主要讨论三个定理

char $k=0$.

Engel Theorem

Lie Theorem

Cartan 判别法

§1 Engel —

回顾. ① $\varphi^k(\mathfrak{g})=0$ 下降中心列. k 充分大

② $\varphi_k(\mathfrak{g})=0$ 中心扩张

注: $\varphi^{p+1}\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\varphi^p\mathfrak{g}]$.

$\varphi_0(\mathfrak{g})=\{0\}$.

$\varphi_{p+1}(\mathfrak{g})$ $\quad \mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{g}/\varphi_p(\mathfrak{g})$ 的中心的原像.

$\varphi_1(\mathfrak{g})=Z(\mathfrak{g})$.

③ $\mathrm{ad}\,x_1\circ\mathrm{ad}\,x_2\circ\cdots\circ\mathrm{ad}\,x_k=0$ $\left(\begin{array}{l}\text{存在}K\text{使得}\\ \text{对于}\ \forall\ x_i\end{array}\right)$.

Lemma: V 是 k 上的向量空间, 如果 x 是 V 上一个幂零同态 ($x^k=0$) 那么.

$$f:\ L(V)\longrightarrow L(V)$$
$$y\longmapsto [x,y]$$

也是幂零的.

proof: $f^m(y)=\sum a_{ij}\,x^i y x^j$ $\quad i+j=m$

x 幂零. $x^k=0$. 令 $m=2k-1$. $i\geq k$ 或 $j\geq k$

Theorem (Engel)

V 是 k 上的非零向量空间，$\mathfrak{g}$ 是 $gl(V)$ 的有限维子代数且它的元素都是幂零的自同态. 那么，

存在 $0 \neq u \in V$ s.t.

$$x.u = 0 \quad \text{for all} \quad x \in \mathfrak{g}$$

proof: 设 $\mathfrak{g}$ 的维数为 n.

归纳：$n=0$ trivial. u 任意

假设 $n \leq k$ 成立

考虑 $n = k+1$ 时.

Claim: $\mathfrak{g}$ 有一个 k 维的理想. $\mathfrak{b}$. (*).

取 $a \in \mathfrak{g}$ 但 $a \notin \mathfrak{b}$. 对 $\mathfrak{b}$ 使用假设条件.

存在 $u \in V$ 使得 $x.\underline{u} = 0$ for all $x \in \mathfrak{b}$.

取出基 $\{u_i\} \neq \phi$ $\langle u_1, \cdots, v_m \rangle := \underline{U} \subset V$

考虑. a 在 U 上的限制作用

我们说 U 是 a 的不变子空间 $aU \subset U$

取 $f \in \mathfrak{b}$ $[a, f] \in \mathfrak{b}$

$$[a,f](u) = \underline{af(u)} - fa(u) = 0$$

$$\Rightarrow f\,a(u) = 0 \Rightarrow a(u) \in U$$

注: [M 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示. $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.
那么：
M 在 $\mathfrak{b}$ 的作用下不变的集合也在 $\mathfrak{g}$ 下稳定]

$a|_V$, a 是 nilpotent $\Rightarrow$ $a|_V$ 上也是 nilpotent.

存在 V 中的元素被 a 零化. 记为 $x = a|_V^{k-1} y$.

$$a|_V^k y = 0. \quad \boxed{a|_V^{k-1} y} \neq 0$$

即 x 被 b 和 a 零化 $\Rightarrow$ 被 $\mathfrak{g}$ 零化.

Claim: $\mathfrak{g}$ 是由幂零元所构成的 n 维 Lie 代数

那么 $\mathfrak{g}$ 存在一个 $n-1$ 维的理想 b

归纳: $b = \{0\}$ 是理想, 我们从 $\{0\}$ 出发:

$\boxed{\text{如果 } b \text{ 是 } \mathfrak{g} \text{ 的一个 } m \text{ 维子代数, 那么 } b \text{ 是某个 } m+1 \text{ 维子代数的理想.}}$

$x \in b$, $\quad ad_{\mathfrak{g}} x\,(b) = ad_b\, x(b) \subset b$

$\Rightarrow \quad ad\, x|_{\mathfrak{g}/b} := \sigma_x$

Lemma 1: $\quad x$ 幂零 $\Rightarrow$ σ_x 幂零.

换句话说 $\quad \mathfrak{g}/b$ 中存在被 σ_x 零化的元素 $\bar{z}$.

$\langle b + \bar{z} \rangle = C$, $\quad C$ 是 $m+1$ 维的.

并且.

$ad_x\,(C) = [x, C] \subset b \Rightarrow b$ 是 C 的理想.

Corollary 1:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.

$ad\, x$ 幂零的.

proof:

"$\Rightarrow$" 定义.

"$\Leftarrow$" 归纳: $\dim \mathfrak{g} = 1$ trivial.

假设 $\leq n$ 成立.

$\mathfrak{g}$ 是 $n+1$ 维的 Lie algebra. $\forall x$ $(\mathrm{ad}\, x)$ 是幂零的.

考虑. $\{\mathrm{ad}\, x\}$. $\mathfrak{g}$ 的一个子代数.

"Engel" $\Rightarrow$ 存在 $u \neq 0$ 使得 $\mathrm{ad}\, x. \ u = 0$.

$\therefore$ ad : $x \mapsto \mathrm{ad}\, x$ 存在 kernel.

存在 $\mathrm{ad}\, y = 0 \Rightarrow$ 存在 $y \in Z(\mathfrak{g})$: Centre$(\mathfrak{g})$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ 存在非平凡的中心. $\boxed{\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})}$ 幂零.

$\mathfrak{g}$ 看作 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 的中心扩张. $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ 幂零.

Corollary:

$\mathfrak{g}$ Lie 代数. $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想.

$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 幂零 且 $\mathrm{ad}\, x|_{\mathfrak{h}}$ 也是幂零 $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ ✓.

§ solvable —.

回顾

(a). $\mathfrak{g}$ 被称为可解的 如果 $\boxed{D^k \mathfrak{g}} = 0$. 当 k 充分大时.

$D^k \mathfrak{g} := [D^{k-1}\mathfrak{g}, D^{k-1}\mathfrak{g}]$.

(b) 存在下降理想序列.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$. (1)

s.t. $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ 都是交换的.

(c) 存在下降的"子代数"序列 (1). 使得 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ 交换的.

(d) 存在子代数序列 (1) 使得 $\mathfrak{g}_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的理想. 且 codim $= 1$.

(a) $\Rightarrow$ (b) 平凡.

(b) $\Rightarrow$ (c) trivial.

(c) $\Rightarrow$ (d). 事实上. $\mathfrak{g}_i$ 都是向量空间.

$\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ 交换 $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的理想.

(d) $\Rightarrow$ (a). 可解 Lie 代数的可解的扩张.

回顾: $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}$ 的最大可解理想. $\underline{r}$

Def: $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 的幂零根指 $\mathfrak{g}$ 的所有有限维不可约表示的 kernel 的交.

Lemma 1:

V 是 k 上的有限维向量空间 V/k.

$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个子代数. 满足 V 是一个不可约的 $\mathfrak{g}$-模. 如果 $\underline{\mathfrak{a} \text{ 是 } \mathfrak{g} \text{ 的一个交换的理想}}$.

那么: $\underline{\mathfrak{a} \cap D\mathfrak{g} = \{0\}}$.

proof: 令 S 是 $L(V)$ 上 由 $\langle 1, a\rangle$ 生成的子代数

S 交换的. 取 b 是 $\mathfrak{g}$ 在 a 中的一个理想.

满足

$$\mathrm{Tr}\ bs = 0 \quad \text{for all } b \in B \text{ and } s \in S$$

显然有:

$$\mathrm{Tr}\,(b^n) = 0. \quad \text{for all } n > 0.$$

(高代). $\Rightarrow$ b 幂零的. 再结合 V 不可约

若 $b = \{0\}$. 那么.

V 中在 b 作用下不变的 在 $\mathfrak{g}$ 的作用也不变

$\Rightarrow$ V 存在 $\mathfrak{g}$的 不变子空间, 矛盾.

$\Rightarrow$ $b = \{0\}$.

这说明

$[\mathfrak{g}, a]$ 作为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 考取 $x \in \mathfrak{g}$, $a \in a$, $s \in S$

Exercise

$$\mathrm{Tr}\,[x, a]\, s = \boxed{\mathrm{Tr}\,(xas - axs) = \mathrm{Tr}\ x\,(as - sa)} = 0.$$

$\Rightarrow$ $[\mathfrak{g}, a] = \{0\}$ $\Rightarrow$ $a \subset \mathfrak{g}$ 的中心.

$\Rightarrow$ $S \subset \mathfrak{g}$ 的中心.

那么 $\forall\ x, y \in \mathfrak{g}$, $s \in S$

$$\mathrm{Tr}\,[x, y]\, s = 0 = \mathrm{Tr}\,(xys - yxs) = \mathrm{Tr}\,x(ys - sy) = 0.$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. $\mathrm{Tr}\,[x, y]\, s = \mathrm{Tr}\ x\,[y, s]$

$\|$
$\mathfrak{g}$

$\mathfrak{a} \cap D\mathfrak{g}$ 满足 b. 的定义 $\Rightarrow$ $D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$.

Theorem: $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数. $\mathfrak{r} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

$\mathfrak{s}$ = nilpotent radical. 那么.

$$\boxed{\mathfrak{s} = D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}}$$

proof: ①. $\mathfrak{s} \subset D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$ $\quad \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$. (*) (没证).

② $\mathfrak{s} \supset D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$

实际上只要证. 对于 $\forall$ 有限维不可约表示 ρ

$\boxed{\rho(D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}) = \{0\}}$. 记 $\rho: \mathfrak{g} \to L(V)$.

我们说. 如果 $k \in \mathbb{Z}$ 最小的满足.

$$\rho(D^{k+1}\mathfrak{r}) = \{0\}.$$

记. $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$

$\mathfrak{a}' = \rho(D^k \mathfrak{r})$.

$\mathfrak{a}'$ 是交换的. 是 $\mathfrak{g}'$ 的理想. $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V)$.

(平凡) V 是不可约 $\mathfrak{g}'$ 模.

$\Rightarrow$. $\rho(D\mathfrak{g} \cap D^k\mathfrak{r}) \subset D(\mathfrak{g}') \cap \mathfrak{a}' = \{0\}$.

$k > 0 \Rightarrow D^k\mathfrak{r} \subset D\mathfrak{g}. \Rightarrow \rho(D^k\mathfrak{r}) = \{0\}$.

$\Rightarrow k = 0. \Rightarrow \rho(D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}) = \{0\}$.

Corollary 1:

$\mathfrak{g}$ 可解 $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ 的幂零根 $= D\mathfrak{g}$.

Corollary 2:

$\mathfrak{g}$ 可解的. 如果 ρ 是有限维不可约表示

$\Rightarrow$ $\rho(\mathfrak{g})$ 交换 $\boxed{\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}}$.

而且.

$\langle 1, \rho(\mathfrak{g})\rangle =: L$ 是 k 上有限维结合代数

实际. L 是一个域.

(Schur 引理: $\mathbb{C}$ 上一个截数 $\Rightarrow$ 可逆).

Corollary 3: Lie theorem:

$\mathfrak{g}$ 可解的 Lie 代数 over k, $k = \bar{k}$.

M 是 k 上的有限维 $\mathfrak{g}$-模. M 的任意

Jordan-Hölder series. (M_i).

Then. $\dim(M_{i+1}/M_i) = 1$.

并且对于 $\forall x \in \mathfrak{g}$.

$$\boxed{x|_{M_{i+1}/M_i} = \lambda_i(x)\cdot 1.}$$

其中 λ_i 是 $\mathfrak{g}$ 上的线性型且在 $D\mathfrak{g}$ 上取 0

特别的. 每个 k 上的有限维不可约 $\mathfrak{g}$-模都是一维的.

取 ρ_i 为 $\mathfrak{g} \to M_{i-1}/M_i$ 上的表示

$\langle 1, \underline{\rho_i(\mathfrak{g})} \rangle$ 生成 $= k$.

Remark:

(1) $\underline{\lambda_i(x)}$ 与 M_i 的选取无关(顺序).

(2). M 的一组基 (e_i) 使得

$e_i \in M_{i-1}$, $e_i \notin M_i$

那么 x 在 可表成

$$\begin{pmatrix} \lambda_i(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j(x) \end{pmatrix}$$ 对角阵.

推论3: $k = R \Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 $\dim \leq 2$

推论4: Lie $\mathfrak{g}$ 可解 $\Leftrightarrow$ $D\mathfrak{g}$ 幂零.

"$\Rightarrow$" $s = D\mathfrak{g} \cap r = D\mathfrak{g}$.

"$\Leftarrow$" $D\mathfrak{g}$ 幂零, $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ 交换的.

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ 是 $D\mathfrak{g}$ 的中心扩张. 也幂零 $\Rightarrow$ 可解.