

# Контрольная работа №2

Гуров В.А., группа ИУ9-526

Вариант 7

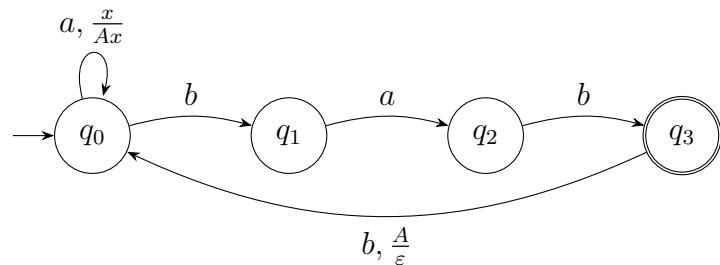
## Задание 1

Исходная КС-грамматика:

$$S \rightarrow aSbS \mid aS \mid bab$$

с условием: количество букв  $a$  в слове в 2 раза больше  $b$ ,  
то есть  $|w|_a = 2|w|_b$ .

Представление КС-грамматики в виде PDA:



$q_0$  — начальное состояние,  $q_3$  — принимающее.

I. Пересечение с регулярным языком:

$$L_{\text{reg}} = a^+ (babb)^+ a^+ bab$$

II. Доказательство того, что язык не является КС-языком  
(лемма о накачке)

Пусть  $n \geq p$  — число накачки.

Рассмотрим слово:

$$w = a^n (babb)^n a^{4n+3} bab$$

Подсчитаем количество букв:

$$\begin{aligned}|w|_a &= n + n + 4n + 3 + 1 = 6n + 4 \\|w|_b &= 3n + 2 \\|w|_a &= 2|w|_b \quad \checkmark\end{aligned}$$

Рассмотрим варианты накачки ( $w = x_1y_1zy_2x_2$ ), которые не нарушают структуру регулярного выражения:

1. Если  $y_1zy_2$  находится в блоке  $a^n$ : при  $i > 1$  количество букв  $a$  увеличивается, а количество  $b$  остаётся тем же. Условие  $|w|_a = 2|w|_b$  нарушается.
2. Если  $y_1y_2 = (babb)^k$  ( $k \geq 1$ ): при  $i = 0$  имеем

$$|w|_a - 2|w|_b = 6n + 4 - k - 2(3n + 2 - 3k) = 5k \neq 0$$

Баланс нарушается.

3. Если  $y_1zy_2$  находится в блоке  $a^{4n+3}$ : аналогично пункту 1.
4. Если  $y_1zy_2$  находится в блоке  $a^n(babb)^n$  с  $y_1 = a^k$ ,  $y_2 = (babb)^l$  ( $k, l \geq 1$ ): для сохранения баланса при  $i > 1$  требуется  $k = 5l$ . Однако при  $i = 0$  степень первого блока из  $a$  равна  $n - 5l$ , а степень блока из  $babb$  равна  $n - l$ , что невозможно по структуре слова (количество букв  $a$  должно быть не менее количества блоков  $babb$ ).
5. Если  $y_1zy_2$  находится в блоке  $(babb)^n a^{4n+3}$  с  $y_1 = (babb)^k$ ,  $y_2 = a^l$  ( $k, l \geq 1$ ): при  $i > 1$  количество блоков  $babb$  становится больше количества предшествующих букв  $a$ , что противоречит структуре.

Слово не накачивается, следовательно, язык не является КС-языком.

## Задание 2

**Язык:**

$$L = \{c^i a^n c^* b^k c^j \mid k = n \text{ или } (i + j > 1 \text{ и } i < j)\}$$

**Доказательство того, что язык не является DCFL:**

Пусть  $n \geq p$  — число накачки.

Рассмотрим два слова:

$$\begin{aligned}x &= c^n a^n c^n \\y &= c \\z &= c b^n \\w &= xy \\w' &= xz\end{aligned}$$

### I. Попытка накачать $x$

Разберём варианты расположения  $t_1 z t_2$  (где  $x = m_1 t_1 z t_2 m_2$ ):

1. Если  $t_1 z t_2$  находится в первом блоке  $c^n$  ( $t_1 t_2 = c^k$ ,  $k \geq 1$ ): при  $i = 2$  количество  $c$  в начале становится  $n + k$ , что больше количества  $c$  в конце ( $n$ ). Ни одно из условий языка не выполняется для слова  $w$ .
2. Если  $t_1 z t_2$  находится во втором блоке  $c^n$  ( $t_1 t_2 = c^k$ ,  $k \geq 1$ ): при  $i = 0$  количество  $c$  во втором блоке становится  $n + 1 - k \leq n$ , что меньше или равно количеству  $c$  в начале. Ни одно из условий не выполняется для слова  $w$ .
3. Если  $t_1 z t_2$  находится в блоке  $a^n$  или включает буквы  $a$ : при  $i = 0$  количество букв  $a$  уменьшается и становится меньше  $n$  (количества букв  $b$ ). Условие  $k = n$  не выполняется для слова  $w'$ .

Таким образом,  $x$  не накачивается.

### II. Разбиение $x, y, z$ на подслова:

Пусть  $x = x_1 x_2 x_3$ ,  $y = y_1 y_2 y_3$ ,  $z = z_1 z_2 z_3$  с условиями  $|x_2 x_3| \leq p$  и  $|x_2| > 0$ .

Так как  $|x_2 x_3| \leq p$ , то  $x_2$  находится во втором блоке  $c^n$ :  $x_2 = c^k$  ( $1 \leq k \leq p$ ).

При этом  $y_2 = c$  или  $y_2 = \varepsilon$ .

При  $i = 0$  количество  $c$  во втором блоке уменьшается:  $n+1-k \leq n$ , что меньше количества  $c$  в начале. Ни одно из условий языка не выполняется для слова  $w$ .

Следовательно, язык не является DCFL.

## Задание 3

Атрибутная грамматика:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow QSQ \quad ; \\ S &\rightarrow bb \quad ; \\ Q &\rightarrow QQ \quad ; \quad Q_1.attr \leq Q_2.attr, Q_0.attr := Q_1.attr \\ Q &\rightarrow aAa \quad ; \quad Q.attr := A.attr + 2 \\ A &\rightarrow BB \quad ; \quad A.attr := B_1.attr + B_2.attr \\ A &\rightarrow AA \quad ; \quad A_0.attr := A_1.attr + A_2.attr \\ B &\rightarrow b \quad ; \quad B.attr := 1 \end{aligned}$$

**Язык, порождаемый грамматикой:**

Слово в языке представляет собой:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow QSQ \rightarrow \dots \rightarrow Q^n SQ^k \rightarrow (aAa)^n S (aAa)^k \rightarrow \dots \\ &\rightarrow (a(bb)^{m_i} a)^n bb (a(bb)^{m_i} a)^k, \end{aligned}$$

где  $n, k \geq 0$  и  $m_i \geq 1$ .

**Анализ атрибутов:** методом пристального всматривания можно заметить, что нетерминал  $Q$  может порождаться двумя правилами — первым (без условия) и третьим (с условием). Если все  $Q$  по обе стороны от центрального, кроме первого, порождены третьим правилом, то минимальное требование к слову состоит в том, что в первом  $Q$  количество букв  $b$  не превышает количество букв  $b$  в остальных  $Q$  на данной стороне (для правой стороны первый  $Q$  считается самым левым).

**Пересечение с регулярным языком:**

Для упрощения пересечём язык с регулярным языком:

$$L_{\text{reg}} = (abba)bb(a(bb)^+a)^3$$

Получится язык, состоящий из слов, образованных следующим образом:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow QSQ \rightarrow (3) \rightarrow QSQQQ \rightarrow (2 4) \rightarrow \\ &(aAa)bb(aAa)^3 \rightarrow \dots \rightarrow (abba)bb(a(bb)^{m_i} a)^3, \end{aligned}$$

где  $m_i \geq 1$ .

**Доказательство того, что язык не является КС-языком (лемма о накачке):**

Пусть  $n \geq p$  — число накачки.

Рассмотрим слово:

$$w = (abba)bb(a(bb)^n a)(a(bb)^n a)(a(bb)^n a)$$

Рассмотрим варианты накачки ( $w = x_1y_1zy_2x_2$ ), которые не нарушают структуру регулярного выражения. Ситуация аналогична анализу языка  $\{a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3} \mid k_1 > k_2 \text{ и } k_1 > k_3\}$ :

1. Если  $y_1y_2$  полностью находится в первом блоке  $(bb)^n$  ( $y_1y_2 = (bb)^k$ ,  $k \geq 1$ ): при  $i = 2$  количество букв  $b$  в первом блоке будет больше, чем во втором и третьем блоках. Слово не входит в язык.
2. Если  $y_1y_2$  полностью находится во втором или третьем блоке  $(bb)^n$  ( $y_1y_2 = (bb)^k$ ,  $k \geq 1$ ): при  $i = 0$  количество букв  $b$  в первом блоке будет больше, чем во втором или третьем блоке соответственно. Слово не входит в язык.
3. Если  $y_1$  находится в первом блоке  $(bb)^n$ , а  $y_2$  — во втором блоке  $(bb)^n$  ( $y_1 = (bb)^k$ ,  $y_2 = (bb)^l$ ,  $k, l \geq 1$ ): при  $i = 2$  количество букв  $b$  в первом блоке будет больше, чем в третьем. Слово не входит в язык.
4. Если  $y_1$  находится во втором блоке  $(bb)^n$ , а  $y_2$  — в третьем блоке  $(bb)^n$  ( $y_1 = (bb)^k$ ,  $y_2 = (bb)^l$ ,  $k, l \geq 1$ ): при  $i = 0$  количество букв  $b$  в первом блоке будет больше, чем во втором и третьем блоках. Слово не входит в язык.

Слово не накачивается, следовательно, язык не является КС-языком.