RO202 - Initiation à la Recherche Opérationnelle

Zacharie Ales, Cristian Duran

2021 - 2022

EXERCICES 3 - Programmation linéaire

Exercise 1

Soit le programme linéaire suivant.

$$\begin{cases} \max F = 2x + y \\ \text{s.c.} \quad y \geq x - 4 \\ \qquad y \leq 8 \\ \qquad 8x + 5y \leq 56 \\ \qquad x, \ y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Remplacer $x, y \in \mathbb{N}$ par $x, y \in \mathbb{Z}$

1. Résoudre la relaxation linéaire du programme graphiquement.
2. Même question si on remplace la fonction économique par $G = x + 6y$
3. Qu'en déduisez-vous sur l'optimalité d'une solution obtenue dans les deux cas par l'algorithme du simplexe ?
4. Ecrire le problème sous forme standard.

Exercise 2

Soit le système suivant (forme standard) :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \quad (C_1) \\ \qquad x_2 + 3x_3 + x_5 = 6 \quad (C_2) \\ \qquad 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 \quad (C_3) \\ \qquad x_1, \ \ldots, \ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

et soit la solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$.

1. Vérifier que c'est une solution de base réalisable et calculer les coûts réduits. Quelle est sa valeur ? Est-ce une solution optimale ? Pourquoi ?

   Remarque : Vous pourrez utiliser les tableaux à compléter figurant en fin de TD
2. Calculer une solution optimale en utilisant l'algorithme du simplexe et en prenant comme base initiale celle de la question précédente.

Exercise 3 Implémentation

L'objectif de cet exercice est d'implémenter la méthode `pivot()` de la classe `Tableau`.

Cette classe représente un programme linéaire sous forme normale. Elle contient, notamment, les attributs suivants :

— `int n, int m, double[][] A, double[] b, double[] c` : décrivent le tableau ;
— `int[] basis` : indice des variables actuellement en base
(ou `null` si la base n'est pas encore définie) ;
— `isMinimization` : `true` si on minimise l'objectif, `false` si on maximise.

ainsi que les méthodes :

— `boolean pivot()` : effectue un pivot en utilisant la base figurant dans `basis` :

1. met le tableau sous forme canonique ;

2. identifie la variable entrante et la variable sortante ;
3. retourne `true` si une nouvelle base est trouvée et `false` si l'optimum est atteint.

— `applySimplex()` : résout le problème en effectuant des pivots successifs ;
— `tableauWithSlack()` : ajoute une variable d'écart à chaque contrainte et utilise ces variables pour définir une base.

Il existe deux façons d'utiliser cette classe pour résoudre un programme linéaire à partir d'un `Tableau t` :

1. `t.applySimplex()` : à utiliser quand le programme est sous forme normale ($Ax = b$) et qu'une base est connue ;
2. `t.addSlackAndSolve()` : à utiliser quand le programme est sous la forme $Ax \leq b$.

1. Inclure à votre projet java les fichiers `Tableau.java` et `Utility.java`.
2. Compléter la méthode `pivot()` pour mettre le tableau sous forme canonique.
3. Identifier la nouvelle base
   a) Identifier la variable sortante et l'afficher (pensez à prendre en compte l'attribut `isMinimization`).

   Remarque : Les calculs de réels en informatique ne sont pas toujours exacts. C'est pourquoi un réel sera considéré positif s'il est supérieur à 10^{-6} et négatif s'il est inférieur à -10^{-6}.

   b) Identifier la variable sortante et l'afficher.
4. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 1.
5. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 2.

Exercise 4

Utiliser votre implémentation du simplexe afin de résoudre les problèmes suivants et donner leur solution optimale :

$$\begin{aligned} z = \max\ & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{tel que}\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z = \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{tel que}\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exercise 5

Soit le système suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \quad \text{s.c. } 2x_1 + x_2 \geq 3 \ (C_1) \\ \quad 2x_1 - x_2 \geq 5 \ (C_2) \\ \quad x_1 + 4x_2 \geq 6 \ (C_3) \\ \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \ (C_4) \end{cases}$$

1. Ecrire le dual et les "contraintes des écarts complémentaires".
2. La solution $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?
3. La solution $x_1 = \frac{26}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?

Aide pour l'exercice 2

Tableau initial

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
(C_1)							
(C_2)							
(C_3)							
(Obj)							

Première étape de mise en forme canonique pour la base $\{x_1, x_3, x_6\}$

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$							
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$							
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$							
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	RHS
$(C_1) \leftarrow$							
$(C_2) \leftarrow$							
$(C_3) \leftarrow$							
$(Obj) \leftarrow$							