

# Розширення мови SIPL вказівниками

Чудаков Семен, III-1

## 1 Загальний опис розширення

У цій роботі описане розширення мови SIPL, що додає до неї вказівники. Вказівником у цьому розширенні є змінна, що має ім'я у якості свого значення. Також у розширенні додане поняття складної змінної, що дозволяє ефективно конструювати складні вхідні стани для програм розширення. Для роботи із вказівниками та складними змінними у мову додані операції складного та обчислювального присвоєння. Наведене нижче розширення є обмеженим через те, що не дозволяє створювати нові вказівники у вхідному стані та використовувати значення змінної, на яку вказує вказівник в арифметичних та булевих виразах.

## 2 Синтаксис розширення

### 2.1 БНФ

Ліва частина правила	Права частина правила	Ім'я правила
<програма> ::=	<b>begin</b> <оператор> <b>end</b>	NP1
<оператор> ::=	<змінна> := <вираз>	NS2
	<складна_змінна> &= <вираз>	NS3
	<змінна> ^ = <вираз>	NS4
	<складна_змінна> ^ = <вираз>	NS5
	<оператор> ; <оператор>	NS6
	<b>if</b> <умова> <b>then</b> <опер.> <b>else</b> <опер.>	NS7
	<b>while</b> <умова> <b>do</b> <оператор>	NS8

	<b>begin</b> <оператор> <b>end</b>	NS9
	<b>skip</b>	NS10
<вираз> ::=	<число>	NA1
	<змінна>	NA2
	<вираз> + <вираз>	NA3
	<вираз> - <вираз>	NA4
	<вираз> * <вираз>	NA5
	( <вираз> )	NA6
	<складна_змінна> ⇒	NA7
<умова> ::=	<вираз> = <вираз>	NB1
	<вираз> > <вираз>	NB2
	<вираз> <> <вираз>	NB3
	<умова> ∨ <умова>	NB4
	¬ <умова>	NB5
	( <умова> )	NB6
<число> ::=	...   -1   0   1   ...	NN...
<ім'я> ::=	...   p1   null   ...	NNA...
<змінна> ::=	...   M   N   ...	NV...
<складна_змінна> ::=	<змінна> . <змінна>	NCV...

## 2.2 Метазмінні

Метазмінна	Синтаксична категорія	Нова мета- змінна
<програма>	Prog	P
<оператор>	Stm	S
<вираз>	Aexp	a
<умова>	Bexp	b
<число>	Num	n
<ім'я>	Name	na
<змінна>	Var	x
<складна_змінна>	CNum	cx

## 2.3 БНФ в термінах метазмінних

Ліва частина правила	Права частина правила	Ім'я правила
<P> ::=	<b>begin S end</b>	P1
S ::=	x := a	S1
	cx &= a	S1
	x ^ = a	S2
	cx ^ = a	S3
	S1 ; S2	S4
	<b>if b then S1 else S2  </b>	S5

	<b>while</b> b <b>do</b> S	S6
	<b>begin</b> S <b>end</b>	S7
	<b>skip</b>	S8
a ::=	n	A1
	x	A2
	a1 + a2	A3
	a1 − a2	A4
	a1 * a2	A5
	(a)	A6
	cx⇒	A8
b ::=	a1 = a2	B1
	a1 > a2	B2
	a1 <> a2	B3
	b1 ∨ b2	B4
	¬ b	B5
	(b)	B6
n ::=	...   -1   0   1   ...	NN...
na ::=	...   p1   null   ...	NNA...
x ::=	...   M   N   ...	NV...
cx ::=	x.x	NCV...

## 3 Композиційна семантика розширення

### 3.1 Дані

1.  $Int = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\};$
2.  $Name = \{\dots, p1, null, \dots\};$
3.  $Bool = \{true, false\}$
4.  $Var = \{\dots, M, N, \dots\}$
5.  $CVar = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{\dots, M.i, N.i, \dots\}$
6.  $State = Var \cup CVar \rightarrow Int \cup Name$

### 3.2 Операції

1. Параметрична функція-константа арифметичного типу  $\bar{n}(st) = n.$
2. Параметрична функція-константа іменного типу  $\overline{name}(st) = name.$
3. Операція іменування  $\Rightarrow x : Int \cup Name \rightarrow State$
4. Операція розіменування  $x \Rightarrow State \rightarrow Int \cup Name$
5. Операція складного розіменування  $x1.x2 \Rightarrow^* (st) = x2 \Rightarrow (x1 \Rightarrow (st)) \quad CVar \times State \rightarrow Int \cup Name$
6. Бінарна операція накладки  $\nabla : State^2 \rightarrow State$
7. Параметрична бінарна операція накладки  $\nabla^V : Var \times State \times State \rightarrow State$

### 3.3 Алгебри

1. Алгебра цілих чисел:  $A\_Int = \langle Int; add, sub, mult \rangle$
2. Алгебра булевих значень:  $A\_Bool = \langle Bool; or, neg \rangle$
3. Багатоосновна алгебра мови SIPL:  $A\_Int\_Bool\_Name\_State = \langle Int, Bool, Name, State; add, sub, mult, or, neg, eq, gr, \Rightarrow x, x \Rightarrow, \bar{n}, id, \nabla, \overline{name}, neq, \Rightarrow^*, \nabla^V \rangle$

### 3.4 Функції

1. Бінарні операції над іменами:

- $FNNAB = Name^2 \rightarrow Bool$  – бінарні функції порівняння.

2. Функції над станами змінних:

- $FA = State \rightarrow Int$  – номінативні арифметичні функції;
- $FN = State \rightarrow Name$  – номінативні іменні функції;
- $FB = State \rightarrow Bool$  – номінативні предикати;
- $FS = State \rightarrow State$  – біномінативні функції-перетворювачі. (трансформатори) станів

3. n-арні операції над базовими типами, окрім імен:

- $FNA = Int^n \rightarrow Int$  – n-арні арифметичні функції (операції);
- $FNB = Bool^n \rightarrow Bool$  – n-арні булеві функції (операції);
- $FNAB = Int^n \rightarrow Bool$  – n-арні функції (операції) порівняння.

### 3.5 Композиції

1. Композиції, які пов'язані з номінативними функціями та предикатами:

- $S^n : FNA \times FA^n \rightarrow FA$  – суперпозиція номінативних арифметичних функцій у n-арну арифметичну функцію;
- $S^n : FNAB \times FA^n \rightarrow FB$  – суперпозиція номінативних арифметичних функцій у n-арну булеву функцію
- $S^n : FNB \times FB^n \rightarrow FB$  – суперпозиція номінативних предикатів у n-арну булеву функцію

2. Композиції, які пов'язані з біномінативними функціями:

- $AS^x : FA \rightarrow FS$  – присвоювання для змінних, який задається формулою:

$$AS^x(fa)(st) = st \nabla [x \mapsto fa(st)]$$

- $AS^{x1.x2} : FA \rightarrow FS$  – складне присвоювання:

$$AS^{x1.x2}(fa)(st) = st \nabla^{x1.x2} fa(st)$$

- $\hat{AS}^x : FN \rightarrow FS$  – обчислювальне присвоєння для простих змінних:

$$\hat{AS}^x(fn)(st) = st \nabla [x \rightarrow fn(st) \Rightarrow (st)]$$

- $\hat{AS}^{x1.x2} : FN \rightarrow FS$  – обчислювальне присвоєння для складних змінних:

$$\hat{AS}^{x1.x2}(fn)(st) = st \nabla^{x1.x2}(fn(st) \Rightarrow (st))$$

- $VAL^{x1.x2} : FA \rightarrow FA$  – взяття значення для складних змінних

$$VAL^{x1.x2}(st) = x1.x2 \Rightarrow^* (st) = x2 \Rightarrow (x1 \Rightarrow (st))$$

- $FS^2 \rightarrow FS$  – оператор послідовного виконання, який задається формулою:

$$(fs_1 \circ fs_2)(st) = fs_2(fs_1(st))$$

- $IF : FB \times FS^2 \rightarrow FS$  – умовний оператор, який задається формулою:

$$IF(fb, fs_1, fs_2)(st) = \begin{cases} fs_1(st), & \text{якщо } fb(st) = true \\ fs_2(st), & \text{якщо } fb(st) = false \end{cases}$$

- $WH : FB \times FS \rightarrow FS$  – оператор циклу, який задається індуктивно:

$$WH(fb, fs)(st) = st_n,$$

де  $st_0 = st, st_1 = fs(st_0), \dots, st_n = fs(st_{n-1})$ ,

причому  $fb(st_0) = true, \dots, fb(st_{n-1}) = true, fb(st_n) = false$ .

## 4 Правила перетворення програми на семантичний терм

$\text{Sem\_P}(\text{begin } S \text{ end}) = \text{Sem\_S}(S)$
$\text{Sem\_S}(x := a) = AS^x (\text{Sem\_A}(a))$ $\text{Sem\_S}(x1.x2 \&= a) = AS^{x1.x2} (\text{Sem\_A}(a))$ $\text{Sem\_S}(x \wedge = a) = \wedge AS^x (\text{Sem\_A}(a))$ $\text{Sem\_S}(x1.x2 \wedge = a) = \wedge AS^{x1.x2} (\text{Sem\_A}(a))$ $\text{Sem\_S}(S1; S2) = \text{Sem\_S}(S1) \circ \text{Sem\_S}(S2)$ $\text{Sem\_S}(\text{if } b \text{ then } S1 \text{ else } S2) = \text{IF}(\text{Sem\_B}(b), \text{Sem\_S}(S1), \text{Sem\_S}(S2))$ $\text{Sem\_S}(\text{while } b \text{ do } S) = \text{WH}(\text{Sem\_B}(b), \text{Sem\_S}(S))$ $\text{Sem\_S}(\text{begin } S \text{ end}) = \text{Sem\_S}(S)$ $\text{Sem\_S}(\text{skip}) = \text{id}$
$\text{Sem\_A}(n) = \bar{n}$ $\text{Sem\_A}(\text{name}) = \overline{\text{name}}$ $\text{Sem\_A}(x) = x \Rightarrow$ $\text{Sem\_A}(x1.x2 \Rightarrow) = VAL^{x1.x2}$ $\text{Sem\_A}(a + b) = S^2 (\text{add}, \text{Sem\_A}(a), \text{Sem\_A}(b))$ $\text{Sem\_A}(a - b) = S^2 (\text{sub}, \text{Sem\_A}(a), \text{Sem\_A}(b))$ $\text{Sem\_A}(a * b) = S^2 (\text{mult}, \text{Sem\_A}(a), \text{Sem\_A}(b))$ $\text{Sem\_A}((a)) = \text{Sem\_A}(a)$
$\text{Sem\_B}(a = b) = S^2 (\text{eq}, \text{Sem\_A}(a), \text{Sem\_A}(b))$



$$\text{Sem\_B}(a \text{ <> } b) = S^2 (\text{neq}, \text{Sem\_A}(a), \text{Sem\_B}(b))$$

$$\text{Sem\_B}(a > b) = S^2 (\text{gr}, \text{Sem\_A}(a), \text{Sem\_B}(b))$$

$$\text{Sem\_B}(a \vee b) = S^2 (\text{or}, \text{Sem\_B}(a), \text{Sem\_B}(b))$$

$$\text{Sem\_B}(\neg a) = S^1 (\text{neg}, \text{Sem\_B}(a))$$

$$\text{Sem\_B}((b)) = \text{Sem\_B}(b)$$

## 5 Операційна семантика розширення

Назва пра- вила	Правило операційної семантики
Правила для програми та операторів	
PR	$\frac{\langle S, st \rangle \rightarrow st'}{\langle \text{begin } S \text{ end}, st \rangle \rightarrow st'}$
AS	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n}{\langle x := a, st \rangle \rightarrow st \nabla [x \rightarrow n]}$
AS&	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n}{\langle x1.x2\& = a, st \rangle \rightarrow st \nabla^{x1.x2} n}$
$\wedge AS^x$	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle n, st \rangle \rightarrow m}{\langle x \wedge = a, st \rangle \rightarrow st \nabla [x \rightarrow m]}$
$\wedge AS^{x1.x2}$	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle n, st \rangle \rightarrow m}{\langle x1.x2 \wedge = a, st \rangle \rightarrow st \nabla^{x1.x2} m}$
SEQ	$\frac{\langle S_1, st \rangle \rightarrow st_1 \quad \langle S_2, st_1 \rangle \rightarrow st_2}{\langle S_1; S_2, st \rangle \rightarrow st_2}$
IFtrue	$\frac{\langle b, st_1 \rangle \rightarrow \text{true} \quad \langle S_1, st_1 \rangle \rightarrow st_2}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, st_1 \rangle \rightarrow st_2}$
IFfalse	$\frac{\langle b, st_1 \rangle \rightarrow \text{false} \quad \langle S_2, st_1 \rangle \rightarrow st_2}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, st_1 \rangle \rightarrow st_2}$
WHfalse	$\frac{\langle b, st \rangle \rightarrow \text{false}}{\langle \text{while } b \text{ do } S, st \rangle \rightarrow st}$
WHtrue	$\frac{\langle b, st \rangle \rightarrow \text{true} \quad \langle S, st \rangle \rightarrow st_1 \quad \langle \text{while } b \text{ do } S, st_1 \rangle \rightarrow st_2}{\langle \text{while } b \text{ do } S, st \rangle \rightarrow st_2}$

BEG	$\frac{\langle S, st_1 \rangle \rightarrow st_2}{\langle \text{begin } S \text{ end}, st_1 \rangle \rightarrow st_2}$
skip	$\langle \text{skip}, st \rangle \rightarrow st$
Правила для програми та операторів	
Num	$\langle n, st \rangle \rightarrow n$
Name	$\langle \text{name}, st \rangle \rightarrow \text{name}$
Var	$\langle x, st \rangle \rightarrow st(x)$
$Val^{x1.x2}$	$\langle x1.x2, st \rangle \rightarrow x1.x2 \Rightarrow^* (st)$
A+	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle b, st \rangle \rightarrow m}{\langle a + b, st \rangle \rightarrow \text{add}(n, m)}$
A-	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle b, st \rangle \rightarrow m}{\langle a - b, st \rangle \rightarrow \text{sum}(n, m)}$
A*	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle b, st \rangle \rightarrow m}{\langle a * b, st \rangle \rightarrow \text{mult}(n, m)}$
A()	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow st}{\langle (a), st \rangle \rightarrow st}$
Правила для програми та операторів	
B=	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle b, st \rangle \rightarrow m}{\langle a = b, st \rangle \rightarrow \text{eq}(n, m)}$
B>	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle b, st \rangle \rightarrow m}{\langle a > b, st \rangle \rightarrow \text{gr}(n, m)}$
B<>	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow n \quad \langle b, st \rangle \rightarrow m}{\langle a <> b, st \rangle \rightarrow \text{neq}(n, m)}$
B $\vee$	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow r_1 \quad \langle b, st \rangle \rightarrow r_2}{\langle a \vee b, st \rangle \rightarrow \text{or}(r_1, r_2)}$
B $\neg$	$\frac{\langle a, st \rangle \rightarrow r_1}{\langle \neg a, st \rangle \rightarrow \text{neg}(r_1)}$
B()	$\frac{\langle b, st \rangle \rightarrow r}{\langle (b), st \rangle \rightarrow r}$

## 6 Аксіоматична семантика розширення

Правило виведення	Позначення правила
$\{P[x \mapsto a]\} \ x := a \ \{P\}$	AS
$\{P[x1.x2 \mapsto a]\} \ x1.x2 \ \& = a \ \{P\}$	AS&
$\{P[x \mapsto v, v = a(st)]\} \ x \ ^{\wedge} = a \ \{P\}$	$^{\wedge}AS^x$
$\{P[x1.x2 \mapsto v, v = a(st)]\} \ x1.x2 \ ^{\wedge} = a \ \{P\}$	$^{\wedge}AS^{x1.x2}$
$\{P\} \ skip \ \{P\}$	skip
$\frac{\{P\} \ S_1 \ \{Q\}, \{Q\} \ S_2 \ \{R\}}{\{P\} \ S_1; S_2 \ \{R\}}$	S
$\frac{\{b \wedge P\} \ S_1 \ \{Q\}, \ \{\neg b \wedge P\} \ S_2 \ \{Q\}}{\{P\} \ \mathbf{if} \ b \ \mathbf{then} \ S_1 \ \mathbf{else} \ S_2 \ \{Q\}}$	IF
$\frac{\{b \wedge P\} \ S \ \{P\}}{\{P\} \ \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ S \ \{\neg b \wedge P\}}$	WH
$\frac{\{P'\} \ S \ \{Q'\}}{\{P\} \ S \ \{Q\}}, \text{ якщо } P \Rightarrow P' \text{ та } Q' \Rightarrow Q$	C
$\frac{\{P\} \ S \ \{Q\}}{\{P\} \ \mathbf{begin} \ S \ \mathbf{end} \ \{Q\}}$	BE

## 7 Текст програми

---

### Алгоритм 1: Програма LIST\_MAX

---

```
1 begin
2 M := L.1⇒;
3 while L.2⇒ <> null do
4   begin
5     L ^ = L.2⇒;
6     R := L.1⇒;
7     if R > M then
8       M := R
9     else
10      skip
11   end
12 end
```

---

Введемо наступні позначення. Один рядок з програми позначатимемо  $L<\text{номер рядка}>$ . Кілька послідовних рядків будемо позначати  $L<\text{номер першого рядка}>\_<\text{номер останнього рядка}>$ .

## 8 Тестування програми в композиційній семантиці

### 8.1 Побудова семантичного терму

$$\begin{aligned} & \text{Sem\_P}(\text{LIST\_MAX}) \\ = & \text{Sem\_P}(\text{begin L2;L3\_11 end}) \\ = & \text{Sem\_S}(\text{L2;L3\_11}) \\ = & \text{Sem\_S}(\text{L2}) \circ \text{Sem\_S}(\text{L3\_11}) \end{aligned}$$

$$\text{Sem\_S}(\text{L2}) = \text{Sem\_S}(\text{M} := \text{L.1} \Rightarrow) = AS^M (\text{Sem\_S}(\text{L.1} \Rightarrow)) = AS^M (VAL^{L.1})$$

$$\begin{aligned} & \text{Sem\_S}(\text{L3\_11}) \\ = & \text{Sem\_S}(\text{while L.2} \Rightarrow \langle \rangle \text{ null do L4\_11}) \\ = & \text{WH}(\text{Sem\_B}(\text{L.2} \Rightarrow \langle \rangle \text{ null}), \text{Sem\_S}(\text{begin L5\_10 end})) \end{aligned}$$

$$= \text{WH}(S^2(\text{neq}, \text{Sem\_A}(\text{L.2} \Rightarrow), \text{Sem\_A}(\text{null})), \text{Sem\_S}(\text{L5 ; L6; L7\_10}))$$

$$\text{Sem\_A}(\text{L.2} \Rightarrow) = \text{Sem\_A}(\text{VAL}^{L.2})$$

$$\text{Sem\_A}(\text{null}) = \overline{\text{null}}$$

$$\begin{aligned} & \text{Sem\_S}(\text{L5 ; L6; L7\_10}) \\ = & \text{Sem\_S}(\text{L5}) \circ \text{Sem\_S}(\text{L6}) \circ \text{Sem\_S}(\text{L7\_10}) \end{aligned}$$

$$\text{Sem\_S}(\text{L5}) = \wedge AS^L(\text{Sem\_A}(\text{L.2} \Rightarrow)) = AS^L(\text{VAL}^{L.2} \Rightarrow)$$

$$\text{Sem\_S}(\text{L6}) = AS^R(\text{L.1} \Rightarrow) = AS^R(\text{VAL}^{L.1})$$

$$\begin{aligned} & \text{Sem\_S}(\text{L7\_10}) \\ = & \text{IF}(\text{Sem\_B}(\text{R} > \text{M}), \text{Sem\_S}(\text{M} := \text{R}), \text{Sem\_S}(\text{skip})) \\ = & \text{IF}(S^2(\text{gr}, \text{R} \Rightarrow, \text{M} \Rightarrow), AS^M(\text{R} \Rightarrow), \text{id}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Sem\_P}(\text{LIST-MAX}) = \\ & AS^M(\text{L.1} \Rightarrow) \circ \\ & \text{WH}( \\ & S^2(\text{neq}, \text{VAL}^{L.2}, \overline{\text{null}}), \\ & \wedge AS^L(\text{VAL}^{L.2} \Rightarrow) \circ AS^R(\text{VAL}^{L.1}) \circ \\ & \text{IF}(S^2(\text{gr}, \text{R} \Rightarrow, \text{M} \Rightarrow), AS^M(\text{R} \Rightarrow), \text{id}) \\ & ) \end{aligned}$$

## 8.2 Обчислення семантичного терму на стані

Покладемо початковий стан  $\text{st} = \text{st0} = [\text{L} \rightarrow [1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \text{p1}], \text{p1} \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow \text{null}]]$ .

1.  $AS^M(\text{VAL}^{L.1})(\text{st}) = \text{st} \nabla [\text{M} \rightarrow \text{VAL}^{L.1}(\text{st0})] = [\text{M} \rightarrow 5, \text{L} \rightarrow [1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \text{p1}], \text{p1} \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow \text{null}]] = \text{st1}$
2.  $S^2(\text{neq}, \text{VAL}^{L.2}, \overline{\text{null}})(\text{st1}) = \text{neq}(\text{p1}, \text{null}) = \text{true}$ . Тому виконуємо тіло циклу
3.  $\wedge AS^L(\text{VAL}^{L.2} \Rightarrow)(\text{st1}) = \text{st1} \nabla^L [\text{M} \rightarrow 5, \text{L} \rightarrow \text{p1} \Rightarrow (\text{st1}), \text{p1} \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow \text{null}]] = [\text{M} \rightarrow 5, \text{L} \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow \text{null}], \text{p1} \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow \text{null}]] = \text{st2}$

4.  $AS^R (L.1 \Rightarrow)(st2) = st2 \nabla [R \rightarrow L.1 \Rightarrow (st2)] = [R \rightarrow 6, M \rightarrow 5, L \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null], p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null]] = st3$

5.  $S^2 (gr, R \Rightarrow, M \Rightarrow)(st2) = gr(R \Rightarrow, M \Rightarrow) = gr(\bar{6}, \bar{5}) = true$ . Тому виконуємо першу гілку IF.

6.  $AS^M (R \Rightarrow)(st3) = st3 \nabla [M \rightarrow R \Rightarrow (st3)] = [R \rightarrow 6, M \rightarrow 6, L \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null], p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null]] = st4$

7.  $S^2 (neq, L.2 \Rightarrow, \overline{null})(st1) = neq(null, null) = false$ . Тому виконання програми завершується.

Кінцевий стан після виконання програми  $st4 = [R \rightarrow 6, M \rightarrow 6, L \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null], p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null]]$

## 9 Тестування програми в аксіоматичній семантиці

Побудуємо виведення для формули  $\langle LIST-MAX, st \rangle \rightarrow st'$ ,  $st = [L \rightarrow [1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow p1], p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null]]$

$$PR : \frac{\langle begin\ L2\_11\ end, st \rangle \rightarrow st'}{\langle L2\_11, st \rangle \rightarrow st'}$$

$$SEQ : \frac{\langle L2, st \rangle \rightarrow st_1 \quad \langle L3\_11, st_1 \rangle \rightarrow st'}{\langle L2, st \rangle \rightarrow st'}$$

Обчислюємо  $st_1$ :

$$AS : \frac{\langle L.1 \Rightarrow, st \rangle \rightarrow 5}{\langle M := L.1 \Rightarrow, st \rangle \rightarrow st \nabla [M \rightarrow 5] = st_1}$$

Маємо  $st_1 = [M \rightarrow 5, L \rightarrow [1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow p1], p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow null]]$

$$WHr : \frac{\langle L3\_11, st_1 \rangle \rightarrow st'}{\langle L.2 ==><> null, st_1 \rangle \rightarrow r}$$

Обчислимо  $r$ :

$$B<> : \frac{\langle L.2 ==>, st_1 \rangle \rightarrow p1 \quad \langle null, st_1 \rangle \rightarrow null}{\langle L.2 ==><> null, st_1 \rangle \rightarrow true}$$

Маємо  $r = true$ :

$$WHtrue : \frac{\langle L.2 ==><> null, st_1 \rangle \rightarrow true \mid \langle L4\_11, st_1 \rangle \rightarrow st_2 \mid \langle L3\_11, st_2 \rangle \rightarrow st'}{\langle L3\_11, st_1 \rangle \rightarrow st'}$$

Обчислимо  $s_2$ :

$$BEG : \frac{\frac{\langle begin\ L5\_10\ end,\ st_1 \rangle \rightarrow s_2}{\langle L5\_10,\ st_1 \rangle \rightarrow s_2}}{\langle L5,\ st_1 \rangle \rightarrow st_3 \mid \langle L6,\ st_3 \rangle \rightarrow st_4 \mid \langle L7\_10,\ st_4 \rangle \rightarrow st_5}$$

Обчислимо  $s_3$ :

$$^{\wedge}AS^L : \frac{\langle L.2 = \rangle,\ st_2 \rangle \rightarrow p1 \mid \langle p1,\ [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null] \rangle \rightarrow p1}{\langle L^{\wedge} = L.2 = \rangle,\ st_2 \rangle \rightarrow st_2 \nabla^L [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null] = st3}$$

Маємо  $st_3 = [M \rightarrow 5,\ L \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null],\ p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null]]$ , обчислимо  $st_4$

$$AS : \frac{\langle L.1 = \rangle,\ st_3 \rangle \rightarrow 6}{\langle R := L.1 = \rangle,\ st_3 \rangle \rightarrow st3 \nabla [R \rightarrow 6] = st4}$$

Маємо  $st_4 = [R \rightarrow 6,\ M \rightarrow 5,\ L \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null],\ p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null]]$ , обчислимо  $st_5$

$$IFr : \frac{\langle R \rangle M,\ st_4 \rangle \rightarrow r}{\langle L7\_10,\ st_4 \rangle \rightarrow st5}$$

Обчислимо  $r$ :

$$B > : \frac{\langle R,\ st_4 \rangle \rightarrow 6 \mid \langle M,\ st_4 \rangle \rightarrow 5}{\langle R \rangle M,\ st_4 \rangle \rightarrow true}$$

Маємо  $r = true$ :

$$IFtrue : \frac{\langle R \rangle M,\ st_4 \rangle \rightarrow true \mid \langle M := R,\ st_4 \rangle \rightarrow st5}{\langle L7\_10,\ st_4 \rangle \rightarrow st5}$$

Обчислимо  $st_5$ :

$$AS : \frac{\langle R,\ st_4 \rangle \rightarrow 6}{\langle M := R,\ st_4 \rangle \rightarrow st4 \nabla [M \rightarrow 6] = st5}$$

Маємо  $st_5 = [R \rightarrow 6,\ M \rightarrow 6,\ L \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null],\ p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null]]$ , продовжимо обчислювати  $st'$ :

$$WHr : \frac{\langle L3\_11,\ st_5 \rangle \rightarrow st'}{\langle L.2 = \rangle \langle \rangle null,\ st_5 \rangle \rightarrow r}$$

Обчислимо  $r$ :

$$B \langle \rangle : \frac{\langle L.2 = \rangle,\ st_5 \rangle \rightarrow null \mid \langle null,\ st_5 \rangle \rightarrow null}{\langle L.2 = \rangle \langle \rangle null,\ st_5 \rangle \rightarrow false}$$

Маємо  $r = false$ :

$$WHfalse : \frac{\langle L.2 = \rangle \langle \rangle null,\ st_5 \rangle \rightarrow false}{\langle L4\_11,\ st_5 \rangle \rightarrow st'}$$

Тому  $st_5 = st' = [R \rightarrow 6,\ M \rightarrow 6,\ L \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null],\ p1 \rightarrow [1 \rightarrow 6,\ 2 \rightarrow null]]$ .

## 10 Доведення часткової коректності

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= AS^M (L.1 \Rightarrow) \\
 f_2 &= WH(f_3, f_4 \circ f_5 \circ f_6) \\
 f_3 &= S^2 (neq, VAL^{L.2}, \overline{null}) \\
 f_4 &= \wedge AS^L (VAL^{L.2} \Rightarrow) \\
 f_5 &= AS^R (VAL^{L.1}) \\
 f_6 &= IF(S^2 (gr, R \Rightarrow, M \Rightarrow), AS^M (R \Rightarrow), id)
 \end{aligned}$$

Нехай вхідний стан має загальний вигляд  $[L \rightarrow [1 \rightarrow N_1, 2 \rightarrow p_2], \dots, p_n \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null]]$ . Зауважимо, що довжина списку  $L$  не може бути меншою за 1. Обчислимо значення семантичного терму програми на такому стані.  $(f_1 \circ f_2)(st) = f_2(f_1(st)) = f_2(st \nabla [M \rightarrow N_1]) = f_2(st_1)$ . Для зручності розглянемо крайній випадок, коли довжина списку  $L$  дорівнює 1. У цьому випадку  $f_3(st_1) = false$  та  $f_2(st_1) = st_1$ . Тому  $M = N_1 = max\{N_1\}$ , що є максимумом значень списку  $L$ .

**Теорема.** Якщо  $f_3(st_1) = true$  та семантичний терм  $f_2$  визначений на стані  $st_1$ , тоді  $f_2(st_1) = [M \rightarrow D, R \rightarrow N_n, L \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null], \dots, p_n \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null]]$ , де  $D = max\{N_1, \dots, N_n\}$ .

**Доведення.** Доведемо гіпотезу індукцією за  $k > 0$ , де  $k$  - це кількість ітерацій циклу  $f_2$ . Припустимо, що після  $i$ -ї ітерації стан  $st_{1+i}$  має вигляд  $st_{1+i} = [M \rightarrow P, R \rightarrow N_{1+i}, L \rightarrow [1 \rightarrow N_{1+i}, 2 \rightarrow V], \dots, p_n \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null]]$ , де  $P = max\{N_1, \dots, N_{1+i}\}$  та  $V \in \{p_{1+i+1}, null\}$ .

**База індукції.**

Нехай  $k = 1$ , тоді стан  $st_2 = f_2(st_1) = (f_4 \circ f_5 \circ f_6)(st_1)$  має вигляд  $[M \rightarrow W, R \rightarrow N_2, L \rightarrow [1 \rightarrow N_2, 2 \rightarrow V], \dots, p_n \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null]]$ , де  $W = max\{N_1, N_2\}$  та  $V \in \{p_3, null\}$ . База індукції є вірною.

**Крок індукції.**

Нехай після кроку  $i$  стан  $st_{1+i}$  має вигляд  $[M \rightarrow P_1, R \rightarrow N_{1+i}, L \rightarrow [1 \rightarrow N_{1+i}, 2 \rightarrow V_1], \dots, p_n \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null]]$ , де  $P_1 = max\{N_1, \dots, N_{1+i}\}$ ,  $V_1 \in \{p_{1+i+1}, null\}$ . Тоді якщо  $f_3(st_{1+i}) = false$ , то виконання циклу завершується.

Інакше виконання продовжується і  $st_{1+i+1} = (f_4 \circ f_5 \circ f_6)(st_{1+i}) = [M \rightarrow$



$P_2, R \rightarrow N_{1+i+1}, L \rightarrow [1 \rightarrow N_{1+i+1}, 2 \rightarrow V_2], \dots, p_n \rightarrow [1 \rightarrow N_n, 2 \rightarrow null]$ ], де  $P_2 = \max\{P_1, N_{1+i+1}\} = \max\{N_1, \dots, N_{1+i+1}\}$  та  $V_2 \in \{p_{1+i+2}, null\}$ . Крок індукції є вірним. Тому початкове припущення доведено.

Правильність наведеної теореми разом із базовим випадком, що був розглянутий на початку цього розділу, доводять, що для будь-якого початкового стану, де довжина списку  $L$  не менша за 1, з того, що програмний терм визначений на такому стані впливає, що значення  $M$  є максимумом серед значень списку. Часткову коректність доведено.

## 11 Доведення повної коректності

Покажемо, що на правильних вхідних даних програма *LIST\_MAX* завжди завершується. Правильні вхідні дані мають наступні характеристики.

1. Вхідний стан має складну змінну  $L \rightarrow [1 \rightarrow N_1, 2 \rightarrow V]$ , що вказує на початок списку.
2. Зв'язний список  $L$  сформований правильно, тобто за них можна проітеруватися до кінця.
3. Кінцевий вузол списку має вказівник на ім'я *null*.

Розглянемо 2 випадки:

1. Довжина списку дорівнює 1, тоді програма завершується зі значенням  $M = N_1$ , що є максимумом зі значень у списку.
2. Довжина списку більша за 1 і потрібно показати, що виконання циклу завершується. Для цього достатньо показати, що значення умови, на деякому стані  $st_x$  буде *false*. Розглянемо послідовність  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , з імен, на які вказують кожен із вузлів вхідного списку. Оскільки довжина цього списку є скінченною та на кожній ітерації значення  $L$  встановлюється на наступний вузол зі списку, то, враховуючи припущення про структуру списку  $L$ , отримуємо, що на останньому вузлі списку значення умови циклу буде рівним *false*.

## 12 Доведення еквівалентності операційної та композиційної семантик

### Теорема.

Для будь-якої програми, написаної мовою  $SIPL_P$  її операційна та композиційна семантика співпадають.

### Доведення.

1. Еквівалентність для арифметичних виразів, умов та інших операції таких, як присвоєння, складне присвоєння та інших впливає із відповідності окремих правил операційної семантики правилам композиційної семантики наведеного розширення.

2. Доведення еквівалентності для циклу проведемо індукцією за кількістю ітерацій. Якщо тіло циклу виконується 0 разів, то у цьому випадку семантики еквівалентні, оскільки еквівалентними є семантики умов. Якщо тіло циклу виконалося  $k$  разів і семантики еквівалентні, то і на  $k + 1$  ітерації вони будуть еквівалентними, оскільки тіло циклу складається із окремих операторів для яких еквівалентність доведена у першому пункті.