

Контрольная работа №2

Гуров В.А., группа ИУ9-526

Вариант 7

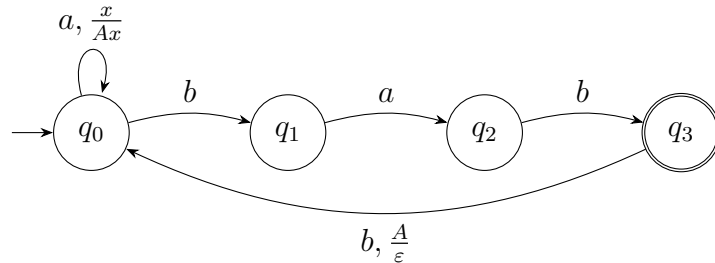
Задание 1

Исходная КС-грамматика:

$$S \rightarrow aSbS \mid aS \mid bab$$

с условием: количество букв a в слове в 2 раза больше b ,
то есть $|w|_a = 2|w|_b$.

Представление КС-грамматики в виде PDA:



q_0 — начальное состояние, q_3 — принимающее.

I. Пересечение с регулярным языком:

$$L_{\text{reg}} = a^+(babb)^+a^+bab$$

II. Доказательство того, что язык не является КС-языком
(лемма о накачке)

Пусть $n \geq p$ — число накачки.

Рассмотрим слово:

$$w = a^n(babb)^na^{4n+3}bab$$

Подсчитаем количество букв:

$$\begin{aligned} |w|_a &= n + n + 4n + 3 + 1 = 6n + 4 \\ |w|_b &= 3n + 2 \\ |w|_a &= 2|w|_b \quad \checkmark \end{aligned}$$

Рассмотрим варианты накачки ($w = x_1 y_1 z y_2 x_2$), которые не нарушают структуру регулярного выражения:

1. Если $y_1 z y_2$ находится в блоке a^n : при $i > 1$ количество букв a увеличивается, а количество b остаётся тем же. Условие $|w|_a = 2|w|_b$ нарушается.
2. Если $y_1 y_2 = (babb)^k$ ($k \geq 1$): при $i = 0$ имеем

$$|w|_a - 2|w|_b = 6n + 4 - k - 2(3n + 2 - 3k) = 5k \neq 0$$

Баланс нарушается.

3. Если $y_1 z y_2$ находится в блоке a^{4n+3} : аналогично пункту 1.
4. Если $y_1 z y_2$ находится в блоке $a^n (babb)^n$ с $y_1 = a^k$, $y_2 = (babb)^l$ ($k, l \geq 1$): для сохранения баланса при $i > 1$ требуется $k = 5l$. Однако при $i = 0$ степень первого блока из a равна $n - 5l$, а степень блока из $babb$ равна $n - l$, что невозможно по структуре слова (количество букв a должно быть не менее количества блоков $babb$).
5. Если $y_1 z y_2$ находится в блоке $(babb)^n a^{4n+3}$ с $y_1 = (babb)^k$, $y_2 = a^l$ ($k, l \geq 1$): при $i > 1$ количество блоков $babb$ становится больше количества предшествующих букв a , что противоречит структуре.

Слово не накачивается, следовательно, язык не является КС-языком.

Задание 2

Язык:

$$L = \{c^i a^n c^* b^k c^j \mid k = n \text{ или } (i + j > 1 \text{ и } i < j)\}$$

Доказательство того, что язык не является DCFL:

Пусть $n \geq p$ — число накачки.

Рассмотрим два слова:

$$x = c^n a^n c^n$$

$$y = c$$

$$z = cb^n$$

$$w = xy$$

$$w' = xz$$

I. Попытка накачать x

Разберём варианты расположения $t_1 z t_2$ (где $x = m_1 t_1 z t_2 m_2$):

1. Если $t_1 z t_2$ находится в первом блоке c^n ($t_1 t_2 = c^k$, $k \geq 1$): при $i = 2$ количество c в начале становится $n + k$, что больше количества c в конце (n). Ни одно из условий языка не выполняется для слова w .
2. Если $t_1 z t_2$ находится во втором блоке c^n ($t_1 t_2 = c^k$, $k \geq 1$): при $i = 0$ количество c во втором блоке становится $n + 1 - k \leq n$, что меньше или равно количеству c в начале. Ни одно из условий не выполняется для слова w .
3. Если $t_1 z t_2$ находится в блоке a^n или включает буквы a : при $i = 0$ количество букв a уменьшается и становится меньше n (количества букв b). Условие $k = n$ не выполняется для слова w' .

Таким образом, x не накачивается.

II. Разбиение x, y, z на подслова:

Пусть $x = x_1 x_2 x_3$, $y = y_1 y_2 y_3$, $z = z_1 z_2 z_3$ с условиями $|x_2 x_3| \leq p$ и $|x_2| > 0$.

Так как $|x_2 x_3| \leq p$, то x_2 находится во втором блоке c^n : $x_2 = c^k$ ($1 \leq k \leq p$).

При этом $y_2 = c$ или $y_2 = \varepsilon$.

При $i = 0$ количество c во втором блоке уменьшается: $n + 1 - k \leq n$, что меньше количества c в начале. Ни одно из условий языка не выполняется для слова w .

Следовательно, язык не является DCFL.

Задание 3

Атрибутная грамматика:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow QSQ \quad ; \\
 S &\rightarrow bb \quad ; \\
 Q &\rightarrow QQ \quad ; \quad Q_1.attr \leq Q_2.attr, Q_0.attr := Q_1.attr \\
 Q &\rightarrow aAa \quad ; \quad Q.attr := A.attr + 2 \\
 A &\rightarrow BB \quad ; \quad A.attr := B_1.attr + B_2.attr \\
 A &\rightarrow AA \quad ; \quad A_0.attr := A_1.attr + A_2.attr \\
 B &\rightarrow b \quad ; \quad B.attr := 1
 \end{aligned}$$

Язык, порождаемый грамматикой:

Слово в языке представляет собой:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow QSQ \rightarrow \dots \rightarrow Q^n SQ^k \rightarrow (aAa)^n S(aAa)^k \rightarrow \dots \\
 &\rightarrow (a(bb)^{m_i}a)^n bb(a(bb)^{m_i}a)^k,
 \end{aligned}$$

где $n, k \geq 0$ и $m_i \geq 1$.

Анализ атрибутов: методом пристального всматривания можно заметить, что нетерминал Q может порождаться двумя правилами — первым (без условия) и третьим (с условием). Если все Q по обе стороны от центрального, кроме первого, порождены третьим правилом, то минимальное требование к слову состоит в том, что в первом Q количество букв b не превышает количество букв b в остальных Q на данной стороне (для правой стороны первый Q считается самым левым).

Пересечение с регулярным языком:

Для упрощения пересечём язык с регулярным языком:

$$L_{\text{reg}} = (abba)bb(a(bb)^+a)^3$$

Получится язык, состоящий из слов, образованных следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow QSQ \rightarrow (\ 3 \) \rightarrow QSQQQ \rightarrow (\ 2 \ 4 \) \rightarrow \\
 &(aAa)bb(aAa)^3 \rightarrow \dots \rightarrow (abba)bb(a(bb)^{m_i}a)^3,
 \end{aligned}$$

где $m_i \geq 1$.

Доказательство того, что язык не является КС-языком (лемма о накачке):

Пусть $n \geq p$ — число накачки.

Рассмотрим слово:

$$w = (abba)bb(a(bb)^na)(a(bb)^na)(a(bb)^na)$$

Рассмотрим варианты накачки ($w = x_1y_1zy_2x_2$), которые не нарушают структуру регулярного выражения. Ситуация аналогична анализу языка $\{a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3} \mid k_1 > k_2 \text{ и } k_1 > k_3\}$:

1. Если y_1y_2 полностью находится в первом блоке $(bb)^n$ ($y_1y_2 = (bb)^k$, $k \geq 1$): при $i = 2$ количество букв b в первом блоке будет больше, чем во втором и третьем блоках. Слово не входит в язык.
2. Если y_1y_2 полностью находится во втором или третьем блоке $(bb)^n$ ($y_1y_2 = (bb)^k$, $k \geq 1$): при $i = 0$ количество букв b в первом блоке будет больше, чем во втором или третьем блоке соответственно. Слово не входит в язык.
3. Если y_1 находится в первом блоке $(bb)^n$, а y_2 — во втором блоке $(bb)^n$ ($y_1 = (bb)^k$, $y_2 = (bb)^l$, $k, l \geq 1$): при $i = 2$ количество букв b в первом блоке будет больше, чем в третьем. Слово не входит в язык.
4. Если y_1 находится во втором блоке $(bb)^n$, а y_2 — в третьем блоке $(bb)^n$ ($y_1 = (bb)^k$, $y_2 = (bb)^l$, $k, l \geq 1$): при $i = 0$ количество букв b в первом блоке будет больше, чем во втором и третьем блоках. Слово не входит в язык.

Слово не накачивается, следовательно, язык не является КС-языком.