

Travaux dirigés n°3

Xavier JUVIGNY

November 24, 2021

Contents

1	Produit scalaire	1
2	Produit matrice–matrice	1
3	Tri bitonique	2
3.1	Tri d’une suite bitonique	3
3.2	Travail à faire	4
4	Ensemble de Bhudda	4

1 Produit scalaire

- À partir du fichier `dotproduct.cpp`, paralléliser le calcul du produit scalaire à l’aide de directives OPENMP;
- Calculer l’accélération du produit scalaire en faisant varier le nombre de threads à l’aide de la variable d’environnement `OMP_NUM_THREADS`. Expliquez clairement le résultat que vous obtenez pour l’accélération.
- Compilez la deuxième version du produit scalaire parallélisée à l’aide des threads C++ 2011 (`dotproduct_thread.cpp`) et calculez l’accélération en faisant varier dans le code le nombre de threads employés.
- Comparer les temps de calcul pour les deux approches;
- Expliquez pourquoi il n’est pas possible d’améliorer le résultat que vous avez obtenu.

2 Produit matrice–matrice

Soient A et B deux matrices définies à l’aide de deux couples de vecteurs $\{u_A, v_A\}$ et $\{u_B, v_B\}$:

$$\begin{cases} A &= u_A.v_A^T \text{ soit } A_{ij} = u_{A_i}.v_{A_j} \\ B &= u_B.v_B^T \text{ soit } B_{ij} = u_{B_i}.v_{B_j} \end{cases}$$

On calcule le produit matrice–vecteur $C=A.B$ à l’aide d’un produit matrice–matrice plein (complexité de $2.n^3$ opérations arithmétiques) et on valide le résultat obtenu à l’aide de l’expression sous forme de produit tensoriel de A et B :

$$\begin{aligned} C &= A.B &= (u_A.v_A^T).(u_B.v_B^T) &= u_A(v_A^T.u_B)v_B^T \\ &= u_A(v_A|u_B)v_B^T &= (v_A|u_B)u_A.v_B^T \end{aligned}$$

Soit

$$C_{ij} = (v_A|u_B)u_{A_i}.v_{B_j}$$

ce qui nécessite en tout $2.n + 2.n^2$ opérations arithmétiques (dont $2.n$ opérations pour le produit scalaire).

On se propose par étape de paralléliser le produit matrice–matrice fourni dans le fichier `ProdMatMat.cpp`. L’exécutable pour tester le produit matrice-matrice est `TestProduitMatrix.exe` :

1. Mesurer le temps de calcul du produit matrice-matrice donné en donnant en entrée diverses dimensions. Essayez en particulier de prendre pour dimension 1023, 1024 et 1025 (il suffit de passer la dimension en argument à l'exécution. Par exemple `./TestProductMatrix.exe 1023` testera le produit matrice-matrice pour des matrices de dimension 1023). En vous servant du support de cours `IN203_Course3_Lecture_notes.pdf`, expliquez clairement les temps obtenus.
2. **Première optimisation** : Permutez les boucles en i, j et k jusqu'à obtenir un temps optimum pour le calcul du produit matrice-matrice (et après vous être persuadé que cela ne changera rien au résultat du calcul). Expliquez pourquoi la permutation des boucles optimales que vous avez trouvée est bien la façon optimale d'ordonner les boucles en vous servant toujours du support de cours.
3. **Première parallélisation** : À l'aide d'OpenMP, paralléliser le produit matrice-matrice. Mesurez le temps obtenu en variant le nombre de threads à l'aide de la variable d'environnement `OMP_NUM_THREADS`. Calculez l'accélération et le résultat obtenu en fonction du nombre de threads et commentez et expliquez clairement les résultats obtenus.
4. Argumentez et donnez clairement la raison pour laquelle il est sûrement possible d'améliorer le résultat que vous avez obtenu.
5. **Deuxième optimisation** : Pour pouvoir exploiter au mieux la mémoire cache, on se propose de transformer notre produit matrice-matrice "scalaire" en produit matrice-matrice par bloc (on se servira pour le produit "bloc-bloc" de la meilleure version **séquentielle** du produit matrice-matrice obtenu précédemment).

L'idée est de décomposer les matrices A, B et C en sous-blocs matriciels :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & & & A_{NN} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & & & B_{NN} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & & & C_{NN} \end{pmatrix}$$

où A_{IJ}, B_{IJ} et C_{IJ} sont des sous-blocs possédant une taille fixée (par le programmeur).

Le produit matrice-matrice se fait alors par bloc. Pour calculer le bloc C_{IJ} , on calcul

$$C_{IJ} = \sum_{K=1}^N A_{IK} \cdot B_{KJ}$$

Mettre en œuvre ce produit matrice-matrice en séquentiel puis faire varier la taille des blocs jusqu'à obtenir un optimum.

6. Comparer le temps pris par rapport au produit matrice-matrice "scalaire". Comment interprétez vous le résultat obtenu ?
7. **Parallélisation du produit matrice-matrice par bloc** : À l'aide d'OpenMP, parallélisez le produit matrice-matrice par bloc puis mesurez l'accélération parallèle en fonction du nombre de threads. Comparez avec la version scalaire paralléliser. Comment expliquez vous ce résultat ?

3 Tri bitonique

Le tri bitonique est un des tris les plus performants dans un contexte parallèle. Il se base sur une suite dite *bitonique*.

Définition 1 Une suite a_0, a_1, \dots, a_{n-1} est dite **bitonique** si il existe un élément $a_i, 0 < i < n-1$ tel qu'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_{n-1}$ ou
- $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_i \leq a_{i+1} \leq \dots \leq a_{n-1}$ ou
- un décalage d'indice devrait satisfaire une des deux relations ci-dessus.

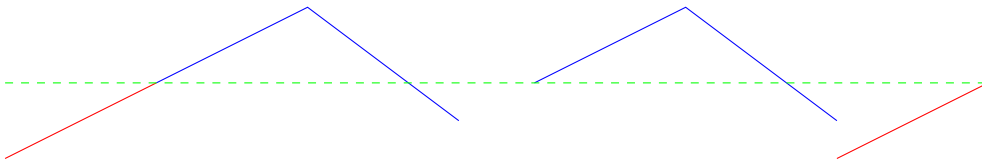


Figure 1: Exemples de suites bitoniques

L'algorithme de tri se base sur le théorème de division bitonique :

Théorème 1 Soit une suite bitonique $a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}$. On définit les sous-suites :

$$\begin{aligned} x_i &= \min(a_i, a_{i+n}) \text{ pour } i = 0, \dots, n-1 \\ y_i &= \max(a_i, a_{i+n}) \text{ pour } i = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Alors les deux suites x_0, x_1, \dots, x_{n-1} et y_0, y_1, \dots, y_{n-1} sont des suites bitoniques et chaque éléments de la suite x_i sont plus petits que les éléments de la suite y_i .

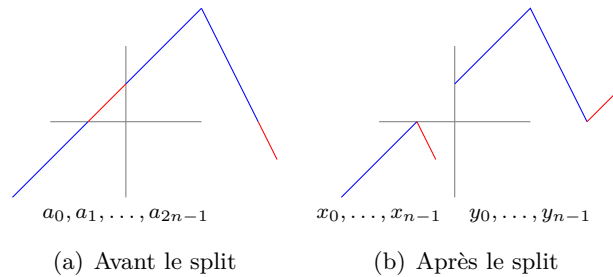
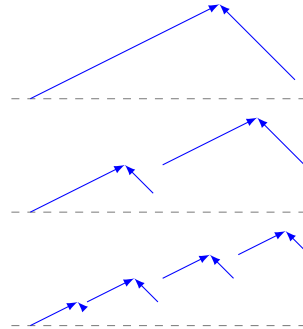


Figure 2: Exemple de split bitonique

3.1 Tri d'une suite bitonique

Soit une suite bitonique de n éléments. Si on applique le théorème récursivement :



Après $\log(n-1)$ pas, chaque suite bitonique possédera seulement deux éléments qui pourront être triés trivialement.

L'algorithme complet de tri consistera donc à :

1. Trier les $\frac{n}{2}$ premiers éléments dans l'ordre croissant et les derniers $\frac{n}{2}$ éléments dans l'ordre décroissant
2. Trier la suite bitonique résultante en $\log n$ étapes.

Comment trier $\frac{n}{2}$ éléments ? \Rightarrow Récursivement

La complexité de l'algorithme de tri est de :

- $\log(n)$ étapes;
- Chaque pas i demande i sous-pas

Donc le nombre de pas est donc :

$$\text{Nombre de pas} = \sum_{i=1}^{\log(n)} i = \frac{1 + \log(n)}{2} \log(n)$$

3.2 Travail à faire

Utiliser la version du tri fourni en séquentiel pour trier un tableau d'entier puis un tableau de vecteurs selon leurs normes L2.

Paralléliser à l'aide des threads de C++ 2011 l'algorithme de tri puis calculer l'accélération obtenue pour le tri sur les entiers puis pour le tri sur les vecteurs.

Comment interprétez-vous la différence d'accélération entre le tri sur les entiers et le tri sur les vecteurs ?

4 Ensemble de Bhudda

L'ensemble de Bhudda est un ensemble dérivé de l'ensemble de Mandelbrot. Au lieu de dessiner des pixels en fonction du nombre d'itérations nécessaires à la détection éventuelle de divergence de la suite, on augmente l'intensité de chaque pixel par lesquels une suite divergente est passée (on ne fait rien pour les suites convergentes).

À l'aide d'OpenMP, paralléliser le code Bhudda donné dans le fichier `bhudda.cpp` et mesurer l'accélération obtenue en fonction du nombre de threads pris pour l'exécution.