最优库存的公式。下文将利用数值模拟，对应用不同最优库存策略导致的总成本进行比较。

#### 4.5.数值模拟

本部分中，本文将 minimax 算法、误差修正后的 minimax、scarf 提出的最优解以及启发式算法得出的 3 种最优库存的计算方法进行数值模拟，计算总成本的大小，并将它们进行比较。

为了计算方便，本文将运输成本中的平方项转化为原理相同的 2 个正部之和进行计算，计算公式为：

$$\sum_j P_j \left( \sum_i d_{ij} - \sum_i x_{ij} \right)^+ + \sum_j \sum_i \bar{C}_i (d_{ij} - x_{ij})^+ + \sum_j \sum_i \bar{C}_i (x_{ij} - d_{ij})^+$$

图 4-1 展示了两种 minimax 方法(Scarf(1958),Yue(2006))，可以发现两种方法的最优值和 10%置信区间内的取值情况大致相同，但由于 Yue(2006)的 minimax 的方法可以取到更紧的一个上界，因此相比 Scarf(1958)，Yue(2006)的订购策略会更激进（订购更少）。并且通过 4.4 提出的启发式学习算法，与两种 minimax 方法的相比，五种情况的目标函数取值如表 4-1 所示，结果可以发现对于在 10%的置信概率上，本文提出的启发式算法不能优于 Scarf(1985),Yue(2006)的 minimax 方法。

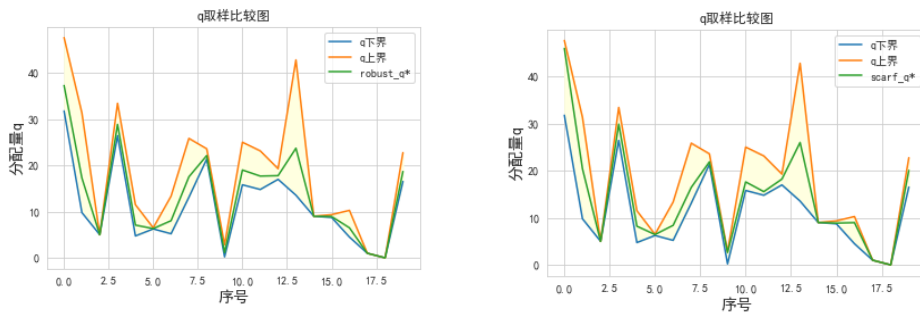


图 4-1 两种 minimax 的 10%置信区间和最优值

表 4-1 不同算法成本比较

算法	$x_{ij}$	运输成本	利润损失	总成本
scarf 提出的最优解	$q^e = \mu + \theta^e \sigma$	91.4477	672.3117	763.7593
误差修正后的 minimax 算法	$q_e^* = \mu + \theta^e D^*$	97.3332	696.4126	793.7458
Minimax 算法	$\frac{1}{x^* + y^*} \left[ y^* \left( \frac{a - y^*}{1 + y^*} \right)^{\frac{1}{2}} - x^* \left( \frac{1 - x^*}{a + x^*} \right)^{1/2} \right]$	98.0172	701.1685	799.1857
启发式算法 1	$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \times \mu_{ij}$	127.4526	810.5575	938.0101
启发式算法 2	$\mu_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{n}$	130.2164	818.3182	948.5347
启发式算法 3	$\frac{nC_i + P_j}{nC_i} \mu_{ij}$	113.824	788.8417	902.6657

由计算结果可以得出，scarf 提出的最优解能够得到最小的总成本。

## 5. 结论及反思

本文通过对数据探索，挖掘了可以对未来销量均值具有较强解释力的因子，但对于未来销量的标准差，本文没有发掘具有强解释力因子和模型，因此在相关文献的基础上，本文提出在已知均值、标准差具有测量误差、未知销量分布情形的报童模型的启发式算法，并且与具有测量误差的 minimax 方法进行对比，最终发现在京东库存管理问题中，使用 Scarf(1958), Yue(2006)提出的 minimax 方法仍为较优的订购策略。

## 参考文献

- [1] 蔡连侨,陈剑,严厚民.可替代产品的库存模型研究(I):最优订货量[J].系统工程理论与实践,2003(06):63-68.
- [2] 蔡清波,鲁其辉,朱道立.预测精度随时间变化的报童问题模型分析[J].预测,2003(05):42-45+33.
- [3] 李明琨,汪凯仁,方芳.基于时间因素的报童问题理论方法研究[J].系统工程理论方法应用.2003(02)
- [4] 李雪敏,缪立新,徐青青.报童模型的研究进展综述[J].统计与决策.2008(17)
- [5] 宋海涛,林正华,苏欣.带有二次订购和二次销售的报童问题[J].经济数学,2003(01):73-79.
- [6] Aravind Govindarajan, Amitabh Sinha, Joline Uichanco. 2020. Distribution-free inventory risk pooling in a multilocation newsvendor. *Management Science*.
- [7] Chung C.S, Flynn J.A.. 2000. Newsboy problem with reactive production. *Computers and Operations Research*.
- [8] Gallego, G., I. Moon. 1993. The distribution-free newsvendor problem: Review and extensions.J.Oper. Res. Soc 44 825-834.
- [9] Jinfeng Yue, Bintong Chen, Min-Chiang Wang, (2006) Expected value of distribution information for the newsvendor problem. *Operations Research* 54(6):1128-1136.
- [10] Lin Chin-Tsai, Tsai Hui-Yin, Shore H.. 2004. A general solution for the newsboy model with random order size and possibly a cutoff transaction size. *Journal of the Operational Research Society*.
- [11] Pearson M.A.. 2000. The incorporation of target performance measures and constrained opti-misation in the newsboy problem. *The Journal of the Operational Research Society*.
- [12] Scarf, H.. 1958. A min-max solution of an inventory problem. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford University Press, Redwood City, CA, 201-209.