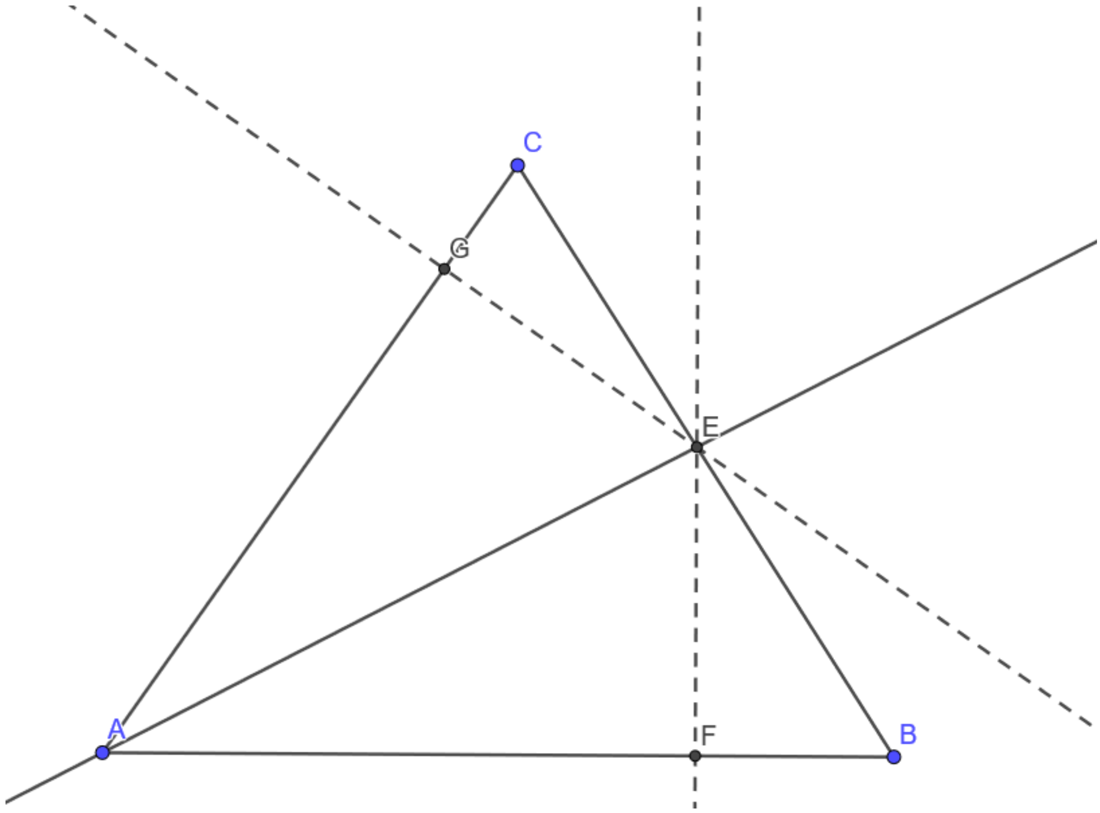
向量法探究三角形性质

概述

本文求出了三角形三线的向量表示，并用向量法证明了三角形四心相关命题

三角形“三线”的向量表示

角平分线的向量表示



在$\triangle ABC$中，AE是$\angle BAC$的角平分线

由角平分线性质，存在唯一λ满足$AE=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})=\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}$

由C、E、B三点共线得

$$\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AC}|}=1$$

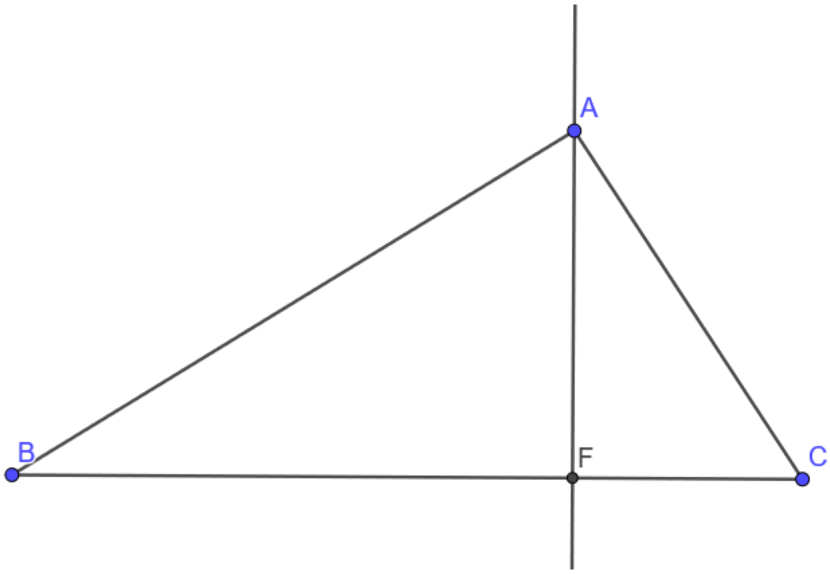
解得

$$\lambda=\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$$

带入原式解得

$$\overrightarrow{AE}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AB}+\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}$$

高线的向量表示



$\triangle ABC$中，AF是BC边上的高

由$AF\perp BC$得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{aligned}\tag{1}$$

由B、F、C三点共线，存在x满足

$$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}\tag{2}$$

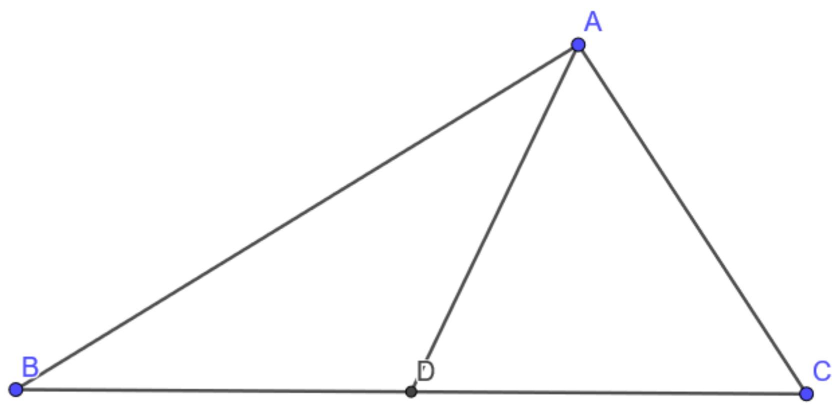
带入(1)解得

$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(1-x)\overrightarrow{AC}^2-(1-x)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}^2\\&=x(-\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2)+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\x&=\frac{\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}\end{aligned}$$

带入(2)解得

$$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}\overrightarrow{AC}$$

中线的向量表示



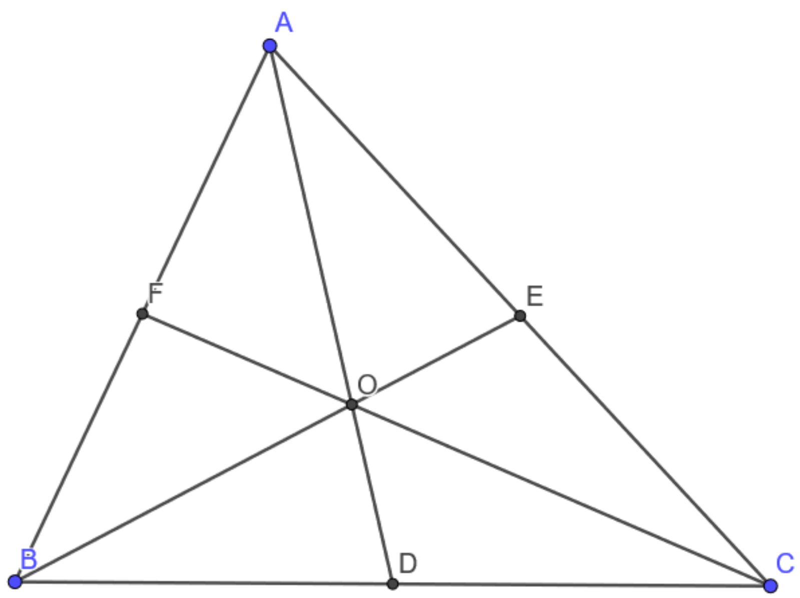
在$\triangle ABC$中，D为BC的中点

由向量定比分点公式

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

三角形“四心”问题

重心存在性



在$\triangle ABC$中，作AB中点F，作AC中点E，作BC中点D，连AD、BE、CF，其中BE与CF两线交于O，重心存在等价于AD过O

设$\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CF}$

$$\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CF}=\frac{x}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{x}{2}\overrightarrow{CB}=x\overrightarrow{CE}+\frac{x}{2}\overrightarrow{CB} \tag{1}$$

由B、O、E三点共线

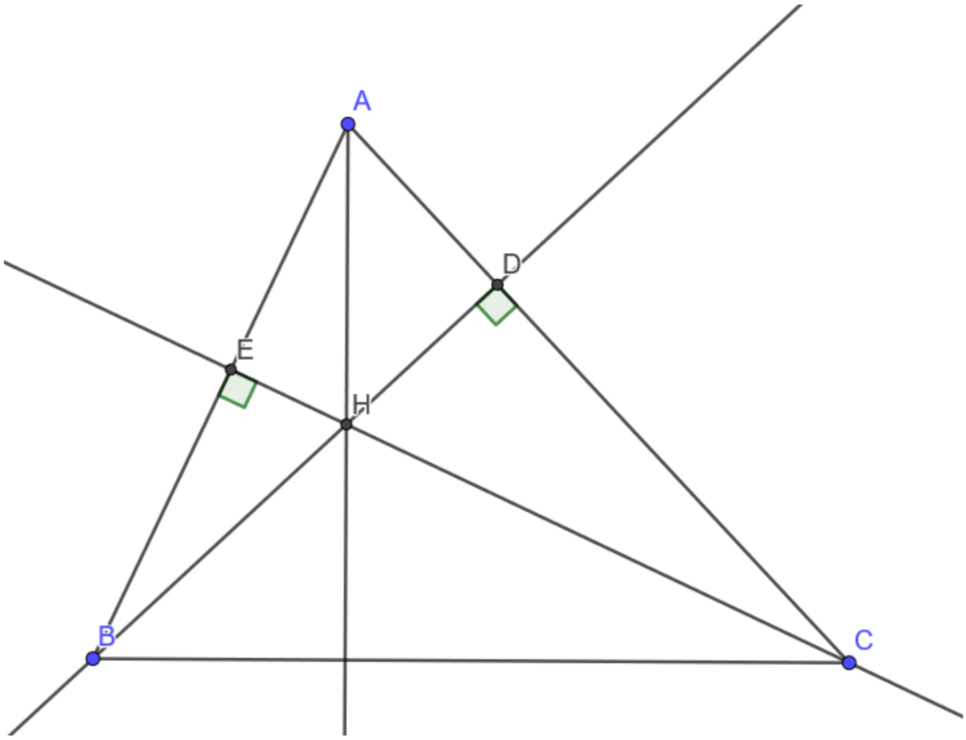
$$x+\frac{x}{2}=1$$
$$x=\frac{2}{3}$$

带入(1)得

$$\overrightarrow{CO}=\frac{x}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{x}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

得A、O、D三点共线

垂心存在性



在$\triangle ABC$中，分别过B、C作AC、AB垂线，垂足分别为D、E，BD和CE交于H，连AH，垂心存在等价于$AH\perp BC$

由$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0 \tag{1}$$

由$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

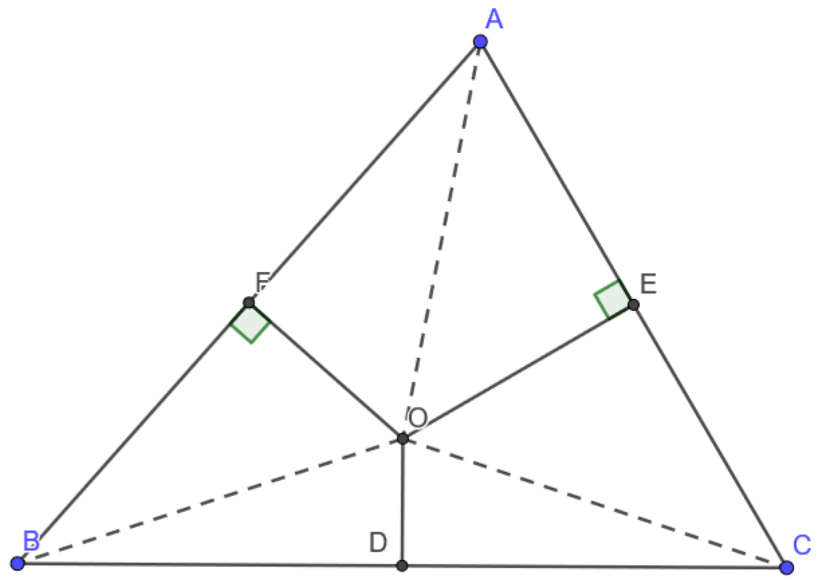
$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0 \tag{2}$$

$(1)-(2)$得

$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

得$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

外心存在性



在$\triangle ABC$中，分别作AB、AC中垂线FO、EO，交于O点；作BC中点D，连OD，外心存在等价于$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{BC}$

连接OA、OB、OC

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\overrightarrow{OA}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA})^2} = \sqrt{\overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{EA}^2} \tag{1}$$

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\overrightarrow{OC}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC})^2} = \sqrt{\overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{EC}^2} \tag{2}$$

由E为AC中点，$|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{EC}|$，联立$(1)$，$(2)$

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| \tag{3}$$

同理有

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| \tag{4}$$

由(3)，(4)

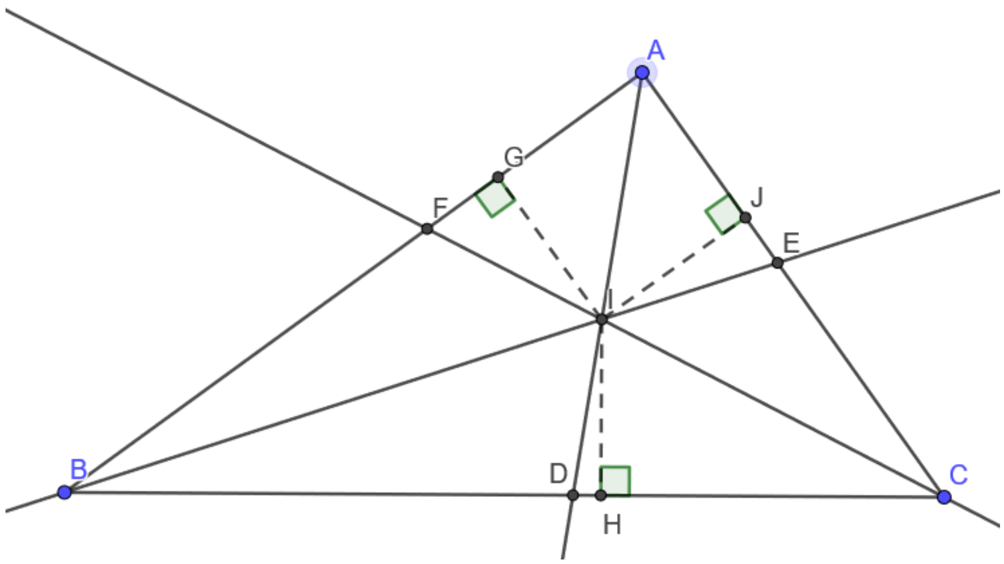
$$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$$
$$(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB})^2 = (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC})$$
$$\overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DC}$$

由D为BC中点，$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$

$$-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$$

得$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{BC}$

内心存在性



在$\triangle ABC$中，分别作$\angle ABC$、$\angle ACB$的角平分线BE、CF，两线交于I；连AI，延长交BC于H，内心存在等价于AD为$\angle BAC$角平分线

分别过I作AB、BC、CA垂线，垂足分别为G、H、J

> 引理：一条直线为一个角的角平分线当且仅当这条直线上任意一点与角的两条边距离相等

- 必要性证明：

  BI为$\angle ABC$当且仅当存在λ满足$\overrightarrow{BI}=\lambda(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|})$

$$\overrightarrow{BI}=\lambda(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|})$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{BI}\cdot\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\lambda+\lambda\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\overrightarrow{BI}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$$
$$\Rightarrow|\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{BH}|$$
$$\Rightarrow|\overrightarrow{IG}|=\sqrt{\overrightarrow{BI}^2-\overrightarrow{BH}^2}=|\overrightarrow{IH}|$$

- 充分性证明：

$$|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{\overrightarrow{BI}^2-\overrightarrow{IG}^2}=|\overrightarrow{IH}|$$

  设$\overrightarrow{BI}=x\overrightarrow{BG}+y\overrightarrow{BH}$

  由$\overrightarrow{IG}\perp\overrightarrow{BG}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BG} \\
&= (\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{BG} \\
&= (1-x)\overrightarrow{BG}^2 - y\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}
\end{aligned} \tag{1}
$$

由$\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{BH}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{BH} \\
&= (\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{BH} \\
&= (1-y)\overrightarrow{BH}^2 - x\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}
\end{aligned} \tag{2}
$$

联立(1)，(2)，解得

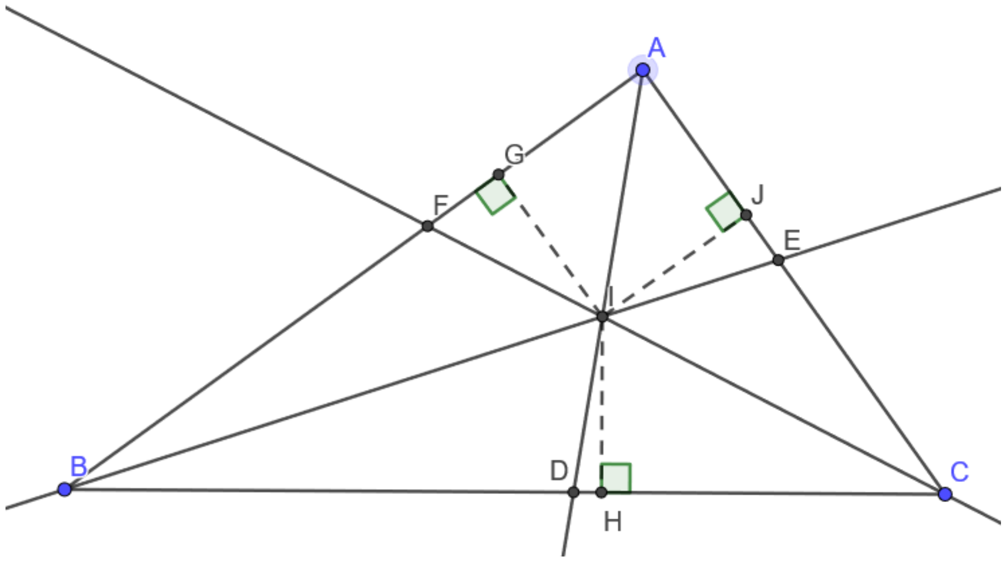
$$
x = y = \frac{\overrightarrow{BG}^2}{\overrightarrow{BG}^2 + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}}
$$

由BI、CI分别是$\angle ABC$、$\angle ACB$的角平分线

$$
|\overrightarrow{IH}| = |\overrightarrow{IG}| = |\overrightarrow{IJ}|
$$

得AI为$\angle BAC$的角平分线

内心结论



命题：I为$\triangle ABC$的内心当且仅当$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$

分别过I作AB、BC、CA垂线，垂足分别为G、H、J

- 充分性证明：

$$
\begin{aligned}
a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} &= 0 \\
-a\overrightarrow{AI} + b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) + c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) &= 0 \\
b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} &= (a+b+c)\overrightarrow{AI}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{bc}{a+b+c}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{bc}{a+b+c}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

得AI平分$\angle BAC$

同理可得BI、CI分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$

I为内心

- 必要性证明:

  由内心性质

  $|\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{BH}|$，$|\overrightarrow{AG}|=|\overrightarrow{AJ}|$，$\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CH}$

$$\begin{cases}|\overrightarrow{BG}|+|\overrightarrow{AG}|=c\\|\overrightarrow{AJ}|+|\overrightarrow{CJ}|=b\\|\overrightarrow{CH}|+|\overrightarrow{BH}|=a\end{cases}$$

  解得

$$\begin{cases}|\overrightarrow{BG}|=\frac{a-b+c}{2}\\|\overrightarrow{AJ}|=\frac{-a+b+c}{2}\\|\overrightarrow{CH}|=\frac{a+b-c}{2}\end{cases}$$

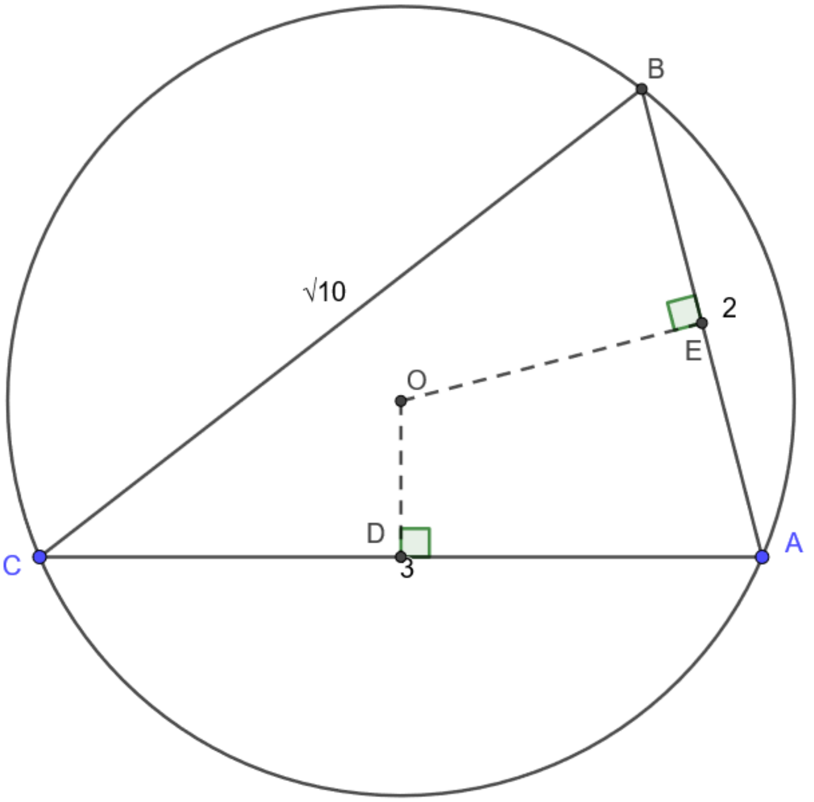
  由上文的结论

$$\overrightarrow{AI}=\frac{\overrightarrow{AG}^2}{\overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AJ}}\overrightarrow{AG}+\frac{\overrightarrow{AG}^2}{\overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AJ}}\overrightarrow{AJ}=\frac{bc}{a+b+c}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{bc}{a+b+c}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

  由充分性证明中的(1)

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=0$$

应用



O为$\triangle ABC$的外心，$AB=2$，$AC=3$，$BC=\sqrt{10}$，求$\overrightarrow{AO}$用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示的结果

过O分别作AB、AC垂线，垂足分别为E、D

O为$\triangle ABC$外心，E、D分别为AB、AC中点

设$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

由$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AC}\\&=(\frac{1}{2}-y)\overrightarrow{AC}^2-x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}\tag{1}$$

由$\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\frac{1}{2}-x)\overrightarrow{AB}^2-y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}\tag{2}$$

由(1)，(2)解得

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{4}{9}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$$

参考文献

[1] 数学探究——用向量法研究三角形的性质 北大附中数学荣誉课程1