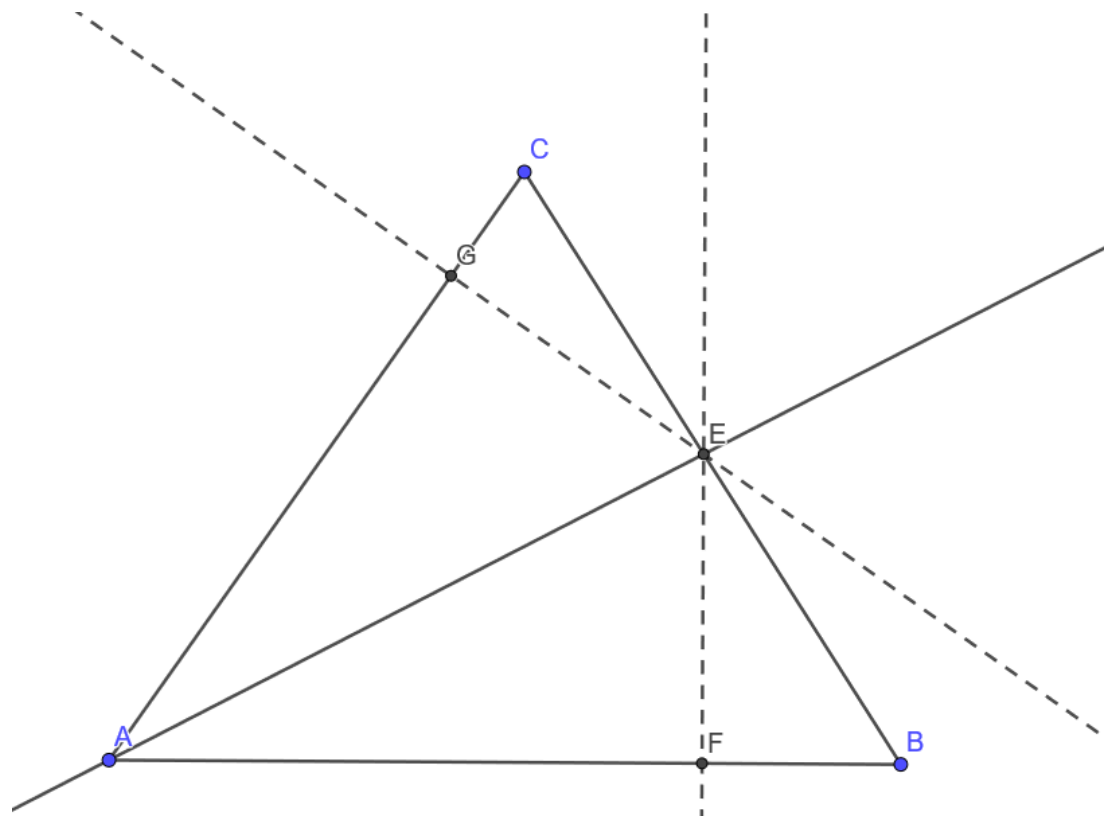


向量法探究三角形性质

三角形“三线”的向量表示

角平分线的向量表示



在 $\triangle ABC$ 中， AE 是 $\angle BAC$ 的角平分线

由角平分线性质，存在唯一 λ 满足 $AE = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{|\overrightarrow{AC}|} \overrightarrow{AC}$

由 C 、 E 、 B 三点共线得

$$\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\lambda}{|\overrightarrow{AC}|} = 1$$

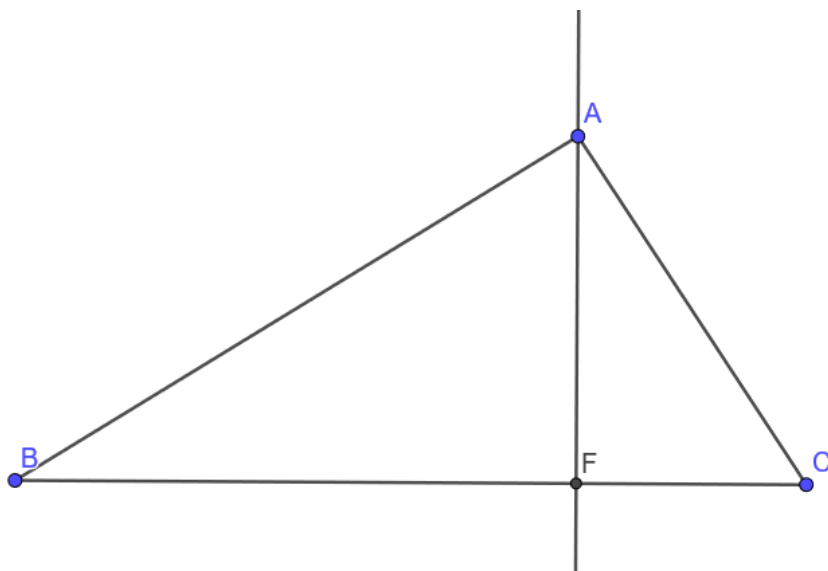
解得

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}$$

带入原式解得

$$\overrightarrow{AE} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|} \overrightarrow{AB} + \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|} \overrightarrow{AC}$$

高线的向量表示



$\triangle ABC$ 中, AF 是 BC 边上的高

由 $AF \perp BC$ 得

$$\begin{aligned}\vec{AF} \cdot \vec{BC} &= 0 \\ \vec{AF} \cdot \vec{AC} - \vec{AF} \cdot \vec{AB} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

由 B 、 F 、 C 三点共线, 存在 x 满足

$$\vec{AF} = x\vec{AB} + (1-x)\vec{AC}\tag{2}$$

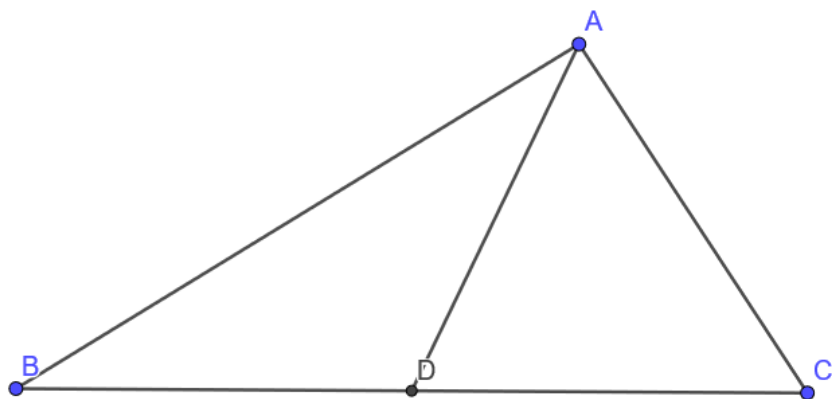
带入(1)解得

$$\begin{aligned}0 &= \vec{AF} \cdot \vec{AC} - \vec{AF} \cdot \vec{AB} \\ &= x\vec{AB} \cdot \vec{AC} + (1-x)\vec{AC}^2 - (1-x)\vec{AB} \cdot \vec{AC} - x\vec{AB}^2 \\ &= x(-\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AC}^2) + \vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ x &= \frac{\vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{(\vec{AB} - \vec{AC})^2}\end{aligned}$$

带入(2)解得

$$\vec{AF} = x\vec{AB} + (1-x)\vec{AC} = \frac{\vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{(\vec{AB} - \vec{AC})^2}\vec{AB} + \frac{\vec{AB}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{(\vec{AB} - \vec{AC})^2}\vec{AC}$$

中线的向量表示



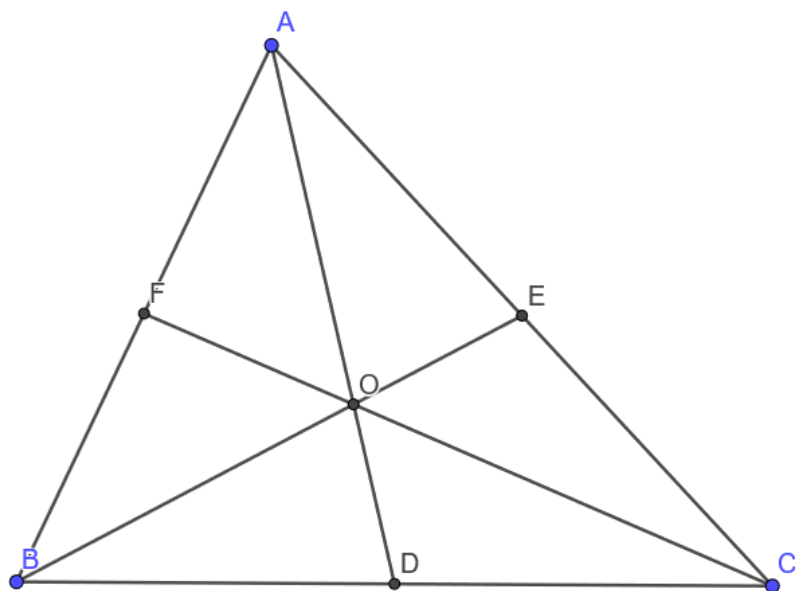
在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点

由向量定比分点公式

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

三角形“四心”问题

重心存在性



在 $\triangle ABC$ 中, 作 AB 中点 F , 作 AC 中点 E , 作 BC 中点 D , 连 AD 、 BE 、 CF , 其中 BE 与 CF 两线交于 O , 重心存在等价于 AD 过 O

设 $\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CF}$

$$\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CF} = \frac{x}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{x}{2}\overrightarrow{CB} = x\overrightarrow{CE} + \frac{x}{2}\overrightarrow{CB} \quad (1)$$

由 B 、 O 、 E 三点共线

$$x + \frac{x}{2} = 1$$

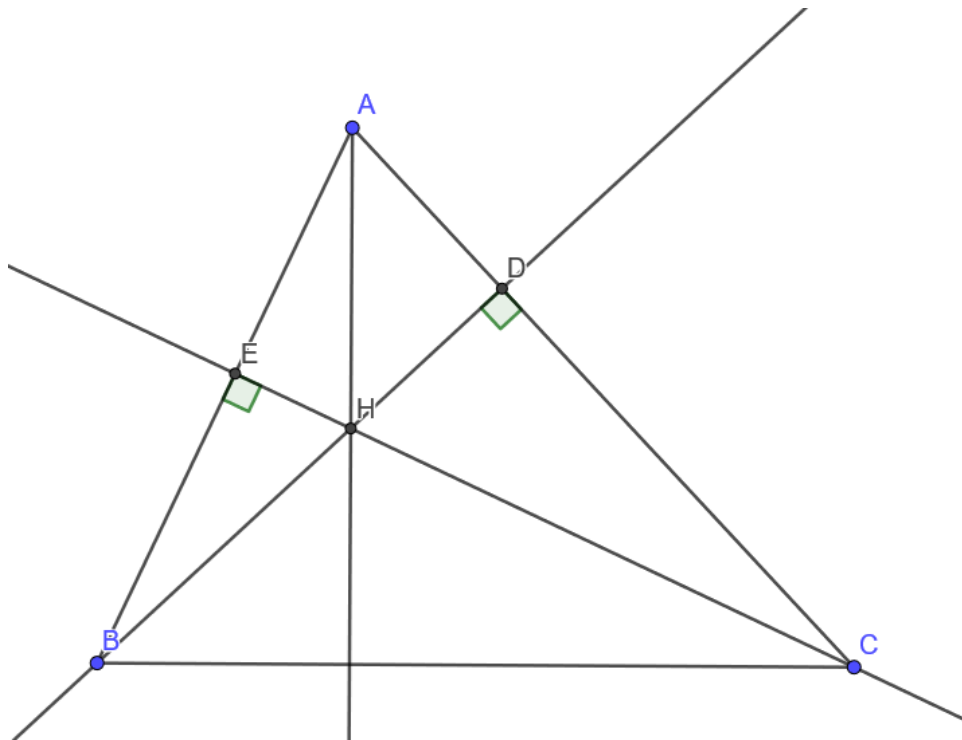
$$x = \frac{2}{3}$$

带入(1)得

$$\overrightarrow{CO} = \frac{x}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{x}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

得A、O、D三点共线

垂心存在性



在 $\triangle ABC$ 中, 分别过B、C作AC、AB垂线, 垂足分别为D、E, BD和CE交于H, 连AH, 垂心存在等价于 $AH \perp BC$

由 $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad (1)$$

由 $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$

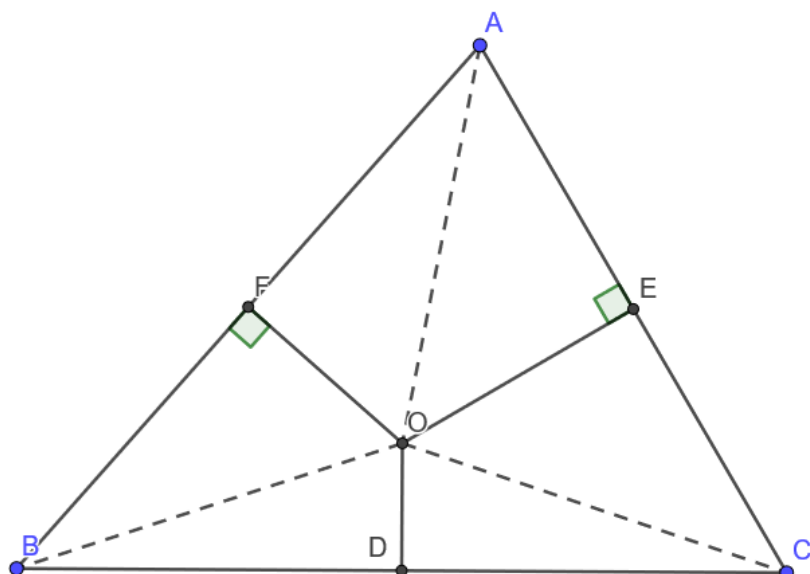
$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (2)$$

(1) - (2)得

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

得 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

外心存在性



在 $\triangle ABC$ 中, 分别作 AB 、 AC 中垂线 FO 、 EO , 交于 O 点; 作 BC 中点 D , 连 OD , 外心存在等价于 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{BC}$

连接 OA 、 OB 、 OC

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\overrightarrow{OA}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})^2} = \sqrt{\overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{EA}^2} \quad (1)$$

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\overrightarrow{OC}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC})^2} = \sqrt{\overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{EC}^2} \quad (2)$$

由 E 为 AC 中点, $|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{EC}|$, 联立(1), (2)

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| \quad (3)$$

同理有

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| \quad (4)$$

由(3), (4)

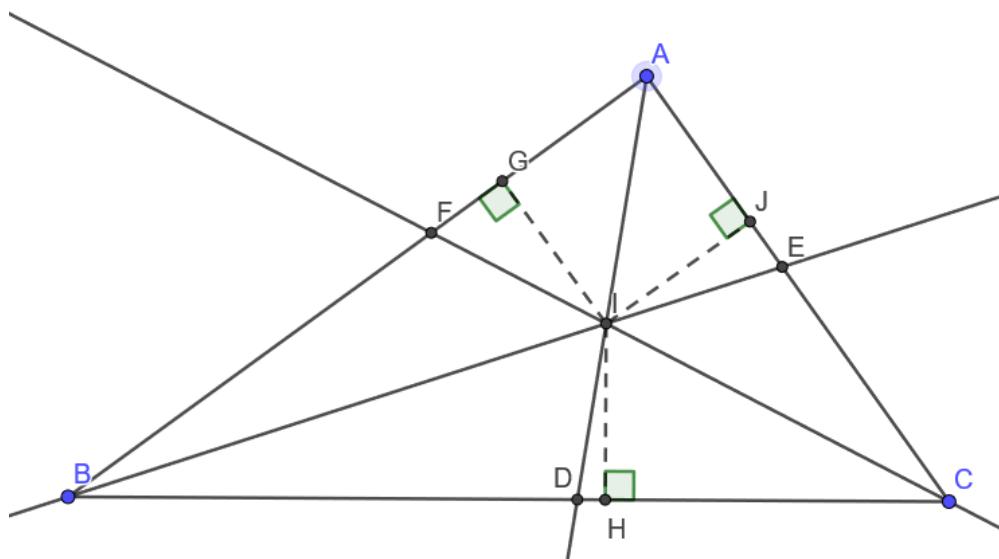
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}| &= |\overrightarrow{OC}| \\ (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB})^2 &= (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC})^2 \\ \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

由 D 为 BC 中点, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned}\vec{OD} \cdot \vec{DC} &= \vec{OD} \cdot \vec{DC} \\ \vec{OD} \cdot \vec{DC} &= 0\end{aligned}$$

得 $\vec{OD} \perp \vec{BC}$

内心存在性



在 $\triangle ABC$ 中, 分别作 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线 BE 、 CF , 两线交于 I ; 连 AI , 延长交 BC 于 H , 内心存在等价于 AD 为 $\angle BAC$ 角平分线

分别过 I 作 AB 、 BC 、 CA 垂线, 垂足分别为 G 、 H 、 J

引理: 一条直线为一个角的角平分线当且仅当这条直线上任意一点与角的两条边距离相等

- 必要性证明:

$$BI \text{ 为 } \angle ABC \text{ 当且仅当存在 } \lambda \text{ 满足 } \vec{BI} = \lambda \left(\frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{BI} &= \lambda \left(\frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} \right) \\ \Rightarrow \vec{BI} \cdot \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} &= \lambda + \lambda \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \vec{BI} \cdot \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} \\ \Rightarrow |\vec{BG}| &= |\vec{BH}| \\ \Rightarrow |\vec{IG}| &= \sqrt{|\vec{BI}|^2 - |\vec{BG}|^2} = |\vec{IH}|\end{aligned}$$

- 充分性证明:

$$|\vec{BG}| = \sqrt{|\vec{BI}|^2 - |\vec{IG}|^2} = |\vec{IH}|$$

$$\text{设 } \vec{BI} = x\vec{BG} + y\vec{BH}$$

$$\text{由 } \vec{IG} \perp \vec{BG}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BG} \\
 &= (\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{BG} \\
 &= (1-x)\overrightarrow{BG}^2 - y\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}
 \end{aligned} \tag{1}$$

由 $\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{BH}$

$$\begin{aligned}
 0 &= \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{BH} \\
 &= (\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{BH} \\
 &= (1-y)\overrightarrow{BH}^2 - x\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}
 \end{aligned} \tag{2}$$

联立(1), (2), 解得

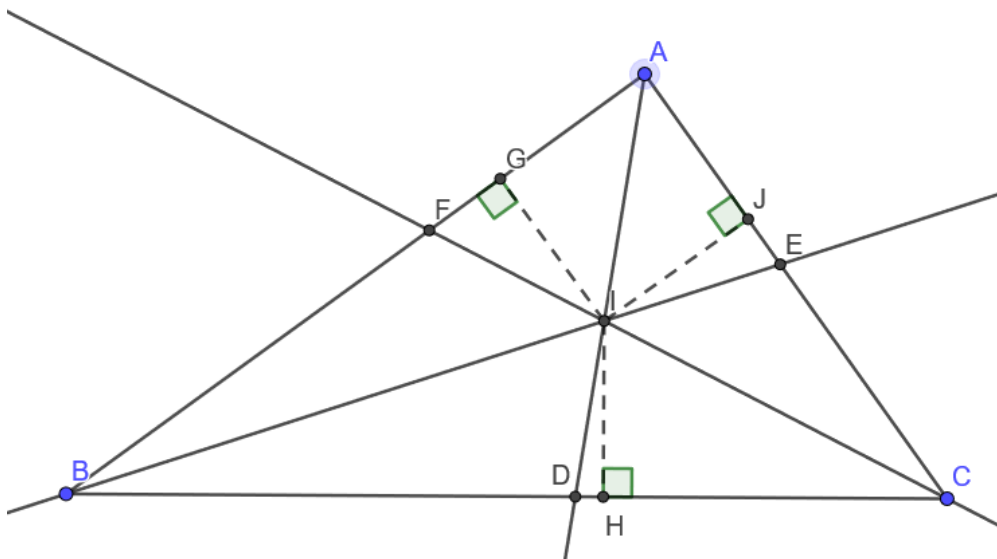
$$x = y = \frac{\overrightarrow{BG}^2}{\overrightarrow{BG}^2 + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}}$$

由 BI 、 CI 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线

$$|\overrightarrow{IH}| = |\overrightarrow{IG}| = |\overrightarrow{IJ}|$$

得 AI 为 $\angle BAC$ 的角平分线

内心结论



命题: I 为 $\triangle ABC$ 的内心当且仅当 $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$

分别过 I 作 AB 、 BC 、 CA 垂线, 垂足分别为 G 、 H 、 J

- 充分性证明:

$$\begin{aligned}
 a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} &= 0 \\
 -a\overrightarrow{AI} + b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) + c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) &= 0 \\
 b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} &= (a + b + c)\overrightarrow{AI}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{bc}{a+b+c} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{bc}{a+b+c} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

得 AI 平分 $\angle BAC$

同理可得 BI 、 CI 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$

I 为内心

- 必要性证明:

由内心性质

$$|\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{BH}|, |\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{AJ}|, \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CH}$$

$$\begin{cases} |\overrightarrow{BG}| + |\overrightarrow{AG}| = c \\ |\overrightarrow{AJ}| + |\overrightarrow{CJ}| = b \\ |\overrightarrow{CH}| + |\overrightarrow{BH}| = a \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} |\overrightarrow{BG}| = \frac{a-b+c}{2} \\ |\overrightarrow{AJ}| = \frac{-a+b+c}{2} \\ |\overrightarrow{CH}| = \frac{a+b-c}{2} \end{cases}$$

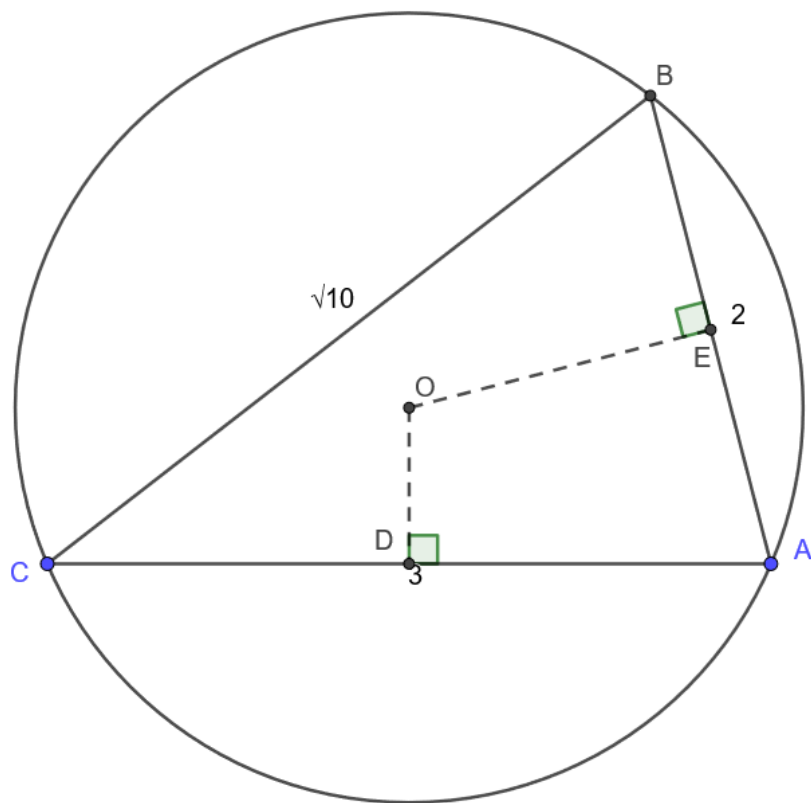
由上文的结论

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AG}^2}{\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AJ}} \overrightarrow{AG} + \frac{\overrightarrow{AG}^2}{\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AJ}} \overrightarrow{AJ} = \frac{bc}{a+b+c} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{bc}{a+b+c} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

由充分性证明中的(1)

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$$

应用



O 为 $\triangle ABC$ 的外心, $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{10}$, 求 \overrightarrow{AO} 用 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} 表示的结果
过 O 分别作 AB 、 AC 垂线, 垂足分别为 E 、 D

O 为 $\triangle ABC$ 外心, E 、 D 分别为 AB 、 AC 中点

$$\text{设 } \overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{2} - y\right)\overrightarrow{AC}^2 - x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \left(\frac{1}{2} - x\right)\overrightarrow{AB}^2 - y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned} \quad (2)$$

由(1), (2)解得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$$

参考文献

[1] 数学探究——用向量法研究三角形的性质 北大附中数学荣誉课程1