

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Розширення мови SIPL:
Масиви

Виконав:
студент першого року магістратури
групи ШІ-1
Боровик Олег Миколайович

Київ - 2021

Синтаксис (БНФ)

Таблиця 1:

Ліва частина правила – метазмінна	Права частина правила	Ім'я правила
<програма> ::=	begin <оператор> end	NP1
<оператор> ::=	<змінна> := <вираз> <змінна масиву> := [<масив>] <елемент масиву> := <вираз> <оператор> ; <оператор> if <умова> then <оператор> else <оператор> while <умова> do <оператор> begin <оператор> end skip	NS1-NS8
<вираз> ::=	<число> <елемент масиву> <змінна> <вираз> + <вираз> <вираз> – <вираз> <вираз> * <вираз> (<вираз>)	NA1 ... NA6
<умова> ::=	<вираз> = <вираз> <вираз> > <вираз> <умова> v<умова> !<умова> (<умова>)	NB1 ... NB5
<масив> ::=	<вираз> <вираз> , <масив>	NM1
<елемент масиву> ::=	<змінна масиву> [<вираз>]	NE1
<змінна масиву> ::=	... M_A N_A ...	NA...

<змінна> ::=	... M N ...	NV...
<число> ::=	... -1 0 1 2 3 ...	NN...

Таблиця 2:

Метазмінна	Синтаксична категорія	Нова метазмінна
<програма>	Prog	P
<оператор>	Stm	S
<вираз>	Aexp	a
<умова>	Bexp	b
<змінна>	Var_N	x
<число>	Num	n
<елемент масиву>	Cexp	e
<змінна масиву>	Var_A	m
<масив>	Dexp	L

У наведених позначеннях БНФ мови SIPL набуває такого вигляду:

Таблиця 3:

Ліва частина правила – метазмінна	Права частина правила	Ім'я правила
$P ::=$	begin S end	P1
$S ::=$	$x := a \mid m_1 := m_2 \mid m := [L] \mid e := a \mid S_1 ; S_2 \mid \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \mid \text{while } b \text{ do } S \mid \text{begin S end} \mid \text{skip}$	S1–S6
$a ::=$	$n \mid x \mid e \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid (a)$	A1– A6
$b ::=$	$a_1 = a_2 \mid a_1 > a_2 \mid b_1 \vee b_2 \mid !b \mid (b)$	B1 – B5
$e :=$	$m[a]$	ArrE
$L ::=$	$a \mid a, L$	Arr
$x ::=$	$\dots M \mid N \mid \dots$	NV...
$m :=$	$\dots M_A \mid N_A \mid \dots$	NA...
$n ::=$	$\dots -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \dots$	NN...

Отримали багатоосновну алгебру даних мови SIPL_Arr:

$A_Int_Bool_State_Arr = \langle Int, Bool, State, Arr; \text{add, sub, mult, or, neg, eq, gr, index, } \Rightarrow x, x \Rightarrow, \Rightarrow m, m \Rightarrow, \hat{n}, \text{id}, \nabla \rangle$

Композиційна семантика

Визначимо тепер класи функцій, які будуть задіяні при визначенні семантики SIPL_Arr:

1. N-арні операції над базовими типами:

- $FNA = Int \xrightarrow{n} Int$ - n-арні арифметичні функції (операції);
- $FNB = Bool \xrightarrow{n} Bool$ - n-арні булеві функції (операції);
- $FNAB = Int \xrightarrow{n} Bool$ - n-арні функції (операції) порівняння над булевими типами даних;

- $FNArr = Int, Arr \rightarrow Int$ - 2-арна функція (операція) індексування масиву

2. Функції над станами змінних:

- $FA = State \rightarrow Int$ - номінативні арифметичні функції;
- $FB = State \rightarrow Bool$ - номінативні предикати;
- $FArr = State \rightarrow Arr$ - номінативні функції над масивами
- $FS = State \rightarrow State$ - біномінативні функції-перетворювачі (трансформатори) станів

Отримали алгебру функцій (програмну алгебру):

$A_Prog_Arr = \langle FNA, FNB, FNAB, FNArr, FA, FB, FArr, FS; S^n, AS^x, AS^m, ASM^m, \bullet, IF, WH, x \Rightarrow, m = \rangle, id \rangle$

Формули для обчислення композицій і функцій алгебри A_Prog_Arr :

Таблиця 4:

Композиція	Формула обчислення	Ім'я формули
Суперпозиція	$(S^n(f, g_1, \dots, g_n))(st) = f(g_1(st), \dots, g_n(st))$	AF_S
Присвоювання	$AS^x(fa)(st) = st \nabla [x \rightarrow fa(st)]$ $AS^m(fa)(st) = st \nabla [m \rightarrow fa(m)]$ $ASM^m(fa_1, fa_2)(st) = st \nabla$ $[m \rightarrow [m^0, m^1, \dots, m^{i-1}, fa_2(st), m^{i+1}, \dots, m^{n-1}]],$ де $i = fa_1(st)$, n – кількість елементів у m	AF_AS AF_AS_Arr AF_AS_ArrE
Послідовне виконання	$fs_1 \bullet fs_2(st) = fs_2(fs_1(st))$	AF_SEQ
Умовний оператор	$IF(fb, fs_1, fs_2)(st) =$ $fs_1(st)$, якщо $fb(st) = true$, $fs_2(st)$, якщо $fb(st) = false$	AF_IF
Цикл	$WH(fb, fs)(st) = st_n$, де $st_0 = st$, $st_1 = fs(st_0)$, $st_2 = fs(st_1), \dots$, $st_n = fs(st_{n-1})$, Причому $fb(st_0) = true, fb(st_1) = true, \dots$, $fb(st_{n-1}) = true, fb(st_n) = false$.	AF_WH
Функція розіменування	$x \Rightarrow (st) = st(x)$ $m \Rightarrow (st) = st(m)$	AF_DNM_N AF_DNM_Arr
Тотожна функція	$id(st) = st$	AF_ID

Програма мови SIPL може бути перетворена на семантичний терм (терм програмної алгебри), який задає її семантику (семантичну функцію), перетвореннями такого типу:

- $sem_P: Prog \rightarrow TFS$;

- $sem_S: Stm \rightarrow TFS$;
- $sem_A: Aexp \rightarrow TFA$;
- $sem_B: Bexp \rightarrow TFB$.
- $sem_Arr: State \rightarrow TFArr$

де TFS, TFS, TFA, TFB, TFArr задають відповідні множини термів

Правила перетворення програми на семантичний терм:

Таблиця 5:

Правило заміни	Назва правила
$sem_P: Prog \rightarrow FS$ задається правилами:	
$sem_P(begin\ S\ end) = sem_S(S)$	NS_Prog
$sem_S: Stm \rightarrow FS$ задається правилами:	
$sem_S(x:=a) = AS^x(sem_A(a))$	NS_Stm_As
$sem_S(S_1; S_2) = sem_S(S_1) \bullet sem_S(S_2)$	NS_Stm_Seq
$sem_S(m := [a_1, \dots, a_n])$ $= AS^m(sem_Arr([a_1, \dots, a_n]))$	NS_Stm_ArIni
$sem_S(m[a_1] := a_2)$ $= ASM^m(sem_A(a_1), sem_A(a_2))$	NS_Stm_ArAs
$sem_S(if\ b\ then\ S_1\ else\ S_2) = IF(sem_B(b), sem_S(S_1),$ $sem_S(S_2))$	NS_Stm_If
$sem_S(while\ b\ do\ S) = WH(sem_B(b), sem_S(S))$	NS_Stm_Wh
$sem_S(begin\ S\ end) = (sem_S(S))$	NS_Stm_Op
$sem_S(skip) = id$	NS_Stm_skp

$sem_A: Aexp \rightarrow FA$ задається правилами:	
$sem_A(n) = \bar{n}$ $sem_A(x) = x \Rightarrow$ $sem_A(a_1 + a_2) = S^2(add, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_A(a_1 - a_2) = S^2(sub, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_A(a_1 * a_2) = S^2(mult, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_A(a_1 \div a_2) = S^2(div, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_A((a)) = sem_A(a)$ $sem_A(m[a]) = S^2(index, m, sem_A(a))$	NS_A_Num NS_A_Var NS_A_Add NS_A_Sub NS_A_Mult NS_A_Div NS_A_Par NS_A_index
$sem_B: Bexp \rightarrow FB$ задається правилами:	
$sem_B(true) = true$ $sem_B(false) = false$ $sem_B(a_1 < a_2) = S^2(less, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_B(a_1 \leq a_2) = S^2(less, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_B(a_1 = a_2) = S^2(eq, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_B(a_1 \neq a_2) = S^2(neq, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_B(a_1 \geq a_2) = S^2(geq, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_B(a_1 > a_2) = S^2(gr, sem_A(a_1), sem_A(a_2))$ $sem_B(b_1 \vee b_2) = S^2(or, sem_B(b_1), sem_B(b_2))$ $sem_B(b_1 \wedge b_2) = S^2(and, sem_B(b_1), sem_B(b_2))$ $sem_B(\neg b) = S^1(neg, sem_B(b))$ $sem_B((b)) = sem_B(b)$	NS_B_true NS_B_false NS_B_less NS_B_less NS_B_eq NS_B_neq NS_B_geq NS_B_gr NS_B_or NS_B_and NS_B_neg NS_B_Par
$sem_Arr: Arr_exp \rightarrow FArr$ задається правилами:	
$sem_Arr((m)) = sem_Arr(m)$ $sem_Arr(m) = m \Rightarrow$ $sem_Arr([a_1, a_2, \dots, a_n])$ $\quad = [sem_A(a_1), sem_A(a_2), \dots, sem_A(a_n)]$	NS_Arr_Par NS_Arr_Var NS_Arr_seq

Побудуємо семантичний терм програми REVERSE_Arr(M, n), обернення масиву (для зручності відступимо від правил іменування змінних заданих в БНФ):

```
sem_P(REVERSE_Arr) = sem_P(begin
    i := 0;
    halfLen := n / 2;
    while i < halfLen do
        begin
            temp := M[i];
            M[i] := M[n-i-1];
            M[n-i-1] := temp;
            i := i + 1;
        end
    end)=
```

$sem_S(i := 0; halfLen := n / 2; while\ i < halfLen\ do\ begin\ temp := M[i];\ M[i] := M[n-i-1];\ M[n-i-1] := temp;\ i := i + 1;\ end) =$

$sem_S(i := 0) \bullet sem_S(halfLen := n / 2) \bullet sem_S(while\ i < halfLen\ do\ begin\ temp := M[i];\ M[i] := M[n-i-1];\ M[n-i-1] := temp;\ i := i + 1;\ end) =$

$AS^i(sem_A(0)) \bullet AS^{halfLen}(sem_A(n / 2)) \bullet WH(sem_B(i < halfLen), sem_S(begin\ temp := M[i];\ M[i] := M[n-i-1];\ M[n-i-1] := temp;\ i := i + 1;\ end)) =$

$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, sem_A(n), sem_A(2))) \bullet WH(S^2(less, sem_A(i), sem_A(halfLen)), sem_S((temp := M[i];\ M[i] := M[n-i-1];\ M[n-i-1] := temp;\ i := i + 1;))) =$

$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) \bullet WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), sem_S(temp := M[i]) \bullet sem_S(M[i] := M[n-i-1]) \bullet sem_S(M[n-i-1] := temp) \bullet sem_S(i := i + 1))) =$

$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) \bullet WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), AS^{temp}(sem_A(M[i])) \bullet ASM^M(sem_A(i), sem_A(M[n-i-1])) \bullet ASM^M(sem_A(n-i-1), sem_A(temp)) \bullet AS^i(sem_A(i + 1))) =$

$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) \bullet WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), AS^{temp}(S^2(index, M, sem_A(i))) \bullet ASM^M(i \Rightarrow, S^2(index, M, sem_A(n - i - 1))) \bullet ASM^M(S^2(sub, sem_A(n-i), sem_A(1)), temp \Rightarrow) \bullet AS^i(S^2(add, sem_A(i), sem_A(1)))) =$

$$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) \bullet WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), \\ AS^{temp}(S^2(index, M, i \Rightarrow)) \bullet ASM^M(i \Rightarrow, \\ S^2(index, M, S^2(sub, S^2(sub, sem_A(n), sem_A(i)), sem_A(1)))) \bullet ASM^M(S^2(sub, S^2(sub, \\ sem_A(n), sem_A(i)), sem_A(1)), temp \Rightarrow) \bullet AS^i(S^2(add, i \Rightarrow, \bar{1})))$$

$$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) \bullet WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), \\ AS^{temp}(S^2(index, M, i \Rightarrow)) \bullet ASM^M(i \Rightarrow, \\ S^2(index, M, S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}))) \bullet ASM^M(S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}), \\ temp \Rightarrow) \bullet AS^i(S^2(add, i \Rightarrow, \bar{1})))$$

Обчислимо семантичний терм програми REVERSE_Arr при $[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5]$:

$$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) \bullet WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), \\ AS^{temp}(S^2(index, M, i \Rightarrow)) \bullet ASM^M(i \Rightarrow, \\ S^2(index, M, S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}))) \bullet ASM^M(S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}), \\ temp \Rightarrow) \bullet AS^i(S^2(add, i \Rightarrow, \bar{1}))) \\ ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5])$$

Задля зручності спочатку обчислимо перші два вирази:

$$AS^i(\bar{0}) \bullet AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5]) =$$

$$AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2}))(AS^i(\bar{0}) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5])) =$$

$$AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5] \vee [i \mapsto \bar{0} ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5])]) =$$

$$AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5] \vee [i \mapsto 0]) =$$

$$AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0]) =$$

$$AS^{halfLen}(S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2})) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0]) =$$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0] \vee [halfLen \mapsto S^2(div, n \Rightarrow, \bar{2}) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0])] =$$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0] \vee [halfLen \mapsto div(5, 2)] =$$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0] \vee [halfLen \mapsto 2] =$$

$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2]$

І далі обчислюємо WH:

$WH(S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow), AS^{temp}(S^2(index, M, i \Rightarrow)) \bullet ASM^M(i \Rightarrow, S^2(index, M, S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}))) \bullet ASM^M(S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}), temp \Rightarrow) \bullet AS^i(S^2(add, i \Rightarrow, \bar{1}))) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2])$

Перша ітерація:

Обчислюємо умову:

$S^2(less, i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2]) =$

$less(i \Rightarrow, halfLen \Rightarrow) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2]) =$

$less(0, 2) = true$

Умова виконується, обчислюємо тіло виразу:

$AS^{temp}(S^2(index, M, i \Rightarrow)) \bullet ASM^M(i \Rightarrow, S^2(index, M, S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}))) \bullet ASM^M(S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}), temp \Rightarrow) \bullet AS^i(S^2(add, i \Rightarrow, \bar{1})) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2])$

Оскільки тіло містить 4 послідовних вирази, тому, щоб не плутатись в дужках, обчислимо їх окремо:

$AS^{temp}(S^2(index, M, i \Rightarrow)) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2]) =$

$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2] \vee [temp \mapsto S^2(index, M, i \Rightarrow) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2])]$

$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2] \vee [temp \mapsto index([1, 2, 3, 4, 5], 0)] =$

$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2] \vee [temp \mapsto 1] =$

$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2, temp \mapsto 1]$

$ASM^M(i \Rightarrow, S^2(index, M, S^2(sub, S^2(sub, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}))) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, halfLen \mapsto 2, temp \mapsto 1]) =$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [M \mapsto [S^2(\text{index}, M, S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1})), 2, 3, 4, 5] ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1])] =$$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [M \mapsto [\text{index}(M, \text{sub}(\text{sub}(n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1})), 2, 3, 4, 5] ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1])] =$$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [M \mapsto [\text{index}([1, 2, 3, 4, 5], \text{sub}(\text{sub}(5, 0), 1)), 2, 3, 4, 5]] =$$

$$[M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5]] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]$$

$$\text{ASM}^M(S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}), \text{temp} \Rightarrow) ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]) =$$

Обрахуємо індекс:

$$S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}) ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]) = \text{sub}(\text{sub}(5, 0), 1) = 4$$

$$= [M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [M \mapsto [5, 2, 3, 4, \text{temp} \Rightarrow] ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1])] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1]] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]$$

$$\text{AS}^i(S^2(\text{add}, i \Rightarrow, \bar{1}))([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]) =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [i \mapsto S^2(\text{add}, i \Rightarrow, \bar{1}))([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1])] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [i \mapsto \text{add}(0, 1)] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [i \mapsto 1] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]$$

Перша ітерація закінчена. Перевіряємо умову другої ітерації:

$$S^2(\text{less}, i \Rightarrow, \text{halfLen} \Rightarrow) ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]) =$$

$$\text{less}(i \Rightarrow, \text{halfLen} \Rightarrow) ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]) =$$

$$\text{less}(1, 2) = \text{true}$$

Умова виконується, обчислюємо тіло виразу (послідовно):

$$AS^{\text{temp}}(S^2(\text{index}, M, i \Rightarrow)) ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1]) =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [\text{temp} \mapsto S^2(\text{index}, M, i \Rightarrow) ([M \mapsto [1, 2, 3, 4, 5], n \mapsto 5, i \mapsto 0, \text{halfLen} \mapsto 2])] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [\text{temp} \mapsto \text{index}([1, 2, 3, 4, 5], 1)] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 1] \vee [\text{temp} \mapsto 2] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]$$

$$ASM^M(i \Rightarrow, S^2(\text{index}, M, S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}))) ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]) =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [M \mapsto [5, S^2(\text{index}, M, S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1})), 3, 4, 5] ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2])] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [M \mapsto [5, \text{index}(M, \text{sub}(\text{sub}(n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1})), 3, 4, 5] ([M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2])] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [M \mapsto [5, \text{index}([5, 2, 3, 4, 1], \text{sub}(\text{sub}(5, 1), 1)), 3, 4, 5]] =$$

$$[M \mapsto [5, 2, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [M \mapsto [5, 4, 3, 4, 5]] =$$

$$[M \mapsto [5, 4, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]$$

$ASM^M(S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}), \text{temp} \Rightarrow) ([M \mapsto [5, 4, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]) =$

Обрахуємо індекс:

$S^2(\text{sub}, S^2(\text{sub}, n \Rightarrow, i \Rightarrow), \bar{1}) ([M \mapsto [5, 4, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]) =$
 $\text{sub}(\text{sub}(5, 1), 1) = 3$

$= [M \mapsto [5, 4, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [M \mapsto [5, 4, 3, \text{temp} \Rightarrow, 1] ([M \mapsto [5, 4, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2])]$

$[M \mapsto [5, 4, 3, 4, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1]] =$

$[M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]$

$AS^i(S^2(\text{add}, i \Rightarrow, \bar{1}) ([M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]) =$

$[M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [i \mapsto S^2(\text{add}, i \Rightarrow, \bar{1}) ([M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2])]$

$[M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [i \mapsto \text{add}(1, 1)] =$

$[M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 1, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2] \vee [i \mapsto 2] =$

$[M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 2, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]$

Друга ітерація закінчена. Перевіряємо умову третьої ітерації:

$S^2(\text{less}, i \Rightarrow, \text{halfLen} \Rightarrow) ([M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 2, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]) =$

$\text{less}(i \Rightarrow, \text{halfLen} \Rightarrow) ([M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 2, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]) =$

$\text{less}(2, 2) = \text{false}$

Умова не виконується, програма закінчує своє виконання, кінцевий стан:

$[M \mapsto [5, 4, 3, 2, 1], n \mapsto 5, i \mapsto 2, \text{halfLen} \mapsto 2, \text{temp} \mapsto 2]$

Як бачимо, масив М обернувся правильно.

Операційна семантика

Таблиця 6:

Назва правила	Правило операційної семантики
Правила для програми та операторів:	
PR	$\frac{\langle S, st \rangle \mapsto st'}{\langle \text{begin } S \text{ end}, st \rangle \mapsto st'}$
AS	$\frac{\langle a, st \rangle \mapsto n}{\langle x := a, st \rangle \mapsto st \nabla [x \mapsto n]}$
SEQ	$\frac{\langle S_1, st \rangle \mapsto st_1, \quad \langle S_2, st_1 \rangle \mapsto st_2}{\langle S_1; S_2, st \rangle \mapsto st_2}$
IF _{true}	$\frac{\langle b, st \rangle \mapsto true, \quad \langle S_1, st \rangle \mapsto st'}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, st \rangle \mapsto st'}$
IF _{false}	$\frac{\langle b, st \rangle \mapsto false, \quad \langle S_2, st \rangle \mapsto st'}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, st \rangle \mapsto st'}$
WH _{false}	$\frac{\langle b, st \rangle \mapsto false}{\langle \text{while } b \text{ do } S, st \rangle \mapsto st}$
WH _{true}	$\frac{\begin{array}{l} \langle b, st \rangle \mapsto true \\ \langle S, st \rangle \mapsto st'' \\ \langle \text{while } b \text{ do } S, st'' \rangle \mapsto st' \end{array}}{\langle \text{while } b \text{ do } S, st \rangle \mapsto st'}$
BEG	$\frac{\langle S, st \rangle \mapsto st'}{\langle \text{begin } S \text{ end}, st \rangle \mapsto st'}$
skip	$\langle skip, st \rangle \mapsto st$
Правила для виразів:	
Num	$\langle n, st \rangle \mapsto n$
Var	$\langle x, st \rangle \mapsto st(x)$
A ⁺	$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto n_1, \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto n_2}{\langle a_1 + a_2, st \rangle \mapsto add(n_1, n_2)}$
A [−]	$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto n_1, \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto n_2}{\langle a_1 - a_2, st \rangle \mapsto sub(n_1, n_2)}$
A [*]	$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto n_1, \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto n_2}{\langle a_1 * a_2, st \rangle \mapsto mult(n_1, n_2)}$

A()	$\frac{\langle a, st \rangle \mapsto n}{\langle (a), st \rangle \mapsto n}$
Правила для умов:	
B=	$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto r_1, \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto r_2}{\langle a_1 = a_2, st \rangle \mapsto eq(r_1, r_2)}$
B>	$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto r_1, \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto r_2}{\langle a_1 > a_2, st \rangle \mapsto gr(r_1, r_2)}$
B \vee	$\frac{\langle b_1, st \rangle \mapsto r_1, \quad \langle b_2, st \rangle \mapsto r_2}{\langle b_1 \vee b_2, st \rangle \mapsto or(r_1, r_2)}$
B \neg	$\frac{\langle b, st \rangle \mapsto r}{\langle \neg b, st \rangle \mapsto neg(r)}$
B()	$\frac{\langle b, st \rangle \mapsto r}{\langle (b), st \rangle \mapsto r}$

Також додаються додаткові правила для масивів:

Arr	$\langle m, st \rangle \mapsto st(m)$
AS_Arr	$\frac{\langle [L], st \rangle \mapsto m'}{\langle m := [L], st \rangle \mapsto st \nabla [m \mapsto m']}$
Ar_seq	$\frac{\langle a_0, st \rangle \mapsto r_0 \quad \dots \quad \langle a_{n-1}, st \rangle \mapsto r_{n-1}}{\langle [a_0, \dots a_{n-1}], st \rangle \mapsto [r_0, \dots r_{n-1}]}$
AS_ind	$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto r_1 \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto r_2}{\langle m[a_1] := a_2, st \rangle \mapsto st \nabla [m \mapsto [m_0, \dots, m_{r_1-1}, r_2, m_{r_1+1}, \dots m_{n-1}]}$ де m_i – елементи масива, n – кількість елементів
A_ind	$\frac{\langle a, st \rangle \mapsto r_1}{\langle m[a], st \rangle \mapsto index(m, r_1)}$

Операційну семантику для даного розширення мови SIPL позначатимемо $Sem_P_Arr_{CO}(S)$. Приклад побудови в операційній семантиці дерева обчислення програми REVERSE_ARR можна знайти в прикріпленому документі.

Доведення еквівалентності композиційної та операційної семантик

Теорема (про еквівалентність композиційної та операційної семантик програм мови *SIPL*). Для довільної програми P мови *SIPL* її композиційна семантика збігається з її операційною семантикою, тобто $sem_P(P) = Sem_{OP}(P)$.

Доведення. Спочатку доводимо, що для довільного арифметичного виразу a , виразу з масивами w та довільної умови b маємо, що $sem_A(a) = Sem_P_{ArrCO}(a)$, $sem_Arr(w) = Sem_P_{ArrCO}(w)$ та $sem_B(b) = Sem_P_{ArrCO}(b)$.

Використовуємо індукцію за структурою a , w та b . Твердження впливає з правил обох семантик, які задані у **таблицях 5 та 6**, оскільки дані правила задають однакові значення для складових a , w та b .

Рівність семантик на рівні даних слугує базою індукції за структурою для доведення $sem_S(S) = Sem_P_{ArrCO}(S)$. Припустимо, що семантики збігаються для семантичного терма та дерева виведення рівня k . Для доведення рівності на рівні $k + 1$ потрібно довести еквівалентність кожної пари правил.

Доведемо для присвоєння елементу масива значення, інші правила доводяться аналогічно.

В композиційній семантиці маємо:

$$sem_S(m[a_1] := a_2) = ASM^m(sem_A(a_1), sem_A(a_2))$$

В операційній:

$$\frac{\langle a_1, st \rangle \mapsto r_1 \quad \langle a_2, st \rangle \mapsto r_2}{\langle m[a_1] := a_2, st \rangle \mapsto st \nabla [m \mapsto [m_0, \dots, m_{r_1-1}, r_2, m_{r_1+1}, \dots, m_{n-1}]]},$$

де m_i – елементи масива, n – кількість елементів

З припущення індукції маємо:

$$sem_{A(a_1)} = \langle a_1, st \rangle \mapsto r_1 \text{ та } sem_{A(a_2)} = \langle a_2, st \rangle \mapsto r_2$$

Операція ASM^m визначена як:

$$ASM^m(fa_1, fa_2)(st) = st \nabla [m \rightarrow [m^0, m^1, \dots, m^{i-1}, fa_2(st), m^{i+1}, \dots, m^{n-1}],$$

де $i = fa_1(st), n$ – кількість елементів у m]

Де fa_1, fa_2 – номінативні арифметичні функції, які відповідають a_1, a_2 .

За припущенням індукції маємо $fa_1(st) = r_1, fa_2(st) = r_2$, з чого впливає еквівалентність правил присвоєння елементу масива значення у композиційній та операційній семантиках.

Аксиоматична семантика

Таблиця 7:

Правило виведення	Позначення правила
$\{P[x \mapsto a]\} x := a \{P\}$	<i>AS</i>
$\{P[m \mapsto [m_0, \dots, m_{a_1-1}, \quad a_2, m_{a_1+1}, \dots m_{n-1}]]\}$ $m[a_1] := a_2 \{P\}$	<i>AS_ind</i>
$\{P[m_1 \mapsto m_2]\} m_1 := m_2 \{P\}$	<i>AS_arr</i>
$\{P\} \text{ skip } \{P\}$	<i>skip</i>
$\frac{\{P\} S1 \{Q\}, \{Q\} S2 \{R\}}{\{P\} S1; S2 \{R\}}$	<i>S</i>
$\frac{\{b \wedge P\} S1 \{Q\}, \{\neg b \wedge P\} S2 \{Q\}}{\{P\} \text{ if } b \text{ then } S1 \text{ else } S2 \{Q\}}$	<i>IF</i>
$\frac{\{b \wedge P\} S \{P\}}{\{P\} \text{ while } b \text{ do } S \{ \neg b \wedge P \}}$	<i>WH</i>
$\frac{\{P^*\} S \{Q^*\}}{\{P\} S \{Q\}}$ якщо $P \Rightarrow P^*, Q^* \Rightarrow Q$	<i>C</i>
$\frac{\{P\} S \{Q\}}{\{P\} \text{ begin } S \text{ end } \{Q\}}$	<i>BE</i>