



中国研究生创新实践系列大赛
中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生
数学建模竞赛

学 校	重庆理工大学
参赛队号	22116600069
队员姓名	1. 郭旺
	2. 唐正
	3. 李帅康

中国研究生创新实践系列大赛
中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生
数学建模竞赛

题 目 **基于机理分析的草原放牧策略研究**

摘 要：

合理且可持续的放牧政策是带动区域经济、防止草原沙漠化及保障民生的关键。本文从机理分析的角度研究了放牧策略对土壤有机物含量、湿度还有植物生物量的影响。具体的工作内容如下：建立了 1. 考虑放牧策略的植物生物量动态微分方程；2. 考虑放牧策略的土壤湿度非线性动态微分方程。同时，3. 基于 Elman 神经网络和 BP 神经网络建立了碳氮含量/土壤湿度预测模型，最后，建立了 4. 基于沙漠化指数和土壤模块化指数的双目标非线性优化模型，通过改进此模型，建立了 5. 考虑可持续发展的单目标放牧策略优化模型。通过龙格-库塔算法和定性分析的方法完成了以上的微分方程和规划模型的求解

问题 1—考虑放牧策略影响的植物生物量动态微分方程：为了清晰的从机理出发建模，首先建立了放牧—土壤—植被三方相互影响的体系结构，并从该结构中分析了出影响植物生物量的直接因素：包括了土壤湿度、土壤有机物含量、牧群的吃食与踩踏，然后，本文从符合种群生长的最经典的 logistics 模型出发，逐步考虑以上因素，推到了植物生物量动态微分方程模型。同理，建立了土壤湿度的微分方程模型：首先分析出影响湿度的直接因子包括了降雨量和蒸发量，影响蒸发量的因素有包括了植物覆盖率，而放牧策略直接影响到了植物覆盖率，分析到这里建立起了放牧策略与土壤湿度的相互联系，在土壤湿度模型中加入放牧的影响。为了求解上述微分方程，本文从定性分析的角度出发简化了模型，并用逐时段间隔的龙格-库塔算法求出来它们的数值解，求解结果指出：放牧强度 S 越大，植物生物量越小，并且在轮牧的情况下植物生物量存在周期性波动。

问题 2—基于 BP 神经网络和 Elman 神经网络建立了不同深度土壤的湿度预测模型：本文首先分析出土壤湿度主要受到天气因素和植物覆盖率的影响，为了发掘出这些因素与土壤湿度之间存在的非线性关系，用历史天气因素和植物覆盖率数据作为 BP 神经网络的输入，把同年月的不同深度土壤的湿度作为 BP 神经网络的输出，训练出起同年同月的天气因素和植物覆盖率与土壤湿度之间非线性映射关系。然后，为了预测出未来的天气因素和植被覆盖率，选用了具有抓住局部历史特点信息的 Elman 神经网络，训练后并预测出它们的未来值。最后，将预测所得的天气因子和植被覆盖率带入训练好 BP 网络中，得到 2022-2023 年不同深度的土壤湿度。

问题三—基于机理分析建立了碳氮含量微分方程模型/基于 Elman 神经网络建立了碳氮含量预测模型：首先分析出影响碳氮含量变化的过程包括了：植物吸收 C/N（减少）、死亡的植物分解（增加）、动物排泄的粪便分解（增加）。然后逐步考虑以上因素建立起了有机碳 Soc/全氮 N 的微分方程。通过相关性分析，发现 $Soc=8.026*N$ ，并且，有机碳 Soc（全氮 N）和 Sic 之间存在负相关性。有机碳 Soc，无机碳 Sic，全 N 进行三者含量的之间存在很强的相关性，并且从单个指标来看，Soc 和全氮 N 的历史值与时间存在强烈的正相关（Sic 与时间负相关），所以，这里还是采用能抓历史局部信息的 Elman 网络来训练并预测碳氮值。

问题四—基于沙漠化指数和土壤模块化指数的双目标非线性优化模型：首先通过查阅文献得到 SM 的 9 个指标的权重，考虑到放牧会对 SM 有直接的影响，所以，接着分析出了 9 个指标中：植物盖度 C_4 ，地表水资源量 C_5 ，牧畜密度 C_8 和家庭纯收入 C_9 这四个指标与放牧强度有关系，分别写出四个指标与 S 的关系式子，进而将 SM 转化为关于 S 的函数形式。其次通过熵权法确定出土壤湿度 W，土壤容重 C，有机物 O 对土壤模块化程度 B 的权重，进而建立起土壤模块化程度 B 的计算模型。同样的，将 W, C, O 这三个指标写成关于放牧强度 S 的计算式，从而将 B 转化为了 S 的函数形式。根据题目要求建起了 SM 最小值与 B 最小值的双目标优化模型，因为 SM 与 B 都是 S 的函数，所以优化自变量只有 S，采用数值分析法和定性分析法求解出 $S=2$ 时，SM 与 B 都能取到最小值。

问题五—考虑可持续发展的单目标放牧策略优化模型：在问题四规划模型的基础上，加入了可持续发展的条件，即 SM 沙漠化指数和模块化程度 B 都要小于 0.4，在此增加的条件下，建立了以求取 S 最大值为目标的单目标规划模型。求解过程同样采用龙格-库塔算法和定性分析优化的方式，最后得出在满足 SM, B 要求下的最大放牧强度 $S=6$ 。

问题六—本文预测出来的数据结果，导入了 ArcGIS 当中，然后综合处理其他文献中所查到的数据，最后将地理上缺失的数据值按照二维度高斯分布插值，做了监测地区 2023 年 9—2026 年 9 月沙漠指数 SM 和植被覆盖率的动态变化图。

关键词：放牧策略，机理分析，非线性微分方程，龙格-库塔算法，数值解析，Elman 神经网络，规划模型

目录

一、	问题重述	6
1.1	问题背景	6
1.2	需解决的问题	6
二、	问题分析	7
2.1	问题 1-3 的分析	7
2.2	问题 4-6 的分析	7
三、	符号说明	8
四、	问题 1 模型的建立与求解	9
4.1	植物生物量增长模型	9
4.1.1	基于有机物含量修正的生长模型	9
4.1.2	模型修正的合理性分析	10
4.1.3	最大环境容量 M 的修正	10
4.1.4	考虑放牧影响的植物生物量模型	11
4.2	湿度变化模型的建立	12
4.3	模型的求解	13
4.3.1	基于龙格-库塔算法的模型原理	13
4.3.2	逐步时段龙格-库塔算法求解与结果分析	14
五、	问题 2 模型的建立与求解	18
5.1	建模过程	18
5.2	BP 神经网络的原理	20
5.3	模型预测结果	21
六、	问题 3 模型的建立与求解	22
6.1	土壤化学物质含量计算模型	22
6.2	基于 ELman 神经网络的含水量预测模型	24
6.2.1	建模过程	24
6.2.2	Elman 算法原理	25
6.2.3	预测结果填表	26
七、	问题四模型的建立与求解	26
7.1	不同放牧策略下沙漠化指数计算	26
7.1.1	考虑放牧影响的沙漠化指数计算思路	26
7.1.2	影响因素与放牧强度函数关系	27
7.1.3	各个指标的因子强度计算	28
7.2	土壤板块化程度的计算	29
7.2.1	板块化模型计算思路	29
7.2.2	基于熵权法的权重计算	29
7.3	最优放羊策略计算模型	30

7.4	优化模型的定性分析与求解	31
7.4.1	求解可能性分析	31
7.4.2	考虑定性分析的问题简化	31
八、	问题 5 模型的建立与求解	34
8.1	单目标规划的模型建立过程	34
8.2	模型的简化与定性求解	35
九、	问题 6 模型的建立与求解	36
9.1	问题分析	36
9.2	求解结果分析	37
十、	模型的优缺点与改进	38
10.1	模型的优点	38
10.2	模型的缺点	38
10.3	模型的改进	38
十一、	参考文献	38
十二、	附录	39

一、 问题重述

1.1 问题背景

草原作为世界上分布最广的重要的陆地植被类型之一，分布面积广泛。中国的草原面积为 3.55 亿公顷，是世界草原总面积的 6%~8%，居世界第二。此外，草原在维护生物多样性、涵养水土、净化空气、固碳、调节水土流失和沙尘暴等方面具有重要的生态功能。自 2003 年党中央、国务院实施“退牧还草”政策以来，在保护和改善草原生态环境、改善民生方面取得了显著成效。“退牧还草”并不是禁止放牧，除了部分区域禁牧外，很多草原实行划区轮牧以及生长季休牧。合理的放牧政策是带动区域经济、防止草原沙漠化及保障民生的关键，放牧优化问题的研究也为国家、政府制定放牧政策和草原管理决策提供科学的依据。

1.2 需解决的问题

问题 1. 从机理分析的角度，建立不同放牧策略（放牧方式和放牧强度）对锡林郭勒草原土壤物理性质（主要是土壤湿度）和植被生物量影响的数学模型。

问题 2. 请根据附件 3 土壤湿度数据、附件 4 土壤蒸发数据以及附件 8 中降水等数据，建立模型对保持目前放牧策略不变情况下对 2022 年、2023 年不同深度土壤湿度进行预测，并完成下表。

问题 3. 从机理分析的角度，建立不同放牧策略（放牧方式和放牧强度）对锡林郭勒草原壤化学性质影响的数学模型。并请结合附件 14 中数据预测锡林郭勒草原监测样地(12 个放牧小区)在不同放牧强度下 2022 年土壤同期有机碳、无机碳、全 N、土壤 C/N 比等值,并完成下表。

问题 4. 利用沙漠化程度指数预测模型和附件提供数据（包括自己收集的数据）确定不同放牧强度下监测点的沙漠化程度指数值。并请尝试给出定量的土壤板结化定义，在建立合理的土壤板结化模型基础上结合问题 3，给出放牧策略模型，使得沙漠化程度指数与板结化程度最小。

问题 5. 锡林郭勒草原近 10 年的年降水量（包含降雪）通常在 300 mm ~1200 mm 之间，请在给定的降水量（300mm，600mm、900 mm 和 1200mm）情形下，在保持草原可持续发展情况下对实验草场内（附件 14、15）放牧羊的数量进行求解，找到最大阈值。

（注：这里计算结果可以不是正整数）

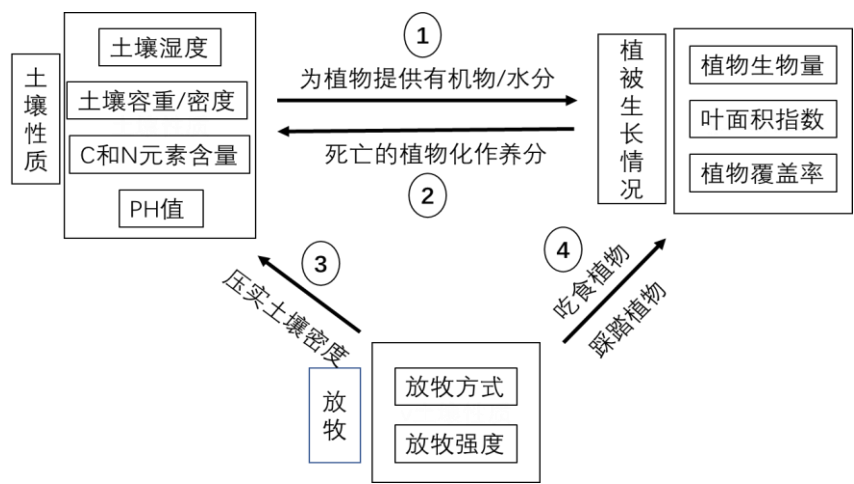
问题 6. 在保持附件 13 的示范牧户放牧策略不变和问题 4 中得到的放牧方案两种情况下，用图示或者动态演示方式分别预测示范区 2023 年 9 月土地状态（比如土壤肥力变

化、土壤湿度、植被覆盖等）。

二、 问题分析

2.1 问题 1-3 的分析

前三问都是通过机理分析，即寻找各个因素之间的相互影响关系来建立微分方程，最重要的一点就是，找出谁影响了谁，是正相关还是负相关，如何写出它们的函数关系。由于因素之间的作用机制非常复杂，为了搞清楚谁是谁的自变量/因变量，本文给出了放牧-植物-土壤三方互相影响体系如下：



图：牧-土-植三方作用体系

从上，我们可以很清晰的看到，谁影响了谁。以碳氮含有机物含量为例：碳和氮等有/无机物的变化的原因来自于：过程 1—为植物提供养分（减少）；过程 2—死亡的植物化作养分（增加）。更具体的说：碳氮的减少量却决于植物生长率，而增加的原因取决于植物枯萎率和放牧强度。在后文根据这个几个因素进行建模，其他的同理。

第二问和第三问需要我们预测的数据，由于通过求解微分方程的方式去预测时十分困难的

对于这种含有非线性的映射关系，用 BP 神经网络就是很好的预测方式，比如预测土壤中的含水量，天气与含水量之间非线性关系就可以用 BP 神经网络去 训练表达。每一个题的具体做法都需要去该题目下查看，此处不再赘述。

2.2 问题 4-6 的分析

问题 4 和 5 都是规划模型。首先是第四问，求取 SM 指数最小，土壤模块化 B 最小情况

下的放牧强度 S ，这是明显的双目标优化模型，第五问求取可持下发展下的最大放牧程度，这个是典型的单目标规划模型。本文的总体思路就是把 SM 指数和土壤模块化程度 B 都写成关于 S 的函数，通过对 S 求数值解析解，得到各个条件下 S 的取值。最后一问，将预测出来的各个因素带入 SMs 沙漠指数评价模型，或者 B 的模型，然后画出图即可。

三、 符号说明

符号	注释
w	植物生物量的质量
r	t 时刻环境条件下的生长速率
M	t 时刻环境条件下的植物生物量最大值
R	生长速率
f_1	soc 影响下的促生因子
f_2	sic 影响下的促生因子
f_3	全碳 N 影响下的促生因子
f_4	含水量影响下的促生因子
K	修正比例系数
$a_i (i=1,2,3,4)$	所对应指标的促生常数
$b_i (i=1,2,3,4)$	所对应指标的促生常数
M	最大环境容量
$PH(t)$	t 时刻的 PH 值
$K_{C/N}(t)$	t 时刻的 C/N 的比值
Mo	最佳 PH 值和最佳 C/N 比情况下的环境最大容量
PHo	植物生长最佳的 PH 取值
$Kcno$	植物环境最佳的 C/N 比值
P	降雨量
$E(a)$	蒸发量
a	植被覆盖率
a^*	最大增长率
$G(n)$	盖度
n	成草数量
$D(n)$	枯萎率
∂Sn	放牧消耗数

四、 问题 1 模型的建立与求解

4.1 植物生物量增长模型

4.1.1 基于有机物含量修正的生长模型

在有限资源下的种群数量生长都符合 logistics 规律，不考虑放牧影响下的植物生物量增长的基础模型也可如此，如下式子：

$$\frac{dw}{dt} = R \left(1 - \frac{w}{M} \right) w \quad (1)$$

其中，w 为植物生物量的质量，r 为 t 时刻环境条件下的生长速率，M 为 t 时刻环境条件下的能到的植物生物量的最大值。R 作为生长率与土壤环境 C 和 N 等元素的含量有着紧密联系，在这里考虑 R 受到影响的因素如下：

SOC 土壤有机碳	S_{oc}
SIC 土壤无机碳	S_{ic}
全氮 N	N_{all}
含水量	β

上述为前三个因素为附表 14 中的各种土壤指标，可由下函数关系式子表示他们与生长速率 R 的关系：

$$R(t)=f(S_{oc}(t), S_{ic}(t), N_{all}(t), \beta(t))$$

可见，生长速率 R 受到土壤碳氮含量和水含量等四个指标的影响。而四个指标又随着时间的变化而变化，根据函数之间的映射关系，所以 R 是时间 t 的函数。考虑到当一定浓度含量以下时，浓度含量越高对植物生物量的增加越起正向作用，当浓度高于一定范围时候，元素的浓度提升便对植物生物量的增加起微弱的促进作用。定义各个指标含量对 R 的影响如下：

$$\begin{cases} f_1 = a_1 \times (e^{\varepsilon_1 S_{oc} / S_{oc}^*} - b_1) \\ f_2 = a_2 \times (e^{\varepsilon_2 S_{ic} / S_{ic}^*} - b_2) \\ f_3 = a_3 \times (e^{\varepsilon_3 N_{all} / N_{all}^*} - b_3) \\ f_4 = a_4 \times (e^{\varepsilon_4 \beta / \beta^*} - b_4) \end{cases}$$

$$R=K \times \prod_{i=1}^4 f_i$$

$$R=K \times \prod_{i=1}^4 a_i \times (e^{\varepsilon_1 S_{OC}/S_{OC}^*} - b_1)(e^{\varepsilon_2 S_{IC}/S_{IC}^*} - b_2)(e^{\varepsilon_3 N_{all}/N_{all}^*} - b_3)(e^{\varepsilon_4 \beta/\beta^*} - b_4)$$

f_1-f_4 分别是在 soc, sic, 全碳 N, 含水量影响下的促生因子, 并且, 随着指标的含量增加, 促生因子的值也在增加, K 为修正比例系数。 a_1-a_4 , b_1-b_4 是各项指标的促生常数, 由植物群体的成长所需要的 C, N, 水含量特性所决定。

4.1.2 模型修正的合理性分析

为了更加直观的体现出各项指标的促生因子对生长率 R 的影响, 本文给出了函数 $f = a(e^{\varepsilon S/S^*} - 1)$, $a=b=1$ 时的图像如下:

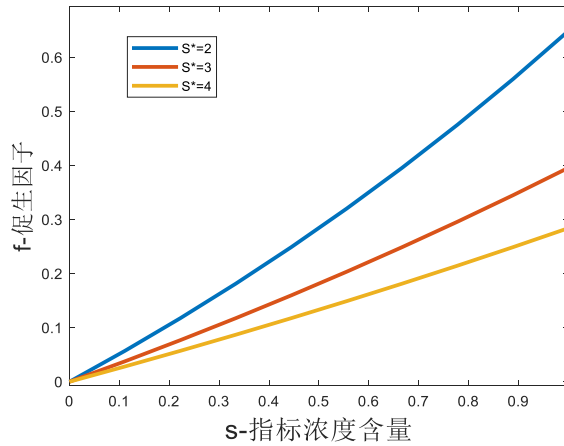


图 1: 不同 a 之下的促生因子- f 取值

所以不同的 S^* 取值决定了不同曲线变化的情况, S^* 越大在相同的浓度 s 下, 促生因子 f 越小, 同时 f 变化也就越缓慢。这说明, 不同的 S^* 值应对了不同的影响指标对植物生长的影响, 并且, 随着指标的含量增加, 促生因子的值越加缓慢的增加, 同时设定, 符合当浓度达到一定值时 S^* , 对生长的促进不再起作用的要求。

生长速率计算方式为: $R = K \times \prod_{i=1}^4 f_i$, 根据实际情况, 生长速率由土壤中碳氮的含量所决定与水含量决定, 所以每一个指标浓度都会影响到生长速率。由此式子定义的 R 与每个含量浓度都成正相关, 而且当某一个指标浓度严重缺少时, 植物的生长速率大幅度下降, 这符合植物生长所需要元素的全面性, 满足生长所需指标含量的“短板效应”。

4.1.3 最大环境容量 M 的修正

M 表示当前时刻 t 的环境下, 植物生物量能到达的最大值, 由于在生长速率 R 建模时已经考虑了碳氮水含量等 4 个指标的对植物生物量的影响。在这里建立环境容量 M 函数时, 本文考虑 PH 值, C/N 比值对最大环境容量 M 的影响, 因为 PH 值和 C/N 比值, 都有最适合植物生长的最佳取值。所以: M 可以写为这两个影因素的函数, 如下式所示:

$$M(t)=\psi(PH(t),K_{C/N}(t))$$

其中，PH(t)为 t 时刻的 PH 值， $K_{C/N}(t)$ 是 t 时刻的 C/N 的比值，根据函数的映射关系，最大环境容量 M 是 t 的函数。正式因为 PH 值和 C/N 比值，都有最适合植物生长的最佳取值，过大过小都会减少环境容量。考虑这两个因素的 M（t）的计算方式如下：

$$M(t)=M_0 \times \exp(-(PH(t)-PH_0)^2-(K_{C/N}(t)-K_{C/N0})^2)$$

$$\frac{dw}{dt}=K \times \prod_{i=1}^4 f_i \times W \times (1-\frac{W}{M_0} \times \exp((PH(t)-PH_0)^2+(K_{C/N}(t)-K_{C/N0})^2))-B \times S \times W$$

其中，M₀ 是最佳 PH 值和最佳 C/N 比情况下的环境最大容量，PH₀ 是植物生长最佳的 PH 的取值，同理，K_{C/N0} 是植物环境最佳的 C/N 比值。

1.3 最大容量函数 M(t) 的合理性说明

为了更容易理解 M(t) 函数与 PH 值与 K_{C/N} 的关系，本文给出了其函数

$M(t)=M_0 \times \exp(-(PH(t)-PH_0)^2-(K_{C/N}(t)-K_{C/N0})^2)$ 的函数图像（图中最高点取值为示意，并非实际取值，此时 M₀=1，PH₀=3，K_{C/N}=3），如图：当 PH 与 C/N 取值都为 3 时，M 取得最大值 1。

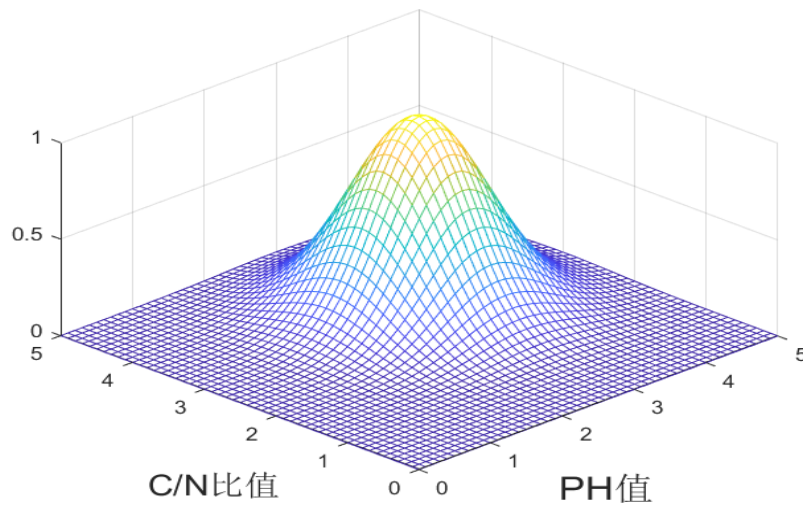


图 2：不同 PH 与 C/N 情况下的最大容量取值示意图

由上图可知：当 C/N 与 PH 任何一个值偏离最佳理想值时，无论是增加还是减少，环境容量都会下降，达不到 M₀ 的取值。这满足植物生长所需的实际条件，并且当有任何一个取值偏离最佳值时，环境容量也会快速下降，这也符合实际情况。

4.1.4 考虑放牧影响的植物生物量模型

放牧时，牛羊直接对草地进行进食或者踩踏，且放牧强度越大，进食/踩踏程度越严

重，进而直接减少植物生物量，即：放牧强度与生物量增量呈负相关；当放牧强度一定时，本身的生物量越大，所受到的进食/踩踏程度越严重。综上，生物量增量与放牧强度和生物量呈现负相关。在考虑放牧后。整体的植物生物量模型如下：

$$\frac{dw}{dt} = K \times \prod_{i=1}^4 f_i \times W \times (1 - \frac{W}{M_0} \times \exp((PH(t) - PH_0)^2 + (K_{C/N}(t) - K_{C/N0})^2)) - B \times S \times W$$

其中 S 为放牧强度指数，W 为 t 时刻的植物生物量质量，B 为常系数。最后一项通过减去 S 与 W 的乘积来体现出了：植物增长率与放牧强度和现有生物量呈现负相关。

4.2 湿度变化模型的建立

从水蒸发的角度来说：土壤含水量等于=降雨量-蒸发量，它可以被下式描述：

$$\frac{d\beta}{dt} = P - E(a) = P - E(a^* G(n))$$

其中 P 为降雨量，E(a) 为蒸发量，考略到蒸发量和植被覆盖率 a 有关，在这里另 $a = a^* G(n)$ ， a^* 为是最大增长率，取决于牧区草地的环境条件， $G(n) = (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*})$ 为盖度，n 是成草数量。在这里考虑 n 会随着时间的而变化，令成草率等于生长率 $a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*})$ 减去枯萎率 D(n) 在，在减去放牧消耗数 $\partial S n$ ：

$$\frac{dn}{dt} = a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) - D(n) - \partial S n = a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) - \beta^\delta * (e^{\varepsilon_g n/n^*} - 1) - \partial S n$$

其中， ∂ 是放牧消耗系数，s 为放牧强度。由上式可见，方面强度与成草数量 n 呈现负相关。从水循环的角度来说：草原水分通过降水、入渗、蒸发等形式周而复始的循环，其过程十分复杂，在无人干扰的情况下，土壤-植被-大气系统的水平衡基本方程如下：

$$\Delta W = W_{t+1} - W_t = P + G_u + R_{in} - (Et_a + G_d + R_{out} + IC_{store})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\beta}{dt} = \Delta W = W_{t+1} - W_t$$

其中，其中， ΔW 为土壤贮水变化量， W_{t+1} 和 W_t 分别为时间段内的始末土壤含水量，P 为降水量， G_u 和 G_d 分别为地下水毛管上升量和土壤水渗透量， Et_a 为实际蒸发量， R_{in} 和 R_{out} 分别为入和出径流量， IC_{store} 为植被截流量。

植被覆盖率是植物群落覆盖地表状况的一个综合量化指标，能够直观反映地表植被的丰度。降水量小、植被覆盖度高、LAI 大时植被截流量大，其表达式为：

$$IC_{store} = c_p \cdot IC_{max} \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{-k \cdot R_{cum}}{IC_{max}}\right) \right]$$

上式中， IC_{store} 为植被截流量 (mm)； c_p 为植被覆盖率 (同上 $c_p = a = a^* G(n)$)； IC_{max} 特定植被的最大截流量 (mm)； k 为植被密度校正因子，与 LAI 有关； R_{cum} 为累积降雨量

(mm)。 IC_{\max} 可以通过 LAI 来估算:

$$IC_{\max} = 0.935 + 0.498 \cdot LAI - 0.00575 \cdot LAI^2$$

式中, LAI 为一个分布式的时变参数。综上, 我们可以把湿度变化模型写曾如下集合等式:

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dt} = P - E(a) = P - E(a^* G(n)) \\ \frac{dn}{dt} = a^* (1 - e^{-\varepsilon_s n/n^*}) - D(n) - \partial S n = a^* (1 - e^{-\varepsilon_s n/n^*}) - \beta^\delta * (e^{\varepsilon_s n/n^*} - 1) - \partial S n \\ \frac{d\beta}{dt} = \Delta W = P + G_u + R_{in} - (Et_a + G_d + R_{out} + IC_{store}) \\ IC_{store} = a^* G(n) \cdot IC_{\max} \cdot \left[1 - \exp\left(-k \cdot R_{cum} / IC_{\max}\right) \right] \\ IC_{\max} = 0.935 + 0.498 \cdot LAI - 0.00575 \cdot LAI^2 \end{cases}$$

4.3 模型的求解

4.3.1 基于龙格-库塔算法的模型原理

龙格-库塔(Runge-Kutta)方法是一种在工程上应用广泛的高精度单步算法。由于此算法精度高, 采取措施对误差进行抑制, 所以其实现原理也较复杂。该算法是构建在数学支持的基础之上的。对于一阶精度的欧拉公式有:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot K1$$

$$K1 = f(x_i, y_i)$$

当用点 x_i 处的斜率近似值 $K1$ 与右端点 x_{i+1} 处的斜率 $K2$ 的算术平均值作为平均斜率 K^* 的近似值, 那么就会得到二阶精度的改进欧拉公式:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (K1 + K2) / 2$$

$$K1 = f(x_i, y_i)$$

$$K2 = f(x_i + h, y_i + h \cdot K1)$$

依次类推, 如果在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内多预估几个点上的斜率值 $K1$ 、 $K2$ 、... K_m , 并用他们的加权平均数作为平均斜率 K^* 的近似值, 显然能构造出具有很高精度的高阶计算公式。经数学推导、求解, 可以得出四阶龙格-库塔公式, 也就是在工程中应用广泛的经典龙格-库塔算法:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (K1 + 2 \cdot K2 + 2 \cdot K3 + K4) / 6$$

$$K1=f(x_i, y_i)$$

$$K2=f(x_i+h/2, y_i+h*K1/2)$$

$$K3=f(x_i+h/2, y_i+h*K2/2)$$

$$K4=f(x_i+h, y_i+h*K3)$$

通常所说的龙格-库塔法是指四阶而言的，我们可以仿二阶、三阶的情形推导出常用的标准四阶龙格-库塔法公式计算公式(1)的局部截断误差。

龙格-库塔法具有精度高，收敛，稳定（在一定条件下），计算过程中可以改变步长，不需要计算高阶导数等优点，但仍需计算在一些点上的值，如四阶龙格-库塔法每计算一步需要计算四次的值，这给实际计算带来一定的复杂性，因此，多用来计算“表头”。

4.3.2 逐步时段龙格-库塔算法求解与结果分析

1 逐步时段求解过程

由于土-牧-植物三者之间相互影响的，为了求出方程的数值解，在这里设定一个时间段 T 后，土壤中的碳氮，C/N，湿度含量才因为土-牧-植三者之间的影响发生变化。在此 T 时段，各个影响指标按照原有的关于时间的函数计算 w，然后，再修整土壤中的碳氮，C/N，湿度含量等指标的变化情况，用修正后的指标变化函数计算下个时间阶段（2T 阶段）的 w，以此类推，重复迭代计算下去。

2. 影响指标时序函数化简

比如此时求解全年放牧条件下植物生物量 w，由于给出的数据时间间隔差距巨大，难以解出微分方程中具体的参数，所以，在这里做定性分析，首先简化方程。

$$\frac{dw}{dt} = R(t) \times W \times (1 - \frac{W}{M_0}) - B \times S \times W$$

$$R(t) = f(S_{oc}(t), S_{ic}(t), N_{all}(t), \beta(t))$$

根据查阅资料显示，无机碳对植物生长的作用很小，所以在计算时只要考虑水，有机碳和 N 的作用，在此分别模拟给出有机碳 soc 和全氮 N 的随时间的变化函数，先大致观察的变化情况，如下图所示：

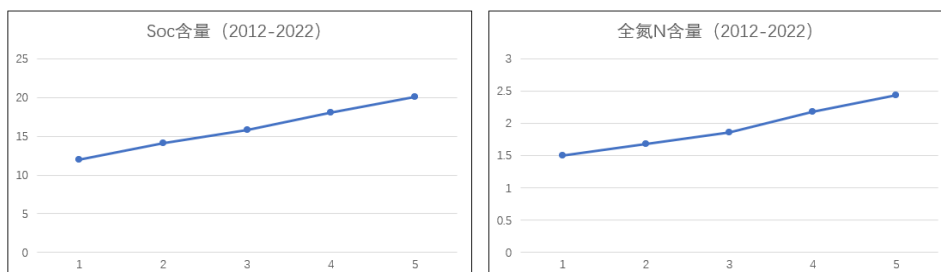


图 3: G21 地区有机碳/氮变化情况

可见有机碳和氮都具有明显的与时间存在正线性变化，它们且在含量上有明显的 8-10

倍差异。由于 C 和 N 的测量都是以 2 年为间隔，无法具体估计连续的变化情况。在这里从定性研究的角度给出碳氮的变化函数，如下：

$$S_{ocT} = \lambda_{oc} t$$

$$N_{allT} = \lambda_{all} t$$

下一个 T 时刻，有机碳和氮的更新法则：

$$\begin{cases} S_{ocT+T} = \lambda_{oc} t - k_{ocT} W + k_{ocs} S \\ N_{allT+T} = \lambda_{all} t - k_{allT} W + k_{alls} S \end{cases}$$

由于是简要迭代计算，在这里只考虑正负影响关系，由于植物吸收 C/N 所以，植物粪便增加 C/N。下一时段的 C 或 N 含量与植物量呈负相关，放牧强度 S 呈正相关。

同理我们观察，土壤湿度的变化情况，如下图所示：

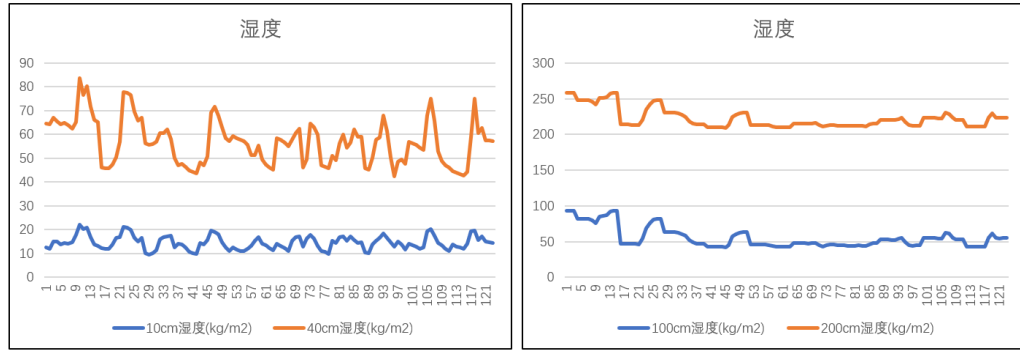


图 4：不同深度的湿度变化情况

考虑到植物无法吸收 100cm 及以下的水分，所以 100cm，200cm 的含水量几乎不发生变化。草系植物一般吸收 80cm 深度以上的水分。所以，10cm 与 40cm 深度的含水量出现周期性变化。在这里由于是仿真定性研究，考虑植物生长主要受到 10cm-40cm 此段水分的影响，同样给出水分含量变化式子：

$$\beta_T = 40 |\cos(t)|$$

下个 T 时间段变为含水量计算方式变为

$$\beta_{T+T} = 40 |\cos(t)| - k_\beta W + P$$

由于植物吸收水分，下一时段的含水量与植物量 W 呈现负相关，与降雨量 P 为正向关。综上，所以通过上述描述，可以把植物生物量的变化方程写成关于时间 T 的单变量函数如下形式：

$$\frac{dw}{dt}_T = K(e^{\varepsilon_1 S_{oc}/S_{oc}^*} - b_1)(e^{\varepsilon_3 N_{all}/N_{all}^*} - b_3)(e^{\varepsilon_4 \beta / \beta^*} - b_4)(1 - \frac{W}{M_0}) - B \times S \times W$$

下个 T 时间段变为 W 的计算方式变为

$$\frac{dw}{dt}_{2T} = K(e^{\varepsilon_1 S_{oc2T}/S_{oc}^*} - b_1)(e^{\varepsilon_3 N_{all2T}/N_{all}^*} - b_3)(e^{\varepsilon_4 \beta_{2T}/\beta^*} - b_4)(1 - \frac{W}{M_0}) - B \times S \times W$$

3. 放牧行为的时序化函数的表达

放牧的方式包括了放牧策略和放牧强度，以轮流放牧为例子，建立时许仿真函数，对

于草地来说，他所承受的动物群是呈现周期性变化的。所以在仿真模拟时，可以被以下式子定义：

$$F(t) = S \times \text{square}(t, T)$$

$F(t)$ 是放牧的时间函数， T 为放牧时间间隔， $\text{Square}(T, t)$ 表示生成幅值为 1 的间隔为 T 的 0-1 方波。其他的放牧策略也得到时序化函数。

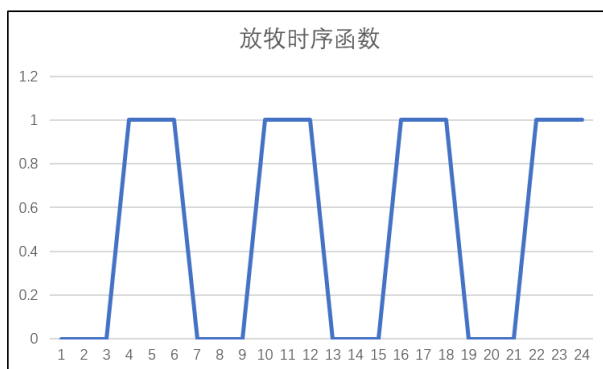


图 5：轮牧时序函数

4 模型求解结果分析

间隔时间 T 逐步计算反复迭代计算，采用龙格-库塔算法，我们可以求解出 W 随时间变化的数值解结果图如下，以轮牧和全牧的计算结果为例。初始值说明：由于在这里只做定性分析，我们在迭代求解的过程中，将函数的初始值设定为 0，所以 W 的值从 0 点出发。真实情况应当是从 t 大于 30 或者是 20 时刻算起，由于定性分析，我们并没有仔细调节比例参数，在以下的分析中更注重曲线的变化情况。

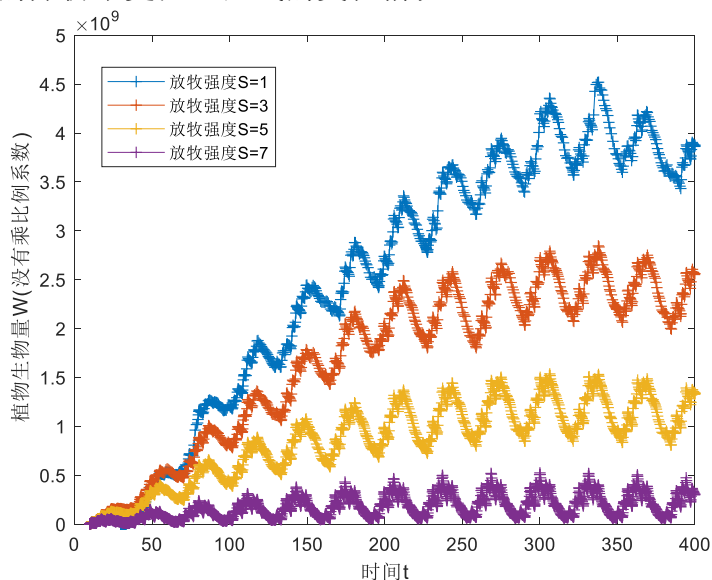


图 6：不同轮牧强度下植物生物量 w 的变化

当在轮牧情况下时，且放牧强度 S 在 0-5 之间时：植物生物量 W 呈现整体上升趋势，在上升的过程中出现周期性的波动震荡。这正是因为轮牧的情况下， S 强度也会周期性

的归零，强度 S 为零的情况下（进入其他区域放牧），植物有时间充足生长，从而植物生物量增加。当一段时间 T 后， S 不为零（即在该地区继续放牧）植物生物量因被吃食，踩踏而减少。当 $S=7$ 时， W 植物生物量在迭代过程中已经多次跌到零值，说明在此放牧周期 T 的情况下， $S=7$ 已经超过了牧场的放牧承受能力。

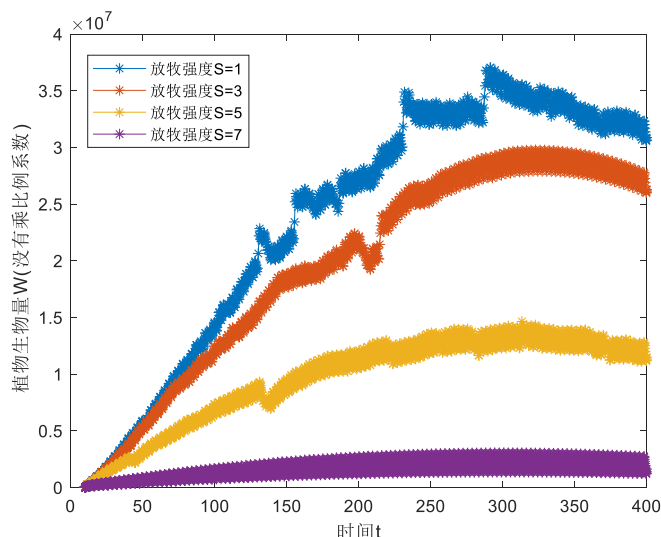


图 7：不同全牧强度下的生物 w 量变化

在全牧情况下，放牧强度不存在为 0 的时间段，当全牧在放牧强度 S 小于 5 时，植物生物量也呈现整体上升的趋势，但与轮牧相比，全牧在上过程中没有出现周期性波动，这也因为放牧强度 S 没有出现周期性波动。当全牧强度为 7 时，植物生物量始终无法上升，始终在 0 值边缘徘徊，这也说明：在全牧强度为 7 的情况下已经到该地区的放牧承受力上限。同理，用仿真简化的方式写出湿度的时间函数，采用龙格-库塔算法得含水量的解析值。

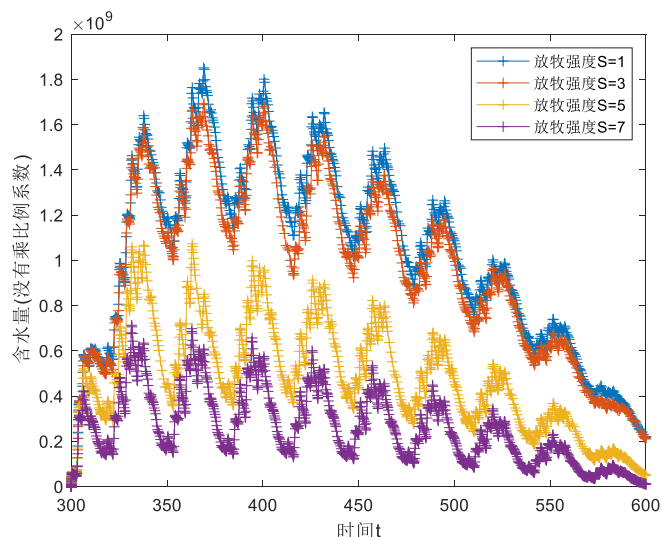


图 8：不同轮牧强度下的土壤含水量

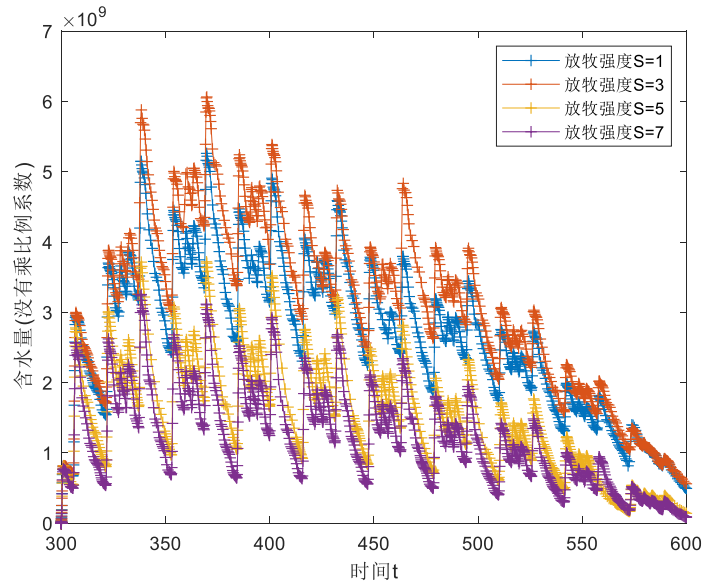


图 9：不同全牧强度下的含水量

在轮牧情况下，放牧强度越强，土壤的含水量越低，但是当时 $S=7$ 时，与植物量，此时的土壤含数量不会归零。轮牧情况下，土壤含水量没有明显的增加或者是减少趋势，但是仍然有微弱的周期性的波动。在全牧条件下，土壤湿度呈现随机非周期性波动，此时放牧强度越增大，土壤湿度在整体呈现一定的下降趋势。

五、 问题 2 模型的建立与求解

5.1 建模过程

根据问题一：从水蒸发的角度来说，土壤含水量等于=降雨量-蒸发量，降雨量是由气象条件所决定的，而蒸发量受到既要受到天气因素影响，同时也要受到植被覆盖率-即植被指数的影响。所以，天气因素，植被覆盖率与土壤含水量之间存在非线性关系。为了描述这种非线性映射关系，在这里采用了具有寻找自变量和因变量之间的非线性关系的 BP 神经网络。考虑到是 Elman 神经网络一种典型的局部历史回归网络，这里用其预测 2022-2023 的天气因素和植被指数。具体如下：

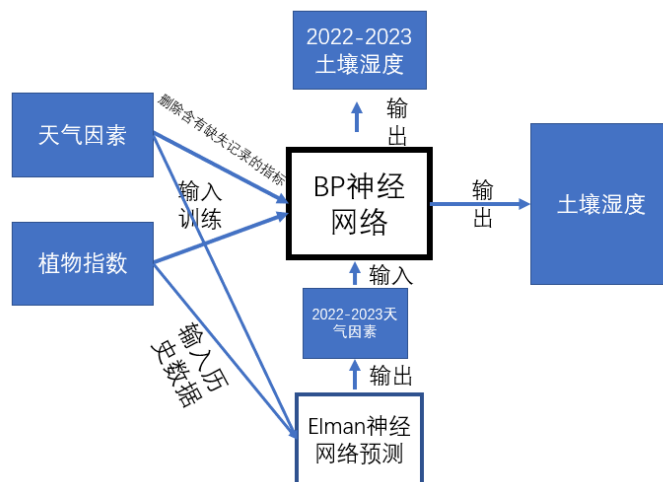


图 10：土壤湿度预测模型

Step1: 利用 BP 神经网络训练出，天气因素与 4 个不同深度土壤湿度的非线性映射关系。在训练非线性映射关系时：用 2012-2022 年 1 月份的数据气象因子和植被指数作为输入，2012-2022 年 1 月份土壤湿度作为输出，其他月份同理。对于缺失数据的指标直接删除。

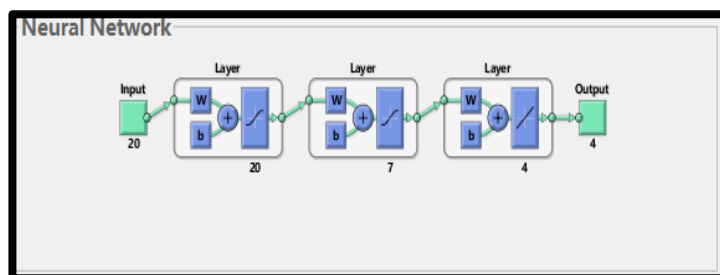


图 12：BP 神经网络结构

Step2: 分析各个输入量（影响因素）的历史变化特点。选用合适的算法预测出影响因素的未来数值。下图可见：各个指标都是存在周期性波动的，数据之间存在历史内在联系。

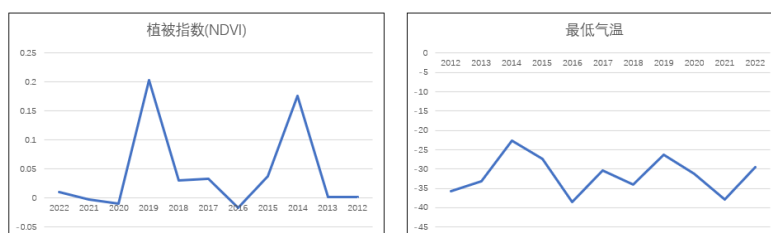


图 13：2012-2022 年 1 月份指标变化情况

Step3: 考虑到是 Elman 神经网络一种典型的局部历史回归网络，利用其预测出未来的影响指标数值

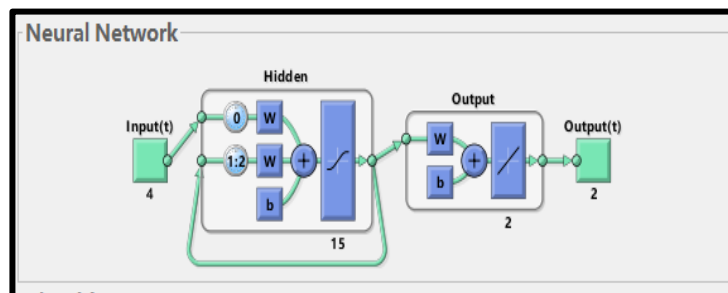


图 14: Elman 神经网络结构

Step4: 将预测所得到的影响指标输入到训练好的 BP 神经网络模型之中。得出土壤湿度预测值

5.2 BP 神经网络的原理

BP (Back Propagation) 神经网络是 1986 年由 Rumelhart 和 McClelland 为首的科学家提出的概念，是一种按照误差逆向传播算法训练的多层前馈神经网络，是应用最广泛的神经网络。BP 神经网络传播过程包括正向传播和反向传播，其中反向传播本质上是“负反馈”。这一点就类似于控制里面的闭环系统，通过反馈，利用偏差纠正偏差，从而达到满意的输出效果

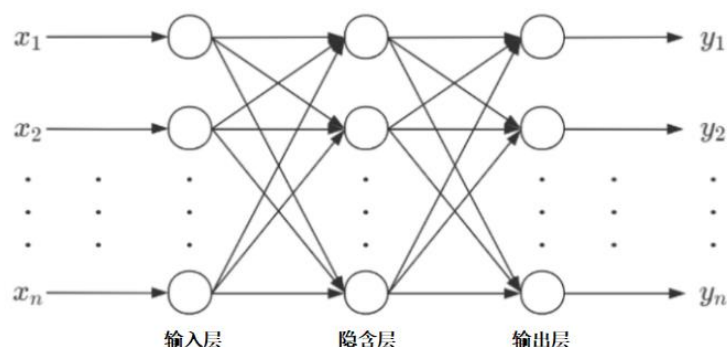


图 15: BP 内部结构

BP 神经网络是一种典型的非线性算法。BP 神经网络由输入层、隐含层 (也称中间层) 和输出层构成，其中隐含层有一层或者多层。每一层可以有若干个节点。层与层之间节点的连接状态通过权重来体现。只有一个隐含层: 传统的浅层神经网络; 有多个隐含层: 深度学习的神经网络。BP 神经网络的核心步骤如下。其中，实线代表正向传播，虚线代表反向传播。

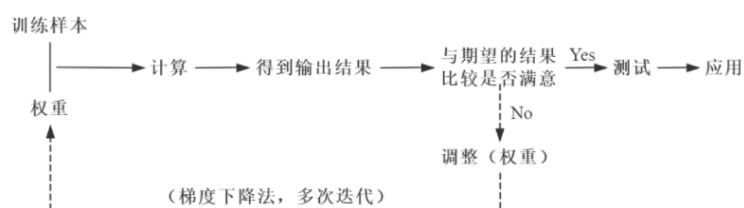


图 16: 16BP 训练过层

正向传播

数据(信息、信号)从输入端输入后，沿着网络的指向，乘以对应的权重后再加和，再将结果作为输入在激活函数中计算，将计算的结果作为输入传递给下一个节点。依次计算，直到得到最终结果。通过每一层的感知器，层层计算，得到输出，每个节点的输出作为下一个节点的输入。这个过程就是正向传播。

反向传播

将输出的结果与期望的输出结果进行比较，将比较产生的误差利用网络进行反向传播，本质是一个“负反馈”的过程。通过多次迭代，不断地对网络上的各个节点间的权重进行调整（更新），权重的调整（更新）采用梯度下降法。

5.3 模型预测结果

1. 训练过程中的参数变化

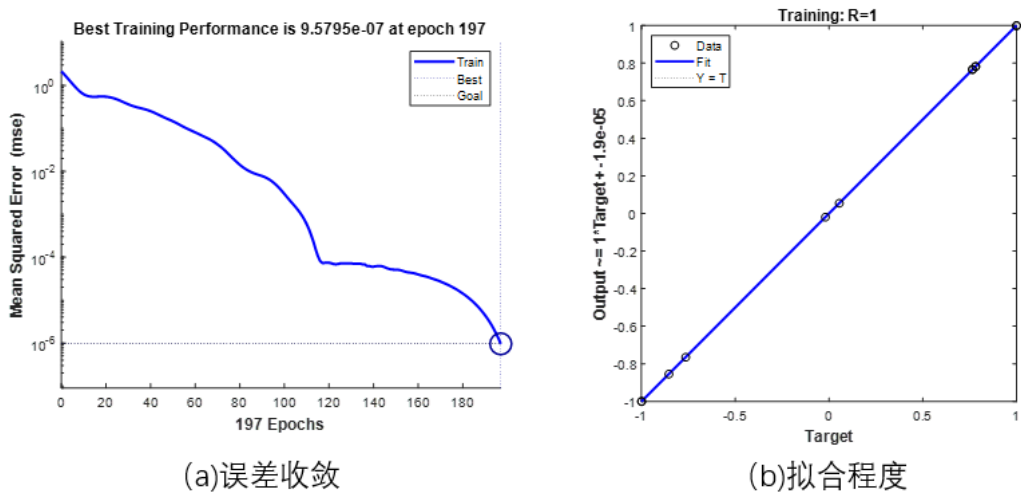


图 17: BP 神经网络训练中参数变化

2. 填表结果

年份	月份	10cm 湿度 (kg/m2)	40cm 湿度 (kg/m2)	100cm 湿度 (kg/m2)	200cm 湿度 (kg/m2)
2022	04	17.273	51.9028	95.0923	164.4637
	05	16.1493	51.0586	90.9111	164.6033
	06	18.6943	51.0703	93.0235	164.4002
	07	20.4052	60.9735	96.4079	164.2328
	08	20.9016	57.5717	92.7912	164.1521
	09	17.7374	60.7837	93.5838	164.0125
	10	15.5345	54.6	94.1175	163.7853

	11	12.9245	54.5857	93.3036	163.9722
	12	12.25	53.2383	92.614	163.887
2023	01	11.4254	54.1736	93.695	163.9818
	02	11.8268	53.7978	92.9685	163.8224
	03	11.6358	53.0134	95.179	163.6918
	04	13.8851	51.0947	94.8096	163.7724
	05	16.6467	49.5934	92.9657	163.5662
	06	17.1656	52.9153	96.891	163.664
	07	18.534	74.3122	96.6782	163.5926
	08	18.0645	72.2643	95.3614	163.3394
	09	14.7783	77.1394	97.0542	163.5294
	10	14.2032	71.1027	98.0912	163.5456
	11	14.1241	67.7913	97.5046	163.3201
	12	13.2217	66.5289	98.64	163.4008

六、 问题 3 模型的建立与求解

6.1 土壤化学物质含量计算模型

碳和氮等有/无机物的变化的原因来自于：过程 1—为植物提供养分（减少）；过程 2—死亡的植物化作养分（增加），过程三—动物排泄粪便（增加），本文考虑用增加量过程减去消耗过程，以土壤有机碳含量 S_{oc} 为例：它的变化率定义如下：

$$\frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + be^{S/S^*-1}) - k'_1 a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*})$$

其中 T 为植物死亡后分解称碳氮所需要的时间间隔， $D(t-T)$ 为 T 时刻前的枯萎死亡率， $(1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T})$ 同为 T 时刻前因放牧而导致的植物的踩踏致死率， k_1 是植物分解转化为 Soc 的转化系数， k'_1 为植物吸收系数， a^* 为最大生长速率， be^{S/S^*-1} 为动物粪便中的碳氮含量，S 是放牧强度，b 为比列系数， S^* 是有量纲系数。

对于无机碳，它主要存在于干旱地区，通过风化所得，不能通过植物/粪便分解转化。但植物数量有利于无机碳的固存，即无机碳含量与植物数量成正比。无机碳的变化率定义如下：

$$\frac{ds_{ic}}{dt} = k_2 \times e^{\varepsilon_g n/n^*}$$

其中， K_2 是植物固定转化无机碳的转化系数。当植物数量越多时，固定速率越快。

对于全氮，它和有机碳一样，能通过动物粪便，死亡植物分解所得，同样会被植物吸收。所以它的表达收如下：

$$\frac{ds_{oc}}{dt} = k_3 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + be^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*})$$

其中 k_3 ， k_3' 分别为转化系数，和植物吸收系数。其他符号同上。

$$\begin{cases} \frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + be^{S/S^*-1}) - k_1' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) \\ \frac{ds_{ic}}{dt} = k_2 \times e^{\varepsilon_g n/n^*} \\ \frac{dN_{all}}{dt} = k_3 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + be^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) \end{cases}$$

其中 K_1-K_3 分别对应：SOC 土壤有机碳，SIC 土壤无机碳，全氮 N 的转化因子。由于有机碳和全氮的来源和消耗路径相同，在这里考虑为他们正是因为转化因子的差异性（K 也可理解为植物本身含量的差异型系数），导致测量数值的差异型。

从数据本身出发，我们对有机碳 Soc，无机碳 Sic，全 N 进行三者含量的相关性分析，结果如下图：

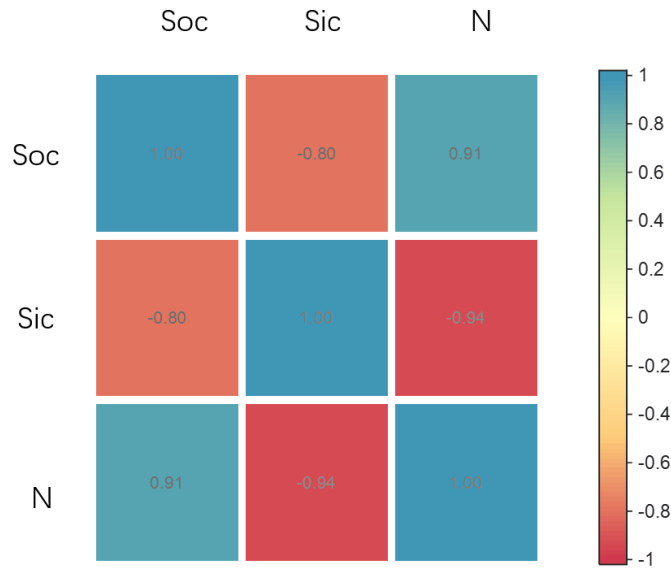


图 18：相关性计算结果

从 pearson 相关性分析结果来看，N 与 Soc 之间存在强烈的线性正相关性（0.91），N 与 Sic 之间存在强烈的负相关（-0.94）。同过回归分析，可以大致得到

$$Soc = 8.026 \times N$$

所以在下一步预测时，应该注意他们含量之间的关系。上诉情况符合我们所建立如下的微分方程，这说明微分方程求解出来的系数 $k_1/k_3=8.026$ 。

$$\begin{cases} \frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + be^{S/S^*-1}) - k_1' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) \\ \frac{dN_{all}}{dt} = k_3 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + be^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) \end{cases}$$

6.2 基于 ELman 神经网络的含水量预测模型

6.2.1 建模过程

从前面分析可知：有机碳 Soc，无机碳 Sic，全 N 进行三者含量的之间存在很强的相关性，并且从单个指标来看，Soc 和全氮 N 的历史值与时间存在强烈的正相关（Sic 与时间负相关）。在这里我们考虑用自身指标的历史数据和其他几个指标预测自身指标的未来值。

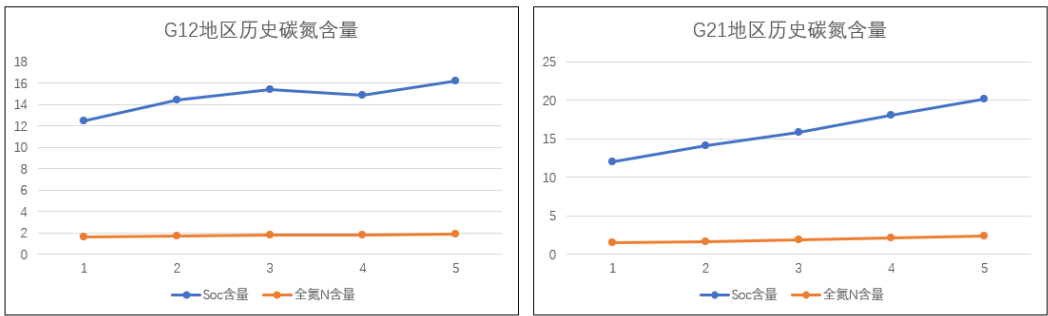


图 19：碳氮含量历史变化情况

如上图所示，G16 与 G21 地区的 Soc 与全氮 N 含量都与时间存在强烈的线性正相关。所以在预测未来碳氮含量的时候，首先要考虑的因素是自身的历史含量序列。根据 3.1 的相关性分析得知，Sic，Soc，全氮, N 之间同样存在很强的相关性，所以，在预测未来三者之一的含量时候，第二个考虑的因素就是另外两个指标的历史含量序列。

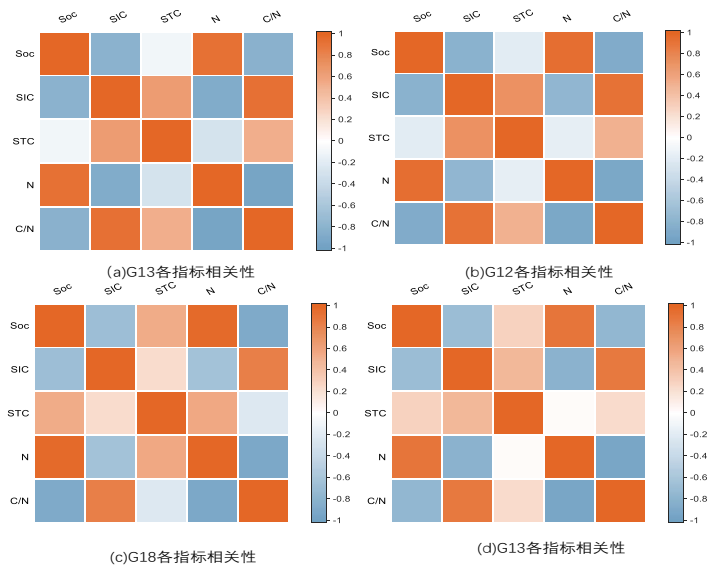


图 20：不同地区碳氮含量的相关性

6.2.2 Elman 算法原理

Elman 型神经网络一般分为四层:输入层、隐含层 (中间层)、承接层和输出层。如图 2-1 所示,输入层、隐含层、输出层的连接类似于前馈式网络,输入层的单元仅起信号传输作用,输出层单元起线性加权作用。隐含层单元的传递函数可采用线性或非线性函数,承接层又称上下文层或状态层,它用来记忆隐含层单元前一时刻的输出值并返回给网络的输入,可以认为是一个一步延时算子。Elman 神经网络学习过程:

$$y(k) = g(\omega^3 x(k))$$

Elman 神经网络的非线性状态空间表达式为: $x(k) = f(\omega^1 x_c(k) + \omega^2(u(k-1)))$

$$x_c(k) = x(k-1)$$

式中, y 为 m 维输出结点向量; x 为 n 维中间层结点单元向量; u 为 r 维输入向量; x_c 为 n 维反馈状态向量, ω^3 为中间层到输出层连接全权; ω^2 为输入层到中间层连接权值; ω^1 为承接层到中间层到连接权值; $g(*)$ 为输出神经元的传递函数, 是中间层输出的线性组合; $f(*)$ 为中间层神经元的传递函数, 常采用 S 函数。Elman 神经网络同样也采用 Bp 神经网络算法相似的方法进行权值修正, 学习指标函数采用误差平方和函数。

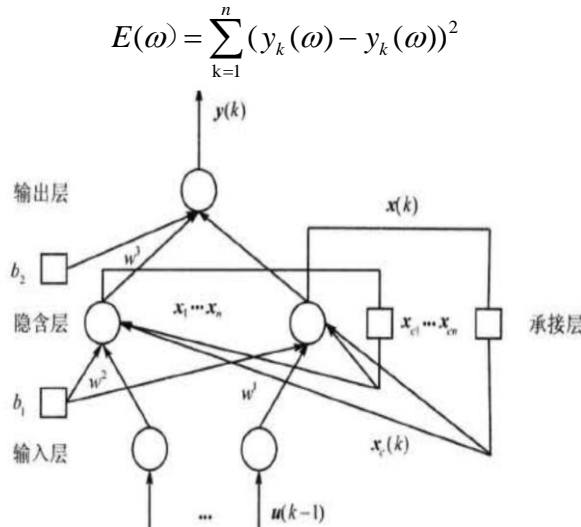


图 21: Elman 网络结构

其中, $\tilde{y}_k(\omega)$ 为目标输入向量反馈网络的动态学习特征, 主要由网络的反馈形式决定。反馈网络的反馈形式是比较多样化的, 有输入延迟、单层输出反馈、神经元自反馈、两层之间互相反馈等类型。常见的反馈型神经网络有 Elman 神经网络、Hopfield 神经网络和与离散 Hopfield 结构相似的 Boltzmann 神经网络等。Elman 神经网络是 Elman 于 1990 年提出的, 该模型在前馈式网络的隐含层中增加了一个承接层, 作为一步延时的算子, 以达到记忆的目的, 从而使系统具有适应时变特性的能力, 能直接动态反映动态过程系统的特性。

6.2.3 预测结果填表

放牧强度	Plot 放牧小区	SOC 土壤有机碳	SIC 土壤无机碳	STC 土壤全碳	全 N	土壤 C/N 比
NG	G17	17.4382	9.67351	27.11171	2.142246	12.65574
	G19	15.83017	4.963292	20.79346	2.014216	10.32335
	G21	18.28086	6.789024	25.06988	2.102821	11.92203
LGI	G6	11.80429	11.83689	23.64118	1.406162	16.81256
	G12	12.30881	11.99369	24.3025	1.543425	15.74582
	G18	10.70092	12.5232	23.22412	1.357408	17.10917
MGI	G8	18.77045	1.768174	20.53862	2.479601	8.283034
	G11	17.68876	1.437302	19.12606	2.269065	8.429049
	G16	23.31889	7.633159	30.95205	2.612652	11.84699
HGI	G9	14.90007	8.205404	23.10547	1.826031	12.65339
	G13	17.26848	4.969638	22.23812	2.159794	10.29641
	G20	14.31567	8.766544	23.08222	2.14072	10.78246

七、 问题四模型的建立与求解

7.1 不同放牧策略下沙漠化指数计算

7.1.1 考虑放牧影响的沙漠化指数计算思路

放牧会影响到 9 个沙漠化评价因素中的一些因素，另外一些因素是由放牧以外的因素决定的。所以，沙漠化评价指标可以看做是放牧强度 S 的函数。在下文中，首先分析各个因素受到放牧强度影响的机理，再写出因素与放牧强度之间函数的关系。题目已经给出了沙漠化指数的计算方式如下：

$$SM=\eta\cdot\sum_{i=1}^nS_{Q_i}=\eta\cdot\sum_{i=1}^n(Q_i\cdot W_{c_i})$$

SM 表示沙漠化程度指数； η 为调节系数，用来修正模型； n 为模型中指标因子的个数； Q_i 为第 i 个因子的强度； S_{Q_i} 为第 i 个因子对沙漠化程度的贡献从程度，定义 $S_{Q_i}=Q_i\cdot W_{c_i}$ ， W_{c_i} 为因子权重系数，我们选择层次分析法来确定。查阅所提供的文献，我们可以得到评价指标体系以及各个因子强度前面的权重系数下表所示：

表 2：各个因子的权重

	权重系数 W_A	影响因素 B_i	权重系数 W_{B_i}	指标因子 C_i	权重系数 W_{C_i}
沙漠 化预 警指 标体 系 A	1	气象因素 B_1	0.3275	暖季平均风速 C_1	0.1802
				暖季降水量 C_2	0.0787
				暖季平均气温 C_3	0.0685
		地表因素 B_2	0.4126	夏季植被盖度 C_4	0.2036
				夏季地表水资源量 C_5	0.0808
				夏季地下水埋深 C_6	0.1282
		人文因素 B_3	0.2599	人口密度 C_7	0.0509
				牲畜密度 C_8	0.1282
				人均家庭经营纯收入 C_9	0.0808

同样的我们按照文献中所给出的方面，对 9 个因素进行因子强度计算，9 个因子的结构体系如下：

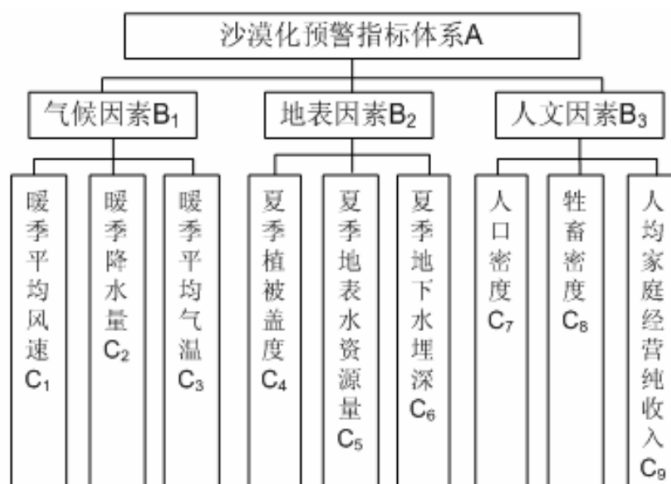


图 22：沙漠化预警评价指标

所以，我们沙漠化指数可以被写为

$$SM/\eta = 0.1802C_1 + 0.0787C_2 + 0.0685C_3 + 0.2036C_4 + 0.0808C_5 + 0.1282C_6 + 0.0509C_7 + 0.1282C_8 + 0.0808C_9$$

7.1.2 影响因素与放牧强度函数关系

其中气象因素由自然气象条件控制，植物盖度 C_4 与地表水资源量 C_5 受到放牧强度的影响， C_8 和家庭纯收入 C_9 也受到放牧强度的影响。所以沙漠化指数可以转化成放牧强度的函数。下面将定义上述 4 个因素对

植物盖度 C_4 与放牧强度 S 的关系：

$$C_4(S) = G(n(S)) = (1 - e^{-\varepsilon_s n(S)/n^*})$$

其中 S 表示放牧强度， $G(n)$ 为前文所定义的植物盖度， $n(s)$ 表示为植物数量 n 与放牧强度的关系函数。

地表水资源量 C_5 与放牧强度 S 的关系：

$$C_5(S) = \beta(S)$$

这里将地表面水资源定义为前文计算出的土壤水含量与放牧强度的函数关系。牧畜密度 C_8 和家庭纯收入 C_9 与放牧强度 S 的关系：

$$\begin{cases} C_8 = k_{c8}S \\ C_9 = k_{c9}S \end{cases}$$

其中 k_{c8} 和 k_{c9} 分别是放牧强度对 C_8 和 C_9 的比例系数。对于9个因素中的其他指标计算都是不受放牧强度 S 影响的固定值，结合题目附件中的数据可以将，其他几个指标计算出来（计算出来是一个定值），这里注重关注放牧强度对沙漠指标的影响。上述过程都是为求解第三问的最优放牧策略做铺垫。

7.1.3 各个指标的因子强度计算

气候因素：

在风速因素方面，由于风速与荒漠化的严重程度呈比例关系，因此，在暖季节，平均风速在2.61米/秒以上时，其强度为1，在暖季节小于1.43米/秒时，其强度为0，而在这两种情况下，其强度分别为 $(-1.43 \text{ 米/秒}) / (2.61 \text{ 米/秒} - 1.43 \text{ 米/秒})$ ；在降水因素方面，降雨和荒漠化程度也呈反比关系，因此，在降雨小于10毫米时，其强度为1，超过100毫米时为0；在这两者之间的强度是 $(100 \text{ 毫米} - \text{降雨量}) / (100\text{cm} - 10\text{cm})$ ；在温度因子方面，在25℃至30℃时，强度值为0，在5℃~30℃时为1，在5~25℃时强度值为1；在5℃至25℃时为强度值 $(25^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C}) / (25^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C})$ ，在温度为30℃~35℃的情况下，强度取值为 $-30^\circ\text{C} / (35^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C})$ 。

地质因素：

在植被覆盖系数方面，由于植被覆盖度与荒漠化程度呈反比关系，因此，当植被覆盖度大于50%时，其强度为0，低于10%时为1；地表水资源量因子的处理方式：满足需要的区域（水库、耕地）强度为0，地表水资源量为0，其余区域为1，其余区域为 $21.47 \times 10^4 \text{ 立方米/km}^2 \sim 1.22 \times 10^4 \text{ 立方米/km}^2$ ；地下水埋藏深度与荒漠化程度呈正相关，故7.7 m以上，其强度为1，4.85 m以下为0；

人口因素：

人口密度系数，人口密度大于60 person/km²时，其强度为1；人口密度<7 person/km²时，其强度为0；家畜密度系数的计算方法与以上相似，也就是在家畜密度小于5 unit/km²时，其强度为0，在家畜密度大于25 unit/km²时，其强度为1，介于二者之间（家畜密度-5 unit/km²）/（25 unit/km²）；人均家庭经营净收入因素的计算方法与上述基本一致，即：纯收入>1100 yuan时，其强度为1；在纯收入<450 yuan时，其强度为0；在两者之间，则为 $(\text{人均家庭经营纯收入} - 450 \text{ yuan}) / (1100\text{yuan} - 450\text{yan})$ 。

7.2 土壤板块化程度的计算

7.2.1 板块化模型计算思路

采用熵权法得到土壤板块化程度 B 与 W, C, O 之间的具体计算关系，根据问题 1-3，计算出来了 W, C, O 对与牧强度之间的函数关系式子，所以，最终得到板块化程度 B 与放牧强度之间的函数关系

根据题目可知：土壤湿度 W 越少，容重 C 越大，有机物含量 O 越低，土壤板结化程度 B 越严重。他们的关系可以被下式表示：

$$B = f(W, C, O)$$

为了得到土壤板块化程度 B 与 W, C, O 之间的具体计算关系，在这里采用熵权法对他们之间非线性函数关系进行描述。

$$B = f(W, C, O) = b_1 W + b_2 C + b_3 O$$

其中 b_1, b_2, b_3 分别 W, C, O 对板块化程度 B 的影响权重，他们的具体取值由熵权法确定。 W 为土壤湿度，它可以表达为：

$$W = \beta(S)$$

其中， $\beta(S)$ 为前文定义中湿度 β 与放牧强度 S 之间的关系。 C 为土壤容重，随着放牧强度的增加，土壤密度被踩压大，所以 C 增大，它的表达式为：

$$C(S) = k_c S$$

k_c 为容重比列系数。对于 O 有机物含量，这里定义为有机碳 Soc 与全氮 N 含量的总和。所以 O 的表达式可以如下：

$$O(s) = Soc(s) + N_{all}(s)$$

关于 Soc 含量，全氮 N 的含量与放牧强度之间的函数关系再前文中问题三中已经给出。综上，可以把 B 的转化为关于放牧强度 S 函数表达式如下：

$$B(s) = b_1 \beta(S) + b_2 k_c S + b_3 [Soc(s) + N_{all}(s)]$$

7.2.2 基于熵权法的权重计算

熵权法：依据的原理：指标的变异程度越小，所反映的信息量也越少，其对应的权值也应该越低。**信息熵：**熵是热力学的一个物理概念，是体系混乱度或无序度的度量，熵越大表示系统越乱，熵越小表示系统越有序。**熵权法：**根据信息熵的定义，对于某项指标，可以用熵值来判断某个指标的离散程度，其熵值越小，指标的离散程度越大，该指标对综合评价的影响（即权重）就越大。熵权法的计算步骤：

Step1. 数据归一化处理

归一化是将不同量纲的指标同量纲化，通常有两种方法：

正向指标:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \min(x_{ij})}{\max(x_{ij}) - \min(x_{ij})}$$

负向指标:

$$x'_{ij} = \frac{\max(x_{ij}) - x_{ij}}{\max(x_{ij}) - \min(x_{ij})}$$

Step2. 计算第 j 项指标下第 i 个方案占该指标的比重 P_{ij} :

$$p_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\sum_{i=1}^n x'_{ij}}$$

Step3. 计算第 j 项指标的熵值 e_j :

$$e_j = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n p_{ij} \ln(p_{ij}), 0 \leq e_j \leq 1$$

Step4. 计算效用值 $g_j, g_j = 1 - e_j$

Step5. 得到各级指标权重: W_j

$$W_j = \frac{g_j}{\sum_{j=1}^m g_j}$$

7.3 最优放羊策略计算模型

根据 4.1 与 4.2 的模型, 放羊强度 S 决定了沙漠化指数 SM 和土壤模块化程度 B 。他们都可以表示为放牧强度 S 的函数。题目要求求解 B 与 SM 最小时的放牧策略, 可以将其写成如下的多目标规划模型。目标函数为, B, SM 最小, 可以写成以下表达形式:

$$\begin{cases} \text{MinSM}(s) = \eta \cdot \sum_{i=1}^n (C_i(S) \cdot W_{c_i}) \\ \text{MinB}(s) = b_1 \beta(s) + b_2 k_c S + b_3 [\text{Soc}(s) + N_{all}(s)] \end{cases}$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} C_4(S) = G(n(S)) = (1 - e^{-\varepsilon_g n(S)/n^*}) \\ C_5(S) = \beta(S) \\ C_8(S) = k_{c8} S \\ C_9(S) = k_{c9} S \end{array} \right. \\ \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta}{dt} = P - E(a) = P - E(a^* G(n)) \\ \frac{dn}{dt} = a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) - D(n) - \partial S n = a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) - \beta^\delta * (e^{\varepsilon_g n/n^*} - 1) - \partial S n \\ \frac{d\beta}{dt} = \Delta W = P + G_u + R_{in} - (E t_a + G_d + R_{out} + IC_{store}) \\ IC_{store} = a^* G(n) \cdot IC_{max} \cdot \left[1 - \exp\left(-k \cdot R_{cum} / IC_{max}\right) \right] \\ IC_{max} = 0.935 + 0.498 \cdot LAI - 0.00575 \cdot LAI^2 \end{array} \right. \\ \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + b e^{S/S^*-1}) - k_1' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) \\ \frac{dN_{all}}{dt} = k_3 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + b e^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

其中第一部分约束条件是 4, 1 中各项指标关于放牧强度 S 的映射函数。第二部分是土壤湿度计算模型的约束，第三部分是土壤中有有机物变化的计算模型约束。其实两个优化目标都是只有放牧强度的 S 这一个自变量。

7.4 优化模型的定性分析与求解

7.4.1 求解可能性分析

所需求解的模型为双目标，非线性规划问题，而且过程中的参数，和作用机理函数含有微分形式，通过现有的方法基本上很难求解。在这里考虑用定性的方式去研究沙漠化指数 SM 和土壤模块化程度 B 关于 S 的曲线变化情况

7.4.2 考虑定性分析的问题简化

1. 对于沙漠指数 SM 的化简：

在定性研究时，更在注重变量之间的正负关系和曲线变化关系，对 SM 函数求关于 S

的导数，其他常数量全部被去除，剩下：

$$\begin{cases} \frac{dC_4(S)}{ds} = \frac{dG(n(S))}{ds} = \frac{d(1 - e^{-\varepsilon_g n(S)/n^*})}{ds} \\ \frac{dC_5(S)}{ds} = \frac{d\beta(S)}{ds} \\ \frac{dC_8(S)}{ds} = k_{c8} \\ \frac{dC_9(S)}{ds} = k_{c9} \end{cases}$$

首先对 $dG(4)/ds$ 进行化简，考虑到植物数量 n 与放牧强度 s 整体反比，令

$$n(S) = n^* - k_n S$$

$$\frac{dC_4(S)}{ds} = \frac{\varepsilon_g k_n}{n^*} e^{-\varepsilon_g (n^* - k_n S)/n^*}$$

再对 $dG(5)/ds$ 进行化简，考虑到土壤含水量 β 与降雨量成正比，与植被覆盖率成正比，与放牧强度 s 成负相关，可以化简为

$$\frac{d\beta}{dS} = -k_a$$

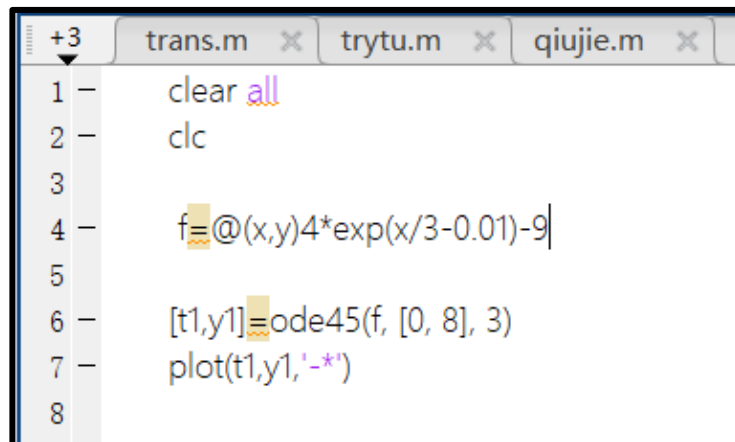
联合上式子：得到：

$$\frac{dsm}{ds} = k_{c8} + k_{c9} - k_a + \frac{\varepsilon_g k_n}{n^*} e^{-\varepsilon_g (n^* - k_n S)/n^*}$$

$$\frac{dsm}{ds} = a + b \exp(x/c - d)$$

$$\frac{dsm}{ds} = 4 \exp(x/3 - 0.01) - 9$$

对上式子采用数值解析法分析图可得如下：



```

+3
1 - clear all
2 - clc
3
4 - f=@(x,y)4*exp(x/3-0.01)-9|
5
6 - [t1,y1]=ode45(f,[0,8],3)
7 - plot(t1,y1,'-*')
8
  
```

图 23：解析求解 Matlab 代码

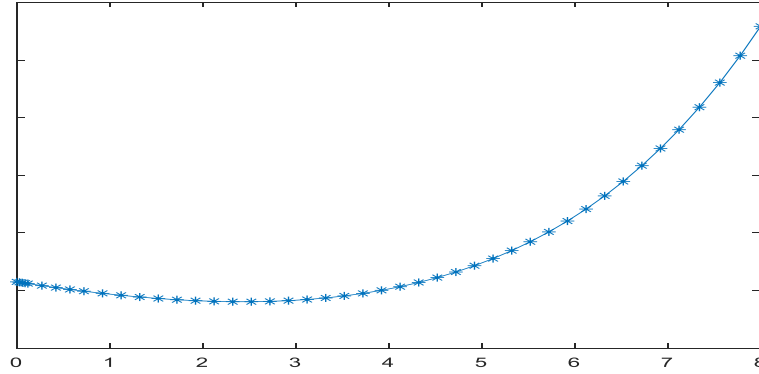


图 24: 不同放牧强度下沙漠化指数(数值解析法)

由上图可知, 大概在放牧强度为 2-3 时取沙漠化指数得最小值。但是随着参数的变化, 最小值有可能在不同的强度处取得。所以对参数的合理估计是非常重要的

2. 对于土壤板块化 B 的化简:

同样的, 对 B 求放牧强度 S 的导数可得:

$$\frac{dB}{dS} = \frac{df(W, C, O)}{dS} = b_1 \frac{dW}{dS} + b_2 \frac{dC}{dS} + b_3 \frac{dO}{dS}$$

在上式子中, 只有对有机物 O 没有简化。在这里进行简化由于:

$$O(s) = Soc(s) + N_{all}(s)$$

$$\begin{cases} \frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*})_{t-T} + be^{S/S^*-1} - k_1' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) \\ \frac{dN_{all}}{dt} = k_3 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*})_{t-T} + be^{S/S^*-1} - k_3' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) \end{cases}$$

考虑由植物死亡后分解的植物量非常的少, 为了简化问题在这里忽略不计, 所以算式可以写为:

$$\begin{cases} \frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (1 + be^{S/S^*-1}) - k_1' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) \\ \frac{dN_{all}}{dt} = k_3 \times (1 + be^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) \end{cases}$$

上式子可以看出 Soc 和全氮 N 含量与 S 的呈现正相关, 更具体是他们两个的含量与 $e^{s/c}$ 正相关: 所以有

$$\frac{dB}{dS} = -b_1 k_a + b_2 k_c + b_3 [k_1 \times (1 + be^{S/S^*-1}) - k_1' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*}) + k_3 \times (1 + be^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{\varepsilon_g n/n^*})]$$

$$\frac{dB}{dS} = a + b \exp(x/c - d)$$

此时, 上式子中, a, b, c, d 参数的估计十分重要 (根据各项因子的系数 K, 系数可以

通过附件中的数据估计），它的值取决于各种系数的取值，在这里由于只是研究函数的形态，取在合理范围内即可。

```
+3  trans.m  trytu.m  qiujie.m  Ur
1  -  clear all
2  -  clc
3  -  f=@(x,y)5*exp(x/1.5-0.01)-12|
4  -  [t1,y1]=ode45(f, [0, 6], 3)
5  -  plot(t1,y1,'-*')
6
```

图 25：解析求解 Matlab 代码

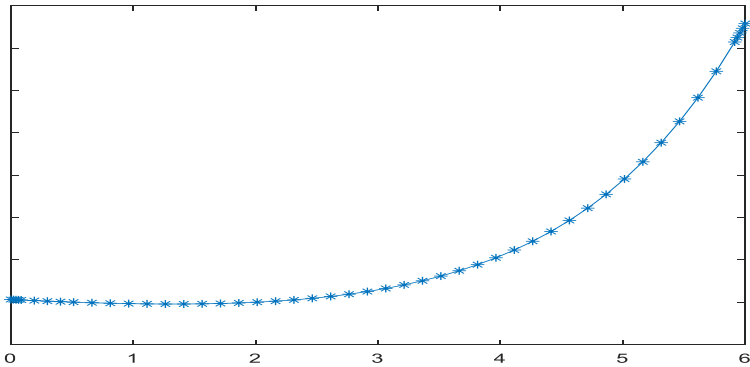


图 26：不同放牧强度下土壤块化指数(数值解析法)

由上图可知：在放牧强度在 1.5-2.5 之间时，土壤模块化指数最小，随着放牧强度的增加，土块化指数先是减少，后增加。在 1.5-2.5 之间时取得极小值。综合沙漠化指数和土壤模块化指数，放牧强度 S=2 时取得，两指数能取到最小值。

八、 问题 5 模型的建立与求解

8.1 单目标规划的模型建立过程

根据题目要求，在可持续发展的情况下，使得放牧的强度尽可能的大。首先在问题四的基础上，将可持续发展，定义为达到中度沙漠化即沙漠化指数 $SM<0.4$, 同时土壤结块化指数也小于 0.4, 因此，第四问中的优化目标，在这里变成了限制条件。优化目标在为放牧强度最大，整个模型如下所示：

$MaxS, S \in (0, +\infty)$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} C_4(S) = G(n(S)) = (1 - e^{-\varepsilon_g n(S)/n^*}) \\ C_5(S) = \beta(S) \\ C_8(S) = k_{c8} S \\ C_9(S) = k_{c9} S \end{array} \right. \\ \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta}{dt} = P - E(a) = P - E(a^* G(n)) \\ \frac{dn}{dt} = a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) - D(n) - \partial S n = a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) - \beta^\delta * (e^{\varepsilon_g n/n^*} - 1) - \partial S n \\ \frac{d\beta}{dt} = \Delta W = P + G_u + R_{in} - (E t_a + G_d + R_{out} + IC_{store}) \\ IC_{store} = a^* G(n) \cdot IC_{max} \cdot \left[1 - \exp\left(-k \cdot R_{cum} / IC_{max}\right) \right] \\ IC_{max} = 0.935 + 0.498 \cdot LAI - 0.00575 \cdot LAI^2 \end{array} \right. \\ \\ 4. \left\{ \begin{array}{l} B(s) = b_1 \beta(s) + b_2 k_c S + b_3 [Soc(s) + N_{all}(s)] \leq 0.4 \\ SM(s) = \eta \cdot \sum_{i=1}^n (C_i(S) \cdot W_{c_i}) \leq 0.4 \end{array} \right. \\ \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_{oc}}{dt} = k_1 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + b e^{S/S^*-1}) - k_1' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) \\ \frac{dN_{all}}{dt} = k_3 \times (D(t-T) + 1 - e^{-\varepsilon_s S/S^*}_{t-T} + b e^{S/S^*-1}) - k_3' a^* (1 - e^{-\varepsilon_g n/n^*}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

8.2 模型的简化与定性求解

上述虽然为单目标规划模型，但是属于非线性且限制条件中包含了无法求出解析解的微分方程，所以这个模型几乎不可能靠正常方式求解出来，根据问题四模型求解的方法，这里同样采用定性分析的角度来求解，并且解释结果的合理性。这里我们直接在第四问的基础上求解：

$$\begin{aligned} \frac{dsm}{ds} &= b^{sm} \exp(S/c^{sm} - d^{sm}) + a^{sm} \\ \frac{dB}{dS} &= b^B \exp(S/c^B - d^B) + a^B \end{aligned}$$

在不同的在不同的降雨量条件下，会影响到系数的变换，具体的变化形式需要通过，

简化过程的机理来说。在这里以 dsm/dS 为说明例子。当降雨量增加时，其中环境容量增大， c^{sm} ， c^B 都增加。我们调整 c^{sm} ， c^B ，来模拟，不同降雨量对 SM 值和 B 值的影响。

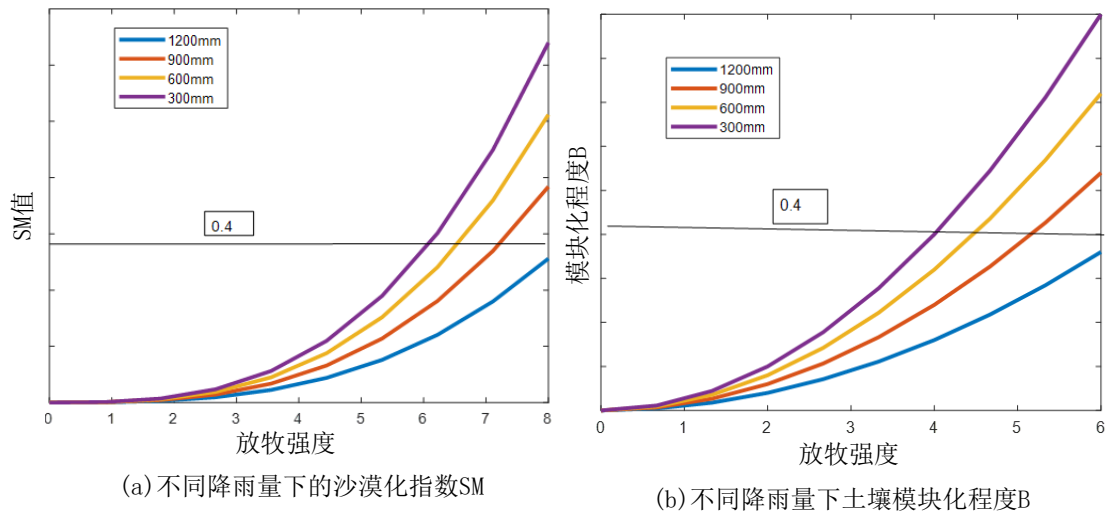


图 27：定性分析计算结果

当 SM 值为 0.4 时，认为已经不能达到可持续发展的限制条件，当降雨量为 1200mm 时，最大放牧强度为 8.2 左右。而当降雨量为 300mm，放牧强度在 5.5 左右就已经达到了限制条件。

同理：当 B 值为 0.4 时，当降雨量为 1200mm 时，最大放牧强度为 6 左右。而当降雨量为 300mm，放牧强度在 3.5 左右就已经达到了限制条件。

由于需要满足两个限制条件：所以降雨量为 1200mm 时，6 时最大值，雨量为 300mm 时，3.5 为最大值。总体来说：降雨量越低，环境容量越低，能承受的放牧强度也就越低。

九、 问题 6 模型的建立与求解

9.1 问题分析

通过问题二，三中所提出来的 ELman 神经网络预测模型，我们可以迭代求解出未来几年的天气影响因子，植物指数，C/N 含量。将预测数据带入训练好的 BP 神经网络，可以得到未来的土壤湿度含量，对于其他离散的人文指标考虑不变。然后，将上述计算结果带入沙漠化评价模型中得到沙漠化指数

9.2 求解结果分析

本文将前几问预测出来的数据结果，导入了 ArcGIS 当中，然后综合处理其他文献中所查到的数据。最后将地理上缺失的数据值按照二维度高斯分布插值，得到了下图结果：

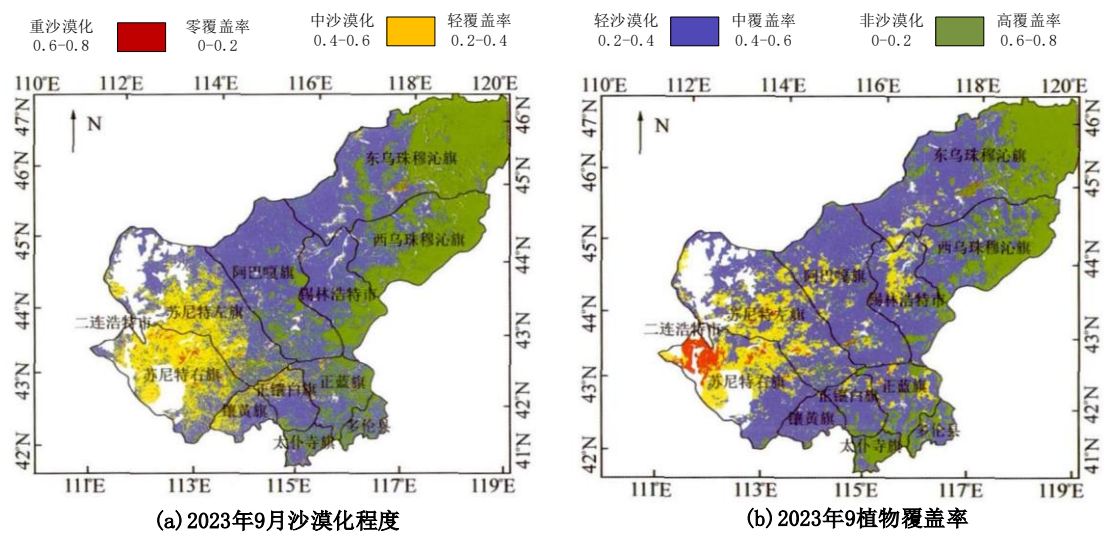


图 28：23 年 9 月沙漠化程度/植被覆盖率

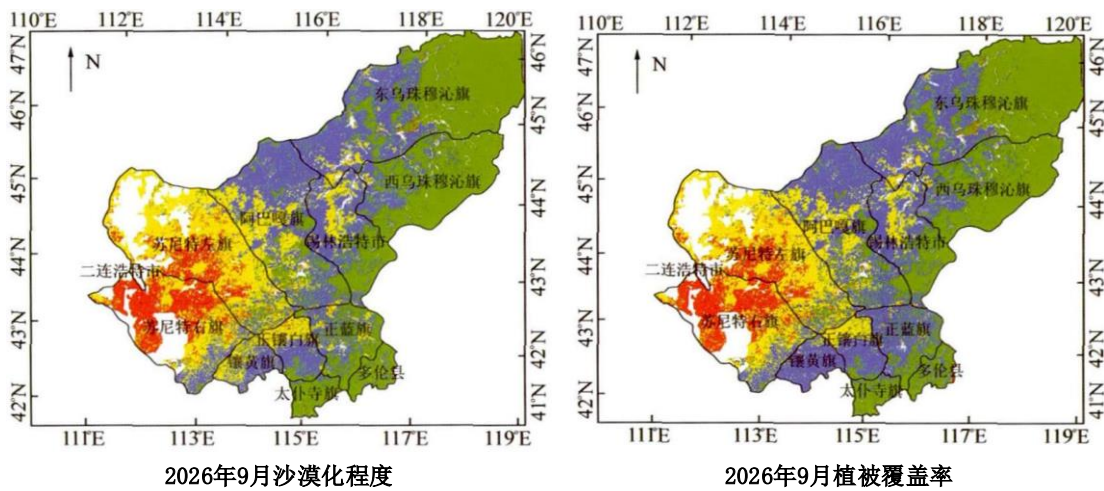


图 29：26 年 9 月沙漠化程度/植被覆盖率

在 2023 年 9 月，图中偏左下角的区域(即放牧监测点)已经出现了中度的沙漠化，(b)图中的红色部位出现了少量的地区覆盖率为零的情况，这符合该地区轻度沙漠的特征。在 2026 年 9 月，图中偏左下角的区域（即放牧监测点）已经出现了重度的沙漠化，大量部分呈现出了红色，

这表明如果该地区的放牧强度 S 不减弱。从 2023 年 9 月进入中度沙漠化，从 2026 年

就开始已经严重到重度沙漠化的程度了。

十、 模型的优缺点与改进

10.1 模型的优点

1. 模型从机理分析的角度出发，具有解释性
2. 模型具有完整的推导过程，可信度高

10.2 模型的缺点

1. 结果可视化做都很差

10.3 模型的改进

1. 可以采用数据驱动的方法求取一些参数，而非定性分析

十一、 参考文献

- [1] 宫海静, 王德利. 草地放牧系统优化模型的研究进展[J], 草业学报, 15 (6): 1-8.
- [2] 刘敦利. 基于栅格尺度的土地沙漠化预警模式研究[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2010.
- [3] Simon J. R. Woodward, Graeme C. Wake, et al, A Simple Model for Optimizing Rotational Grazing, Agricultural Systems ,41 (1993) 123-155.
- [4] 王悦骅. 模拟降水对不同载畜率放牧荒漠草原植物多样性的影响[D]. 内蒙古农业大学, 2019.
- [5] 侯琼, 王英舜, 杨泽龙, 等. 基于水分平衡原理的内蒙典型草原土壤水动态模型研究[J]. 干旱地区农业研究, 2011, 29 (05): 197-203.
- [6] 许宏斌, 辛晓平, 宝音陶格涛, 等. 放牧对呼伦贝尔羊草草甸草原生物量分布的影响[J]. 草地学报, 2020, 28 (03): 768-774.
- [7] Woodward S J R. Wake G C. McCall D G. Optimal grazing of a multi—paddock system using a discrete time model[j]. Agri—cultural Systems. 1995, 48: 119—139.

十二、 附录

Elman 神经网络

```
clear
```

```
clc
```

```
A=load data
```

```
[n,m]=size(A);
```

```
for i=1:1:m
```

```
data=A(:,i)
```

```
N=2    %%%N表示预测数据的个数
```

```
L=5;%%%预测N个数值需要要的数据长度
```

```
[test_ty]=shengjingwangluo(data,L,N);
```

```
yuce(i,:)=test_ty
```

```
end
```

```
yuce
```

```
function [test_ty]=shengjingwangluo(data,L,N)
```

```
price=data'
```

```
whos
```

```
rng(now)
```

```
%% 2.构造样本集
```

```
% 数据个数
```

```
n=length(price);
```

```
% 确保price为列向量
```

```
price=price(:);
```

```
% x(n) 由x(n-1),x(n-2),...,x(n-L)共L个数预测得到.
```

```
% price_n: 每列为一个构造完毕的样本, 共n-L个样本
```

```
price_n = zeros(L+1, n-L);
```

```
for i=1:n-L
```

```
    price_n(:,i) = price(i:i+L);
```

```
end
```

```
%% 划分训练、测试样本
```

```
% 将前280份数据划分为训练样本
```

```
% 后51份数据划分为测试样本
```

```
trainx = price_n(1:L-N+1,:);
```

```
trainy = price_n(L-N+2:end,:);
```

```
[ww,mm]=size(trainx);
```

```
testx = price(n-ww+1:n, end);
```

```
%% 创建Elman神经网络
```

```
% 包含15个神经元, 训练函数为traingdx
```

```
net=elmannet(1:2,15,'traingdx');
```

```
% 设置显示级别
```

```
net.trainParam.show=1;
```


% %最大迭代次数为2000次

net.trainParam.epochs=30000;

% 误差容忍限，达到此误差就可以停止训练

net.trainParam.goal=0.000001;

% 最多验证失败次数

net.trainParam.max_fail=5;

% 对网络进行初始化

net=init(net);

%% 网络训练

%训练数据归一化

[trainx1, st1] = mapminmax(trainx);

[trainy1, st2] = mapminmax(trainy);

% 测试数据做与训练数据相同的归一化操作

testx1 = mapminmax('apply',testx,st1);

% 输入训练样本进行训练

[net,per] = train(net,trainx1,trainy1);

%% 测试。输入归一化后的数据，再对实际输出进行反归一化

```
% 将训练数据输入网络进行测试
train_ty1 = sim(net, trainx1);
train_ty = mapminmax('reverse', train_ty1, st2);
```

```
% 将测试数据输入网络进行测试
test_ty1 = sim(net, testx1);
test_ty = mapminmax('reverse', test_ty1, st2);
```

```
%% 显示结果
% 1.显示训练数据的测试结果
figure(1)
x=1:length(train_ty);
```

```
% 显示真实值
plot(x,trainy,'b-');
hold on
% 显示神经网络的输出值
plot(x,train_ty,'r--')
```

```
legend('股价真实值','Elman网络输出值')
title('训练数据的测试结果');
```

```
% 显示残差
figure(2)
plot(x, train_ty - trainy)
title('训练数据测试结果的残差')
```

```
% 显示均方误差
```

```
mse1 = mse(train_ty - trainy);  
fprintf('    mse = \n    %f\n', mse1)
```

```
% 显示相对误差
```

```
disp('    相对误差: ')  
fprintf('%f ', (train_ty - trainy)./trainy );  
fprintf('\n')
```

```
% 显示预测值
```

```
disp('    预测值: ')  
fprintf('%f ', test_ty);  
fprintf('\n')
```

```
end
```

画图 daim

```
clear all
```

```
clc
```

```
X=[19.53    11.33    30.86    1.88    16.39  
10.31    10.75    21.06    0.98    21.59  
18.24    4.80     23.04    1.99    11.56  
13.23    10.20    23.43    1.41    16.64  
18.77    0.80     19.57    2.19    8.94  
14.36    8.47     22.82    1.98    11.51  
10.73    10.76    21.49    1.24    17.36  
20.12    2.20     22.32    2.43    9.19  
18.16    4.40     22.56    2.14    10.54  
13.05    10.10    23.15    1.48    15.63
```

17.30 4.30 21.60 2.20 9.83

```
CMP=corrMatPlot(X,'Type','pie');  
CMP=corrMatPlot(X,'Labels',{'Soc','SIC','STC','N','C/N'});  
CMP=CMP.setColorMap(2);
```

```
CMP=CMP.draw();  
%  
% [b,bint,r,rint,stats]=regress(X(:,2),X(:,3));  
% b,bint,stats,rcoplot(r,rint)
```

```
% x=X(:,3)  
% y=X(:,2)  
% polyfit(x,y,1)  
% plot(x,y,'r*')
```

仿真求解代码（解微分方程）

```
clear all  
clc
```

```
a=0.049;b=600;c4=0.6;c3=0.1;c2=0.05;c=0.04
```

```
f=@(x,y)(exp(abs(sin(2*x))*5)-1)*(exp(abs(sin(x))*1)-1)*(exp(abs(sin(1*x))*10)-  
1)*a*x*(1-x/b)-c*y
```

```
f2=@(x,y)(exp(abs(sin(2*x))*5)-1)*(exp(abs(sin(x))*1)-1)*(exp(abs(sin(1*x))*10)-
```

$1) \cdot a \cdot x \cdot (1 - x/b) - c_2 \cdot y$

$f_3 = @(x,y)(\exp(\text{abs}(\sin(2 \cdot x))^5) - 1) \cdot (\exp(\text{abs}(\sin(x))^1) - 1) \cdot (\exp(\text{abs}(\sin(1 \cdot x))^10) - 1) \cdot a \cdot x \cdot (1 - x/b) - c_3 \cdot y$

$f_4 = @(x,y)(\exp(\text{abs}(\sin(2 \cdot x))^5) - 1) \cdot (\exp(\text{abs}(\sin(x))^1) - 1) \cdot (\exp(\text{abs}(\sin(1 \cdot x))^10) - 1) \cdot a \cdot x \cdot (1 - x/b) - c_4 \cdot y$

`[t1,y1]=ode45(f, [200, 600], 3)`

`plot(t1,y1, '-*')`

`hold on`

`[t2,y2]=ode45(f2, [10,400], 1)`

`plot(t2,y2, '-*')`

`[t3,y3]=ode45(f3, [10,400], 0)`

`plot(t3,y3, '-*')`

`hold on`

`[t4,y4]=ode45(f4, [10,400], 0)`

`plot(t4,y4, '-*')`

`legend('放牧强度S=1','放牧强度S=3','放牧强度S=5','放牧强度S=7')`

`xlabel('时间t');`

`ylabel('植物生物量W(没有乘比例系数)');`

作图：

`% clear all`

```
% clc
% %
% % f1=exp(-(t-1).^2);
% %
%
% % t=linspace(0,1,10);
% % f1=exp(t/2)-1;
% % plot(t,f1,'-','LineWidth',2.5)
% % hold on
% % f1=exp(t/3)-1;
% % plot(t,f1,'-','LineWidth',2.5)
% % hold on
% % f1=exp(t/4)-1;
% % plot(t,f1,'-','LineWidth',2.5)
% % % xlabel('x轴','FontSize',8,'LineWidth',2);%设置横坐标轴
% % ylabel('y轴','Fontname','宋体') %设置纵坐标轴
% % xlabel('s-指标浓度含量','FontSize',18,'LineWidth',2);
% % ylabel('f-促生因子','FontSize',16,'LineWidth',2);
%
%
% % t=linspace(0,80,100);
% % f1=exp(abs(sin(t))/10)-1;
% % plot(t,f1,'-','LineWidth',2.5)
%
%
% % clc,clear,close all
% % x=0:0.1:5;
```

```

%% % [X,Y]=meshgrid(x);
%% % % Z=sqrt(X.^2+Y.^2);
%% % Z=exp(-((X-3).^2)-((Y-3).^2))
%% % mesh(X,Y,Z)
%% % xlabel('PH值','FontSize',18,'LineWidth',2);
%% % ylabel('C/N比值','FontSize',16,'LineWidth',2);

```

主成分分析

function [tg xs q px newdt]=pca(h) %输入只能是以分析的指标变量为列，样本变量为行的数据！

```

h=zscore(h); %数据标准化
r=corrcoef(h); %计算相关系数矩阵
disp(' 计算的相关系数矩阵如下： ');
disp(r);
[x, y, z]=pcacov(r); %计算特征向量与特征值
s=zeros(size(z));
for i=1:length(z)
    s(i)=sum(z(1:i));
end
disp(' 由上计算出相关系数矩阵的前几个特征根及其贡献率：');
disp([z, s])
tg=[z, s];
f= repmat(sign(sum(x)), size(x, 1), 1);
x=x.*f;
n=input(' 请选择前 n 个需要计算的主成分： \n');
disp(' 由此可得选择的主成分系数分别为：');
for i=1:n
    xs(i,:)=(x(:, i))';
end

```

```

newdt=h*xs';
disp('以主成分的贡献率为权重，构建主成分综合评价模型系数:');
q=((z(1:n)./100)')
w=input('是否需要主成分综合评价?(y or n)\n');
if w==y
    df=h*x(:,1:n);
    tf=df*z(1:n)/100;
    [stf,ind]=sort(tf,'descend');%按照降序排列
    disp('主成分综合评价结果排序:');
    px=[ind,stf]
else
    return;
end
%% % clear
%% % clc
%% % A=[0.57 0.61    -22.94  -16.04  -29.35  -9.28   -35.61  -26.72  2.29
0.51    5   1039.02 1027.8  907.04  29.0    26.23  29.93  5.52   8.96
15.5
%% % 0.37    0.4 -19.49  -13.07  -26.56  2.39    -33.11  -23.86  3.3 0.76
8   1034.38 1022.1  904.53  27.7    18.19  29.93  5.56   9.22   15.5
%% % 0.63    0.67    -12.68  -5.22   -21.23  3.0 -31.0   -20.59  30.73
29.97  2   1029.22 1013.4  903.19  18.67  7.89    25.75  5.99   11.15
23.3
%% % 0.43    0.46    -14.32  -7.32   -22.05  1.39    -27.39  -19.74  153.16
59.94  12  1033.3  1018.0  906.06  18.75  7.56    29.29  5.14   8.72
15.5
%% % 0.59    0.63    -23.33  -18.58  -29.33  -6.22    -38.39  -27.26  4.32

```



```

1.27    4    1039.73 1024.3  907.46  19.31   7.08    29.29   5.34    8.41
13.6
% % 0.62    0.67    -15.84  -9.6    -23.03  3.5 -30.39  -21.06  891.79
59.94   26    1034.27 1023.8  909.39  21.2    11.59   29.93   5.3 9.22
17.5
% % 0.42    0.45    -18.81  -13.25  -25.83  -3.39   -33.89  -24.66  414.02
39.88   20    1034.07 1018.3  904.64  23.42   13.04   29.93   6.02   10.34
15.5
% % 0.74    0.79    -13.78  -7.89   -20.5   0.72    -26.28  -22.87  0.51
0.51    1    1034.67 1025.5  907.52  24.75   16.58   29.93   5.96   9.97
17.5
% % 0.33    0.36    -17.49  -10.54  -24.89  -2.72   -31.22  -21.13  4.06
2.79    3    1036.15 1024.7  907.1   17.65   7.56    29.93   4.93   7.77
13.0
% % 1.05    1.13    -20.03  -13.46  -27.67  -2.11   -37.78  -24.19  4.57
2.54    6    1032.13 1011.4  902.3   21.5    9.01    29.93   5.38   8.79
18.1
% % 0.41    0.44    -17.09  -8.99   -25.18  -2.0    -29.5   -21.92  607.31
39.88   29    1034.97 1020.3  906.26  24.09   7.56    29.93   4.37   7.25
12.6
% % ] %%%%更换数据即可
% % [n,m]=size(A);
% % for i=1:1:m
% % data=A(:,i)
% % N=2    %%%N表示预测数据的个数
% % L=5;%%%预测N个数值需要要的数据长度
% % [test_ty]=shengjingwangluo(data,L,N);

```

```
% % yuce(i,:)=test_ty
% % end
% % yuce
% %
% %
% %
% %
% %
% %
% %
% %
% %
% % function [test_ty]=shengjingwangluo(data,L,N)
% % price=data'
% %
% % whos
% % rng(now)
% %
% % %% 2.构造样本集
% % % 数据个数
% % n=length(price);
% %
% % % 确保price为列向量
% % price=price(:);
% %
% % % x(n) 由x(n-1),x(n-2),...,x(n-L)共L个数预测得到.
% %
% %
```

```

%% % price_n: 每列为一个构造完毕的样本，共n-L个样本
%% price_n = zeros(L+1, n-L);
%% for i=1:n-L
%%     price_n(:,i) = price(i:i+L);
%% end
%%
%% %%% 划分训练、测试样本
%% % 将前280份数据划分为训练样本
%% % 后51份数据划分为测试样本
%%
%% trainx = price_n(1:L-N+1,:);
%% trainy = price_n(L-N+2:end,:);
%% [ww,mm]=size(trainx);
%% testx = price(n-ww+1:n, end);
%%
%%
%% %%% 创建Elman神经网络
%%
%% % 包含15个神经元，训练函数为traingdx
%% net=elmannet(1:2,15,'traingdx');
%%
%% % 设置显示级别
%% net.trainParam.show=1;
%%
%% % 最大迭代次数为2000次
%% net.trainParam.epochs=30000;
%%

```

```
% % % 误差容限，达到此误差就可以停止训练
% % net.trainParam.goal=0.000001;
% %
% % % 最多验证失败次数
% % net.trainParam.max_fail=5;
% %
% % % 对网络进行初始化
% % net=init(net);
% %
% % %% 网络训练
% %
% % %训练数据归一化
% % [trainx1, st1] = mapminmax(trainx);
% % [trainy1, st2] = mapminmax(trainy);
% %
% % % 测试数据做与训练数据相同的归一化操作
% % testx1 = mapminmax('apply',testx,st1);
% %
% %
% % % 输入训练样本进行训练
% % [net,per] = train(net,trainx1,trainy1);
% %
% % %% 测试。输入归一化后的数据，再对实际输出进行反归一化
% %
% % % 将训练数据输入网络进行测试
% % train_ty1 = sim(net, trainx1);
% % train_ty = mapminmax('reverse', train_ty1, st2);
```

```

%%
%% % 将测试数据输入网络进行测试
%% test_ty1 = sim(net, testx1);
%% test_ty = mapminmax('reverse', test_ty1, st2);
%%
%% %% 显示结果
%% % 1.显示训练数据的测试结果
%% figure(1)
%% x=1:length(train_ty);
%%
%% % 显示真实值
%% plot(x,trainy,'b-');
%% hold on
%% % 显示神经网络的输出值
%% plot(x,train_ty,'r--')
%%
%% legend('股价真实值','Elman网络输出值')
%% title('训练数据的测试结果');
%%
%% % 显示残差
%% figure(2)
%% plot(x, train_ty - trainy)
%% title('训练数据测试结果的残差')
%%
%% % 显示均方误差
%% mse1 = mse(train_ty - trainy);
%% fprintf('      mse = \n      %f\n', mse1)

```

```
% %  
% % % 显示相对误差  
% % disp('    相对误差: ')  
% % fprintf('%f ', (train_ty - trainy)./trainy );  
% % fprintf('\n')  
% % % 显示预测值  
% % disp('    预测值: ')  
% % fprintf('%f ', test_ty );  
% % fprintf('\n')  
% %  
% % end
```