基于 IFEP 的自适应下界改进方法

吴国桐
计算机科学与工程系
深圳，中国
wugt2022@mail.sustech.edu.cn

***摘要*—在传统遗传规划算法（EP）中，采用自适应步长，在搜索初期有着较快的收敛速度，而在后期可以通过减小步长逐渐逼近全局最优。本文首先对传统 EP 算法进行了深入研究和复现，并在此基础上，动态调整步长η下界，并且改进了η的初始值设定方法。由于柯西分布在距离最优解距离较远时效果更好，反之高斯分布在距离较近时更好，因此本文在改进 EP 方法（IFEP）基础上，使用两个独立互不干扰的种群，根据一种新的种群选择方法，可以更好的结合两者优点。实验表明，本文提出的改进方法相对于原有的 EP 算法有着更快的收敛速度和更强的搜索的能力。**

***关键词*—遗传算法，自适应步长，种群选择方法**

I. 引言

使用 EP 求解最优化问题，个体通常采用实数型编码，在没有先验知识的前提下，目的是寻找全局的最优解。与普通遗传算法相比，EP 只会采用变异的方法来产生新解，并采用自适应步长的调整策略——在搜索开始的时候，步长较大从而收敛更快；而随着搜索的进行，自适应减小步长，从而最终能收敛于全局最优。

在变异过程中，经典 EP 方法（CEP）使用高斯分布来产生新的个体。由于高斯分布在远离均值处概率密度极小，因此在搜索之初距离最优解较远时，高斯分布产生的新解收敛非常慢。另外一种基于柯西分布的快速 EP 方法（FEP）仅仅在变异时采用柯西分布，其它与 CEP 保持不变，实验结果证明，柯西分布在搜索之初能产生距离父辈较远的子代，从而收敛速度加快；然而对于一些初始解与最优解距离较近的测试问题上，FEP 分布反而效果更差。基于以上两种分布的特点，提出了一种改进的EP方法（IFEP），每个父代分别通过高斯分布和柯西分布变异产生两个子代，然后在锦标赛选择环节上，所有父代和子代都参与选择，选出每次迭代中胜利次数最多的个体作为新一代的种群，其它与 FEP 和 CEP 保持不变。实验结果证明，IFEP 能够结合两者的优点，有着更快的收敛速度和更优的搜索结果。

EP 方法最大的特点，即在于动态调整步长，而决定步长的关键变量η，同样作为个体中的一个基因，在搜索过程中不断演化。在论文中[1]，对于所有的测试问题，η的初始值被设置为一个常量 3，这样必然带来很低的泛用性。可以发现随着演化代数的增加，η的值逐渐减小，大约在 10000 代后，η 的值已经非常趋近于 0。如图 1 所示，当η值非常小时，搜索步长几乎为 0，效率大为降低。一种改进方法是对η设置一个下界，从而避免让η的值趋向于 0，然而在论文[1]中，整个搜索过程这个下界始终固定不变，而不能根据具体的问题和搜索过程进行调整，同样会带来较差的泛用性。因此本文的主要工作是对η的初始化和下界的动态调整做出了优化，以期改进上述问题。

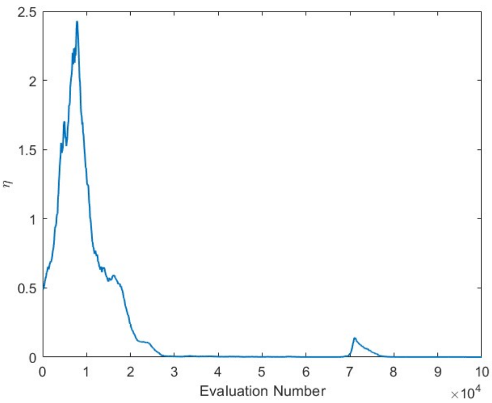


图 1. 使用 CEP 求解 ackley 问题，随着演化的进行，η的值逐渐趋于 0。其中横坐标表示演化中评估的次数，纵坐标为η的值的变化。

虽然实验证明 IFEP 能够结合两种分布的优点，取得了较 CEP 和 FEP 更好的结果，但是 IFEP 的结合方法是线性的，即每个个体需要同时产生两种分布的子代，然后将子代和父代简单聚合在一起。本文使用两个独立的种群，分别产生高斯分布和柯西分布的个体，然后交叉进行锦标赛选择，而不是使用 IFEP 的简单聚合过程，具体细节将在算法部分进行介绍。

II. 算法框架

本文在 IFEP 的基础上，采用基于自适应下界调整的 EP 方法（AFEP），主要做出了以下改进工作：

1. 改进了η的初始值设定，根据决策变量的范围和维度来定义η的初始值，使其可以更好适应不同测试问题。
2. 改进了η的下界设定，文献[2]建议使用下一代种群η的中位数来作为其动态下界。但是本文在具体实践过程中，发现该方法依赖于调整的频率，如果每一代都进行下界调整，最后的下界反而会呈现上升趋势，导致搜索失败。因此本文将η的下界同样作为个体中的一个基因，参照η的变异方法进行逐代演化。
3. 使用两个种群来分别表示高斯分布和柯西分布，其变异产生新个体的过程互不干扰。但是在锦标赛选择过程中，为了保持种群的多样性，每个种群的父代个体将同新个体竞争。

具体的算法步骤如下：

1. 初始化：产生个2μ个体作为第一代种群，并设定当前代数$k=1$。其中高斯分布的种群$(x_{Gi},\eta_{Gi},lb_{Gi})$，以及柯西分布的种群$(x_{Ci},\eta_{Ci},lb_{Ci}), \forall\, i \in \{1,2,\dots,\mu\}$. 其中$x$为决策变量，$\eta$ 为自适应步长，l为η的下界。对于x的初始化，在其约束条件内进行均匀采样；而对于η的初始化方法，根据不同问题的不同决策空间，采

用如(1)的初始化方法，其中$j \in \{1,2,..,D\}$，D为决策变量的维度。根据文献[3]的建议，此处取值为$\lambda = 0.8/\sqrt{D}$；而lb的初始化则直接取η初始值的平均值。

$$\eta = \lambda \times rand \times \left(X_{max}(j) - X_{\min}(j)\right) \quad (1)$$

2. 变异：对于每一个个体$(x_{Gi}, \eta_{Gi}, lb_{Gi})$和$(x_{Ci}, \eta_{Ci}, lb_{Ci})$，根据自己种群对应的变异算子，分别产生一个新的个体，分别可以用(2)和(3)表示。其中，为$N_j(0,1)$表示均值为 0，方差为 1 的高斯分布随机数，且对于每一维决策变量都不相同。对于步长η的变异方法，不论高斯分布还是柯西分布的种群，本文都与 FEP 和 CEP 保持一致，如式(4)表示。而对于η下界lb，则是参照η的变异方法，如式(5)进行演化。

$$x'_{Gi}(j) = x'_{Gi}(j) + \eta_{Gi} \times N_j(0,1) \quad (2)$$

$$x'_{Ci}(j) = x'_{Ci}(j) + \eta_{Ci} \times \delta_j \quad (3)$$

$$\eta'_i(j) = \eta_i(j) \times exp\left(\tau' N(0,1) + \tau N_j(0,1)\right) \quad (4)$$

$$lb'(j) = lb(j) \times \exp\left(N(0,1)\right) \quad (5)$$

3. 计算适应度函数：根据测试问题函数，分别计算每一个个体$(x_{Gi}, \eta_{Gi}, lb_{Gi})$和$(x_{Ci}, \eta_{Ci}, lb_{Ci})$的适应度大小。

4. 选择：对于不同的种群，组成两个不同的联合种群 Pop1 和 Pop2，并分别对每一个联合种群进行锦标赛选择，两个联合种群可以表示为(6)和(7).其中锦标赛选择的方法是，将所有个体混合在一起，对于每一个个体(x_i, η_i)，随机抽取q个其它的个体$(x_j, \eta_j), \forall j \in \{1,2,\dots,q\}$，比较$(x_i, \eta_i)$和其它$q$个个体的适应度值，并且记下总共获胜的次数

$$Pop1 = \{(x_{Gi}, \eta_{Gi}), (x'_{Gi}, \eta'_{Gi}), (x'_{Ci}, \eta'_{Ci})\} \quad (6)$$

$$Pop2 = \{(x_{Ci}, \eta_{Ci}), (x'_{Gi}, \eta'_{Gi}), (x'_{Ci}, \eta'_{Ci})\} \quad (7)$$

5. 产生下一代种群：对于不同的两个种群 Pop1 和 Pop2，分别选出获胜个体最多的μ个个体作为下一代种群的父辈。

6. 如果满足算法终止条件则退出循环，否则返回第 2 步

III. 实验分析

本文使用课程提供的十个单目标测试问题，并在此基础上进行实验。为了进一步理解实验，本文将决策变量的维数取为 3，分别给出不同测试问题在三维下的直观图像，如图 2 展示。可以观察到，其中是 sphere 函数和 step 函数，形状为简单的单峰函数，最优值都是在决策空间中心取得。rosenbrock 函数和 camel3 函数形状相似，在决策空间边际变化较大，最终呈现出筒状。而对于 noisyQuartic 函数、schwefel226 函数、ackley 函数、holder 函数和 michal 函数都为典型的多模函数，对于同一个目标值，有多个决策空间的点与之对应，因此存在许多局部最优解，将会对最终寻找全局最优解造成较大的困难。

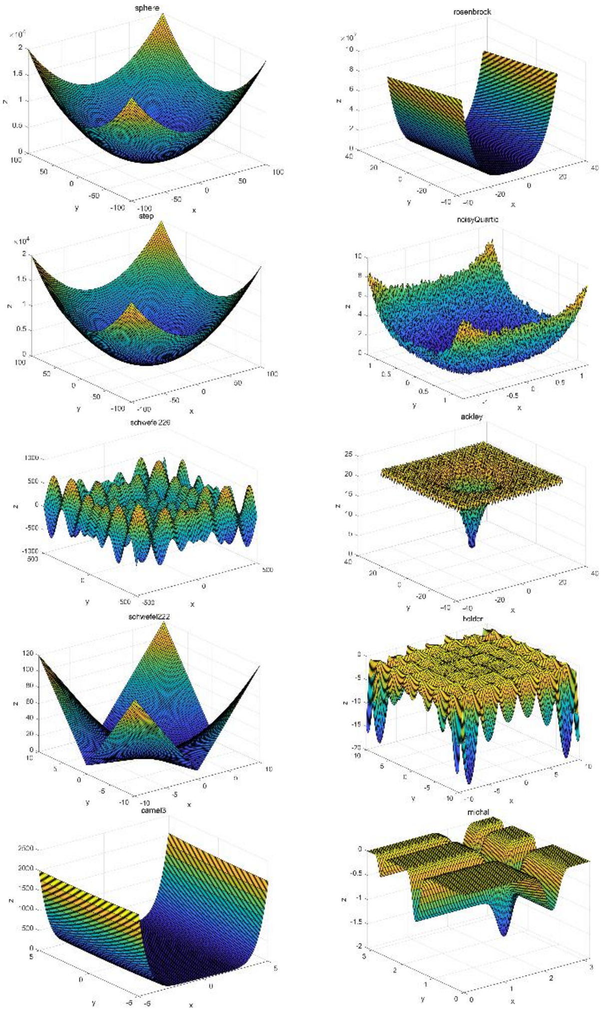
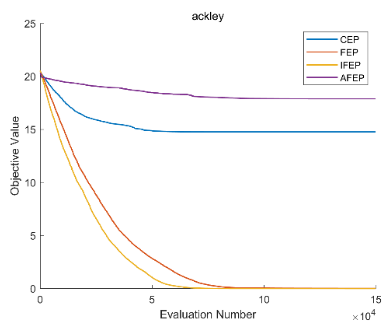
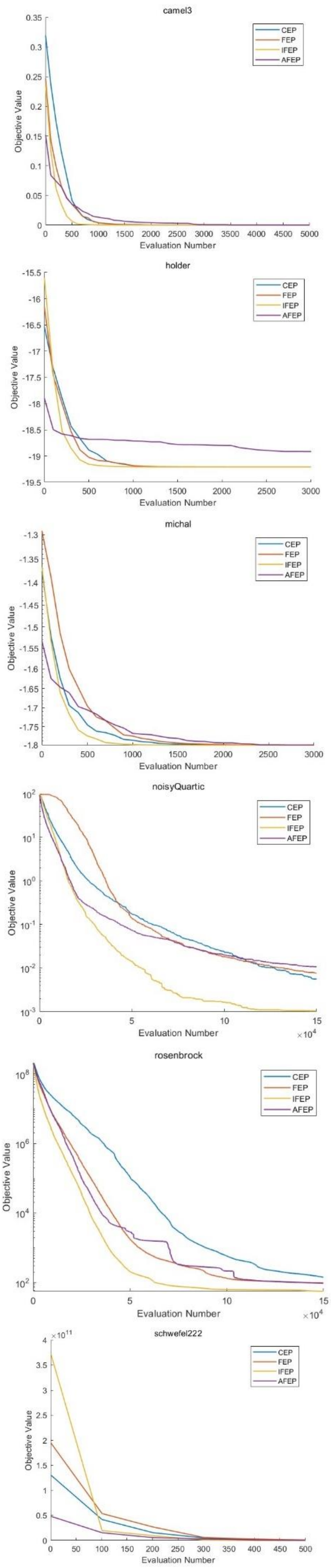


图 2. 三维角度下，不同测试问题的目标值形状

实验测试平台的 CPU 为 AMD Ryzen 5 5600 6-Core Processor，在 MATLAB 2022b 上进行编程，每个测试问题运行 30 次求平均值。设定实验的超参数$q = 10$，种群中的个体数量为 100，下界初始值lb为自适应步长η初始值的平均值。设定每个问题最大的评估次数为 300000，分别实现了 CEP、FEP、LFEP 和 AFEP，图 3 展示了所有运行过程，不同算法在同一测试问题的平均收敛速度。在 shwefel222 和 shwefel222 函数上，AFEP 有着最快的收敛速度，并且取得了最好的结果。而在 camel3 和 michal 函数上，AFEP 的收敛速度普遍比 FEP 和 CEP 更快，而不及 IFEP 方法，然而取得的最优值和三种方法相差无几。





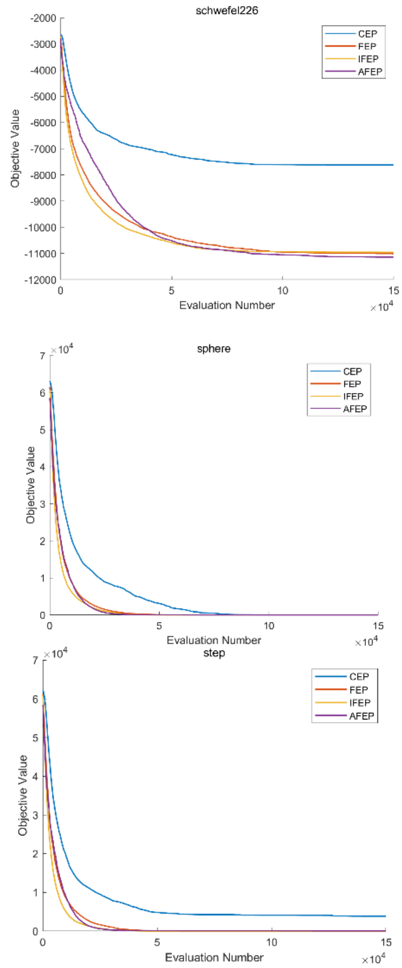


图 3. 对于同一测试问题，CEP、FEP、LFEP、AFEP 算法的平均收敛速度。注意此处为了更直观的观测，在一些测试问题的 y 轴取对数坐标表示，并且限制了一些问题的最大评估次数。

为了仔细探究本文对于η初始值方法的改动作用，从图 3 可以发现在演化进行之初，AFEP 的目标值较其它方法都更优，并在所有测试问题上都有如此现象。为了更好观测，以 ackley 测试问题为例，取前 500 评估次数绘制图像，如图 4 可以说明该初始值方法在演化之初可以取得更好的效果。

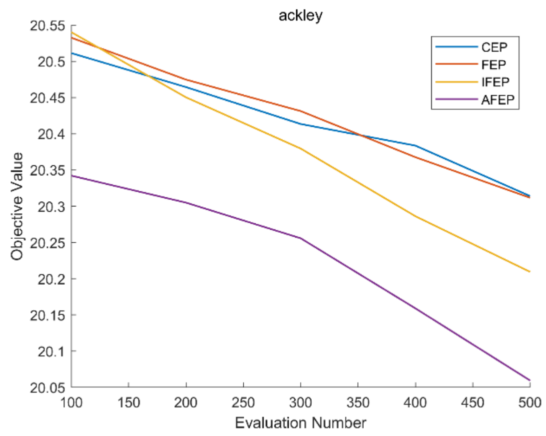


图 4. 前 500 评估次数中，在 ackley 测试函数上目标值的变化趋势

然而在 ackley 测试函数上，AFEP 的表现则相较于其它方法有着最差的表现。为了深入探究其原因，由于本文将η下界lb作为一个种群个体参与演化，图 5 表现了整个演化过程中η平均值的变化。可以发现在演化之初，η的值较小，与 FEP 和 CEP 过程中的η的变化相差无几。但是在演化的后期，η值突然急剧变大。一种可能的解释是，由于演化后期非常接近最优目标，每一代的取得的进步非常小， 为了跳出局部最优，η向增大的趋势进行演化，但是这种趋势在 ackley 和 holder 问题上并不适用，因此取得的效果更差。

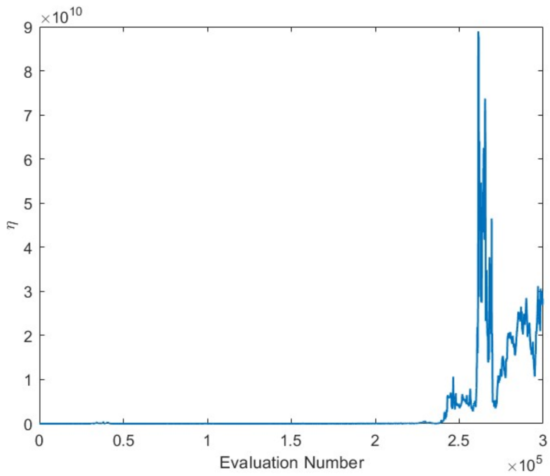


图 5. 使用 AFEP 求解 ackley 问题，随着演化的进行，η值的变化。其中横坐标表示演化中评估的次数，纵坐标是η的值的变化。

而对于本文采用了两个互不干扰的种群，来改进原有 LFEP 对于两种分布的组合方式。因此本文采用 The Wilcoxon signed ranks test 来衡量 AFEP 相对于其它方法的表现，具体数据如表 1 所示。可以发现虽然在 ackley 问题上效果不佳，但在同样的评估次数上，普遍取得了相较于其它 CEP、IFEP 更优秀的结果，而最终的结果和 FEP 相近，证明本文所采用的两种分布的组合方式是有助于寻优的。

IV. 结论

本文在 LFEP 的基础上，提出了 AFEP，主要针对自适应步长η的初始化和下界进行了动态设置，同时使用两个互不干扰的种群，改进了原有的 LFEP 对于高斯分布和柯西分布的线性组合方式。实验结果表示，AFEP 结合了 CEP 和 FEP 各自的优点，而且相对于 LFEP 更优秀的搜索能力。

然而本文将η的下界作为种群中的一个个体进行演化，虽然在一些问题上取得了较好的结果，但是在一些特殊的测试问题上表现不佳，未来应该在此基础上做进一步的优化。另外，目前本文的工作主要采用实验的方法进行验证，而在理论上缺乏进一步的深入研究，这也可以作为未来工作方向之一。

References

[1] Xin Yao, Yong Liu and Guangming Lin, "Evolutionary programming made faster," in IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 3, no. 2, pp. 82-102, July 1999, doi: 10.1109/4235.771163.

[2] Liang, Ko-Hsin, Xin Yao, and Charles S. Newton. "Adapting self-adaptive parameters in evolutionary algorithms." Applied Intelligence 15 (2001): 171-180.

[3] Mallipeddi, Rammohan, S. Mallipeddi, and Ponnuthurai N. Suganthan. "Ensemble strategies with adaptive evolutionary programming." Information Sciences 180.9 (2010): 1571-1581.

表 1. 不同测试问题上，对于不同算法的 Wilcoxon Signed Ranks Test 的计算结果。其中表中每一个单元格的第一行数据为 30 次运行的平均值，第二行数据为 30 次运行的方差，加粗为该测试问题中表现最佳的算法

Problem	N	M	D	FE	CEP	IFEP	FEP	AFEP
rosenbrock	100	1	30	300000	6.8326e+1 (5.67e+1) =	5.8048e+1 (4.08e+1) =	**4.2198e+1** **(3.22e+1) =**	6.0249e+1 (5.10e+1)
camel3	100	1	2	300000	1.7896e-11 (2.23e-11) -	1.9559e-11 (2.29e-11) -	2.4920e-11 (2.35e-11) -	**0.0000e+0** **(0.00e+0)**
holder	100	1	2	300000	-1.9209e+1 (2.20e-10) -	**-1.9209e+1** **(1.67e-10) -**	-1.9209e+1 (2.06e-10) -	-1.8709e+1 (7.14e-15)
schwefel222	100	1	30	300000	-2.0268e+2 (2.02e+1) -	-2.2579e+2 (3.73e+0) -	-2.2700e+2 (2.90e+0) -	**-2.4779e+2** **(1.02e+1)**
schwefel226	100	1	30	300000	-7.6633e+3 (6.88e+2) -	-1.0983e+4 (3.26e+2) =	-1.1060e+4 (3.59e+2) =	**-1.1122e+4** **(4.55e+2)**
ackley	100	1	30	300000	1.6226e+1 (2.45e+0) +	**4.2151e-3** **(2.54e-4) +**	1.0761e-2 (1.06e-3) +	1.7860e+1 (6.06e+0)
michal	100	1	2	300000	-1.8013e+0 (2.83e-10) -	-1.8013e+0 (6.27e-10) -	-1.8013e+0 (8.63e-10) -	**-1.8013e+0** **(9.03e-16)**
noisyQuartic	100	1	30	300000	**8.5895e-4** **(6.65e-4) +**	1.1592e-3 (1.00e-3) =	2.5278e-3 (1.18e-3) +	2.5293e-3 (5.63e-3)
sphere	100	1	30	300000	**2.5122e-5** **(3.49e-6) +**	3.3717e-5 (4.24e-6) +	2.2185e-4 (3.81e-5) +	3.7390e-1 (1.79e+0)

step	100	1	30	300000	5.4515e+3 (4.77e+3) -	8.3333e-1 (1.15e+0) =	**0.0000e+0 (0.00e+0)** +	1.0433e+1 (4.96e+1)
	+/-/=				3/6/1	2/4/4	4/4/2	